

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Навчально-науковий фізико-технічний інститут
кафедра математичного моделювання та аналізу даних

«На правах рукопису»
УДК _____

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Наталія КУССУЛЬ

«__» _____ 20__ р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Математичні методи моделювання,
розпізнавання образів та комп'ютерного зору»
зі спеціальності 113 «Прикладна математика»
на тему: «Асимптотика геометричних характеристик гладких многовидів
під дією фазових потоків»

Виконав (-ла):
студент (-ка) VI курсу, групи ФІ-01
Навроцький Геннадій Вікторович

Науковий керівник:
к.ф.-м.н
Орехов Олександр Арсенійович

Консультант:
д.ф.-м.н
Дороговцев Андрій Анатолійович

Рецензент:

доцент кафедри ММЗІ, к. ф.-м.н. Ніщенко Ірина Іванівна,

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент (-ка) _____

Київ–2022 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Навчально-науковий фізико-технічний інститут
кафедра математичного моделювання та аналізу даних

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 113 «Прикладна математика»

Освітньо-наукова програма: «Математичні методи моделювання, розпізнавання образів та комп'ютерного зору»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Наталія КУССУЛЬ

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Навроцький Геннадій Вікторович

1. Тема дисертації «Асимптотика геометричних характеристик гладких многовидів під дією фазових потоків», науковий керівник дисертації Орехов Олександр Арсенійович, доцент, к.ф.-м.н., затверджені наказом по університету від 08.06.2022 р. № 976-с
2. Термін подання студентом дисертації
3. Об'єкт дослідження
4. Предмет дослідження
5. Перелік завдань, які потрібно розробити
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу
7. Орієнтовний перелік публікацій

8. Консультанти розділів дисертації^{1*}

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

9. Дата видачі завдання 10.09.2020 _____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Вивчення літератури	10.09.2020–01.02.2021	
2	Вибір методів дослідження	01.02.2021–31.05.2021	
3	Розгляд прикладів багатовидів та координат на них	31.05.2021–01.12.2021	
4	Дослідження усереднення гладких функцій на багатовидах під дією ергодичних потоків	01.12.2021–01.02.2022	
5	Використати для встановлення асимптотики кривизни Річі мультиплікативну ергодичну теорему Оселедця	01.02.2022–31.05.2022	

Студент

Геннадій НАВРОЦЬКИЙ

Науковий керівник

Олександр ОРЕХОВ

^{1*} Якщо визначені консультанти. Консультантом не може бути зазначено наукового керівника магістерської дисертації.

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 28 сторінок, 3 ілюстрації, 5 джерел літератури.

Об'єктом дослідження є геометричні характеристики гладких ріманових многовидів у ергодичних стохастичних потоках.

Предметом дослідження є усереднення асимптотики кривизни Річі на многовидах під дією ергодичних стохастичних потоків.

Методи дослідження:

Методи топології

Методи функціонального аналізу

Наукова новизна одержаних результатів: Було вперше отримано умови, за яких існує границя середніх за часом гладких функцій на ріманових многовидах при русі під дією ергодичних потоків.

Практичне значення одержаних результатів: Отримані результати можна застосовувати при аналізі турбулентного руху рідини або газу.

Мета роботи:

1. Розглянути можливі приклади многовидів та координат на них
2. Дослідити усереднення гладких функцій на многовидах під дією ергодичних потоків.
3. Використати для встановлення асимптотики кривизни Річі мультиплікативну ергодичну теорему Оселедця.

Ключові слова : многовиди, кривизна Річі, метрика.

Abstract

The volume of work is 28 pages, 3 illustrations, 5 sources of literature.

The object of study is the geometric characteristics of smooth Riemannian varieties in ergodic stochastic flows.

The subject of the study is the averaging of the asymptotics of the Ricc curvature on manifolds under the action of ergodic stochastic flows.

Research methods:

Topology methods

Methods of functional analysis

Scientific novelty of the obtained results: It was the first conditions obtained, because there are limits to the time-average smooth functions on Riemannian manifolds when moving under the action of ergodic flows.

Practical value of the obtained results:

The obtained results can be observed in the analysis of turbulent motion of a liquid or gas.

The goal of the work:

1. Consider the possibility of examples of varieties and coordinates on them
2. Investigate the averaging of smooth functions on manifolds under the action of ergodic flows.
3. Use the multiplication ergodic theorem of Oselets to establish the asymptotics of the Ricci curvature.

Keywords: manifolds, Ricci curvature, metrics

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ.....	7
ВСТУП	8
1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ	9
Висновки до розділу 1	20
2 ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.....	21
Висновки до розділу 2	26
ВИСНОВКИ	27
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	28

**ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ,
СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ**

$L_2(S)$ множина комплекснозначних функцій на нормованому просторі S ,
що є інтегровними з квадратом.

$\sigma(A)$ спектр оператора A

$\rho(A)$ резольвента оператора A

1.Вступ

Актуальність роботи полягає у

Роботу присвячено дослідженню асимптотики геометричних характеристик гладких многовидів у ергодичних стохастичних потоках. Однією із основних таких характеристик є кривизна Річі многовиду за дотичним вектором.

Прикладом застосування є робота [1], в якій вивчається зв'язок концентрації міри із кривизною Річі певного ріманового многовида.

Об'єктом дослідження є геометричні характеристики гладких ріманових многовидів у ергодичних стохастичних потоках.

Предметом дослідження є усереднення асимптотики кривизни Річі на многовидах під дією ергодичних стохастичних потоків.

Метою роботи є:

- 1.Розглянути можливі приклади многовидів та координат на них
- 2.Дослідити усереднення гладких функцій на многовидах під дією ергодичних потоків.
- 3.Використати для встановлення асимптотики кривизни Річі мультиплікативну ергодичну теорему Оселедця.

3. Теоретичні відомості

Дана робота присвячена дослідженню асимптотики геометричних характеристик гладких многовидів у ергодичних стохастичних потоках, тому для подальшого дослідження нам необхідні наступні означення:

Означення 1

Метричний простір (M, d) є многовидом розмірності p , якщо для будь якої точки $x \in M$ задано гомеоморфізм $\varphi: U \rightarrow S$, де S це деяка відкрита множина у R^p , U це деякий окіл точки x у M . Гомеоморфізм φ разом із множиною U називають картою. Сукупність карт певного многовида називають атласом.

Означення 2

Функції $\varphi_{\alpha\beta}(x_\beta) = \varphi_\alpha(\varphi_\beta^{-1}): R^p \rightarrow R^p$ називають функціями заміни координат. Такі функції однозначно визначені та неперервні на перетині $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Означення 3

Якщо на n -вимірному многовиді M зафіксовано атлас $\{U_\alpha\}$ з локальними системами координат $\{x_\alpha^k\}$, такими що функції заміни координат $x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ є неперервно диференційовними на всій області визначення для будь-яких двох карт U_α, U_β , то многовид M називають гладким многовидом.

Далі наведемо приклади многовидів у R^3 .

Приклад 1

Одиничне коло у R^2 : $S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

Розіб'ємо S^1 на 4 підмножини:

$$U_1 = \{(x, y) \in S^2 | 0 < x \leq 1\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^2 | -1 \leq x < 0\}$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^2 | 0 < y \leq 1\}$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^2 | -1 \leq y < 0\}.$$

$$U_1 \cap U_3 = \{(x, y) \in S^2 | 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$$

$$U_2 \cap U_4 = \{(x, y) \in S^2 | 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$$

$$\varphi_i: U_i \rightarrow (-1, 1); \varphi_1(x, y) = y, \varphi_2(x, y) = y, \varphi_3(x, y) = x, \varphi_4(x, y) = x.$$

$$\varphi_{13}(y) = \sqrt{1 - (y)^2}, \varphi_{24}(y) = \sqrt{1 - (y)^2}$$

Приклад 2

Параболоїд M у $R^3: \{(x, y, z) | z > 0, x^2 + y^2 = z\}$

Побудуємо карти $U_1 = U \setminus \{(x, y, z) | y = z\}, U_2 = U \setminus \{(x, y, z) | y = -z\}$.

$$\varphi_1(x, y, z) = (\arctg \frac{y}{x} + \pi, z), \varphi_2(x, y, z) = (\arctg \frac{y}{x}, z).$$

$$\varphi_{12}(y, z) = (y + \pi, z),$$

Означення 5

Дотичним вектором до гладкого многовиду M в точці x_0 називається

відповідність, що кожній локальній системі координат (x_α^i) співставляє

вектор u^1, \dots, u^n , що при переході до нової локальної системи координат (x_β^i)

змінюється як :

$$u_\beta^i = \sum_j \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}(x_0) u_\alpha^j.$$

Таке перетворення координат називають тензорним законом зміни координат.

Числа u^1, \dots, u^n називають координатами дотичного вектора

в системі координат (x_α^i) .

Множину всіх дотичних до многовиду в точці векторів називають дотичним простором. Розмірність дотичного простору є однаковою в усіх точках многовиду.

Якщо $c(t)$ — гладка крива на многовиді M , то $\frac{dc}{dt}$ — елемент дотичного простору M .

Приклад 3

Для поверхні в R^3 , що задається гладкою функцією $\bar{x} = \bar{f}(u, v)$ дотичним простором у точці (u_0, v_0) є множина усіх векторів виду

$$\{\bar{x}: \bar{x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v\}$$

для $\Delta u, \Delta v \in R$.

Дійсно, якщо перейти від системи координат $\{u, v\}$ до нової системи $\{u', v'\}$, то координати векторів перетворюються наступним чином:

(4)

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial v}$$

що співпадає з означенням дотичного вектора.

Означення 6

Векторним полем розмірності l на многовиді M називається відображення, що ставить у відповідність кожній точці x з M вектор

$v(x)$ із R^l .

Приклад 4

M – круг одиничного радіуса на R^2 , що задається рівнянням $x^2 + y^2 = 1$.

Використаємо стандартну параметризацію:

$$x = \cos\varphi$$

$$y = \sin\varphi$$

Задамо векторне поле $v(\varphi)$ як

$$v_x(\varphi) = -\sin\varphi$$

$$v_y(\varphi) = \cos\varphi$$

Очевидно, що скалярний добуток:

$$xv_x + yv_y = 0$$

тобто вектор $v(x, y)$ є перпендикуляром до радіус-вектора у кожній точці круга.

Наступне поняття є узагальненням означення векторного поля на многовиді.

Означення 7

Гладким тензорним полем порядку (p, q) на многовиді M називають сукупність гладких функцій $T_x M \rightarrow R^p \times R^q$, що задаються в кожній локальній системі координат $(x) = (x^1, \dots, x^n)$

$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x^1, \dots, x^n)$ та при переході до системи координат $(x^{\alpha'})$ змінюються

за законом:

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}(x^{\alpha'}) = \sum_{i_1 \dots i_p} \sum_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Такий тензор називають p разів контраваріантним та q разів коваріантним.

Приклад 5

$f \in C^\infty(R^n, R)$.

Тоді $grad f$ є тензором порядку $(0, 1)$, тому що:

$$\frac{\partial f}{\partial x^{j'}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}.$$

Означення 8

Многовид M називають рімановим, якщо в будь-якій точці $x_0 \in M$ на дотичному просторі T_{x_0} задано додатньо визначену квадратичну форму (метричний тензор порядку $(0, 2)$) $g = g_{ij}$, де g_{ij} — гладкі функції x_0 . При переході від системи координат x_α до системи координат $y_{\alpha'}$ компоненти тензора мають змінюватися наступним чином:

$$(6) g_{i'j'}(x_0) = \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

Нехай M — гладкий n -вимірний рімановий многовид. $x \in M$. T_x — дотичний простір у точці x .

Означення 9

Нехай D — відкрита підмножина M , та існує дифеоморфізм $\varphi: D \rightarrow U \subset R^n$. (φ, U) — карта D .

Об'ємом області $D \subset M$, називається число:

$$(7) vol(D) = \int \dots \int_U \sqrt{g(x)} dx^1 \dots dx^n.$$

$$g(x) = \det(g_{ij}(x))$$

Приклад 6

$M = R^n$ зі стандартною евклідовою метрикою, $D \subset R^n$. Тоді

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\det(g_{ij}(x)) = 1.$$

Звідси випливає:

$$\text{vol}(D) = \int \dots \int_D dx^n$$

Означення 10

Довжиною кривої $\gamma(t)$ від точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ називають число

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt,$$

де $\gamma'(t)$ – вектор швидкості кривої γ у точці t .

Означення 11

Нехай на гладкому многовиді M для кожного гладкого атласу у кожній карті задана сукупність гладких функцій Γ_{ij}^k (символів Крістофеля), що змінюються при переході до нових координат наступним чином:

$$\Gamma_{k'j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}$$

Тоді на многовиді M задано коваріантне диференціювання ∇

$$(\nabla T)_{j_1 \dots j_p, \alpha}^{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k} + \sum_{s=1}^k T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_s = q \dots i_k} \Gamma_{q\alpha}^{i_s} - \sum_{s=1}^p T_{j_1 \dots j_s = q \dots j_p}^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{j_s \alpha}^q$$

Символи Крістофеля необхідні для того, щоб операція диференціювання тензорного поля ∇ у декартових координатах збігалася із диференціюванням у звичайних координатах:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

та операція диференціювання була тензорною операцією, тобто результатом диференціювання тензорного поля було також тензорне поле.

Отже, шляхом інтегрування ріманової метрики ми можемо визначити довжину кривої. Тоді можна перетворити многовид M в метричний простір за допомогою визначення відстані між двома точками як нижньої границі довжин кривих в M між двома точками. (Якщо $M \subset R^p$ і якщо ми

використовуємо евклідову структуру R^p як метрику, то ми отримуємо звичайну довжину для кривих, що входять до M .)

Означення 12

Нехай P, Q — 2 точки на многовиді M , з'єднані гладкою траєкторією $\gamma(t): \gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$. γ' — поле швидкостей вздовж γ . Компоненти цього поля $\{\xi^k\}$.

$$\nabla_{\gamma'} = \sum_k \xi^k \nabla_k$$

Тоді криву $\gamma(t)$ називають геодезичною, якщо

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$$

Рівняння геодезичної:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\alpha k}^i \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Розв'язок такої системи однозначно визначається умовами:

$$x^i(0) = P^i$$

$$\frac{dx^i}{dt}(0) = a^i, \bar{a} \in T_P.$$

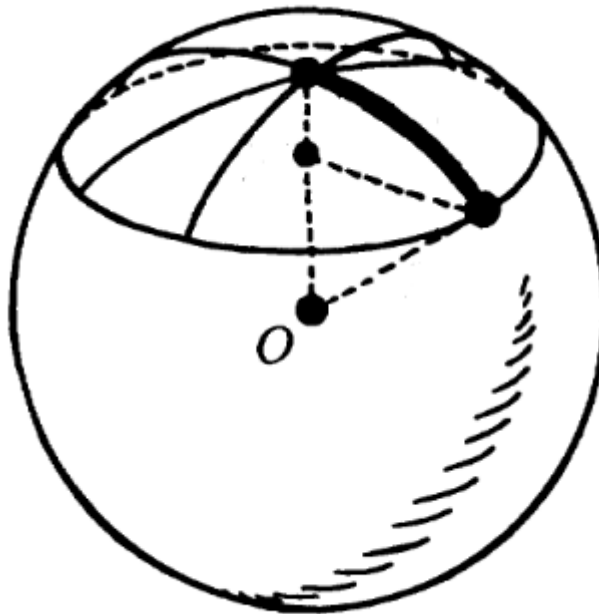


Рисунок 1.1

На рисунку 1.1 зображено геодезичні на сфері.

Геодезична — це така крива в M , що для будь-яких двох досить близьких точок на кривій відстань між цими двома точками реалізується кривою. Наприклад, екватор та меридіани — це геодезичні на сфері, а паралелі — ні.

Локальні геодезичні між двома точками завжди існують. Крім того, якщо задані вихідна точка x і дотичний вектор v , завжди існує геодезична, яка починається в x з дотичним вектором v ; це крива, яка спрямована в M , з початковим вектором v . Кінцеву точку v будемо називати точкою в яку перейшли за геодезичною, і позначимо її як $\exp_p(v)$. [2]

Приклад 7

На евклідовому просторі R^n геодезичні -це відрізки прямих, оскільки

$$\Gamma_{\alpha k}^i = 0.$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0 \Rightarrow x^i(t) = c_1 t + c_2.$$

Означення 11

Для будь-якого дотичного вектора v та точки $P \in M$ існує єдина крива γ_v – геодезична, така що:

$$\gamma_v(0) = P$$

$$\gamma_v'(0) = v.$$

Тоді експоненційним відображенням в точці P називають

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1),$$

$$\exp_p: T_p \rightarrow M$$

Приклад 8

На одиничній сфері S^2 з координатами (θ, φ) розглянемо точку 0 та дотичний простір T_0 . $T_0 = \{a e_\varphi + b e_\theta \mid a, b \in R\}$. Оскільки в координатах

$$(\theta, \varphi) \quad \Gamma_{\alpha k}^i = 0$$

$$\gamma_{(a,b)}(1) = (a, b)$$

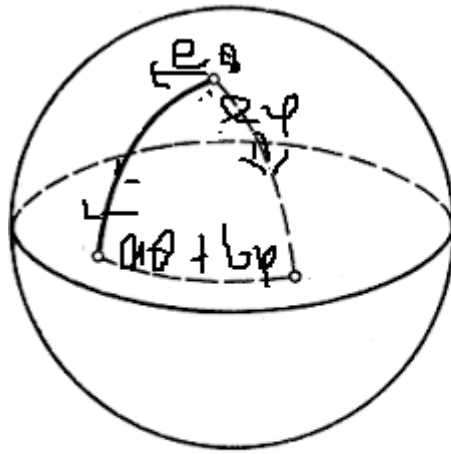


Рисунок 1.2

На рисунку 1.2 зображено результат експоненційного відображення на сфері.

Означення 12

$$\{v, w\} \subset T_x, \varepsilon, \delta > 0.$$

y — кінець вектора v ,

$$d(x, y) = \delta.$$

$w' \in T_y$ — вектор, отриманий паралельним переносом вектора w до y .

Тоді

$$\lim d(\exp_x \varepsilon w, \exp_y \varepsilon w') = \lim (\delta (1 - \frac{\varepsilon^2}{2} K(v, w)))$$

при $(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$. Де $K(v, w)$ — секційна кривизна у напрямку (v, w) .

Означення 13

$v \in T_x$. Тоді кривизною Річі називається величина

$$Ric(v) = \frac{1}{vol(S)} \int_S K(v, w) dw$$

де S — одинична сфера у просторі T_x .

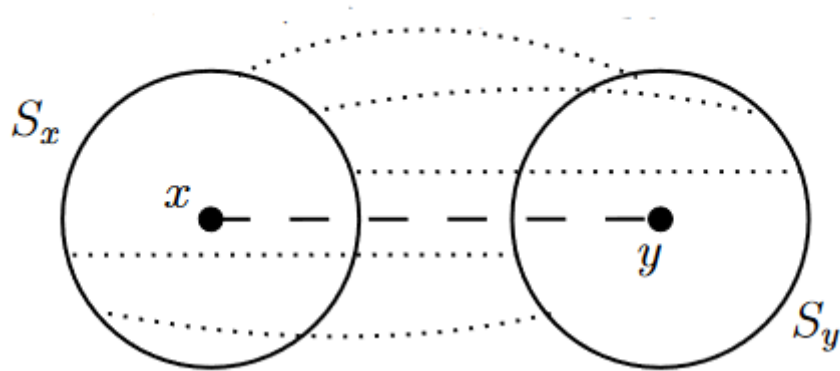


Рисунок 1.3

На рисунку 1.3 зображені сфери, по яких іде інтегрування.

Приклад 9

Обчислимо кривизну Річі одиничної сфери S^2 у евклідовому просторі R^3 . Припустимо, що задана наступна параметризація

$$z = \cos\theta$$

$$x = \sin\theta\cos\varphi$$

$$y = \sin\theta\sin\varphi$$

Тоді у точці з координатами θ_0, φ_0 задано дотичний простір, що є лінійною

оболонкою двох векторів $e_\theta = (\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta})$ та $e_\varphi = (\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi})$.

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \cos\theta_0\cos\varphi_0, \frac{\partial y}{\partial \theta} = \cos\theta_0\sin\varphi_0, \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\sin\theta_0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\sin\theta_0\sin\varphi_0, \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \sin\theta_0\cos\varphi_0, \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

Тоді при зсуві на вектор v компоненти вектора w змінюються наступним чином

$$e'_\theta = e_\theta + e_x \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} v_\theta + e_y \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} v_\theta + e_z \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} v_\theta$$

$$e'_\varphi = e_\varphi + e_x \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} v_\varphi + e_y \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} v_\varphi + e_z \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} v_\varphi$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -\sin\theta\cos\varphi, \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -\sin\theta\sin\varphi, \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = -\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} = -\sin\theta\cos\varphi, \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = -\sin\theta\sin\varphi, \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = 0$$

Тоді

відстань

$$(d(w, w'))^2 = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} v_\theta + \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} v_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} v_\theta + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} v_\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} v_\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} v_\varphi\right)^2$$

Нехай $v_\theta = \sin\xi, v_\varphi = \cos\xi$.

Тоді обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \sin \xi + \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \cos \xi \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \sin \xi + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \cos \xi \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \sin \xi + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \cos \xi \right)^2 \right) d\xi = \\ & = \left(\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right)^2 \right) \pi + \left(\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \right)^2 \right) \pi \\ & = (1 + (\sin \theta)^2) \pi - \text{кривизна у точці з координатами } \theta_0, \varphi_0 \end{aligned}$$

Далі розглянемо фазові потоки на певному многовиді M .

Означення 14

Потік F_t називають ергодичним, якщо

$$\forall A \subset M: F_t(A) = \text{const} \Leftrightarrow \mu(A) = 0 \text{ або } \mu(A) = 1$$

Теорема

Якщо потік F_t є ергодичним, то усі інваріантні відносно F_t функції є константами.

Приклад 9

Як приклад розглянемо рух на торі $(x, y) \bmod 2\pi$ за наступними диференціальними рівняннями:

$$(1) \frac{dx}{dt} = 1$$

$$(2) \frac{dy}{dt} = \alpha \in R$$

Знайдемо границю

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(F_\tau) d\tau$$

$$f \in L_2(M)$$

Якщо $\alpha \notin Q$, то траєкторії є всюду щільними на M .

Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in Z$

Розглянемо границю характеристичної функції

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{i\lambda_1 \tau + i\lambda_2 \tau} d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{i\lambda_1 + i\lambda_2} \frac{1}{t} (e^{(i\lambda_1 + i\lambda_2)t} - 1) = 0,$$

оскільки $e^{(i\lambda_1 + i\lambda_2)t}$ є періодичною функцією.

Розглянемо характеристичну функцію міри Лебега на квадраті $[0, 2\pi]^2$

$$\varphi(\bar{\lambda}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{i\lambda_1} \frac{1}{i\lambda_2} (e^{2i\pi\lambda_1} - 1)(e^{2i\pi\lambda_2} - 1) = 0$$

оскільки $e^{2i\pi\lambda_1} = e^{2i\pi\lambda_2} = 1$.

Таким чином, характеристична функція міри потоку, заданого рівняннями (1), (2) збігається до характеристичної функції міри Лебега на квадраті.[4]За

теоремою про слабку збіжність, тоді інтеграл за цією мірою $\frac{1}{t} \int_0^t f(F_\tau) d\tau$

збігається до інтеграла

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) dx dy.$$

Таким чином, даний потік є ергодичним.

Визначимо скалярний добуток на $L_2(M): (f, g) = \int_M f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$. З

такого визначення отримуємо множину квадратично інтегровних функцій

$$L_2(M, \Psi, \mu), \text{ тобто таких, що } \int_M ||f(x)||^2 d\mu(x) < \infty$$

Автоморфізм T -взаємне однозначне перетворення $M \rightarrow M$, таке, що: $\forall A \in \Psi, TA \in \Psi, \mu(TA) = \mu(A)$.

Спектр оператора

Оператор A визначений на банаховому просторі E , $A: E \rightarrow E$

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ називається регулярним, якщо оператор $R_\lambda = (E - \lambda I)^{-1}$ існує і неперервний на всьому E . Все інші числа називають спектром оператора A .

Оператор $A: E \rightarrow E$ називають унітарним, якщо він зберігає норму тобто $\forall e \in E: (||Ae|| = ||e|| \text{ та } \exists e^* Ae^* = e) \quad [3]$

Приклад 10

Розглянемо перетворення повороту на фіксований кут θ на комплексному колі $S^1: e^{it} \rightarrow e^{i(t+\theta)}$ і відповідний йому оператор в $L_2(S^1): U_\theta f: f(t) \rightarrow f(t + \theta)$. Оператор U_θ – є лінійним.

Розглянемо розклад функції

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, U_\theta f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in(x+\theta)}.$$

$$\text{Тоді } ||f||^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |e^{ik\theta} a_k|^2 = ||U_\theta f||^2$$

Отже, оператор U_θ є обмеженим і $\{|\lambda| \leq \|U_\theta\|\}$. Знайдемо x з цього рівняння:

$$x_k = \frac{y_k}{e^{ik\theta} - \lambda}, \text{ таким чином, якщо } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{y_k}{e^{ik\theta} - \lambda} \right|^2 < \infty, \text{ тоді прообраз}$$

належить $L_2(S^1) \Rightarrow \{e^{ik\theta}, k \in \mathbb{N}\} \subset \sigma_\theta(U)$

Оскільки спектр оператора являє собою замкнуту підмножину круга $\{|\lambda| \leq \|U_\theta\|\}$, [4] і множина дрібних частин $\{\theta k\}$ усюди щільна в $[0; 2\pi]$, то

коло $(|\lambda| = 1) \subset \sigma_\theta(U)$. Тоді $\forall \lambda, |\lambda| < 1: e^{ik\theta} - \lambda \geq |1 - |\lambda||$ для

всіх k , отже існує зворотний оператор $(U_\theta - \lambda)^{-1}$. Тоді $\forall y \in L_2(S^1)$,

$$\|(U_\theta - \lambda)^{-1} y\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{y_k}{e^{ik\theta} - \lambda} \right|^2 \leq |1 - |\lambda||^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^2. \quad \text{З цього}$$

випливає, що оператор $(U_\theta - \lambda)^{-1}$ є обмеженим, тому неперервним. Тоді

$$\sigma(U)_\theta = \{|\lambda| = 1\}.$$

Приклад 11

Розглянемо простір R^3 з центрованою гаусовою мірою ν на ньому.

Згідно з теоремою Колмогорова, існує випадковий вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) такий що $P\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\} \in \Gamma = \nu(\Gamma)$. Будемо вважати, що матриця коваріації діагональна, тоді величини (ξ_1, ξ_2, ξ_3) лінійно незалежні.

Тоді група операторів $\{U_t\}$ повороту щодо осей координат є

унітарною. Оскільки при такому перетворенні якобіан $\left| \frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \right| = 1$, то

$$\text{для } Mf(T^t x) = Mf(x).$$

Якщо ж g^t ергодична група автоморфізмів, то пряме перетворення $g^{t_1, t_2}(x_1, x_2): M \times M \rightarrow M \times M$ буде ергодичним щодо міри $\mu \times \mu$ тоді і

тільки тоді, коли множина власних значень сполученого g^t унітарного оператора U_t складається з $\{1\}$.

Приклад 12

Розглянемо групу T^t обертань одиничного кола $S^1: d\theta(r, \theta) = r dt$, з мірою Лебега на крузі, (θ, r) – полярні координати. Таке перетворення не є

ергодичним. Візьмемо множину $K = \theta\{(r, \varphi) \mid \frac{1}{4} \leq r \leq \frac{3}{4}\}$, тоді
 $\forall x \in S^2: I_K(x) = \text{const}$,
 отже K є інваріантною множиною і $\mu(K) \neq 1$.

Висновки до розділу 1

У даному розділі було розглянуто основні теоретичні поняття топологічної теорії кривизни ріманових многовидів, необхідні для подальшого дослідження властивостей таких об'єктів. Також уведено поняття ергодичної теорії динамічних систем, що дають уявлення про такі системи для розуміння подальшої роботи, та наведено приклади їх використання. Використано класичні результати топологічної теорії многовидів, такі як побудова векторних полів, визначено структуру ріманових многовидів та їх зв'язок з кривизною Річі. Визначено, яким чином змінюються тензорні поля при переході до нових координат.

4. Основні результати

Необхідно визначити, як змінюється середня за часом кривизна Річі для руху по траєкторії ергодичного потоку на многовиді M .

Як приклад розглянемо геодезичний потік на торі.

Параметризація тора

$$x = \cos\varphi(1 + r\cos\psi)$$

$$y = \sin\varphi(1 + r\cos\psi)$$

$$z = r\sin\psi$$

Базис дотичного простору

$$e_\psi = (\cos\varphi(-r\sin\psi), \sin\varphi(-r\sin\psi), r\cos\psi)$$

$$e_\varphi = (-\sin\varphi(1 + r\cos\psi), \cos\varphi(1 + r\cos\psi), 0)$$

Далі знайдемо компоненти нормального вектора n до дотичного простору

$$n_x = \cos\psi\cos\varphi, n_y = \cos\psi\sin\varphi, n_z = \sin\psi$$

Далі знайдемо частинні похідні нормального вектора як функції (ψ, φ)

$$N_\varphi = (-\sin\varphi\cos\psi, \cos\varphi\cos\psi, 0)$$

$$N_{\psi} = (-\sin\psi\cos\varphi, -\sin\psi\sin\varphi, \cos\psi)$$

Таким чином

$$N_{\psi} = \frac{1}{r}e_{\psi}, N_{\varphi} = \frac{\cos\psi}{(1+r\cos\psi)}e_{\varphi}$$

Тоді кривизна

$$K(\psi, \varphi) = \frac{\cos\psi}{r(1+r\cos\psi)}$$

Таким чином, якщо ψ є лінійною функцією t , як у прикладі 1, то кривизна також є періодичною функцією. Тоді не існує границі

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t).$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}K(t) = 0.$$

Але існує границя

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t K(s) ds &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\psi}{(1+r\cos\psi)} d\psi = \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos\psi}{(1+r\cos\psi)} - \frac{\cos\psi}{(1-r\cos\psi)} \right) d\psi = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{-2r\cos^2\psi}{1-r\cos^2\psi} \end{aligned}$$

Приклад 2

Припустимо, що задана гладка замкнена крива на торі

$$\psi = \psi(x) \in C^{\infty}([0, 2\pi])$$

$$\varphi = \varphi(x) \in C^{\infty}([0, 2\pi])$$

Необхідно визначити, як змінюється кривизна Річі даної кривої під час руху за потоком із прикладу 1.

Обчислимо коефіцієнти метричного тензора

$$g_{\psi\psi} = r^2, g_{\psi\varphi} = 0$$

$$g_{\varphi\varphi} = (1 + r\cos\psi)^2$$

$$g^{\psi\psi} = \frac{1}{r^2}, g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{(1+r\cos\psi)^2}$$

Далі обчислимо значення Γ_{ijk}

$$\Gamma_{\varphi\psi\varphi} = -r\sin\psi(1 + r\cos\psi)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi\psi} = r\sin\psi(1 + r\cos\psi)$$

$$\text{Обчислимо } \Gamma_{jk}^i = g^{im}\Gamma_{jkm}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\psi} = -\frac{1}{r}(1 + r\cos\psi); \Gamma_{\varphi\psi}^{\varphi} = r\sin\psi \frac{1}{(1+r\cos\psi)}$$

Геодезичні на торі визначаються з рівнянь

$$\varphi'' + \frac{r \sin \psi}{(1+r \cos \psi)} \varphi' \psi' = 0$$

$$\psi'' - \frac{(1+r \cos \psi)}{r} (\varphi')^2 = 0$$

Геодезичний потік є інваріантним відносно поворотів $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$

Припустимо, що заданий потік автоморфізмів F_t , такий що зберігає міру μ на

многовиді $M \subset R^n$. Для нього визначено кривизну Річі $R_p(v)$, у точці

$P \in M, v \in T_P M$. Тоді для того, щоб визначити зміну кривизни Річі під дією

F_t , необхідно знайти новий метричний тензор

$$g'_{kl}(F(P)) = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l}$$

$$\text{Tr} R^i_{q,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql} \Gamma^i_{pk} - \Gamma^p_{qk} \Gamma^i_{pl}$$

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^k} \Gamma^k_{ij} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k}$$

Таким чином, зміна залежить від других похідних потоку F_t .

Тоді необхідно визначити, чи будуть просторові похідні ергодичного потоку F_t також ергодичним потоком. Розглянемо приклад $M = (x, y) \text{ mod } 1$ – тор.

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \in R$$

Тоді

$$F_\tau(x, y) = (x + \tau, y + \alpha\tau)$$

$$\frac{\partial F_\tau(x, y)}{\partial x} = (1, 0)$$

$$\frac{\partial F_\tau(x, y)}{\partial y} = (0, 1)$$

Таким чином, існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\partial F_\tau(x, y)}{\partial x} d\tau.$$

Теорема Ліувілля

Нехай потік F_t на M задається системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_k}{dt} = \xi_k(x), \quad k = 1, \dots, n.$$

та міра μ має неперервну щільність p

$$d\mu = p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Тоді для того, щоб міра μ була інваріантною відносно потоку F_t , необхідно та достатньо, щоб:

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (p \xi_k) = 0$$

Приклад 3

Гамільтонові системи

$$M = (p, q) = (p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_l)$$

Нехай $d\mu = dpdq$,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

$$\operatorname{div}(\xi) = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Гамільтонові системи не є ергодичними, оскільки H – нетривіальна інваріантна функція.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} = 0.$$

Розглянемо функцію $f: (M, \mu) \rightarrow (M, \mu)$

Нехай міра μ має щільність $p \in C^\infty(M)$

Потік $F_t: M \rightarrow M$, що заданий системою рівнянь

$$\left(\frac{dF_t(x)}{dt}\right)_k = \xi_k$$

зберігає міру μ . Тоді

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (p \xi_k) = 0$$

згідно теореми Ліувілля. Нехай функція $f \in L(M \times T_M)$. Чи існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(F_s, F'_s) ds$$

Де F_s визначається з рівнянь

$$dx(t) = a(x(t))dt$$

$$dx'(t) = a'(x(t))x'(t)$$

$$\text{Звідси отримуємо } x'(t) = e^{\int_0^t a'(x(s))ds}$$

Якщо a' неперервно залежить від t , тоді розв'язок $x(t)$ також неперервно залежить від t .

За якої умови $x'(t)$ знову буде потоком?

$$(F'_t(F'_s))' = (F'_s(F'_t))'$$

$$F'_t(F'_s)F'_s = F'_t(F'_s)F'_s$$

$$\exp\left(\int_0^{F'_t} a'(x(r))dr + \int_0^s a'(x(r))dr\right) = \exp\left(\int_0^t a'(x(r))dr + \int_0^{F'_s} a'(x(r))dr\right)$$

Тому у загальному випадку, F'_s — не є потоком.

У якому випадку $x(t)$ буде обмеженою

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Тоді розв'язок $x(t)$ буде обмеженим тоді і тільки тоді, якщо оператор A є подібним до ермітового оператора.

$$A = B^{-1}(iS)B$$

Розглянемо різні приклади $p(u)$

$$1) p(u) = \text{const}$$

$$\text{Тоді } \text{div}(a) = 0$$

Якщо розмірність $d = 1$, то $a = \text{const}$

$$\text{Тоді } \frac{1}{t} e^{\int_0^t a'(x(s))ds} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

Якщо розмірність $d = 2$, то

$$\frac{\partial a_1}{\partial u_1}(u) = -\frac{\partial a_2}{\partial u_2}(u)$$

$$\frac{1}{t} e^{\int_0^t \frac{\partial a_1}{\partial u_1}(x(s))ds} = \frac{1}{t} e^{\int_0^t -\frac{\partial a_2}{\partial u_2}(x(s))ds} = \frac{1}{t} \frac{1}{e^{\int_0^t \frac{\partial a_2}{\partial u_2}(x(s))ds}}$$

$$\text{Тоді } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} e^{\int_0^t \frac{\partial a_1}{\partial u_1}(x(s))ds} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{1}{e^{\int_0^t \frac{\partial a_2}{\partial u_2}(x(s))ds}}$$

$$2)p(u) = e^{-|u|^2/2}$$

Тоді

$$\operatorname{div}(pa) = 0$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_i} p - a_i \frac{\partial p}{\partial u_i} = 0$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_i} e^{-|u|^2/2} - a_i u_i e^{-|u|^2/2} = 0$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_i} = a_i u_i$$

$$a_i = e^{u_i^2/2}$$

$$\frac{1}{t} e^{\int_0^t a'(x(s)) ds} = \frac{1}{t} e^{\int_0^t (x(s))^2/2 ds} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty,$$

якщо $x(s)$ обмежена.

$$R(t, x) = d(T^t x)$$

$$\lambda_t(e, x) = \frac{\|dT_x^t e\|}{\|e\|}$$

Мультиплікативна ергодична теорема Оселедця

Якщо $\sup\{\ln\|R^{\pm 1}(\theta, x)\|\} \in L(x, \mu)$ тоді для майже всіх x існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \ln \lambda_t(e, x)$$

Чи існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(F_s, \sin s) ds?$$

Теорема

$$\Phi: K \times S \rightarrow R^p$$

$$F_s: K \rightarrow K$$

$$g: [0, +\infty) \rightarrow S$$

де K, S –компакти.

Якщо Φ –рівномірно неперервний на $K \times [0, 1]$, та існують границі

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = A, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(F_s, g(s)) ds$$

тоді існує границя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(F_s, g(s)) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(F_s, g(s)) ds$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall r', r'' \in K \times S \ |r' - r''| < \delta$$

$$|\Phi(r') - \Phi(r'')| < \varepsilon$$

Тоді якщо

$$|g(s) - A| < \delta$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \Phi(F_s, g(s)) ds - \int_0^t \Phi(F_s, A) ds \right| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\Phi(F_s, g(s)) - \Phi(F_s, A)| ds$$

$< \varepsilon$.

Висновки до розділу 2

Було доведено, що за певних умов середні за часом гладких функцій, що породжені траєкторіями динамічних систем, збігаються до скінченної границі коли $t \rightarrow \infty$.

Висновки

У даній роботі було розглянуто можливі приклади многовидів та координат на них. Досліджено усереднення гладких функцій на многовидах під дією ергодичних потоків. Вдалося використати для встановлення асимптотики кривизни Річі мультиплікативну ергодичну теорему Оселедця.

Перелік використаних джерел

1. Y. Ollivier. A survey of Ricci curvature for metric spaces and Markov chains. — 2020. — 31 P.
2. Курс дифференциальной геометрии и топологии, Мищенко А.С., Фоменко А.Т., 2000.
3. Эргодическая теория, Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. 1980
4. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Арнольд В.И., 1989.