

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ІНСТИТУТ АЕРОКОСМІЧНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

(повна назва інституту/факультету)

Кафедра систем керування літальними апаратами

(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»
УДК 629.7.016

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Олександр ЗБРУЦЬКИЙ

(підпис)

(власне ім'я, прізвище)

“ _____ ” _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-професійною програмою «Системи керування літальними апаратами
та комплексами»

(назва)

зі спеціальності _____ 173 «Авіоніка»

(код та назва спеціальності)

на тему:

«Ідентифікація параметрів математичної моделі руху безпілотної літака» _____

Виконав (-ла): студент (-ка) II курсу, групи АС-91мп

(шифр групи)

_____ Дунай Олесь Богданович

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Науковий керівник

_____ доцент, к.т.н., Бурнашев В.В.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Рецензент в.о. завідувача кафедри АРБ, д.т.н. Кабанячий В. В.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали)

(підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

(підпис)

**Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”**

Факультет (інститут) Інститут аерокосмічних технологій

(повна назва)

Кафедра систем керування літальними апаратами

(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістр)

Спеціальність 173 Авіоніка

(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.В. Збруцький
(підпис) (прізвище та ініціали)

“ ___ ” _____ 20__ р.

**З А В Д А Н Н Я
НА МАГІСТЕРСЬКУ ДИСЕРТАЦІЮ СТУДЕНТУ**

Дунаю Олесю Богдановичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема Ідентифікація параметрів математичної моделі руху безпілотного літака

Науковий керівник Бурнашев Віталій Віталійович, к.т.н., доцент

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затвержені наказом по університету №3455-с від 04 грудня 2020 р.

2. Строк подання студентом дисертації 01 грудня 2021 року

3. Об'єкт дослідження: Математична модель руху безпілотного літака традиційної аеродинамічної схеми

4. Предмет дослідження: Точність ідентифікації параметрів математичної моделі руху безпілотного літака

5. Перелік питань, які потрібно розробити

5.1. Огляд сучасних методів ідентифікації.

5.2. Розробка моделей похибок алгоритмів ідентифікації в умовах дії вітру та неточності навігаційної системи. Шляхи підвищення точності ідентифікації

5.3. Визначення допустимих швидкостей вітру для проведення ідентифікації

5.4. Визначення вимог до точності вимірювання параметрів руху літака

5.5. Визначення складу вимірювачів параметрів руху безпілотного літака

5.6. Розробка методики льотних випробувань та обробки отриманих даних

5.7. Експеримент з ідентифікації параметрів математичної моделі руху безпілотного літака

6. Перелік ілюстративного матеріалу

6.1. Методи ідентифікації – 1л. ф. А-1.

6.2. Результати імітаційного моделювання ідентифікації параметрів моделі безпілотного літака– 1л. ф. А-1.

6.3. Моделі похибок алгоритмів ідентифікації – 1л. ф. А-1.

6.4. Склад бортового обладнання для експерименту з ідентифікації– 1л. ф. А-1.

6.5. Методика льотних випробувань – 1л. ф. А-1.

6.6. Результати льотного експерименту з ідентифікації– 1л. ф. А-1.

7. Перелік публікацій

1) Підготувати дві наукові публікації

8. Консультанти розділів дисертації

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

9. Дата видачі завдання

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів дисертації	Примітка
1.	Огляд сучасних методів ідентифікації	01.09.2019-31.12.2019	
2.	Розробка моделей похибок алгоритмів ідентифікації в умовах дії вітру та неточності навігаційної системи. Шляхи підвищення точності ідентифікації	01.01.2020-31.03.2020	
3.	Визначення допустимих швидкостей вітру для проведення ідентифікації	01.04.2020-30.04.2020	
4.	Визначення вимог до точності вимірювання параметрів руху літака	01.05.2020-31.05.2020	
5.	Визначення складу вимірювачів параметрів руху безпілотної літака	01.06.2020-15.06.2020	
6.	Розробка методики льотних випробувань та обробки отриманих даних	15.06.2020-31.08.2020	
7.	Експеримент з ідентифікації параметрів математичної моделі руху безпілотної літака	01.09.2020-15.10.2020	
8.	Оформлення дисертації	16.10.2020-15.11.2020	
9.	Оформлення графічного матеріалу	16.11.2020-30.11.2020	

Студент

Науковий керівник дисертації

_____ (підпис)

_____ (підпис)

Дунай О.Б.

(прізвище та ініціали)

Бурнашев В.В.

(прізвище та ініціали)

Реферат

Актуальність теми. Однією з проблем автоматичного керування літальними апаратами є складність або неможливість отримання аналітичним шляхом деяких коефіцієнтів математичних моделей їх руху, необхідних для синтезу законів керування, а також дослідження їх динамічних властивостей. Вирішення задачі ідентифікації шляхом аналізу записів тестових польотів або нормального робочого функціонування літального апарата дозволяє економити час та кошти на етапі ескізного проектування системи керування.

Мета дослідження. Розробка алгоритму ідентифікації параметрів моделі руху літака легкого або надлегкого класу, здатного забезпечити задану точність при використанні доступних навігаційних систем в умовах дії вітру

Задачі дослідження.

1. Огляд існуючих методів ідентифікації.
2. Складання математичної моделі руху літального апарату.
3. Розробка методики проведення льотного експерименту та обробки його результатів.
4. Створення математичної моделі похибок та виставлення вимог до точності вимірювачів та швидкості вітру.
5. Визначення складу вимірювачів параметрів руху літака.
6. Проведення ідентифікації за допомогою льотного експерименту.

Об'єкт дослідження. Математична модель руху літаків класичної компоновальної схеми

Предмет дослідження. Точність визначення параметрів математичної моделі руху літаків класичної компоновальної схеми

Наукова новизна одержаних результатів. Удосконалений метод ідентифікації параметрів моделі руху літака, що використовує тестову ступінчасту дію на руль, та дозволяє знизити вимоги до точності навігаційної системи, а також до погодних умов проведення експерименту. Розроблена модель похибок ідентифікації

параметрів моделі літака, що враховує швидкість вітру, параметри польоту та похибки їх вимірювання, а також показники якості перехідних процесів. Отримані аналітичні вирази для допустимих складових швидкості поривів вітру, а також для допустимої середньої швидкості вітру, які містять допустимі похибки ідентифікації і швидкість польоту та дозволяють планувати проведення експериментів в залежності від прогнозу погоди. Отримані аналітичні вирази для допустимих похибок вимірювання параметрів рух літального апарату, які містять параметри перехідного процесу, та дозволяють обрати навігаційну систему для проведення експерименту в залежності від потрібної точності ідентифікації. Визначено, що для підвищення точності ідентифікації демпфуючих коефіцієнтів (без прямого вимірювання кута атаки), а також пом'якшення вимог до точності системи орієнтації літак слід балансувати перед експериментом на менших кутах атаки, а руль висоти відхиляти на невеликий кут, який не призведе до значного перевищення піковим кутом атаки усталеного. Визначено, що підвищенню точності ідентифікації коефіцієнту підйомної сили в умовах вітру сприяє підвищена швидкість експериментального польоту.

Публікації. За матеріалами дисертації зроблено доповіді на двох науково-технічних конференціях та опубліковано тези виступу.

Ключові слова. Ідентифікація, математична модель руху, літак, випробування

Abstract

Actuality of theme. One of the problems of automatic control of aircraft is the difficulty or inability to obtain analytically some coefficients of mathematical models of their motion, necessary for the synthesis of control laws, as well as the study of their dynamic properties. Solving the problem of identification by analyzing the records of test flights or normal operation of the aircraft saves time and money at the stage of sketch design of the control system.

The aim of the study. Development of an algorithm for identifying the parameters of the model of the movement of an aircraft of light or ultralight class, capable of providing a given accuracy when using available navigation systems in wind conditions

Research objectives.

1. Review of existing identification methods.
2. Compilation of a mathematical model of aircraft motion.
3. Development of methods for conducting a flight experiment and processing its results.
4. Creating a mathematical model of errors and setting requirements for the accuracy of meters and wind speed.
5. Determining the composition of measuring the parameters of the aircraft.
6. Carrying out identification by means of flight experiment.

Object of study. Mathematical model of aircraft motion of classical layout scheme

Subject of study. Accuracy of determining the parameters of the mathematical model of aircraft motion of the classical layout scheme

Scientific novelty of the obtained results. An adapted method of identifying the parameters of the model of aircraft movement, which uses a test step action on the rudder, and reduces the requirements for the accuracy of the navigation system, as well as the weather conditions of the experiment. A model of errors in the identification of aircraft model parameters has been developed, which takes into account wind speed, flight pa-

rameters and errors in their measurement, as well as quality indicators of transient processes. Analytical expressions are obtained for the allowable components of wind speed, as well as for the allowable average wind speed, which contain the permissible errors of identification and flight speed and allow you to plan experiments depending on the weather forecast. Analytical expressions are obtained for the permissible errors of measuring the parameters of the aircraft movement, which contain the parameters of the transient process, and allow to choose the navigation system for the experiment depending on the required accuracy of identification. It is determined that to increase the accuracy of identification of damping coefficients (without direct measurement of the angle of attack), as well as to mitigate the requirements for the accuracy of the orientation system, the aircraft should be balanced before the experiment at lower angles of attack. to significantly exceed the peak angle of attack established. It is determined that the increased speed of the experimental flight contributes to the increase of the accuracy of the identification of the lifting force coefficient in wind conditions.

Publications. Based on the materials of the dissertation, reports were made at two scientific and technical conferences and abstracts were published.

Keywords. Identification, mathematical model of motion, aircraft, testing

ЗМІСТ

Вступ.....	10
Розділ 1. Огляд сучасних методів ідентифікації	14
1.1 Ідентифікація, заснована на перетворенні Фур'є.....	14
1.2 Ідентифікація за допомогою частотної характеристики.....	15
1.3 Ідентифікація за допомогою аналізу перехідної функції.....	17
1.3.1 Графічна ідентифікація за допомогою перехідної функції	18
1.3.2 Коливальні системи другого порядку.....	19
1.4 Ідентифікація за допомогою імпульсної перехідної характеристики.....	21
1.4.1 Графічна ідентифікація за допомогою імпульсної перехідної характеристики	22
1.4.2 Системи першого порядку.....	22
1.4.3 Коливальні системи другого порядку.....	23
1.5 Методи кореляційних функцій.....	24
1.6 Ідентифікація за допомогою регресійних методів.....	25
1.7 Регресійна ідентифікація лінійних динамічних процесів	28
1.8 Ідентифікація змінних стану із використанням спостерігачів стану	30
1.8.1 Оптимальний спостерігач.....	32
Висновки до розділу.....	34
Розділ 2. Модель похибки алгоритму ідентифікації в умовах дії вітру та неточності навігаційної системи	35
2.1 Математична модель руху літака.....	35
2.2 Передатні функції літака: повздовжній рух.....	42
2.3 Передатні функції літака: боковий та поперечний рух.....	43
2.4 Ідентифікація коефіцієнта демпфування	44
2.5 Ідентифікація похідної коефіцієнта підйомної сили за кутом атаки	48
2.6 Прямий та альтернативний метод визначення кутів швидкісної системи координат.....	49

2.7 Математична модель похибки.....	50
Висновки до розділу.....	52
Розділ 3. Удосконалений алгоритм ідентифікації.....	53
3.1 Визначення вимог до точності вимірювання параметрів руху літака.....	55
3.2 Визначення допустимих швидкостей вітру для проведення ідентифікації ..	57
3.3 Склад бортових вимірювачів для проведення льотного експерименту	61
Висновки до розділу.....	64
Розділ 4. Імітаційне моделювання алгоритму, льотний експеримент та його результати.....	65
Обробка результатів експерименту	71
Висновки до розділу.....	73
Висновки.....	74
Список використаної літератури.....	75

Вступ

Досягнення в області інформаційних технологій зробили математичне моделювання практично основним напрямком у розвитку та застосуванні методів аналізу та синтезу складних технічних систем та їх елементів. Для експериментальних методів залишилися лише задачі підтвердження або спростування результатів, отриманих в ході моделювання. Тому створення математичних моделей технічних систем та їх елементів – найважливіша задача для вчених та інженерів. Вид (форма представлення) математичної моделі та використовуваний для її побудови математичний апарат визначається, в першу чергу, законами фізики, на основі яких створена та функціонує дана технічна система, або певний її елемент.

Математичне моделювання дозволяє при мінімальних затратах проводити дослідження технічної системи в будь-яких умовах, проводити її доопрацювання, розвиток, оптимізацію, досліджувати одночасно і поруч із функціонуванням реальних конструктивних елементів системи (напівнатурне моделювання).

Після визначення загального вигляду математичної моделі системи постає задача приведення її параметрів (сталих і змінних), до відповідності відносно реальної системи (об'єкту досліджень), щоб при проведенні моделювання у моделі проявилися ті ж властивості, які цікавлять розробників та дослідників реальної системи. Це і є задачею ідентифікації.

Під ідентифікацією в широкому сенсі цього слова розуміють отримання або уточнення по експериментальним даним моделі реального об'єкта (або процесу), вираженою в тих чи інших термінах, описаною тою чи іншою мовою. Ідентифікацією динамічної системи (процесу) називається отримання або уточнення по експериментальним даним математичної моделі цієї системи, вираженої засобами того чи іншого математичного апарату [1]. Існує велике різноманіття методів ідентифікації систем. Вибір того чи іншого методу ідентифікації визначається заздалегідь відомою (апріорною) інформацією про об'єкт дослідження, способом представлення характеристик об'єкта та методом проведення експерименту над об'єктом [2],[3],[4].

Серед об'єктів ідентифікації широко розповсюджені безпілотні літальні апарати (БПЛА), що інтенсивно розвиваються впродовж останнього часу. Технологічні досягнення в області мікромеханіки, оптики дали БПЛА властивості та можливості, що дозволили їм при вирішенні деяких задач виконувати функції, які до того були притаманні лише пілотованим літальним апаратам. В першу чергу це стосується задач моніторингу поверхні Землі в різних електромагнітних діапазонах (оптичному, інфрачервоному, радіотехнічному) завдяки здатності БПЛА переносити на борту корисне навантаження у вигляді мініатюрної апаратури, що вирішує різноманітні завдання по обробці інформації та керування. При цьому до аеродинамічних властивостей БПЛА не висуваються високі вимоги по забезпеченню маневрності, як, наприклад, до бойових або пасажирських пілотованих літальних апаратів, то му що БПЛА, в першу чергу, призначені для виконання вузького кола конкретних задач, а політ їх зазвичай відбувається по простому заданому маршруту. До того ж, вартість БПЛА стараються мінімізувати, щоб матеріальний збиток у випадку його аварії був мінімальним.

Звідси випливає, що конструктивна та аеродинамічна компоновка БПЛА вибирається якомога більш простою. Наприклад, зазвичай у них відсутні додаткові складні аеродинамічні поверхні, такі як закрилки, передкрилки, інтерцептори, гальмівні щитки та ін., які зазвичай застосовуються на пілотованих літаках. Аеродинамічна компоновка зазвичай обмежується наявністю керованого стабілізатора (або руля висоти), елеронів, керма напрямку, за допомогою яких БПЛА може виконувати зліт, політ по заданій траєкторії та успішне приземлення у заданій точці. Іноді (особливо для БПЛА малого та надмалого класів), зліт виконується за допомогою катапультного пристрою або з рук оператора, а посадка – за допомогою парашутної системи. Виготовлення конструкції БПЛА, що виконує такі завдання, не завдає особливих труднощів з урахуванням того, що синтез системи керування польотом та корисним навантаженням виділяється в окрему задачу.

Синтез детальної математичної моделі літального апарату із врахуванням його аеродинамічних властивостей являє собою складну задачу, яка вимагає як математичного опису кожного елемента конструкції, так і опису взаємного впливу

різних елементів об'єкта. Для вирішення такої задачі необхідно виконувати дослідження за допомогою спеціальних аеродинамічних труб та (або) за допомогою комп'ютерних програм із високою вартістю, які, до того ж, не завжди дозволяють отримати достовірні результати. В той же час, для синтезу системи управління БПЛА, здатної забезпечити успішний політ та керування корисним навантаженням, достатньо отримати спрощену і наближену математичну модель планера БПЛА із шести ступенями свободи, яка описує поступальний та обертальний рух у просторі.

Математична модель руху літального апарату представляє собою систему нелінійних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, які містять інформацію про його статичні та динамічні властивості. Значення цих параметрів потрібні для синтезу законів автоматичного керування та інших цілей, наприклад, створення флайт-моделей для авіаційних тренажерів. Аналітичний розрахунок моделі літака пов'язаний із деякими труднощами та не завжди достатньо точний. У сучасній літературі описано декілька методів ідентифікації, що використовують різні методики проведення льотних експериментів.

Перейдемо до викладу змісту дисертації по частинам

У першому розділі дається постановка задачі, описуються відомі з наукової літератури методи ідентифікації, їх переваги та недоліки.

У другому розділі описується обраний для подальшої роботи метод ідентифікації та досліджується з точки зору точності. Будується математична модель похибки визначення параметрів математичної моделі руху літака з використанням обраного алгоритму в умовах наявності похибок вимірювачів та вітрових збурень.

У третьому розділі описується алгоритм проведення льотного експерименту, визначається склад бортових вимірювачів та висувуються вимоги до їх точності, а також до погодних умов в ході проведення експерименту.

У четвертому розділі демонструється процес та наводяться результати проведення льотного експерименту.

На захист виносяться наступні результати:

- 1) Алгоритм ідентифікації параметрів математичної моделі руху літака, що включає в себе послідовність проведення експерименту та обробки отриманих даних
- 2) Математична модель похибки алгоритму, що дозволяє на основі бажаної точності ідентифікації виставляти вимоги та визначати склад бортового обладнання, необхідного для успішного проведення експерименту.

Розділ 1. Огляд сучасних методів ідентифікації

Найбільш повну класифікацію, а також теоретичний огляд та опис методів ідентифікації проведено в [5] та [6]. Наведемо короткий опис суті головних та найчастіше застосовуваних, а також приведемо приклади робіт, де ці методи застосовуються

1.1 Ідентифікація, заснована на перетворенні Фур'є.

Являє собою апроксимацію вхідного сигналу його розкладом у ряд Фур'є. Застосовується для вхідних сигналів, реакція на які в подальшому аналізуватиметься за допомогою трьох інших методів. Безпосереднє перетворення Фур'є неможливе для вхідних сигналів типу синусоїди або ступінчастого. Ці входи зазвичай апроксимують як слабо демпфований або як асимптотично (і дуже повільно) спадаючу «сходінку», відповідно.

Для лінійної системи із передатною функцією $G(s)$, вихід якої $x(t)$ при вхідному сигналі $y(t)$ визначається інтегральним виразом:

$$x(t) = \int_0^t y(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad g(t) = L^{-1}[G(s)].$$

Це рівняння у формі перетворення Фур'є має вигляд

$$X(j\omega) = G(j\omega)Y(j\omega).$$

Перетворення Лапласа для нього –

$$X(s) = G(s)Y(s).$$

$G(j\omega)$ та $G(s)$ – передатні функції системи при використанні перетворень Фур'є та Лапласа, відповідно. $G(j\omega)$ можна переписати у вигляді $\alpha_\omega + j\beta_\omega = |G(j\omega)| e^{j \arctg(\beta/\alpha)}$. Тоді $\sqrt{\alpha_\omega^2 + \beta_\omega^2} = |G(j\omega)|$ – модуль коефіцієнта підсилення, $\arctg(\beta/\alpha)$ – зсув фази між вихідним та вхідним параметрами, а зміна $G(j\omega)$ в залежності від ω – частотна характеристика системи.

Якщо на вході системи діють ступінчасті або імпульсні сигнали, то отримати характеристику $G(j\omega)$ набагато простіше, оскільки перетворення Фур'є для імпульсної перехідної характеристики дорівнює $G(j\omega)$, а для перехідної функції – $G(j\omega)/j\omega$. Метод перетворень Фур'є з одного боку, дозволяє проводити ідентифікацію в реальному масштабі часу; а з іншого, його недоліком є великі трудозатрати, оскільки він пов'язаний із чисельними перетвореннями вхідного та вихідного сигналів. До прикладу, перетворення Фур'є у комбінації із регресивними алгоритмами було застосовано для ідентифікації у статті [7].

1.2 Ідентифікація за допомогою частотної характеристики.

Цей метод заснований на роботах Бode і Найквіста та використовує амплітудні частотні характеристики (АЧХ). На вхід моделі при цьому подається гармонічний сигнал, частота якого змінюється у розглядуваному діапазоні.

Метод засновано на перетворенні Лапласа щодо виходу та входу

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}, \text{ де}$$

$G(s), X(s), Y(s)$ – передатна функція, вихід та вхід системи, відповідно.

Уточнимо, що змінна Лапласа є

$$s = \sigma + j\omega, \sigma \rightarrow 0.$$

Тому що розглядається лише співвідношення вхід/вихід по частоті. Отримали

$$X(j\omega) = G(j\omega)Y(j\omega).$$

Це є вираз є перетворенням Фур'є, справедливе для збіжних функцій $g(t), x(t), y(t)$, де

$$g(t) = L^{-1}[G(s)];$$

$$x(t) = L^{-1}[X(s)];$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)].$$

Таким чином, $G(j\omega)$ визначає передатну функцію системи при частоті ω . Оскільки $G(j\omega)$ – комплексна величина, то можна розглянути її модуль та аргумент.

$$G(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega);$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)};$$

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\beta(\omega)}{\alpha(\omega)}.$$

Вихід лінійної системи буде мати ту ж частоту, що і вхід, якщо той – чисто синусоїдальний сигнал однієї частоти ω , фаза цього сигналу буде зміщена відносно входу на $\psi(\omega)$. Для входу з амплітудою M

$$y(t) = M \sin(\omega t)$$

отримаємо вихід амплітуди N

$$x(t) = N \sin(\omega t + \psi).$$

Тут

$$\frac{N}{M} = |G(j\omega)|;$$

$$\psi = \operatorname{Arg}[G(j\omega)].$$

Частотна характеристика $G(j\omega)$ визначається шляхом аналізу співвідношення амплітуд та зміщення фази для виходу та входу для кожної розглядуваної частоти ω та запису відповідних сигналів $N \sin(\omega t + \psi)$. Величини $\frac{N}{M}$ та ψ для кожної частоти формують частотну характеристику.

Амплітудні частотні характеристики, які використовуються у класичній теорії керування, складаються із амплітудної та фазової характеристик. Тому в загальному випадку $G(j\omega)$ є комплексною величиною. Якщо побудувати модуль вимірної частотної характеристики стійкої лінійної системи в одиницях $20 \lg |G(j\omega)|$ в залежності від $\lg(\omega)$, то можна безпосередньо ідентифікувати цю систему. При цьому діє обмеження на виключно стійкі системи, оскільки в протилежному випадку її частотні характеристики виміряти неможливо. Загальна форма виразу для $G(s)$ має вигляд

$$\frac{\alpha_m s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \dots + \alpha_0}{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0} =$$

$$\frac{K s^q \prod_{i=1}^p (\tau_i s + 1) \prod_{\rho=1}^r (T_\rho^2 s^2 + 2T_\rho \xi_\rho s + 1)}{s^\mu \prod_{h=1}^Y (\tau_h s + 1) \prod_{\eta=1}^\lambda (T_\eta^2 s^2 + 2T_\eta \xi_\eta s + 1)}.$$

Тут $q + p + 2r = m$ – порядок полінома s в чисельнику, а $\eta + \gamma + 2\lambda = n$ – порядок полінома s в знаменнику. Тоді $lg|G(j\omega)|$ та $Arg[G(j\omega)]$ визначаються виразами

$$lg|G(j\omega)| = lgK + qlg\omega + \sum_{i=1}^p lg|j\tau_i\omega + 1| + \sum_{\rho=1}^r lg|1 - \omega^2 T_\rho^2 + 2jT_\rho \xi_\rho \omega| - \mu lg\omega - \sum_{h=1}^\gamma lg|j\tau_h\omega + 1| - \sum_{\eta=1}^\lambda lg|1 - \omega^2 T_\eta^2 + 2T_\eta \xi_\eta \omega|;$$

$$Arg[G(j\omega)] = \psi(\omega) = q\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=1}^p Arg(j\tau_i\omega + 1) + \sum_{\rho=1}^r Arg(1 - \omega^2 T_\rho^2 + 2j\xi_\rho T_\rho \omega) - \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sum_{h=1}^\gamma Arg(j\tau_h\omega + 1) - \sum_{\eta=1}^\lambda Arg(1 - \omega^2 \eta + 2j\xi_\eta T_\eta \omega).$$

Передатну функцію $G(s)$ можна представити у вигляді добутку передатних функцій елементарних ланок (пропорційної, форсуючої, аперіодичної, коливальної та ін). Також можна отримати наближені вирази для амплітудних частотних характеристик за довідковими таблицями.

У випадку, коли наперед відома структура досліджуваної системи, коефіцієнти поліномів у чисельнику та знаменнику її передатної функції можна визначити за таблицями амплітудних апроксимацій. При цьому, якщо поліном чисельника передатної функції містить лише коефіцієнти одного знаку, то для ідентифікації достатньо тільки амплітудної частотної характеристики. У протилежному випадку знадобиться ще й фазова частотна характеристика. Серед переваг даного методу – можливість ідентифікації систем високих порядків, а також систем із зашумленими вхідним та вихідним сигналом. Серед недоліків – необхідність формування гармонійного вхідного сигналу заданої частоти. Серед вивчених наукових праць обробку гармонійних вхідних сигналів для підвищення точності ідентифікації застосовується у праці [8]. Власне ідентифікації об'єкта по частотним характеристикам присвячені роботи [9] та [10].

1.3 Ідентифікація за допомогою аналізу перехідної функції.

Використовує найпростіший у формуванні східчастий вхідний сигнал, що може бути сформований на вході системи шляхом, наприклад, відкриття (або закриття) вхідного клапана, подачі або вимкнення керуючої напруги або струму, ривка механічного органа керування і т.д. Тому цей метод можна вважати одним із

найпростіших в сенсі організації експерименту з ідентифікації. Оскільки швидкість наростання реального вхідного сигналу завжди скінченна, то він є лише апроксимацією ідеальної «сходинки». Головним критерієм якості таких вхідних сигналів є час наростання, тривалість якого повинна бути набагато меншою, ніж період найвищої гармоніки системи, тоді похибка ідентифікації стає незначною. Якщо вхідний сигнал містить шум, то необхідна його попередня фільтрація.

Залежність між вхідним сигналом, характеристиками процесу та вихідним сигналом у часі представляє собою згортку. Однак у формі перетворення Лапласа ця залежність спрощується до добутку $X(s) = G(s)Y(s)$. Тому перетворення Лапласа можна використовувати для аналізу перехідної функції системи.

Для схеми з передатною функцією $G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$, де s – змінна перетворення Лапласа, а X та Y – відповідно, вихідний та вхідний сигнали системи, перетворення Лапласа для одиничного ступінчастого сигналу при $t=0$ є

$$L[\text{одинич. ступін. при } t = 0] = \frac{1}{s}.$$

Тоді перехідна функція $X(s)$ лінійно] системи дорівнює

$$X(s) = \frac{G(s)}{s}.$$

Згідно теорії перетворення Лапласа, це є перетворення інтеграла $\int g(t)dt$, де $g(t)$ – зворотне перетворення Лапласа передатної функції $G(s)$:

$$g(t) = L^{-1}[G(s)];$$

$$sX(s) = G(s);$$

$$L^{-1}[sX(s)] = \frac{dx(t)}{dt} = g(t).$$

1.3.1 Графічна ідентифікація за допомогою перехідної функції

Окрім аналітичного підходу, для ідентифікації системи можна застосовувати також аналіз графічного відтворення її перехідної функції. Метод ідентифікації при цьому відрізняється для кожного виду передатної функції, яка описує систему (апериодичні першого, другого та вищих порядків, коливальні, системи із запізненням), однак не являє собою значних складнощів.

Найбільш коректно графічний метод ідентифікації із використанням перехідних функцій застосовується до процесів першого порядку. Перехідна функція системи першого порядку має вигляд

$$x(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Або у формі перетворення Лапласа

$$X(s) = L(x(t)) = G(s)Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{|K|}{s(Ts + 1)}.$$

Тут $G(s)=K/(Ts+1)$ – передатна функція системи першого порядку, а

$$Y(s)=1/s=L[\text{один.сход.}],$$

є зображенням ступінчатого вхідного сигналу. Видно, що при $t=T$ функція $x(t)$ дорівнює

$$x(t) = K(1 - e^{-1}) = K(1 - 0.37) = 0.63K$$

Стала часу T системи першого порядку дорівнює відріжку часу, за який перехідна функція досягає 63% своєї усталеної величини. Коефіцієнт K (зазвичай у розмірності) є співвідношенням між величиною вихідного сигналу системи та амплітудою входу.

Сталу часу можна визначити по-іншому, якщо провести дотичну до перехідної функції на початковій ділянці (при $t=0$) до точки перетину із рівнем усталеного сигналу. Точка перетину відповідає часу T з момент подачі вхідної дії. При $t=T$ нахил кривої x досягає величини K .

1.3.2 Коливальні системи другого порядку

Передатні функції періодичних (коливальних) систем другого порядку можуть бути представлені у вигляді

$$G(s) = \frac{K}{(s/\omega_0)^2 + 2\xi s/\omega_0 + 1} = \frac{K}{(Ts)^2 + 2\xi Ts + 1}.$$

Тут $0 < \xi < 1$, а $T = 1/\omega_0$, як відомо із класичної теорії керування. Тобто, для ідентифікації коливальних систем другого порядку необхідно визначити тільки величини ω_0 , ξ та K , де K – співвідношення вихідного та вхідного сигналів в усталених умовах.

Коефіцієнт демпфування безпосередньо ξ пов'язаний із перерегулюванням, яке завжди присутнє в коливальних системах другого порядку (рис. 1.1).

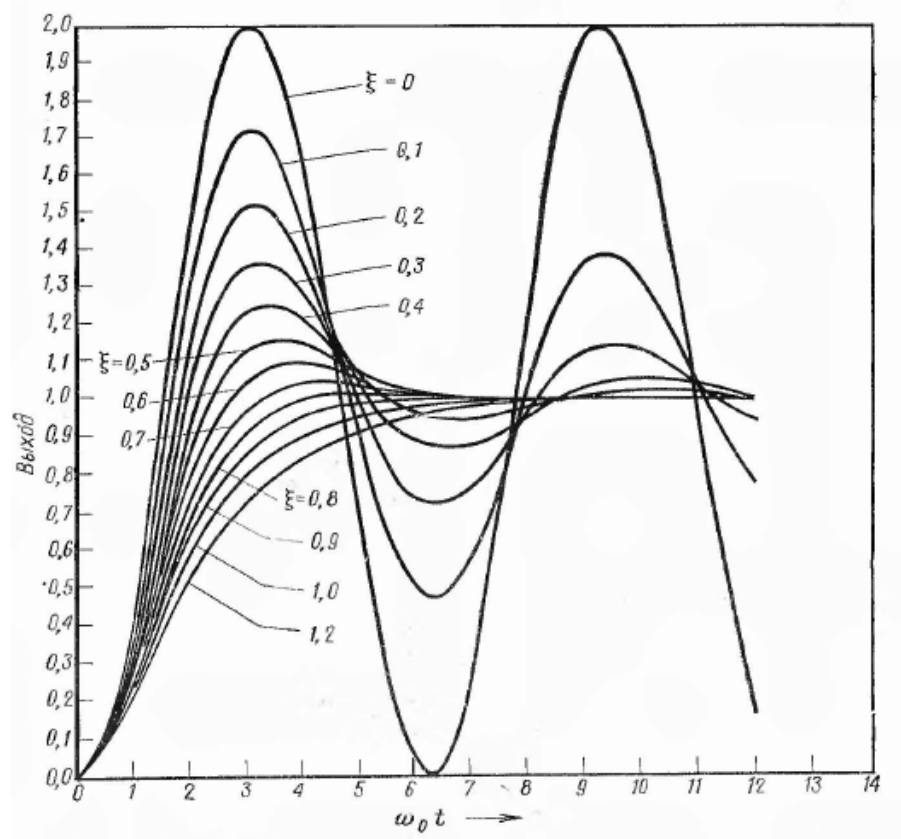


Рис. 1.1 Перехідні функції коливальних систем другого порядку

Співвідношення між коефіцієнтом демпфування ξ та перерегулюванням в процентах від усталеної величини перехідної функції показано на рис. 1.2, звідки його можна визначити графічно.

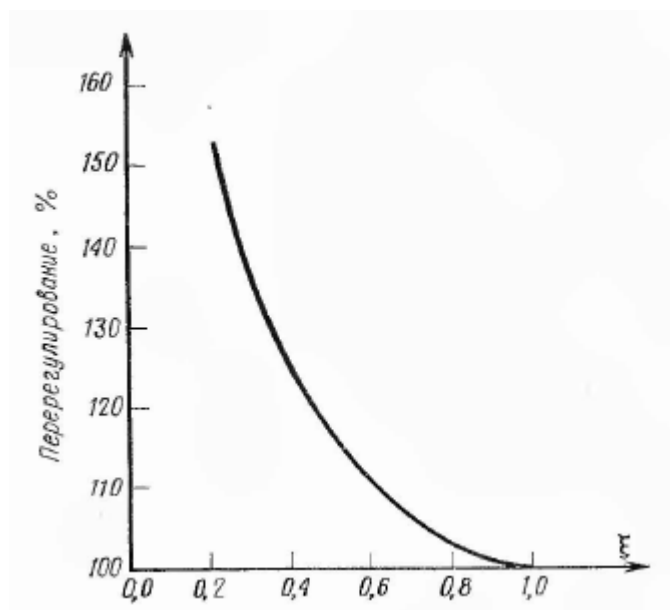


Рис. 1.2 Залежність амплітуди від коефіцієнта демпфування

Власна частота системи ω_0 може бути визначена наступним чином:

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \text{ де}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{\Theta}, \text{ а}$$

Θ – період демпфованих коливань перехідної функції (див. рис. 1.1)

Метод ідентифікації динамічного об'єкта за аналізом його перехідної функції знайшов своє застосування, зокрема, у роботах [10], [11].

1.4 Ідентифікація за допомогою імпульсної перехідної характеристики.

Процедура ідентифікації дуже схожа на метод із використанням перехідної характеристики. На вхід системи прикладається імпульсний сигнал (дельта-функція), яка за визначенням є імпульсом нульової ширини із одиничною площею. На практиці такий вхідний сигнал отримати неможливо, тому його апроксимують імпульсом, тривалість якого прямує до нуля, а площа рівна одиниці.

Перетворення Лапласа для виходу функції $X(s) = G(s)Y(s)$ для одиничного імпульса дає

$$Y(s) = L[\delta(t)] = 1.$$

Тоді перетворення Лапласа для виходу записується у вигляді

$$X(s) = G(s)L[\delta(t)] = G(s) * 1 = G(s) \text{ та}$$
$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}[G(s)] = g(t).$$

Імпульсна перехідна функція системи ідентична зворотному перетворенню Лапласа її передатної функції $G(s)$.

Якщо вхідний сигнал $y(t)$ є імпульсом, ширина якого Θ скінченна та достатньо мала, то можна представити цей імпульс у вигляді суми додатної одиничної ступінчастої функції при $t=0$ та від'ємної одиничної «сходинки» при $t=\Theta$. Тоді отримаємо

$$L[y(t)] = Y(s) = \frac{1 - e^{-\theta s}}{s}, \text{ де}$$

$1/s$ – перетворення Лапласа для одиничної ступінчастої функції при $t=0$,
 $e^{-\theta s}/s$ – одинична від’ємна ступінчаста функція при $t= \Theta$.

Використаємо розклад в ряд Тейлора

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(1 - s\theta + \frac{s^2\theta^2}{2} - \frac{s^3\theta^3}{3!} \pm \dots \right).$$

При $\Theta \rightarrow 0$

$$Y(s) \cong \frac{1}{s} - \frac{1}{s} (1 - \theta s) = 0.$$

Якщо амплітуда імпульсу дорівнює $1/\Theta$, то попереднє рівняння приймає вид

$$Y(s) = \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} (1 - \theta) \right],$$

як і у випадку з істинною дельта-функцією.

Якщо порівняти розглянуту вище імпульсну та дельта-функцію, то можна встановити, що δ -функція фактично є похідною по часу ідеальної ступінчастої функції (така похідна буде нескінченно великою при $t=0$ та нуль в інші моменти часу).

Похідна по часу перехідної функції дорівнює імпульсній перехідній функції і навпаки, інтеграл імпульсної перехідної функції дорівнює самій перехідній функції. Тому, для аналізу імпульсної функції застосовуються ті самі методи, що і для перехідної, за умови знаходження її інтегралу по часу.

Питання ідентифікації по імпульсній характеристиці вивчалось у праці [12]

1.4.1 Графічна ідентифікація за допомогою імпульсної перехідної характеристики

З одного боку, методи для ідентифікації ступеневих перехідних функцій, описані вище можна в повному обсязі застосовувати і для імпульсних перехідних функцій, якщо попередньо знайти її інтеграл. З іншого боку, також можна отримати співвідношення, схожі на співвідношення із попереднього розділу.

1.4.2 Системи першого порядку

Їх імпульсна перехідна функція записується у вигляді

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] = \frac{K}{T} e^{-t/T}.$$

T і K визначаються по графіку: в початковій точці $K/T = (K/T)e^{(-\theta/T)}$, а час при якому $g(t)$ досягає $0,37K/T$ – дорівнює T . Сталу T також можна отримати, провівши дотичну із початку графіка $g(t)$ до її перетину із віссю часу.

На практиці вхідний сигнал в системі є лише наближеним до імпульсу, а тому $g(t)$ ніколи не починається з величини K/T . Тоді K і T можна визначити шляхом екстраполяції максимального нахилу в околі $t=0$ у зворотному напрямі до $t=0$ так, щоб була досягнута величина K/T .

1.4.3 Коливальні системи другого порядку

Імпульсні перехідні функції коливальних систем другого порядку визначаються наступним чином:

$$G(s) = \frac{K}{(s/\omega_0)^2 + 2\xi s/\omega_0 + 1}, \text{ для } 0 < \xi < 1;$$

$$g(t) = \frac{K}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t. \quad (1.1)$$

Вони представлені на рис. 1.3.

Звідси $\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}$, $\omega = \frac{2\pi}{\theta}$, де θ – період одного коливання, а ξ визначається із співвідношення

$$\frac{A(+)}{A(-)} = e^{\pi \xi \sqrt{1-\xi^2}} = R, \text{ тобто}$$

$\xi = \frac{\ln R}{\sqrt{\pi^2 + (\ln R)^2}}$, де $A(+)$, $A(-)$ - додатна та від'ємна послідовні площі, відповідно, обмежені імпульсною перехідною функцією, як показано на рис. 1.4.

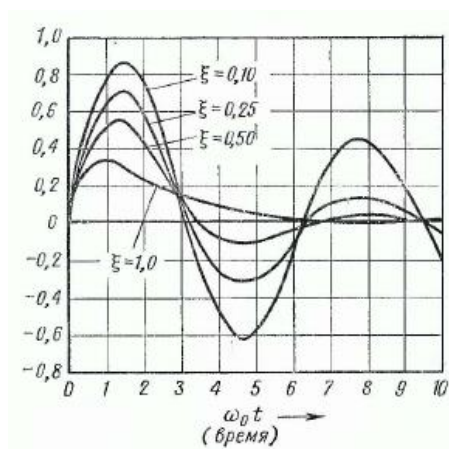


Рис. 1.3 Імпульсні перехідні функції періодичних систем другого порядку

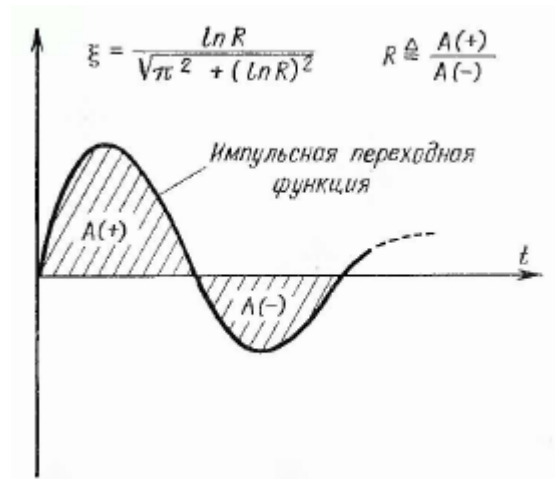


Рис. 1.4 Визначення коефіцієнта демпфування за співвідношенням площ
Коли знайдено ξ та ω_0 , K можна знайти із рівняння (1.1)

Ідентифікація за допомогою імпульсних, перехідних та частотних функцій володіє головною особливістю, яка полягає у необхідності подачі на вхід системи сформованих вхідних сигналів, що може призводити до необхідності виключати її із нормального функціонування. Однак іноді такі сигнали можуть виникати і під час штатної її роботи, як наприклад, ступінчастий вхід, оскільки він є часто відтворюваним у природі явищем. Вказані методи можуть застосовуватися лише до лінійних стаціонарних процесів, де співвідношення вхід/вихід, отримані для одного типу вхідних сигналів, зберігаються і для решти. Також ці методи ідентифікації відзначаються простотою обробки отриманих даних та можливістю безпосереднього графічного їх аналізу.

1.5 Методи кореляційних функцій.

Ідентифікація лінійних процесів за допомогою методів кореляційних функцій можлива як у реальному, так і у відносному масштабі часу. При цьому на вхід процесу подається білий шум (тобто, некорельована випадкова вхідна дія, що має нескінченний рівномірний спектр частот та нульове математичне очікування). І хоч в реальних умовах відтворити такий вплив неможливо, однак можна наближено сформувати шум із характеристиками, що підходять для ідентифікації. Якщо амплітуда цього шуму є недостатньою, то його можна накласти на робочий вхідний сигнал, не змінюючи характеристик системи, що дозволяє провести ідентифікацію

системи в режимі реального часу. Ідентифікація вимагає обробки вхідного та вихідного сигналів на великому (теоретично, нескінченно довгому) проміжку часу, тому в методі кореляційних функцій процес вважають стаціонарним (тобто, таким, коли коефіцієнти його передатної функції не залежать від часу). На практиці неможливо реалізувати вхідні сигнали у вигляді білого шуму, оскільки вони представляють собою некорельовані випадкові процеси із нескінченним частотним спектром. Однак, якщо вхідний сигнал є випадковим шумом із рівномірним спектром частот, до того ж, значно ширшим за спектр системи, то автокореляційну функцію можна апроксимувати дельта-функцією.

Для здійснення ідентифікації в реальному часі випадковий або псевдовипадковий вхідний сигнал (автокореляційна функція якого апроксимується дельта-функцією) повинен бути накладений на робочий вхідний сигнал системи. Тоді вихідний сигнал системи буде являти собою реакцію на сумарний вхід. Взаємна кореляція в задачах ідентифікації виникає між виходом та випадковою або псевдовипадковою складовою сумарного вхідного сигналу. Робочий вхідний сигнал при цьому слабо корелюється із виходом, тому інтеграл взаємної кореляції між входом та виходом дає нам можливість визначити імпульсну перехідну функцію. Тому, коли амплітуда вхідного випадкового сигналу є достатньо малою порівняно із робочим вхідним сигналом та не впливає на функціонування системи, кореляційні методи дають можливість проводити ідентифікацію в реальному часі.

1.6 Ідентифікація за допомогою регресійних методів

Регресійний аналіз є класичним статистичним методом. Завдяки своїм широким можливостям різні регресійні процедури давно і успішно застосовуються в інженерній практиці для ідентифікації процесів.

Методи ідентифікації, засновані на регресивних процедурах із використанням методу найменших квадратів, застосовуються як до лінійних, так і до нелінійних процесів та полегшують проведення ідентифікації по декільком входам одно-

часно. Більш того, регресійні методи дозволяють виконувати ідентифікацію в реальному масштабі часу, оскільки вони засновані на вимірюваннях вхідних та вихідних сигналів, які можна отримати в процесі нормального функціонування системи.

Протягом періоду, поки виконуються вимірювання для регресивної ідентифікації, параметри ідентифікованого процесу приймаються стаціонарними або квазістаціонарними. Цей період повинен бути на менш ніж mT , де T – інтервал вимірювання, а m – числа параметрів, що підлягають ідентифікації. Якщо потрібно ідентифікувати m коефіцієнтів a_{mj} в n спільних рівняннях виду

$$x_j = a_{0j} + a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m, j = 1, 2, \dots, n,$$

і якщо одні і ті ж u_i ($i=1, 2, \dots, m$) присутні у всіх n рівняннях, то всі $a_{ij} \forall i, j$ можуть бути ідентифіковані за $m+1$ інтервалів вимірювання. Тому, ідентифікація всіх m коефіцієнтів цих n рівнянь може проводитися одночасно.

Для застосування регресійних методів необхідно накопичити дані про неусталені стани входу/виходу принаймні на $m+1$ вимірювальних інтервалах. Звідси випливає, що на i -му інтервалі часу регресійна ідентифікація базується на даних від $(i-m-p)$ -го ($p \geq 0$) до i -го інтервала. Аналогічно, на $(i+1)$ -му інтервалі вона базується на даних від $(i-m-p+1)$ -го до $(i+1)$ -го інтервала, тим самим полегшуючи виявлення нестационарності вхідних та вихідних сигналів. Якщо необхідно ідентифікувати більш ніж один параметр, то для отримання параметрів регресії необхідно проводити отримання обернених матриць. Без обернення матриць дозволяє обійтись рекурентний вид регресійних методів.

Статична задача для системи з одним виходом

Нехай лінійна статична система має m входів U_1, \dots, U_m та один вихід X . Ця система може бути описана наступним лінійним рівнянням:

$$X = a_0 + a_1U_1 + a_2U_2 + \dots + a_mU_m.$$

Використовуючи серію вимірювань величин $X, U_j, j = (0, 1, 2, \dots, m)$ в r моментів часу, можна визначити параметри a_i : спочатку записують всі r сукупностей вимірювань величин X та U_j . Далі ці r сукупностей використовують для обчислення

\bar{X} та \bar{U} – середніх значень цих величин для вказаної серії вимірювань. Вводять позначення $x = X - \bar{X}$; $u = U - \bar{U}$.

Спільні рівняння набувають виду:

$$x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m,$$

або у векторній формі

$$x = \mathbf{u}^T \mathbf{a}.$$

Тут \mathbf{u} , \mathbf{a} – вектори-стовпці з елементами u_j , a_j , відповідно. Тому r послідовних вимірювань задовольняють співвідношенням

$$x_{(1)} = \mathbf{u}_{(1)}^T * \mathbf{a}$$

...

$$x_{(\mu)} = \mathbf{u}_{(\mu)}^T * \mathbf{a}$$

...

$$x_{(r)} = \mathbf{u}_{(r)}^T * \mathbf{a}.$$

Тут μ позначає момент вимірювань x , \mathbf{u}^T ($\mu=1, 2, \dots, r$). Визначимо далі вектор χ та матрицю \mathbf{U} наступним чином

$$\chi = [x_{(1)} \quad x_{(\mu)} \quad x_{(r)}]^T;$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(1)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(\mu)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(r)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i(1)} & \dots & u_{i(1)} & \dots & u_{i(1)} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ u_{i(\mu)} & \dots & \dots & \dots & u_{m(\mu)} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ u_{i(r)} & \dots & \dots & \dots & u_{m(r)} \end{bmatrix}.$$

Тому можна привести систему рівнянь до вигляду

$$\chi = \mathbf{U} * \mathbf{a}.$$

Припускаючи, що компоненти вектора \mathbf{a} у цьому рівнянні є оцінками \hat{a} істинного вектора \mathbf{a} , можна отримати такі оцінки $\hat{\chi}$ вектора χ , що

$$\hat{\chi} = \mathbf{U} * \hat{\mathbf{a}}.$$

Скалярну суму S квадратичних похибок оцінювання можна визначити наступним чином:

$$S = (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T (\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) = \text{tr}[(\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})(\chi - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T].$$

Тут $\text{tr}[\dots]$ позначає слід матриці. Таким чином, найкраща (в сенсі найменших квадратів) оцінка вектора \mathbf{a} повинна задовольняти співвідношенню

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{a}_i} = 0, \forall i \in (1, m).$$

Або у векторній формі

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\mathbf{a}}_i} = \frac{\partial \text{tr}[(\boldsymbol{\chi} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})(\boldsymbol{\chi} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T]}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \text{tr}[\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\chi}^T + \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\boldsymbol{\chi}^T - \boldsymbol{\chi}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T]}{\partial \hat{\mathbf{a}}} = 0.$$

Згідно правил обрахування сліду матричної функції, це рівняння перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}[\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\chi}^T + \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}\boldsymbol{\chi}^T - \boldsymbol{\chi}\hat{\mathbf{a}}^T\mathbf{U}^T]}{\partial \hat{\mathbf{a}}} &= 0 + 2\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{U}^T\boldsymbol{\chi} - \mathbf{U}^T\boldsymbol{\chi} \\ &= 2(\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{U}^T\boldsymbol{\chi}) = 0. \end{aligned}$$

Тому найкраща в сенсі найменших квадратів оцінка $\hat{\mathbf{a}}$ вектора \mathbf{a} задовольняє рівнянню

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{U}^T\boldsymbol{\chi}.$$

Так що

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\boldsymbol{\chi} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_m]^T.$$

Що і дозволяє побудувати процедуру ідентифікації вектора \mathbf{a} на основі лінійної регресії та методу найменших квадратів. Зробимо ремарку, що матриця $(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}$ існує тоді і тільки тоді, коли матриця \mathbf{U} не є особливо. А також, для застосування методів МНК необхідно, щоб виконувалась умова $r \gg m$. Якщо $r=m$, то в оцінці $\boldsymbol{\chi}$ шум вимірювань не буде згладжений. Із цієї умови слідує, що для адекватної ідентифікації потрібно принаймні $m+1$ вимірювань, причому впродовж цього терміну система вважається стаціонарною.

1.7 Регресійна ідентифікація лінійних динамічних процесів

Лінійні динамічні системи можна описати наступним рівнянням стану:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{u}.$$

Тут \mathbf{x}, \mathbf{u} – n -вимірний вектор стану та m -вимірний вектор управління (вхід) відповідно. В дискретній формі це рівняння може бути записано так:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k,$$

де $t=k\Delta t$ та

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cong \mathbf{I} + \Delta t * \boldsymbol{\alpha};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \cong \Delta t * \boldsymbol{\beta}.$$

Тепер введемо

$$\mathbf{w}_k = (x_{1,k} \dots x_{n,k}; u_{1,k} \dots u_{m,k})^T = (\omega_{1,k} \dots \omega_{n+m,k})^T = (m+n) * E;$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}, b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}, b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Phi_1)^T \\ \vdots \\ (\Phi_n)^T \end{bmatrix}.$$

Отже, рівняння запишеться у вигляді

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi * \mathbf{w}_k.$$

Якщо запам'ятати g одночасних сукупностей вимірювань ($g \geq n+m+1$) величин \mathbf{x}_{k+1} , \mathbf{w}_k , тобто \mathbf{x}_{k+1} , \mathbf{x}_k , \mathbf{u}_k , то елементи матриці Φ можна ідентифікувати за допомогою лінійної регресійної процедури по МНК із попереднього розділу. Тоді оцінка $\widehat{\Phi}_i^*$ i -го рядка Φ по методу найменших квадратів задається співвідношенням

$$(\widehat{\Phi}_i^*)^T = [(\mathbf{W}_k)^T \mathbf{W}_k]^{-1} (\mathbf{W}_k)^{-1} \boldsymbol{\chi}_{i,k+1} = [a_{1,i} \dots a_{ni}, b_{1i} \dots b_{mi}],$$

де по аналогії,

$$\mathbf{W}_k = \begin{bmatrix} \omega_{1(1)k} & \dots & \omega_{m+n(1)k} \\ \vdots & \dots & \dots \\ \omega_{i(r)k} & \dots & \omega_{m+n(r)k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1(1)k} & \dots & x_{n(1)k}, u_{1(1)k} & \dots & u_{m(1)k} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1(r)k} & \dots & x_{n(r)k}, u_{1(r)k} & \dots & u_{m(r)k} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k+1} = [x_{i(1)k+1} \dots x_{i(\mu)k+1} \dots x_{i(r)k+1}]^T.$$

Тут $x_{i(\mu)k+1}$ позначає μ -е вимірювання i -го стану \mathbf{x}_{k+1} , а g – число вимірювань \mathbf{W}_k , \mathbf{x}_{k+1} . Видно, що для ідентифікації Φ необхідно запам'ятати g величин \mathbf{x}_{k+1} та g одночасних сукупностей вимірювань векторів \mathbf{x}_k , \mathbf{u}_k які належать попередньому проміжку інтегрування Δt . Іноді можливо вимірювати і запам'ятовувати кілька сукупностей значень \mathbf{x} , \mathbf{u} протягом Δt (з інтервалом $\tau = v\Delta t$, де $1/v$ – ціле число), якщо

на кожному інтервалі вимірювань поточний вектор \mathbf{x}_k об'єднується в пару з вектором \mathbf{w}_k , виміряний на v інтервалів раніше, щоб отримати \mathbf{x}_{k+1} та $\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k$, як потрібно для ідентифікації Φ . Отже, $u_{j,(\mu),k}$ належить до сукупності вимірювань на r -м інтервалів раніше, ніж $u_{j,(\mu),k}$ та на $v+r$ -м інтервалів раніше, ніж $u_{i,(\mu),k+1}$. Взагалі, для ідентифікації \mathbf{A}, \mathbf{B} потрібно запам'ятати $2r$ вимірів \mathbf{x} та r вимірювань \mathbf{u} .

У наведеному вище прикладі припускається, що вектор стану \mathbf{x} може бути виміряний. Однак у загальному випадку, можна виміряти лиш вихідний вектор \mathbf{y}

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{n},$$

де \mathbf{n} – вектор шуму

Тому з урахуванням результатів аналізу спостережуваності, можна зробити висновок, що якщо деякі елементи матриці \mathbf{C} у рівнянні рівні 0, то безпосередня ідентифікація \mathbf{A} та \mathbf{B} по вимірюванням \mathbf{y} стає неможливою. Однак, оскільки ідентифіковувана система вважається спостережуваною, то матриці \mathbf{A} та \mathbf{B} можуть бути ідентифіковані за співвідношенням вхід/вихід.

У досліджених літературних джерелах методи регресивного аналізу застосовують [7], [13], [14]. Конкретно алгоритм МНК для ідентифікації застосували [15], [16], [17], [18]

1.8 Ідентифікація змінних стану із використанням спостережуваних стану

Дуже часто в задачах керування виникає ситуація, коли не усі змінні стану об'єкта можуть бути безпосередньо визначені із використанням прямих або опосередкованих методів вимірювання. У цьому випадку для повністю спостережуваного об'єкта із відомим параметрами, який задається рівнянням

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0)$$

та вимірюваними змінними

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

можна вирахувати (оцінити) його змінні стану безпосередньо, використовуючи математичну модель об'єкта

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu, \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}(0).$$

Очевидно, що якщо $\hat{x}(0) = x(0)$, то розв'язки цих рівнянь співпадають.

Якщо $\hat{x}(0) \neq x(0)$, або існують похибки ідентифікації параметрів об'єкта, то виникає похибка відновлення змінних стану, яка описується рівнянням

$$\frac{de}{dt} = Ae; e(t_0) = x(0) - \hat{x}(0).$$

Якщо об'єкт керування володіє властивістю асимптотичної стійкості, то похибка відновлення буде поступово зменшуватися із плином часу, на нескінченності наближуючись до нуля.

Подібного обмеження властивостей об'єкта можна уникнути та покращити властивість збіжності оцінки відновлення. Для цього потрібно використовувати вимірювані змінні y . В рівняння похибки вводиться нев'язка фактично виміряних y та змодельованих \hat{y} змінних. Наслідком такого кроку є поява наступного рівняння:

$$\frac{de}{dt} = [A - KC]e; e(t_0) = x(0) - \hat{x}(0).$$

Тут K – деяка прямокутна вагова матриця, що носить назву матриця коефіцієнтів коефіцієнтів підсилення спостерігача. Матриця K повинна бути такою, щоб спостерігач залишався асимптотично стійким.

Якщо об'єкт є повністю спостережуваним і задовольняє умові

$$\text{Rang} \| C^T, A^T C^T, \dots, A^{T(n-1)} C^T \| = n,$$

де n – порядок об'єкта, тоді така матриця існуватиме завжди.

Рівняння спостерігача, який оцінює змінні стану об'єкта, можна отримати шляхом підстановки в рівняння об'єкта замість істинних змінних їх оцінки $x = \hat{x} + e$:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{de}{dt} = A(\hat{x} + e) + Bu.$$

Якщо підставити сюди замість похідної помилки її вираз, то отримаємо рівняння спостерігача

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + K[y - C\hat{x}] + Bu, \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}(0).$$

ними) стохастичними процесами із функцією розподілу Гауса. Їх математичні очікування – нульові, так само, як і коваріаційні матриці. $R_f(t)$ та $R_v(t)$. Також має на увазі, що початкові умови також не залежать від збурень та шумів. Математичне очікування та дисперсія відомі для вектора початкових умов.

$$M[\mathbf{x}(0)] = \bar{\mathbf{x}}(0); R(0) = M\{[\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}(0)]^T\}.$$

Потрібно побудувати спостерігач стану повного порядку

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}[\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}] + \mathbf{B}\mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}(0).$$

Матриця \mathbf{K} у ньому визначається із умови мінімуму середнього квадрату помилки відновлення \mathbf{e}

$$J = M\{\mathbf{e}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}\},$$

$\mathbf{\Lambda}$ – задана позитивно-визначена матриця вагових коефіцієнтів

Матриця коефіцієнтів підсилення спостерігача повного порядку \mathbf{K} для об'єкта, змінні стану якого шукаємо, при якій функціонал J досягає мінімального значення, визначається у вигляді виразу

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}_v^{-1}.$$

Тут \mathbf{P} – матриця чисел розміром n на n . Визначається шляхом знаходження розв'язку алгебраїчного рівняння Ріккатті

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{G}\mathbf{R}_f \mathbf{G}^T = 0.$$

Побудова оптимального спостерігача в загальному випадку – це вирішення задачі оптимального стохастичного керування, коли інформація про вектор керування є неповною. Знаходження матриці коефіцієнтів зворотного зв'язку лінійно-квадратичного регулятора по спостережуваним параметрам реалізується за допомогою процедури аналітичного конструювання для початкового рівняння об'єкта.

Задачу ідентифікації із використанням оптимальних спостережувачів вирішували автори публікацій [19] та [20].

Окрім описаних вище методів, існує також велика кількість інших цікавих робіт, присвячених ідентифікації динамічних систем. Так, доволі поширені у цьому напрямку фільтри Калмана – [16], [21]. Деякі дослідники застосовують також інструменти нечіткої логіки та простору станів – [22], [23].

Висновки до розділу

Проведено літературний огляд відомих методів ідентифікації динамічних об'єктів, зроблено короткий опис принципів роботи найбільш часто використовуваних методів, віднайдено практичні наукові роботи, присвячені практичним питанням ідентифікації. Для подальшого використання в алгоритмі ідентифікації обрано метод ступінчастої вхідної дії. Основна причина – простота організації льотного експерименту та обробки отриманих результатів.

Також у існуючій літературі та публікаціях, які описують цей метод, практично відсутній аналіз його точності при застосуванні в умовах наявності похибок первинних даних (параметрів польоту, виміряних за допомогою бортових датчиків), а також в умовах польоту літака в неспокійній атмосфері.

Розділ 2. Модель похибки алгоритму ідентифікації в умовах дії ві- тру та неточності навігаційної системи

Для вирішення задачі ідентифікації параметрів математичної моделі руху ЛА було обрано метод ступінчастої дії, детально описаний у розділі 1. Основна увага приділятиметься дослідженню процесів у повздовжньому каналі керування літаком. В якості стартової точки потрібно надати інформацію про математичну модель руху літального апарату, яка є об'єктом дослідження. Детальну інформацію про математичні моделі руху літальних апаратів типу «літак» та «ракета» подано у великій кількості фундаментальних наукових праць, зокрема [24], [25].

2.1 Математична модель руху літака

Повна система диференціальних рівнянь, що описує рух літального апарату із 6 ступенями свободи, має наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha \cos \beta - X - G \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} = P(\sin \alpha \cos \gamma_c + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_c) + Y \cos \gamma_c - Z \sin \gamma_c - G \cos \theta \\
 -mV \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} = P(\sin \alpha \sin \gamma_c - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_c + Y \sin \gamma_c + Z \cos \gamma_c) \\
 I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y \omega_z = \sum M_x \\
 I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x \omega_z = \sum M_y \\
 I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_y \omega_x = \sum M_z \\
 \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\
 \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \\
 \frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\
 \frac{dx}{dt} = V \cos \theta \cos \Psi \\
 \frac{dz}{dt} = -V \cos \theta \sin \Psi \\
 \frac{dH}{dt} = V \sin \theta \\
 \sin \theta = \sin \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \sin \gamma \sin \beta \\
 \sin \Psi \cos \theta = \sin \psi \cos \vartheta \cos \alpha \cos \beta + \cos \psi \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta + \\
 + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \psi \cos \gamma \sin \beta + \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \sin \beta \\
 \sin \gamma_c \cos \theta = \sin \psi \cos \alpha \sin \beta - \cos \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta + \cos \vartheta \sin \gamma \cos \beta
 \end{array} \right.$$

У цій системі рівнянь використано наступні позначення:

m – маса літака, кг

V – істинна повітряна швидкість, м/с

P – сумарна тяга силової установки, Н

X – сумарна сила лобового опору, Н

Y – сумарна підйомна сила, Н

G – вага літака, Н

α, β – кути атаки та ковзання, °

γ, ϑ, ψ – кути крену, тангажу та ристання, °

Θ, Ψ – кути нахилу та повороту траєкторії, °

$I_{x,y,z}$ – головні моменти інерції відносно відповідних осей – повздовжньої, поперечної та вертикальної, кг × м²

$M_{x,y,z}$ – сумарні моменти сил, що діють на літак вздовж відповідних осей, Н×м

$\omega_{x,y,z}$ – кутові швидкості руху літака відносно відповідних осей, °/сек

x, y, z – координати положення літака у земній системі координат, м

H – барометрична висота, м

Для того, аби цією системою можна було користуватись при дослідженні динаміки польоту, проводяться важливі перетворення.

По-перше, лінеаризація системи – за допомогою розкладу в ряд Тейлора в околах параметрів руху, що відповідають рівномірному незбуреному рухові:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta V}{dt} = \frac{P^V - X^V}{m} \Delta V - \frac{P\alpha + X^\alpha}{m} \Delta\alpha - g \cos \Theta \Delta\Theta - \frac{X^{\delta_B}}{m} \Delta\delta_B + \frac{X_B}{m} \\ \frac{d\Delta\Theta}{dt} = \frac{P^V\alpha + Y^V}{mV} \Delta V + \frac{P + Y^\alpha}{mV} \Delta\alpha + \frac{g \sin \Theta}{V} \Delta\Theta + \frac{Y^{\delta_B}}{mV} \Delta\delta_B + \frac{Y_B}{mV} \\ \frac{d\Delta\omega_z}{dt} = \frac{M_z^V}{I_z} \Delta V + \frac{M_z^\alpha}{I_z} \Delta\alpha + \frac{M_z^{\omega_z}}{I_z} \Delta\omega_z + \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{I_z} \Delta\dot{\alpha} + \frac{M_z^{\delta_B}}{I_z} \Delta\delta_B + \frac{M_z^{\dot{\delta_B}}}{I_z} \Delta\dot{\delta_B} + \frac{M_{zB}}{I_z} \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \Delta\omega_z \\ \Delta\alpha = \Delta\vartheta - \Delta\Theta \\ \frac{d\Delta x}{dt} = \cos \Theta \Delta V - V \sin \Theta \Delta\Theta \\ \frac{d\Delta H}{dt} = \sin \Theta \Delta V + V \cos \Theta \Delta\Theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \frac{d\Delta\Psi}{dt} = \frac{P - Z^\beta}{mV} \Delta\beta - \frac{P\alpha + Y}{mV} \Delta\gamma_c - \frac{Z^{\delta_H}}{mV} \Delta\delta_H - \frac{Z_B}{mV} \\ \frac{d\Delta\omega_x}{dt} = \frac{M_x^\beta}{I_x} \Delta\beta + \frac{M_x^{\omega_x}}{I_x} \Delta\omega_x + \frac{M_x^{\omega_y}}{I_x} \Delta\omega_y + \frac{M_x^{\delta_e}}{I_x} \Delta\delta_e + \frac{M_x^{\delta_H}}{I_x} \Delta\delta_H + \frac{M_{xB}}{I_x} \\ \frac{d\Delta\omega_y}{dt} = \frac{M_y^\beta}{I_y} \Delta\beta + \frac{M_y^{\omega_x}}{I_y} \Delta\omega_x + \frac{M_y^{\omega_y}}{I_y} \Delta\omega_y + \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{I_y} \Delta\dot{\beta} + \frac{M_y^{\delta_H}}{I_y} \Delta\delta_H + \frac{M_y^{\delta_H}}{I_y} \Delta\delta_H + \frac{M_{yB}}{I_y} \\ \frac{d\Delta\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} = \Delta\omega_x - tg \vartheta \Delta\omega_y \\ \frac{d\Delta z}{dt} = -V \cos \theta \Delta\Psi \\ \Delta\beta = \cos \theta \Delta\psi - \cos \theta \Delta\Psi + \alpha \Delta\gamma \\ \Delta\gamma_c = tg \theta \Delta\beta + \frac{\cos \vartheta}{\cos \theta} \Delta\gamma \end{array} \right.$$

Позначення:

Тут і далі верхнім індексом позначають похідну величини за вказаним параметром. Наприклад: M_x^β – похідна моменту відносно осі x по куту ковзання $\frac{\partial M_x}{\partial \beta}$, $M_y^{\omega_y}$ – похідна $\frac{\partial M_y}{\partial \omega_y}$ моменту відносно осі y по кутовій швидкості відносно цієї ж осі.

$\delta_e, \delta_v, \delta_H$ – кути відхилення керуючих органів літака: елеронів, руля висоти та напрямку, відповідно. Якщо індекс при δ відсутній, то мається на увазі той орган керування, систему рівнянь каналу якого розглядають в даний момент.

В подальших виведеннях знак Δ , який означає відхилення певного параметра від початкового значення, буде опускаватися.

По-друге, розділення повздовжнього, поперечного та бокового рухів літака – приймається припущення про те, що при маневруванні в певній площині, сили та моменти від перехресної чутливості будуть парироватися пілотом (оператором), або системою стабілізації:

По-третє, введення динамічних коефіцієнтів $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$, які впорядковують зовнішній вид системи та спрощують подальші математичні операції. Тут i – номер рівняння у системі повздовжнього та бокового руху, відповідно, а j , – номер змінної величини, при якій стоїть коефіцієнт у цьому рівнянні згідно таблиці:

0	1	2	3	4	5
V	ϑ	α	δ_B	Θ	X_B, Y_B, M_{zB}

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta V}{dt} + a_{00}\Delta V + a_{02}\Delta\alpha + a_{04}\Delta\Theta = -a_{03}\Delta\delta_B + a_{05}X_B \\ a_{10}\Delta V + \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + a_{11}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + a_{12}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + a_{12}\Delta\alpha = -a'_{13}\frac{d\Delta\delta_B}{dt} - a_{13}\Delta\delta_B + a_{15}M_{zB}, \\ a_{40}\Delta V + a_{42}\Delta\alpha + a_{44}\Delta\Theta - \frac{d\Delta\theta}{dt} = -a_{43}\Delta\delta_B + a_{45}Y_B \\ -\Delta\vartheta + \Delta\alpha + \Delta\Theta = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega_x}{dt} + c_{11}\omega_x + c'_{11}\omega_y + c_{12}\beta = -c_{13}\delta_e - c'_{13}\delta_H + c_{15}M_{xB} \\ \dot{b}_{11}\omega_x + \frac{d\omega_y}{dt} + b_{11}\omega_y + b_{12}\beta + \dot{b}_{12}\frac{d\beta}{dt} = -b_{13}\delta_H - \dot{b}_{13}\frac{d\delta_H}{dt} + b_{15}M_{yB}. \\ \cos\Theta\frac{d\Psi}{dt} - (b_{42} - \dot{b}_{42})\beta - b_{46}\gamma = b_{43}\delta_H + b_{45}Z_B \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos\vartheta}\omega_y \\ \frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - tg\vartheta \cdot \omega_y \\ \cos\Theta \cdot \Psi = \cos\Theta \cdot \psi - \beta + \alpha\gamma \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Коефіцієнти a_{ij}, b_{ij} пов'язані із аеродинамічними та конструктивними характеристиками ЛА наступним чином:

$$\begin{array}{ll} a_{00} = \frac{X^V - P^V}{m}, [1/c] & a_{02} = \frac{X^\alpha + P\alpha}{m}, [M/c^2] \\ a_{03} = \frac{X^{\delta_B}}{m}, [M/c^2] & a_{04} = g \cos\Theta, [M/c^2] \\ a_{10} = -\frac{M_z^V}{I_z}, [1/M \cdot c] & a_{11} = -\frac{M_z^{\omega_z}}{I_z}, [1/c] \\ a_{12} = -\frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{I_z}, [1/c^2] & a'_{12} = -\frac{M_z^\alpha}{I_z}, [1/c] \\ a_{13} = -\frac{M_z^{\delta_B}}{I_z}, [1/c^2] & a'_{13} = -\frac{M_z^{\delta_B}}{I_z}, [1/c] \\ a_{40} = \frac{P^V\alpha + Y^V}{mV}, [1/M] & a_{42} = \frac{P + Y^\alpha}{mV}, [1/c] \\ a_{43} = \frac{Y^{\delta_B}}{mV}, [1/c] & a_{44} = \frac{g}{V} \sin\Theta, [1/c] \\ a_{05} = \frac{1}{m}, [1/кг] & a_{15} = \frac{1}{I_z}, [1/(кг \cdot м^2)] \\ a_{45} = \frac{1}{mV}, [с/кг \cdot м] & \end{array}$$

Коефіцієнт $a_{11} = -\frac{M_z^{\omega z}}{I_z}$, називається коефіцієнтом демпфування літального апарата по тангажу. Величина $-a_{11}$ представляє собою приріст кутового прискорення обертання ЛА по осі z , викликаного приростом кутової швидкості на одиницю. Оскільки кутове прискорення протидіє обертанню ЛА, то його дію називають демпфуванням.

Коефіцієнт $a_{42} = \frac{P+Y^\alpha}{mV} = \frac{57,3C_y^\alpha qS+P}{mV}$ містить інформацію про похідну коефіцієнта підйомної сили по куту атаки

$$C_y^\alpha = \frac{a_{42}mV-P}{57,3qS}$$

$$b_{11} = -\frac{M_y^{\omega y}}{I_y}, [1/c]$$

$$\dot{b}_{11} = -\frac{M_y^{\omega x}}{I_y}, [1/c]$$

$$b_{12} = -\frac{M_y^\beta}{I_y}, [1/c^2]$$

$$\dot{b}_{12} = -\frac{M_y^\beta}{I_y}, [1/c]$$

$$b_{13} = -\frac{M_y^{\delta_H}}{I_y}, [1/c^2]$$

$$\dot{b}_{13} = -\frac{M_y^{\delta_H}}{I_y}, [1/c]$$

$$b_{15} = \frac{1}{I_y}, [1/кг \cdot м^2]$$

$$\dot{b}_{42} = a_{44} = \frac{g}{V} \sin \theta, [1/c]$$

$$b_{42} = \frac{-Z^\beta + P}{mV}, [1/c]$$

$$c_{11} = -\frac{M_x^{\omega x}}{I_y}, [1/c]$$

$$b_{43} = -\frac{Z^{\delta_H}}{mV}, [1/c]$$

$$c_{12} = -\frac{M_x^\beta}{I_x}, [1/c^2]$$

$$b_{45} = \frac{1}{mV}, [с/кг \cdot м]$$

$$c_{13} = -\frac{M_x^{\delta_e}}{I_x}, [1/c^2]$$

$$b_{46} = -\frac{g}{V} \cos \vartheta, [1/c]$$

По-четверте, використовуючи перетворення Лапласа, переходять від диференціальних рівнянь до передатних функцій літака за вхідними та вихідними параметрами.

Для отримання передатних функцій повздовжнього руху систему (2.1) записують в операторній формі

$$\begin{cases} p(p + a_{11})\vartheta + (p\acute{a}_{12} + a_{12})\alpha = -(p\acute{a}_{13} + a_{13})\delta \\ p\theta - a_{42}\alpha = a_{43}\delta \\ \vartheta - \theta - \alpha = 0 \end{cases}. \quad (2.4)$$

Щоб записати співвідношення між зображеннями $\vartheta(p), \theta(p), \alpha(p), \delta(p)$ параметрів $\vartheta(t), \theta(t), \alpha(t), \delta(t)$, систему (2.4) розв'язують відносно ϑ, θ та α . Отримують

$$\vartheta(p) = \frac{\Delta_\vartheta}{\Delta}, \theta(p) = \frac{\Delta_\theta}{\Delta}, \alpha(p) = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \text{ де} \quad (2.5)$$

Δ – головний визначник системи (2.4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} p(p + a_{11}) & 0 & p\acute{a}_{12} + a_{12} \\ 0 & p & -a_{42} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -p[p^2 + (a_{11} + \acute{a}_{12} + a_{42})p + a_{12} + a_{11}a_{42}],$$

$\Delta_\vartheta, \Delta_\theta, \Delta_\alpha$ – приєднані визначники, які отримуються із головного шляхом заміни відповідного стовпчика на такий, що складений із правої частини системи (2.4):

$$\Delta_\vartheta = \begin{vmatrix} -(p\acute{a}_{13} + a_{13})\delta & 0 & p\acute{a}_{12} + a_{12} \\ a_{43}\delta & p & -a_{42} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = [\acute{a}_{13}p^2 + (a_{13} + \acute{a}_{13} + \acute{a}_{12}a_{43})p + a_{13}a_{42} - a_{12}a_{43}]\delta$$

$$\Delta_\theta = -[a_{43}p^2 + (a_{11}a_{43} + \acute{a}_{12}a_{43} - \acute{a}_{13}a_{42})p + a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42}]\delta;$$

$$\Delta_\alpha = p[(a_{43} + \acute{a}_{13})p + a_{11}a_{43} + a_{13}]\delta.$$

Користуючись (2.5), отримують вирази повних передатних функцій.

$$\frac{\vartheta(p)}{\delta(p)} = \frac{-\acute{a}_{13}p^2 - (a_{13} + \acute{a}_{13}a_{42} - \acute{a}_{12}a_{43})p - a_{13}a_{42} + a_{12}a_{43}}{p[p^2 + (a_{11} + \acute{a}_{12} + a_{42})p + a_{12} + a_{11}a_{42}]}.$$

Приймають, що $a_{12} + a_{11}a_{42} \neq 0$. Тоді це рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{\vartheta(p)}{\delta(p)} = K \frac{\frac{-\acute{a}_{13}}{a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42}}p^2 + \frac{a_{11}a_{43} + \acute{a}_{12}a_{43} - \acute{a}_{13}a_{42}}{a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42}}p + 1}{p \left[\frac{1}{a_{12} + a_{11}a_{42}}p^2 + \frac{a_{11} + \acute{a}_{12} + a_{42}}{a_{12} + a_{11}a_{42}}p + 1 \right]}.$$

Тут $K = \frac{-a_{12}a_{43} + a_{13}a_{42}}{a_{12} + a_{11}a_{42}}$ – передатній коефіцієнт літального апарату.

Аналогічно отримують

$$\frac{\theta(p)}{\delta(p)} = K \frac{\frac{a_{43}}{a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42}}p^2 + \frac{-a_{13} - \acute{a}_{13}a_{42} + \acute{a}_{12}a_{43}}{a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42}}p + 1}{p \left[\frac{1}{a_{12} + a_{11}a_{42}}p^2 + \frac{a_{11} + \acute{a}_{12} + a_{42}}{a_{12} + a_{11}a_{42}}p + 1 \right]};$$

$$\frac{\alpha(p)}{\delta(p)} = K\tau_\alpha \frac{\frac{a_{43} + \dot{a}_{13}}{a_{12}a_{43} - a_{13}a_{42}}p + 1}{\frac{1}{a_{12} + a_{11}a_{42}}p^2 + \frac{a_{11} + \dot{a}_{12} + a_{42}}{a_{12} + a_{11}a_{42}}p + 1}.$$

Тут $K\tau_\alpha = -\frac{-a_{13}a_{42} + a_{12}a_{43}}{a_{12} + a_{11}a_{42}}$ – передатний коефіцієнт літака по куту атаки

Якщо за вихідну величину прийняти нормальне перевантаження, то передатна функція $\frac{n_y(p)}{\delta(p)}$ визначається із $\frac{\theta(p)}{\delta(p)}$ з урахування співвідношення

$$n_y(p) = \frac{V}{g} p \theta(p).$$

Звідси

$$\frac{n_y(p)}{\delta(p)} = \frac{V}{g} p \frac{\theta(p)}{\delta(p)}.$$

По-п'яте, приймають низку допущень про малість впливу певних динамічних коефіцієнтів на загальну картину динаміки літака у деяких режимах польоту, зменшуючи таким чином порядок системи та спрощуючи передатні функції.

У літальних апаратів із добре розвиненим крилом та органами керування, які розташовані достатньо далеко від центра маси, тобто у літальних апаратів традиційної схеми та схеми «качка», нормальна сила органів керування $Y^\delta \delta$ є малою та її можна не враховувати при складанні передатних функцій літальних апаратів. Таке допущення, очевидно, не можна застосовувати для літальних апаратів схеми «безхвостка» та з поворотним крилом, а також для безкрилих апаратів типу балістичних ракет.

Якщо нормальна сила органів керування є малою, то у рівняннях збуреного руху та у виразах передатних функцій можна прийняти

$$a_{43} = \frac{Y^\delta \delta}{mV} \approx 0,$$

$$\dot{a}_{43} = -\frac{M_z^\delta}{I_z} \approx 0.$$

Система рівнянь бокового збуреного руху може бути записана в більш або менш складній формі залежно від характеру конкретної розв'язуваної задачі. Для спрощення вводять нахилену земну систему координат $Ox_H y_H z_H$, що отримується із

звичайної земної шляхом повороту останньої на деякий кут θ_n відносно осі Oz_3 . При цьому напрямок нової земної осі Ox_n витримується близьким до напрямку польоту. Це дозволяє зробити наступні спрощення у кінематичних та геометричних співвідношеннях: замінити синуси кутів ϑ та θ самими кутами, косинуси – одиницями та відкинути члени із добутками малих величин; замінюються у перших двох рівняннях (2.2) ω_x та ω_y на $\dot{\gamma}$ та $\dot{\psi}$ та відкидається у третьому рівнянні добуток $\sin \theta \cdot \beta$.

З точки зору аеродинаміки, приймається малість впливу елеронів на момент рискання. При цьому у ЛА стандартної компоновочної схеми вплив крену на рискання проявляється у тому, що при нахиленні ЛА виникає бокова сила, що викликає ковзання, тобто крен літака впливатиме на його рискання. Для уникнення подібного явища необхідно стабілізувати літак по крену під час випробування його на рискання. Якщо система стабілізації достатньо швидко та ефективно усуватиме крен, то вплив бокової сили на рискання буде незначним, і у першому рівнянні (2.16б) можна буде опустити член $\frac{P\alpha + Y}{mV} \Delta \gamma_c$. Якщо прийняти вказані допущення, то із системи рівнянь бокового руху можна буде виділити незалежні системи, що описують крен та рискання. При цьому рівняння, що характеризують рух рискання нічим не відрізнятимуться по формі від рівнянь повздовжнього руху. Куту тангажу ϑ відповідатиме кут рискання ψ ; куту нахилу траєкторії θ – кут повороту траєкторії Ψ ; куту атаки α – кут ковзання β , куту відхилення РВ – кут відхилення РН, а динамічним коефіцієнтам a_{ij} – відповідні коефіцієнти b_{ij} .

2.2 Передатні функції літака: повздовжній рух

Таким чином, по завершенні вищезгаданих перетворень, отримується низка передатних функцій, які описують реакцію літака на вхідні впливи. Для повздовжнього руху це такі вирази:

$$W_{\delta}^{\vartheta}(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}; \quad (2.6)$$

$$W_{\delta}^{\theta}(p) = \frac{K}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}; \quad (2.7)$$

$$W_{\delta}^{\alpha}(p) = \frac{KT_1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}; \quad (2.8)$$

$$W_{\delta}^n(p) = \frac{\frac{V}{g}K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (2.9)$$

У цих рівняннях:

$$\begin{cases} K = -\frac{a_{13}a_{42}}{a_{12}+a_{11}a_{42}} \\ T_1 = \frac{1}{a_{42}} \\ KT_1 = \frac{-a_{13}}{a_{12}+a_{11}a_{42}}, \\ T = \frac{1}{\sqrt{a_{12}+a_{11}a_{42}}} \\ \xi = \frac{a_{11}+a_{12}+a_{42}}{2\sqrt{a_{12}+a_{11}a_{42}}} \end{cases}$$

$\frac{V}{g}$ – константа, відношення швидкості польоту до прискорення вільного падіння. K, KT_1 - коефіцієнти передачі; T – стала часу, ξ – відносний коефіцієнт демпфування.

2.3 Передатні функції літака: боковий та поперечний рух

$$W_{\delta}^{\psi}(p) = \frac{K(T_1 p + 1)}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}; \quad (2.10)$$

$$W_{\delta}^{\Psi}(p) = \frac{K}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}; \quad (2.11)$$

$$W_{\delta}^{\beta}(p) = \frac{KT_1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}; \quad (2.12)$$

$$W_{\delta}^n(p) = \frac{\frac{V}{g}K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}; \quad (2.13)$$

У цих рівняннях:

$$\begin{cases} K = -\frac{b_{13}b_{42}}{b_{12}+b_{11}b_{42}} \\ T_1 = \frac{1}{b_{42}} \\ KT_1 = \frac{-b_{13}}{b_{12}+b_{11}b_{42}}, \\ T = \frac{1}{\sqrt{b_{12}+b_{11}b_{42}}} \\ \xi = \frac{b_{11}+b_{12}+b_{42}}{2\sqrt{b_{12}+b_{11}b_{42}}} \end{cases}$$

Передатна функція ЛА по крену:

$$W_{\delta}^y(p) = \frac{K_e}{p(T_e p + 1)}. \quad (2.14)$$

Тут

$$K_e = -\frac{c_{13}}{c_{11}};$$

$$T_e = \frac{1}{c_{11}}.$$

2.4 Ідентифікація коефіцієнта демпфування

Із вигляду отриманих передатних функцій видно, що в ході ідентифікації літак буде змодельовано коливальними та аперіодичними ланками 2-го та 1-го порядку, відповідно. У каналі тангажу та він поводитиме себе як коливальна ланка, а по кутовій швидкості крену – як аперіодична першого порядку. Поведінка літака у боковому русі може описуватися як коливальним, так і аперіодичним процесом, як буде показано нижче. Першим кроком, який необхідно виконати, є ідентифікація коефіцієнтів цих передатних функцій. За метод ідентифікації було обрано описаний в першому розділі метод ступінчастого вхідного впливу. Головною причиною для цього стала простота проведення дослідів, а також обробки отриманих даних.

Отримання формул, за якими будуть розраховуватися коефіцієнти передатних функцій, наведено нижче.

Літальний апарат відносно вихідних величин α та β (кути атаки та ковзання) являє собою ланку другого порядку:

$$T^2 \ddot{x} + 2\xi T \dot{x} + x = K\delta.$$

Тут x – будь-яка з величин α, β ; δ – кут відхилення відповідного керуючого органу – руля висоти (РВ) або напрямку (РН); T – стала часу; K – коефіцієнт передачі.

Перехідна функція цієї ланки виглядає наступним чином:

$$\frac{x}{K\delta} = 1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \omega t + \frac{\xi}{\omega T} \sin \omega t \right).$$

Тут $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ – власна частота вільних коливань (при наявності демпфування), ξ – відносний коефіцієнт демпфування.

Звичайним для літальних апаратів традиційної компоновальної схеми є коливальний перехідний процес, який відбувається за умови $\xi < 1$.

$$x = x_{уст} \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \omega t + \frac{\xi}{\omega T} \sin \omega t \right) \right], x_{уст} = K\delta.$$

Максимальне значення x у перехідному процесі буде досягнуто в момент часу, що визначається умовою $\dot{x} = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega}$ – через половину періоду після початку перехідного процесу та буде дорівнювати

$$x_{max} = x_{уст} \left(1 + e^{-\frac{\xi\pi}{T\omega}} \right),$$

x_{max} , $x_{уст}$ – максимальне та усталене значення величини x . Визначимо величину перерегулювання σ як відношення максимального відхилення від усталеного значення до величини усталеного значення:

$$\sigma = \frac{x_{різн}}{x_{уст}}. \quad (2.15)$$

Тут $x_{різн} = x_{max} - x_{уст}$. Об'єднавши ці формули, отримаємо

$$\begin{aligned} x_{max} &= (1 + \sigma)x_{уст} \Rightarrow \\ \sigma &= e^{-\frac{\xi\pi}{T\omega}} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Таким чином, отримавши графік перехідного процесу ЛА, як його реакцію на східчає відхилення РВ або РН, та знайшовши величину перерегулювання, можна визначити величину відносного коефіцієнта демпфування

$$\xi = \frac{|\ln(\sigma)|}{\sqrt{\ln(\sigma)^2 + \pi^2}}. \quad (2.17)$$

Дослідимо область застосовності коливальної моделі літака у повздовжньому каналі керування. Для цього побудуємо графік функції (2.16), на діапазоні коефіцієнтів демпфування, притаманному коливальним ланкам другого порядку: $\xi \in [0; 1]$. Графік показано на рис. 2.1:

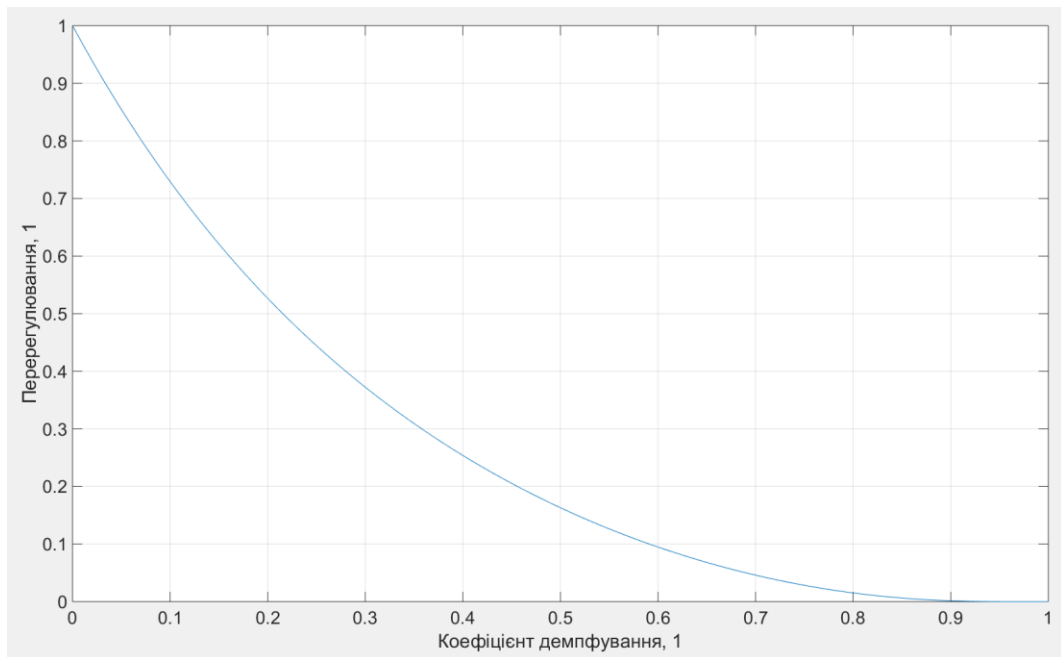


Рис. 2.1 Залежність перерегулювання перехідної функції від коефіцієнта демпфування для коливальної ланки

Бачимо, що область визначення функції (2.17), зворотної до (2.16) – строго обмежена на діапазоні $\sigma \in [0; 1]$, що відповідає властивостям коливальної ланки, відомим із класичної теорії керування. Якщо продовжити її для $\sigma > 1$, то отримуватимемо уже від’ємні значення ξ , що означає наростання коливань кута атаки замість їх заспокоєння. Отже, поведінка реального літака дещо відрізняється від запропонованої моделі при виконанні різких маневрів, коли відхилення руля висоти значне, а перерегулювання можуть перевищувати одиницю. Тому формула (2.17), виведена з припущенням того, що моделлю повздовжнього каналу керування літака є коливальна ланка 2-го порядку, може застосовуватися для експериментального визначення коефіцієнта демпфування тільки в тому випадку, якщо вхідна «сходінка» кута відхилення РВ не призводить до значного перевищення піковим кутом атаки усталеного.

Також дослідимо застосовність графічного методу визначення коефіцієнта демпфування за рис. 2. Для цього складемо порівняльну таблицю коефіцієнтів ξ , розрахованих за ним та за формулою (2.17) для $\sigma = 0.1, 0.2, \dots, 0.5$ (10% ... 50%).

	За [5]	За (2.17)	Різниця	Різниця у %	Перерегулювання σ
Коефіцієнт демпфування ξ	0,618	0,591	-0,027	4%	0,1 (110%)
	0,450	0,456	0,006	1,3%	0,2 (120%)
	0,350	0,358	0,008	2,3%	0,3 (130%)
	0,272	0,280	0,008	2,9%	0,4 (140%)
	0,21	0,215	0,005	2,4%	0,5 (150%)

Табл. 1. Порівняння методів знаходження ξ

Як бачимо, похибка не перевищила 5%, тому обидва методи придатні до використання однаковою мірою.

Згідно із передатною функцією (2.14), на ступінчате відхилення із фіксацією елеронів літальний апарат реагуватиме зміною кутової швидкості відносно повздовжньої осі по аперіодичному закону.

В даному випадку перерегулювання як поняття відсутнє, і усталене значення дорівнює максимальному. Коефіцієнт демпфування як такий у рівнянні відсутній. Швидкість протікання перехідного процесу характеризує стала часу T_e

В загальному випадку, стала часу визначається як

$$T_e = \frac{1}{3t}, \text{ де } t - \text{ час закінчення перехідного процесу.} \quad (2.18)$$

Передатна функція (2.10), що стверджує однакові властивості (коливальність перехідного процесу) рухів тангажу та ковзання, справедлива в основному для літальних апаратів, чия статична стійкість по відповідному каналу достатньо велика порівняно із демпфуванням. В першу чергу, це відноситься до осесиметричних ЛА, а також для ЛА із розвиненим вертикальним оперенням. У іншому випадку, перехідний процес носитиме аперіодичний характер, подібно до крену. Динаміка бокового ковзання по відхиленню руля напряду тоді описується рівнянням (передатною функцією) [26]:

$$\beta(p) = \frac{\alpha_{\beta_2}}{p + \alpha_{\beta_1}} \cdot \delta_{PB}(p) \quad (2.19)$$

Поділимо чисельник та знаменник цієї передатної функції на α_{β_1} . Тоді коефіцієнт при p – стала часу, рівна

$$T_k = \frac{1}{\alpha \beta_1}. \quad (2.20)$$

, характеризуватиме швидкість протікання перехідного процесу.

2.5 Ідентифікація похідної коефіцієнта підйомної сили за кутом атаки

Методика випробувань заснована на принципі рівності підйомної сили та ваги ЛА у горизонтальному прямолінійному польоті без крену та ковзання. Крім того, оскільки висота польоту не змінюється, то кут нахилу траєкторії $\theta = 0$, тому вимірюваний кут тангажу дорівнюватиме куту атаки. Також співпадатимуть за напрямом та значенням вектори земної та повітряної швидкості.

Рівняння рівноваги сил

$$mg = C_y \frac{\rho V^2 S}{2}, \quad (2.21)$$

де m – маса ЛА, g – прискорення вільного падіння, ρ – густина оточуючого повітря, V – повітряна швидкість ЛА, S – характерна площа ЛА; C_y – коефіцієнт підйомної сили.

Значення густини для конкретного випробування береться із довідкових таблиць [27] залежно від температури, при якій проводиться політ. Характерна площа ЛА визначається, виходячи із геометричних розмірів його складових частин. Для літака стандартного аеродинамічного компонування, що складається із прямого крила, фюзеляжу продовгуватої обтічної форми та оперення \perp -подібної схеми, характерна площа обчислюється за формулою:

$$S = S_{\text{крила}} + S_{\text{ГО}} + \sqrt[3]{V_{\text{фюз}}^2}. \quad (2.22)$$

За відомих та сталих значень параметрів m, g, ρ, V та S , коефіцієнт підйомної сили знаходимо за формулою

$$C_y = \frac{2mg}{\rho V^2 S}. \quad (2.23)$$

Для отримання залежності C_y від кута атаки необхідно провести декілька випробувань, під час кожного з яких кут тангажу фіксується у новому значенні. Щоб

зберегти умови рівності підйомної сили та сили тяжіння, необхідно регулювати швидкість польоту відповідною зміною тяги силової установки, перевіряючи виконання умови сталої висоти за показами висотоміра або варіометра. В результаті отримуємо таблицю значень C_y для конкретних кутів атаки α .

Із множини отриманих точок залежності $C_y(\alpha)$ визначальними є точки, що обмежують лінійну ділянку цієї залежності (межі діапазону робочих кутів атаки), а також значення α , після перевищення якого зростання C_y змінюється падінням (критичний кут атаки).

Якщо ЛА обладнано додатковою механізацією, вплив випуску та прибирання якої на льотні характеристики також необхідно вивчити, то додатково проводиться аналогічний цикл випробувань для її відхиленого положення. В результаті отримуємо сімейство кривих $C_y(\alpha)$ для різних значень кута відхилення відповідного органа керування.

2.6 Прямий та альтернативний метод визначення кутів швидкісної системи координат

Необхідно вимірювати наступні параметри польоту: кути атаки α , ковзання β та кутову швидкість крену $\dot{\gamma}$. У випадку, якщо літак обладнано системою повітряних сигналів (СПС), вимірювання цих кутів не представляє особливих складнощів. Однак у випадку проведення льотних експериментів для ідентифікації літаків ультралайт-класу або ж малих безпілотних літальних апаратів, виникають труднощі із вимірюванням цих кутів, оскільки система повітряних сигналів не забезпечує необхідної точності при роботі на малих повітряних швидкостях (<100 км/год). У таких випадках можна користуватись альтернативним способом вимірювання кутів атаки та ковзання. Він полягає у тому, що більшість сучасних літаків та безпілотників обладнані бортовою системою орієнтації, яка вимірює та записує до бортової пам'яті інформацію про кути орієнтації літального апарату у земній системі координат – кути тангажу ϑ та рискання ψ , а також приймачем системи супутникової навігації, за допомогою якої можна виміряти швидкості літального апарату в

земній системі координат, а саме – вертикальну та шляхову швидкість \dot{H}, V , знаючи які, можна визначити кут нахилу траєкторії Θ ; а також безпосередньо кут повороту траєкторії Ψ (курсний кут). Формули для отримання цих кутів мають наступний вигляд:

$$\dot{H} = V \sin \Theta \rightarrow \Theta = \arcsin \frac{\dot{H}}{V}. \quad (2.24)$$

2.7 Математична модель похибки

Вимірювання кожної із вищеназваних величин неминуче відбувається із деякою похибкою, яка і зумовлює кінцеве відхилення значень ідентифікованих параметрів від фактичних. При розробці алгоритму ідентифікації задача забезпечення точності зводиться до побудови моделі похибки вимірювання шуканих величин (коефіцієнтів демпфування та підйомної сили), розподілу коефіцієнтів впливу кожної із похибок та визначення величин максимально допустимих похибок, за яких ідентифіковані параметри відрізнятимуться від дійсних на величину, не більшу за допустиму.

В якості джерел приймемо похибки вимірювання кутової орієнтації ЛА $\Delta\vartheta, \Delta\Theta, \Delta\psi, \Delta\Psi$, кутової швидкості по осі крену $\Delta\dot{\gamma}$, швидкості ΔV , а також вплив вітру $\Delta\alpha_B, \Delta\beta_B$ на результати вимірювання та обчислення відповідних кутів та кутових швидкостей.

В результаті, формули для визначення кутів атаки та ковзання приймуть наступний вигляд:

$$\alpha = \hat{\alpha} + \Delta\alpha = \hat{\vartheta} + \Delta\vartheta - \hat{\Theta} - \Delta\Theta + \Delta\alpha_B;$$

$$\beta = \hat{\beta} + \Delta\beta = \hat{\psi} + \Delta\psi - \hat{\Psi} - \Delta\Psi + \Delta\beta_B.$$

Звідси визначаємо сумарну похибку результату вимірювання

$$\Delta\alpha = \Delta\vartheta - \Delta\Theta + \Delta\alpha_B; \quad (2.25)$$

$$\Delta\beta = \Delta\psi - \Delta\Psi + \Delta\beta_B. \quad (2.26)$$

Враховуючи той факт, що ці похибки є випадковими величинами, формули (2.25, 2.26) переписуться

$$\Delta\alpha = \pm \sqrt{\Delta\vartheta^2 + \Delta\Theta^2 + \Delta\alpha_B^2};$$

$$\Delta\beta = \sqrt{\Delta\psi^2 + \Delta\Psi^2 + \Delta\beta_B^2}.$$

Тепер визначимо залежність похибки визначення перерегулювання від похибок вимірюваних параметрів. Згідно (2.15),

$$\sigma = \frac{x_{max} - x_{уст}}{x_{уст}} = \frac{x_{різн}}{x_{уст}}, \text{ де } x - \text{ параметр } \alpha \text{ або } \beta.$$

Визначимо похибку знаходження різниці максимального та усталеного значення

$$\begin{aligned} \hat{x}_{різн} + \Delta x_{різн} &= \hat{x}_{max} + \Delta x_{max} - \hat{x}_{уст} - \Delta x_{уст}; \\ \Delta x_{різн} &= \sqrt{\Delta x_{max}^2 + \Delta x_{уст}^2}. \end{aligned}$$

Оскільки вимірюється одна і та ж величина одним і тим самим вимірювачем,

$$\Delta x_{max} = \Delta x_{уст} = \Delta x.$$

Формула похибки запишеться

$$\Delta x_{різн} = \Delta x \sqrt{2}. \quad (2.27)$$

Перейдемо до похибки перерегулювання. Знайдемо коефіцієнти впливу за відомим законом залежності σ від вхідних параметрів x (2.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x_{різн}} &= \frac{1}{x_{уст}}; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_{уст}} &= -\frac{x_{різн}}{x_{уст}^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Знайдемо залежність похибки перерегулювання від похибки параметрів (із врахуванням (2.27):

$$\begin{aligned} \Delta\sigma(\Delta x) &= \frac{1}{x_{уст}} \cdot \Delta x \sqrt{2} - \frac{x_{різн}}{x_{уст}^2} \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \frac{1}{x_{уст}} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{x_{різн}}{x_{уст}} \right); \\ \Delta\sigma(\Delta x) &= \Delta x \cdot \frac{1}{x_{уст}} \cdot (\sqrt{2} - \hat{\sigma}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Тепер перейдемо до похибки обчислення за формулою (2.17) коефіцієнтів демпфування. Знову скористаємося частковою похідною:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} &= \frac{\pi^2}{\sigma \cdot \sqrt{(\ln \sigma^2 + \pi^2)^3}}; \\ \Delta\xi(\Delta\sigma) &= \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \Delta\sigma = \frac{\pi^2}{\sigma \cdot \sqrt{(\ln \sigma^2 + \pi^2)^3}} \cdot \Delta\sigma. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Задано величину необхідної відносної похибки коефіцієнта демпфування, поділимо (2.28) на (2.17):

$$\delta_{\xi\alpha,\beta} = \left(\frac{\pi^2}{\sigma \cdot \sqrt{(\ln \sigma^2 + \pi^2)^3}} \cdot \frac{\sqrt{\ln(\sigma)^2 + \pi^2}}{\ln(\sigma)} \right) \Delta\sigma;$$

$$\delta_{\xi\alpha,\beta} = \frac{\pi^2}{\sigma \cdot \ln(\sigma) \cdot (\ln \sigma^2 + \pi^2)} \cdot \Delta\sigma. \quad (2.31)$$

Висновки до розділу

Було отримано математичну модель руху літака у вигляді системи диференціальних рівнянь (2.1), (2.2). Після її перетворення на передатні функції (2.8), (2.9), (2.12), (2.14), (2.19) було визначено тип реакції у різних каналах керування літака на вхідні впливи: коливальна ланка другого порядку для повздовжнього руху (кут атаки, нормальне перевантаження), аперіодична ланка першого порядку для поперечного руху (кутова швидкість крену) та аперіодичною або коливальною для бокового (кут ковзання).

Було отримано формули (2.15), (2.17), (2.18), (2.23) для вираховування шуканих коефіцієнтів передатних функцій за результатами експерименту. Було побудовано математичну модель похибки ідентифікації (2.31) із джерелами похибки у вигляді похибок датчиків первинної інформації та зовнішніх вітрових збурень.

Розділ 3. Удосконалений алгоритм ідентифікації

Для того, щоб можливо було виконати поставлену перед алгоритмом ідентифікації задачу та повністю визначити коефіцієнти передатних функцій, необхідно грамотно спланувати льотний експеримент таким чином, щоб максимально коректно та точно зняти перехідні характеристики літака для подальшої обробки. Алгоритм виконання тестових польотів та обробки отриманих даних наведено нижче:

Для проведення вказаної ідентифікації необхідно виконати наступні кроки:

1. Увімкнути реєстрацію параметрів польоту у часі («чорний ящик»). Перед початком польотів визначити повну злітну масу ЛА m .
2. Визначити напрямок та швидкість вітру у місцевості, де проводяться випробування. Випробувальні польоти виконувати проти вітру. Фіксувати час початку кожного випробування для знаходження відповідної ділянки запису параметрів польоту. Виміряти температуру повітря у місці проведення випробувань. Із довідкових таблиць визначити вагову густину ρ повітря.
3. Перед початком тестового маневру – відбалансувати літак за допомогою роботи аеродинамічних поверхонь та/або тяги двигуна.
4. Для випробування на визначення коефіцієнта демпфування виконати різке відхилення РВ (РН, елеронів) на заздалегідь відомий кут з їх фіксацією. При проведенні випробування на рискання утримувати БПЛА від кренів, при випробуванні на крен – усувати ковзання.
5. Для випробування на визначення коефіцієнта підйомної сили відхиленням РВ установити сталий кут тангажу. Слідкуючи за показами висотоміра, добитися їх незмінності шляхом регулювання тяги силової установки. Повторити випробування для іншого кута атаки. Якщо при спробі виходу на черговий кут атаки ЛА відбувається зрив потоку (вібрація, різке опускання носу, звалювання у штопор), випробування припинити, критичним кутом атаки вважати кут тангажу, що відповідав межі стабільного польоту.
6. Після закінчення випробувальних польотів перенести дані бортової пам'яті у вигляді Matlab-файлу (-ів) на ПК для обробки.

7. Виділити ділянки запису кожного випробування. Для випробувань на визначення коефіцієнтів демпфування необхідно визначити наступні величини: максимальні α_{max} ; β_{max} та усталені $\alpha_{уст}$; $\beta_{уст}$ значення перехідного процесу для випробування по осям тангажу та рискання із врахуванням балансувальних значень відповідних кутів $\alpha_{бал}$; $\beta_{бал}$. Для каналу крену необхідно знайти час закінчення перехідного процесу (встановлення сталої кутової швидкості $\dot{\gamma}$). У випадку, коли випробування по каналу рискання показали аперіодичний характер перехідного процесу, визначити час закінчення перехідного процесу.
8. Для випробувань на визначення коефіцієнта підйомної сили необхідно виділити ділянки польоту із заданим сталим кутом тангажу. Визначити момент, коли при зафіксованому тангажі установиться значення висоти (або стане рівним нулю значення вертикальної швидкості). Виділити значення швидкості у цей момент. Провести подібну обробку для кожного кута тангажа. У випадку проведення додаткових випробувань із відхиленими поверхнями механізації провести аналогічні цикли обробки для кожного кута відхилення поверхні. В результаті необхідно отримати пари значень кут тангажу (атаки) α_i — швидкість (V_i).
9. За формулою (2.16) визначаємо величини перерегулювання для каналів тангажа σ_α та рискання σ_β . Визначаємо коефіцієнти демпфування ξ_α та ξ_β за формулою (2.17). Для каналу крену визначаємо сталу часу за формулою (2.18). За потреби, обчислити сталу часу аналогічно до випробування по крену за формулою (2.19).

За формулою (2.23), використовуючи дані, отримані у пунктах 1-2, 7, для кожного значення α обчислюємо відповідне значення C_y . Будуємо графіки $C_y(\alpha)$, із яких визначаємо діапазон робочих кутів атаки, а також критичні значення кутів атаки.

3.1 Визначення вимог до точності вимірювання параметрів руху літака

Спочатку розрахуємо вимоги то точності вимірювання параметрів руху при застосуванні альтернативного методу вимірювання, коли джерелами похибки будуть неточності вимірювання кутового положення та параметрів траєкторії у земній системі координат за допомогою системи орієнтації та СНС $\Delta\vartheta$, $\Delta\psi$, $\Delta\dot{H}$ та ΔV

Проведемо зворотній процес – при заданій точності отримання коефіцієнта демпфування висунемо вимоги до точності вимірювачів параметрів польоту та вітрової похибки. Із (2.30) виразимо $\Delta\sigma$:

$$\Delta\sigma = \delta_{\xi_{\alpha,\beta}} \cdot \frac{\sigma \cdot \ln \sigma \cdot (\ln \sigma^2 + \pi^2)}{\pi^2}. \quad (3.1)$$

Із (2.29) виразимо $\Delta x(\Delta\sigma)$ та підставимо туди (3.1):

$$\begin{aligned} \Delta x &= \pm \frac{\Delta\sigma \cdot \hat{x}_{уст}}{\sqrt{2} - \hat{\sigma}}; \\ \Delta x &= \pm \delta_{\xi_{\alpha,\beta}} \cdot \frac{\sigma \cdot \ln \sigma \cdot (\ln \sigma^2 + \pi^2)}{\pi^2} \cdot \frac{\hat{x}_{уст}}{\sqrt{2} - \hat{\sigma}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

У моделі (2.25), (2.26) прийемо внесок кожної із складових похибок рівноцінним. Отримаємо формули

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta &= \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{3}}; \\ \Delta\theta &= \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{3}}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{\text{в}} &= \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{3}}; \\ \Delta\psi &= \frac{\Delta\beta}{\sqrt{3}}; \\ \Delta\Psi &= \frac{\Delta\beta}{\sqrt{3}}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\Delta\beta_{\text{в}} = \frac{\Delta\beta}{\sqrt{3}}.$$

У (2.31), замінимо параметр x на α та β відповідно. Отримані вирази підставимо у формули (3.4), (3.5):

$$\Delta\vartheta = \Delta\theta = \Delta\alpha_{\text{в}} = \pm \delta_{\xi_{\alpha}} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{\alpha} \cdot \ln \hat{\sigma}_{\alpha} \cdot (\ln \hat{\sigma}_{\alpha}^2 + \pi^2)}{\sqrt{3} \cdot \pi^2} \cdot \frac{\hat{\alpha}_{уст}}{\sqrt{2} - \hat{\sigma}_{\alpha}}; \quad (3.5)$$

$$\Delta\psi = \Delta\Psi = \Delta\beta_{\text{в}} = \pm \delta_{\xi_{\beta}} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{\beta} \cdot \ln \hat{\sigma}_{\beta} \cdot (\ln \hat{\sigma}_{\beta}^2 + \pi^2)}{\sqrt{3} \cdot \pi^2} \cdot \frac{\hat{\beta}_{уст}}{\sqrt{2} - \hat{\sigma}_{\beta}}. \quad (3.6)$$

Виставивши вимоги до точності вимірювання параметрів траєкторії $\Delta\theta, \Delta\Psi$, необхідно перейти до вимог безпосередньо до приймача системи супутникової орієнтації $\Delta\dot{H}, \Delta V$. Для цього знову визначимо коефіцієнти впливу методом часткових похідних відносно (2.24):

$$k_H = \frac{\partial\theta}{\partial\dot{H}} = \frac{1}{\sqrt{V^2 - \dot{H}^2}}; \quad (3.7)$$

$$k_V = \frac{\partial\theta}{\partial V} = -\frac{\dot{H}}{V} \frac{1}{\sqrt{V^2 - \dot{H}^2}}. \quad (3.8)$$

Оскільки похибки $\Delta\dot{H}, \Delta V$ є випадковими, то залежність $\Delta\theta = f(\Delta\dot{H}, \Delta V)$ матиме вигляд:

$$\Delta\theta = \sqrt{(k_H \times \Delta\dot{H})^2 + (k_V \times \Delta V)^2}. \quad (3.9)$$

Визначимо вимоги до $\Delta\dot{H}, \Delta V$, прийнявши вплив кожної з них на кінцеву похибку рівноцінним (з урахуванням (3.7), (3.8)):

$$\Delta\dot{H} \times \frac{1}{\sqrt{V^2 - \dot{H}^2}} = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{2}}; \quad (3.10)$$

$$\Delta V \times \frac{\dot{H}}{V} \times \frac{1}{\sqrt{V^2 - \dot{H}^2}} = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{2}}. \quad (3.11)$$

Звідси:

$$\Delta\dot{H} = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{2}} \times \sqrt{V^2 - \dot{H}^2}; \quad (3.12)$$

$$\Delta V = \frac{\Delta\theta}{\sqrt{2}} \times \frac{V}{\dot{H}} \times \sqrt{V^2 - \dot{H}^2}; \quad (3.13)$$

Задавшись початковими цифрами, підібраними для літака Аеропракт А-22LS, отримаємо наступні результати:

$$\delta_{\xi\alpha} = 10\% = 0,1;$$

$$\delta_{C_y} = 5\% = 0,05;$$

$$V = 120 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 33,3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\dot{H} = \pm 8 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\sigma_\alpha = 0,35;$$

$$\alpha_{\text{уст}} = 4,8^\circ.$$

Вимоги щодо вимірювання кутів тангажу ϑ та нахилу траєкторії θ :

$$\Delta\vartheta = \Delta\theta = \pm 0,11^\circ;$$

Вимоги до вимірювання швидкості в земній системі координат

$$\Delta\dot{H} = \pm 0,123 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\Delta V = \pm 0,341 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для безпілотного літака Aerosonde отримано інші вимоги

$$\delta_{\xi_\alpha} = 10\% = 0,1;$$

$$\delta_{C_y} = 5\% = 0,05;$$

$$V = 65 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 18 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\dot{H} = \pm 0,3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\sigma_\alpha = 0,1;$$

$$\alpha_{\text{уст}} = 6,84^\circ.$$

Вимоги щодо вимірювання кутів тангажу ϑ та нахилу траєкторії θ :

$$\Delta\vartheta = \Delta\theta = \pm 0,1^\circ.$$

Вимоги до вимірювання швидкості в земній системі координат

$$\Delta\dot{H} = \pm 0,115 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\Delta V = \pm 0,295 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3.2 Визначення допустимих швидкостей вітру для проведення ідентифікації

Визначимо вимоги до вертикальної та бокової складових вітру на основі вітрових похибок знаходження кутів атаки та ковзання. Для цього приймемо модель вітрової похибки відповідного кута як синус між векторами істинної (повітряної) швидкості та відповідної складової швидкості вітру. Для кута атаки це вертикальна складова, для кута ковзання – бокова. Оскільки кути атаки та ковзання у своєму робочому діапазоні достатньо малі ($\leq 10^\circ$), то чисельне значення синуса наближається до значення кута у радіанах і можна отримати наступні формули для вітрових похибок:

$$\Delta\alpha_B = \frac{W_y}{V}; \quad (3.14)$$

$$\Delta\beta_B = \frac{W_z}{V}. \quad (3.15)$$

У цих формулах W_y та W_z це вертикальна та бокова складові вітру, відповідно. V – істинна повітряна швидкість руху.

Узявши вирази (3.5) та (3.6), підставимо їх у виражені із (3.14) та (3.15) швидкості складових вітру, перерахувавши одиниці вимірювання із градусів у радіани:

$$W_H = \pm\delta_{\xi\alpha} \cdot \frac{\widehat{\sigma}_\alpha \cdot \ln \widehat{\sigma}_\alpha \cdot (\ln \widehat{\sigma}_\alpha^2 + \pi^2)}{\sqrt{3} \cdot \pi^2} \cdot \frac{\widehat{\alpha}_{уст}}{\sqrt{2} - \widehat{\sigma}_\alpha} \cdot V \cdot \frac{\pi}{180^\circ};$$

$$W_y = \pm\delta_{\xi\beta} \cdot \frac{\widehat{\sigma}_\beta \cdot \ln \widehat{\sigma}_\beta \cdot (\ln \widehat{\sigma}_\beta^2 + \pi^2)}{\sqrt{3} \cdot \pi^2} \cdot \frac{\widehat{\beta}_{уст}}{\sqrt{2} - \widehat{\sigma}_\beta} \cdot V \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Спростивши, отримаємо вимоги до складових вітру:

$$W_z = \pm\delta_{\xi\alpha} \cdot V \cdot \frac{\widehat{\sigma}_\alpha \cdot \ln \widehat{\sigma}_\alpha \cdot (\ln \widehat{\sigma}_\alpha^2 + \pi^2)}{180^\circ \cdot \pi \sqrt{3}} \cdot \frac{\widehat{\alpha}_{уст}}{\sqrt{2} - \widehat{\sigma}_\alpha}; \quad (3.16)$$

$$W_y = \pm\delta_{\xi\beta} \cdot V \cdot \frac{\widehat{\sigma}_\beta \cdot \ln \widehat{\sigma}_\beta \cdot (\ln \widehat{\sigma}_\beta^2 + \pi^2)}{180^\circ \cdot \pi \sqrt{3}} \cdot \frac{\widehat{\beta}_{уст}}{\sqrt{2} - \widehat{\sigma}_\beta}. \quad (3.17)$$

Для оцінки похибки знаходження коефіцієнта підйомної сили знову скористаємося методом часткової похідної стосовно формули (2.23). При цьому за джерело похибки вважатимемо вплив лобової складової вітру на визначення істинної та земної швидкості:

$$\frac{\partial C_y}{\partial \widehat{V}} = \frac{-4mg}{\rho S \widehat{V}^3};$$

$$\Delta C_y = \frac{\partial C_y}{\partial \widehat{V}} \cdot W_x = \frac{-4mg}{\rho S \widehat{V}^3} \cdot W_x.$$

Перейдемо до відносних випадкових похибок:

$$\delta_{C_y} = \pm \frac{\Delta C_y}{C_y} = \pm \frac{4mg}{\rho S \widehat{V}^3} \cdot \frac{\rho S \widehat{V}^2}{2mg} \cdot W_x = \pm \frac{2}{\widehat{V}} W_x. \quad (3.18)$$

Таким чином, вимога до лобової складової вітру формулюється наступним чином:

$$W_x = \pm \frac{\delta_{C_y} \cdot V}{2}. \quad (3.19)$$

Зауважимо, що у всіх формулах вище відсутнє ділення на 100%, тому задані відносні похибки ідентифікації необхідно перевести у десяті частки. Для коефіцієнтів демпфування $\delta_{\xi_{\alpha,\beta}} = 0,1$, для коефіцієнта підйомної сили - $\delta_{C_y} = 0,05$, відповідно.

Тепер необхідно перейти від вимог до окремих складових поривів вітру до так званого середнього горизонтального вітру W_{20} . Для цього скористаємось номограмою із ОСТ 1 02514-84 [28], яка дозволяє, знаючи швидкість пориву вітру, визначити його кумулятивну повторюваність F . Кумулятивна повторюваність – це величина, що характеризує імовірність зустрічі із поривом вітру заданої величини на 1 км пройденої відстані. Знаючи шлях L , проходжуваний літаком впродовж випробувального польоту, отримаємо імовірність P зустрічі із заданим поривом за формулою

$$P = F \times L. \quad (3.20)$$

Після цього можна визначити середньоквадратичне відхилення (СКВ) σ_{W_y} вертикального пориву вітру, приймаючи його за стохастичний процес, що описується законом нормального (Гауссового) розподілу, математичне очікування якого дорівнює нулю. Для цього скористаємось довідковими таблицями нормального розподілу [29].

При дослідженні динаміки літальних апаратів прийнято вітрові впливи описувати за допомогою моделі Драйдена, яка, поміж іншого, встановлює залежність між СКВ вертикальних поривів вітру σ_{W_y} та величиною середнього горизонтального вітру W_{20} у вигляді формули

$$\sigma_{W_y} = 0,1 \times W_{20}. \quad (3.21)$$

Розрахунок максимально допустимого середнього горизонтального вітру для літака А-22LS:

$$W_y = 0,224 \frac{M}{c} \rightarrow F = 4 \times 10^{-1} \text{ км}^{-1}, L = 2 \text{ км} \rightarrow$$

$$P = 0,8 \rightarrow \sigma_{W_y} = 1,28 \frac{M}{c};$$

$$W_{20} = 12,8 \frac{M}{c}.$$

Розрахунок максимально допустимого середнього горизонтального вітру для БПЛА Aerosonde:

$$W_y = 0,113 \frac{\text{M}}{\text{c}} \rightarrow F = 4.2 \times 10^{-1} \text{ км}^{-1}, L = 2 \text{ км} \rightarrow$$

$$P = 0,84 \rightarrow \sigma_{W_y} = 1,05 \frac{\text{M}}{\text{c}};$$

$$W_{20} = 10.5 \frac{\text{M}}{\text{c}}.$$

Враховуючи наявність чіткої залежності між способом проведення тестового польоту та його результатами, а саме – впливу величини співвідношення отриманих пікових та усталених значень кута атаки на відповідність моделі описуваному процесу, доцільно дослідити також вплив параметру σ на вимоги, які висуваються до вимірювання параметрів руху. Для цього розглянемо формулу (2.33), застосовуючи її до сумарної похибки вимірювання кута атаки. Очевидно, що головними чинниками, які впливають на необхідну точність вимірювань є значення σ_α та $\alpha_{\text{уст}}$ – величини перерегулювання та усталеного кута атаки (з поправкою на балансувальний α_0). На рис. 3.1 зображено сімейство кривих $\Delta\alpha_\Sigma = f(\sigma_\alpha)$ для різних значень $\alpha_{\text{уст}} - \alpha_0 = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 5^\circ$

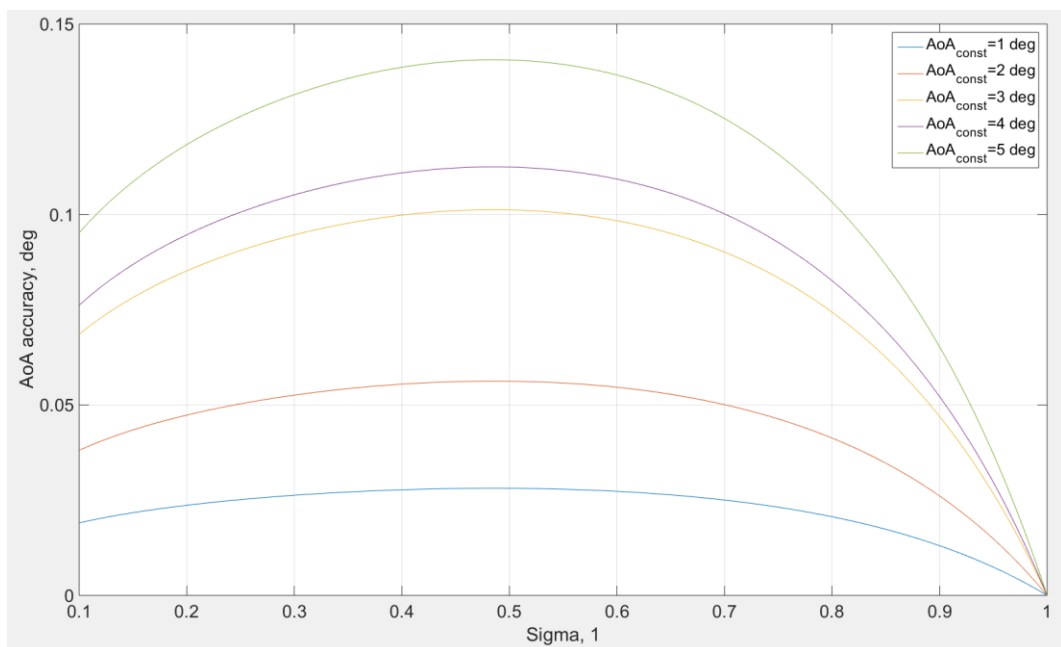


Рис. 3.1 Оптимальні параметри експерименту

З нього видно, щоб експеримент був найменш чутливим до похибок вимірювань, необхідно прагнути забезпечити максимально можливе значення усталеного кута атаки. Існує два способи цього досягти.

По-перше, можна збільшити кут відхилення руля висоти, оскільки усталене значення кута атаки прямо йому пропорційне. Однак тоді пікове значення також виросте, причому набагато більше, що призведе до росту отриманого перерегулювання і, можливо, навіть виходу його за одиницю, що неприпустимо. Також є небезпека виводу літака на закритичний кут атаки в ході такого польоту

По-друге, оскільки в залежності фігурує саме усталений кут атаки з поправкою на балансувальний, то понизити вимоги по точності можна, зменшивши саме α_0 . Для цього необхідно балансувати літак перед початком експерименту на дещо більшій повітряній швидкості.

Як бачимо із отриманих рівнянь (3.5), (3.6), (3.12), (3.13), (3.16), (3.17), (3.19), (3.20) точність ідентифікації параметрів ЛА залежить як від похибок вимірювання параметрів руху (інструментальних та вітрових), так і від величин цих параметрів. Чим вужчий діапазон робочих кутів атаки та ристання, чим меншою є крейсерська швидкість ЛА, тим більш точними повинні бути датчики бортової системи орієнтації та СНС (або СПС) та тим сильнішим є вплив вітру на точність ідентифікації. Також доцільно починати тестовий політ на підвищеній швидкості та уникати значних відхилень руля висоти в його ході.

3.3 Склад бортових вимірювачів для проведення льотного експерименту

В якості випробувального стенду для проведення льотного експерименту було обрано авіаційний симулятор вітчизняного надлегкого літака Аеропракт А-22LS. Фото кабіни симулятора на рис. 3.2. Причини вибору цієї платформи:

1. Програмне забезпечення симулятора – Microsoft Flight Simulator X є платформою із відкритим SDK (Software Development Kit), завдяки чому до неї створено величезну кількість модифікацій, серед яких є і так звані «чорні скриньки» (Flight Data Recorders), які дозволяють записувати кілька десятків параметрів польоту одночасно з режимі реального часу у зручному для зчитування форматі. Наприклад – безкоштовна утиліта AeroLog, встановлена на обраному тренажері.

2. Програма реалістично відтворює фізичні принципи польоту, процеси та природні явища, з якими взаємодіє літак у небі, дозволяє моделювати велику кількість зовнішніх впливів.
3. Літак-прототип симулятора за своїм призначенням є легкою двомісною навчально-тренувальною машиною, не є вимогливим до вмінь та навичок пілота.
4. Кабіна обладнана спареними основними органами керування – штурвали та педалі, а також зручна у використанні екіпажем із двох людей, що позитивно впливає на якість проведення експериментів.
5. Як буде показано нижче, використання літака-прототипа або його аналога стикається із проблемами з боку точності штатних бортових датчиків.



Рис. 3.2 Кабіна авіасимулятора Аеропракт А-22LS

Згідно інформації від підприємства-виробника, на літаки класу Аеропракт А-22LS та А-32 встановлюються наступні системи орієнтації та навігації [30]:

А) Dynon Avionics SkyView. До її складу ходять система орієнтації SV-ADAHRS-200/201 та GPS-навігатор SV-GPS-250/SV-GPS-2020 GPS Receiver;

Б) MGL Avionics SP-6 Magnetometer, SP-7 AHRS – система орієнтації;

В) Garmin G3X: система орієнтації GSU-25/25B та GPS-приймач GPS 20A.

Згідно технічної документації від виробників, ці системи володіють наступними показниками точності [31],[32],[33]:

- Точність вимірювання кутового положення літака в земній системі координат: $\Delta\vartheta_{\Sigma} = \Delta\psi_{\Sigma} = \pm 1^{\circ}$;
- Точність вимірювання земної та вертикальної швидкостей: $\Delta\dot{H} = \Delta V = \pm 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
- Точність вимірювання істинної повітряної швидкості: $\Delta V = \pm 1,5 \frac{\text{км}}{\text{год}} = \pm 0,42 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Згідно специфікації систем орієнтації та навігації, вимоги по точності системи супутникової навігації виконуються, як і щодо погодних умов – середня швидкість вітру в м. Києві та околицях у кілька разів менша за критичну. Однак система орієнтації є на порядок грубшою за необхідну, тому проводити політ на ідентифікацію на літаку А-22LS без установки точніших датчиків орієнтації не має сенсу.

Наприклад, достатніми характеристиками володіють наступні системи орієнтації (рис. 3.3, 3.4):



Виробник: VectorNav Ltd.
Модель: VN-200
Точність по куту тангажу: $\pm 0,03^{\circ}$ (динамічна)

Рис. 3.3 AHRS-модуль VectorNav



Виробник: Garmin Ltd.

Модель: GTN-750Xi

Точність по земній швидкості: $\pm 0,08 \frac{M}{c}$

Рис. 3.4 GPS-приймач Garmin

Висновки до розділу

У розділі було визначено алгоритм проведення льотного експерименту та обробки отриманих даних; враховано вимоги до похибок вимірювання параметрів польоту за умови проведення експерименту на легкому літаку Аеропракт А-22LS. Було визначено, що стандартна авіоніка даного типу літаків не задовольняє вимоги по точності системи орієнтації, однак існують аналоги із прийнятними показниками. Погодні умови в Києві та околицях дозволяють проводити такі експерименти.

Розділ 4. Імітаційне моделювання алгоритму, льотний експеримент та його результати

Для імітаційного моделювання роботи алгоритму ідентифікації коефіцієнта повздовжнього демпфування було використано модель повздовжнього руху легкого БПЛА фірми Aerosonde (рис. 4.1)

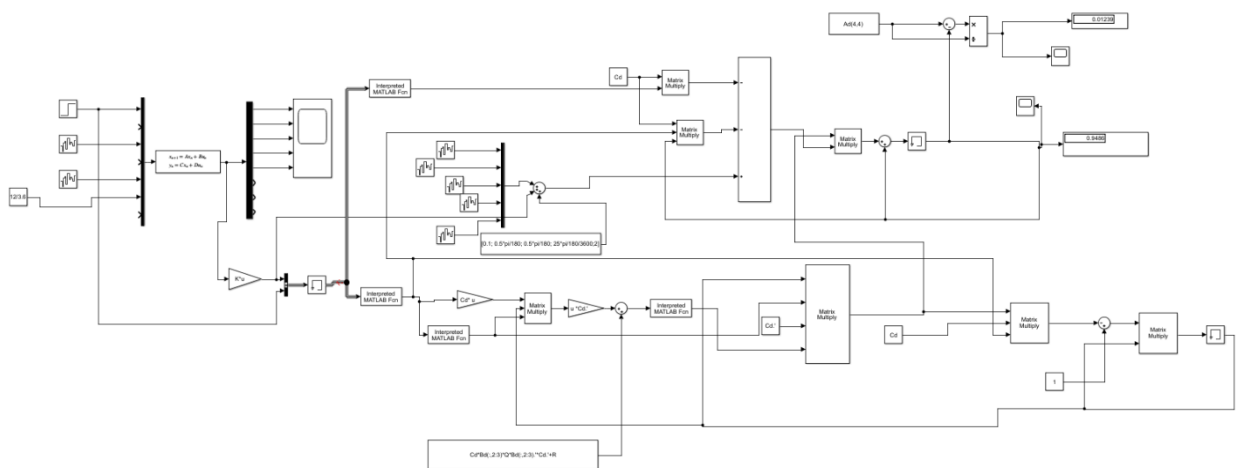


Рис. 4.1 Алгоритм ідентифікації параметрів моделі повздовжнього руху БПЛА Aerosonde у середовищі Simulink

Ідентифікація проводилась шляхом прикладення до моделі в балансувальному режимі тестового відхилення руля висоти на 0,1 рад, або $5,7^\circ$ та передачі отриманої перехідної характеристики (рис. 4.3) в алгоритм обробки. На рис. 4.3 перехідні характеристики перераховано у відхиленнях від балансувальних (початкових) значень

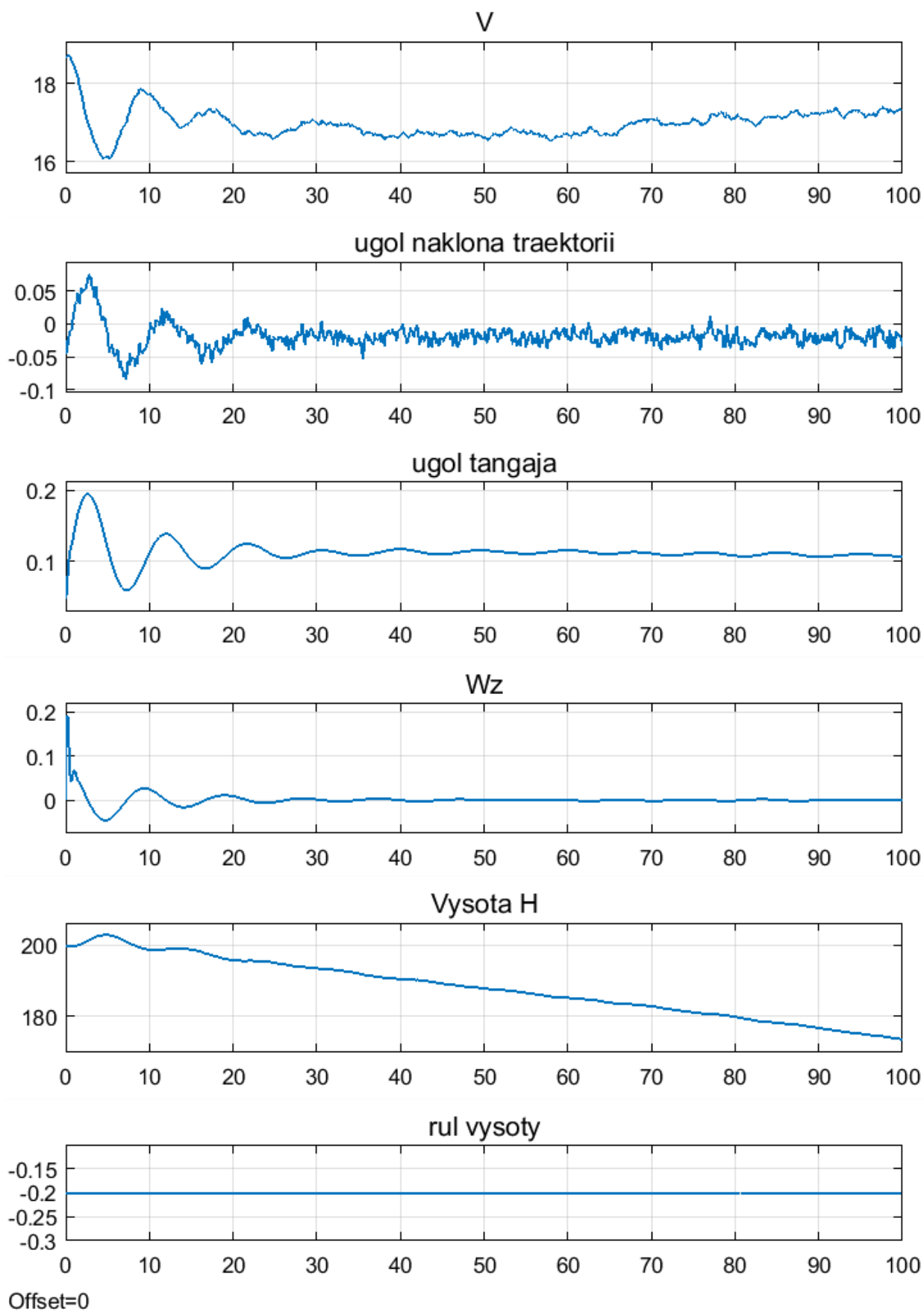


Рис. 4.2 Абсолютні перехідні характеристики

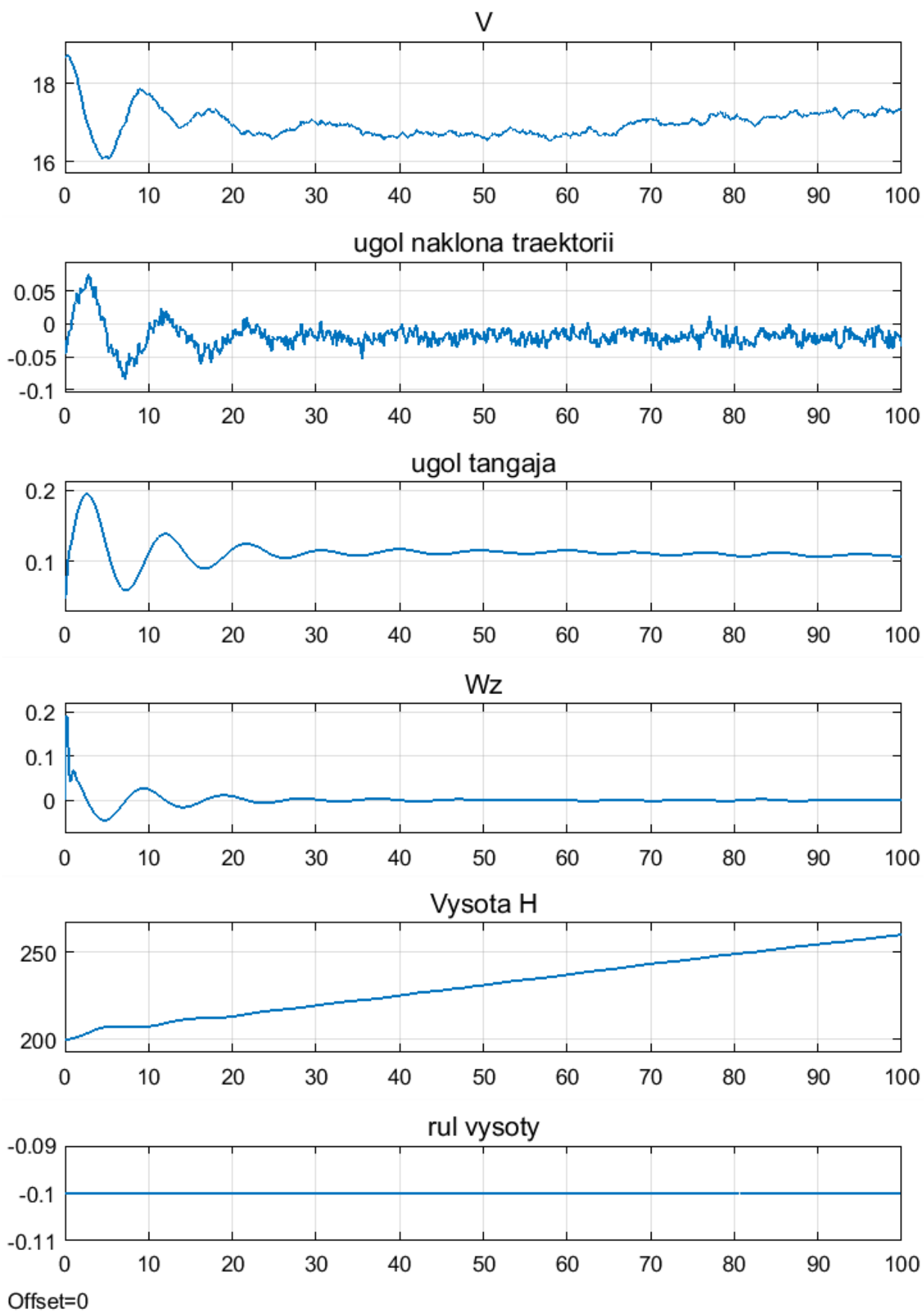


Рис. 4.3 Перехідні характеристики у відхиленнях

Окрім кута РВ, на вхід системи подано також похибки навігаційної системи у вигляді білих шумів з інтенсивностями

```
R=diag([0.01, (0.5*pi/180)^2, (0.5*pi/180)^2, (25*pi/180/3600)^2, 1]);
```

Частота роботи ОФК 100Гц.

Отримуваний вихід – розраховане значення відносної похибки ідентифікації коефіцієнту демпфування в одиницях (рис. 4.4).

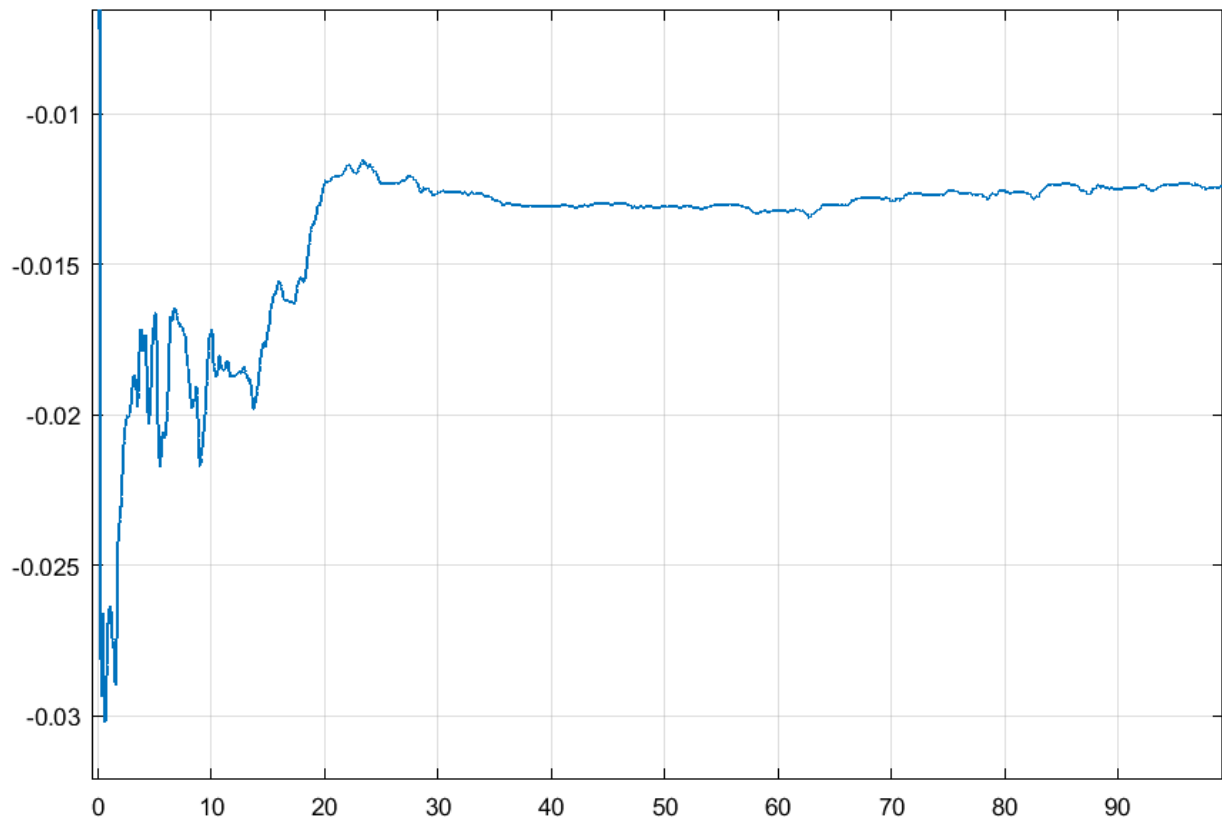


Рис. 4.4 Відносна похибка ідентифікації коефіцієнта демпфування

Якщо на вхід системи подати також постійні зміщення вимірювачів навігаційної системи $[0.1; 0.5\pi/180; 0.5\pi/180; 25\pi/180/3600; 2]$, то отримаємо наступне значення похибки ідентифікації (рис. 4.5):

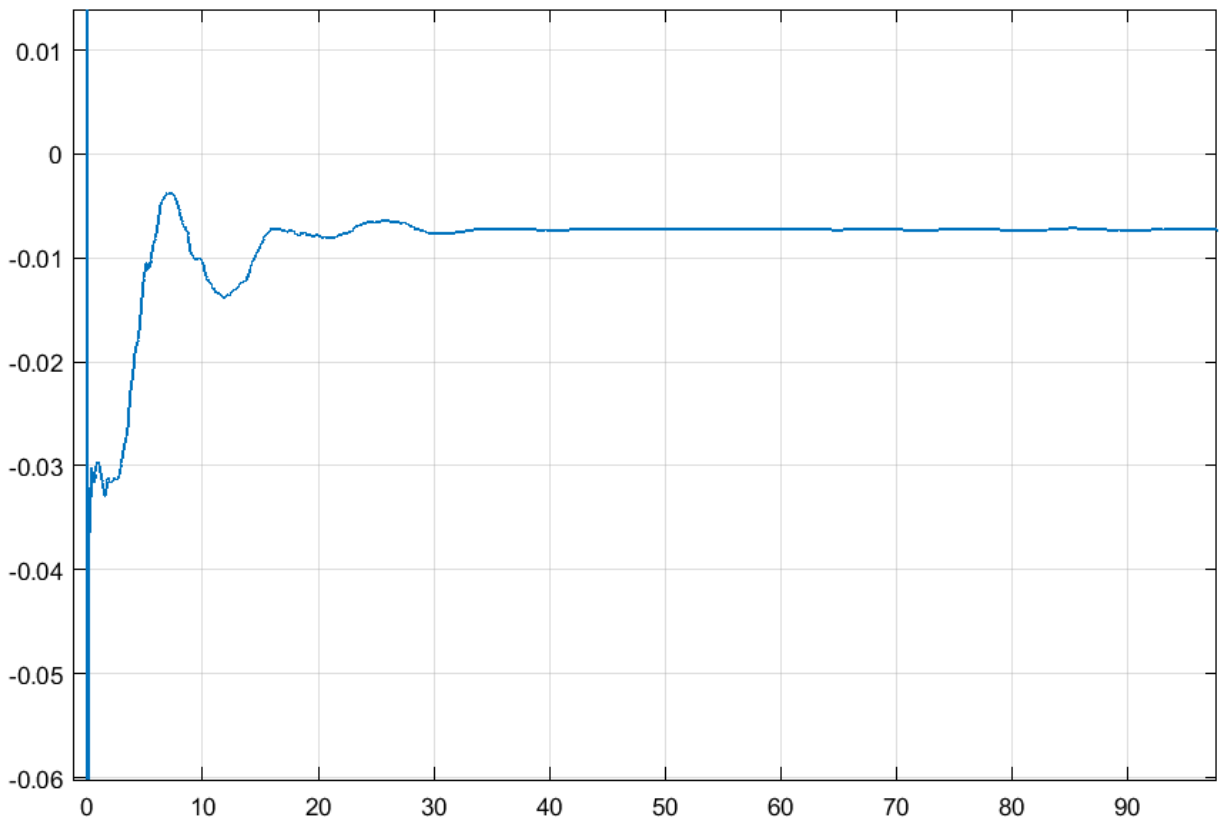


Рис. 4.5 Кінцева похибка ідентифікації КД

Як бачимо, значення відносної похибки ідентифікації при застосуванні адаптованого алгоритму ступінчастої дії становить не перевищує 0,1 або ж 10%, що означає його працездатність.

В ході проведення льотних експериментів на ідентифікацію коефіцієнта по-вздовжнього демпфування було виконано кілька тестових польотів. В кожному із них, згідно програми випробувань, було виконано зліт, набір висоти до $\sim 200 \dots 300$ м. Після закінчення 1 та 2 розвороту літак балансували перед початком експерименту у каналі кута атаки на швидкості $\sim 120 \dots 130$ км/год. Відхилення руля висоти виконувалося за час, що не перевищує $0,3 \dots 0,5$ с. Середньостатистичні значення кута відхилення руля висоти – $3 \dots 5^\circ$. Після практично повного заспокоєння коливань кута атаки експеримент завершувався, літак повертався на аеродром або робив ще одне коло із тестовим прольотом. Записи найбільш вдалих польотів зображено на рис. 4.6, 4.7, 4.8:

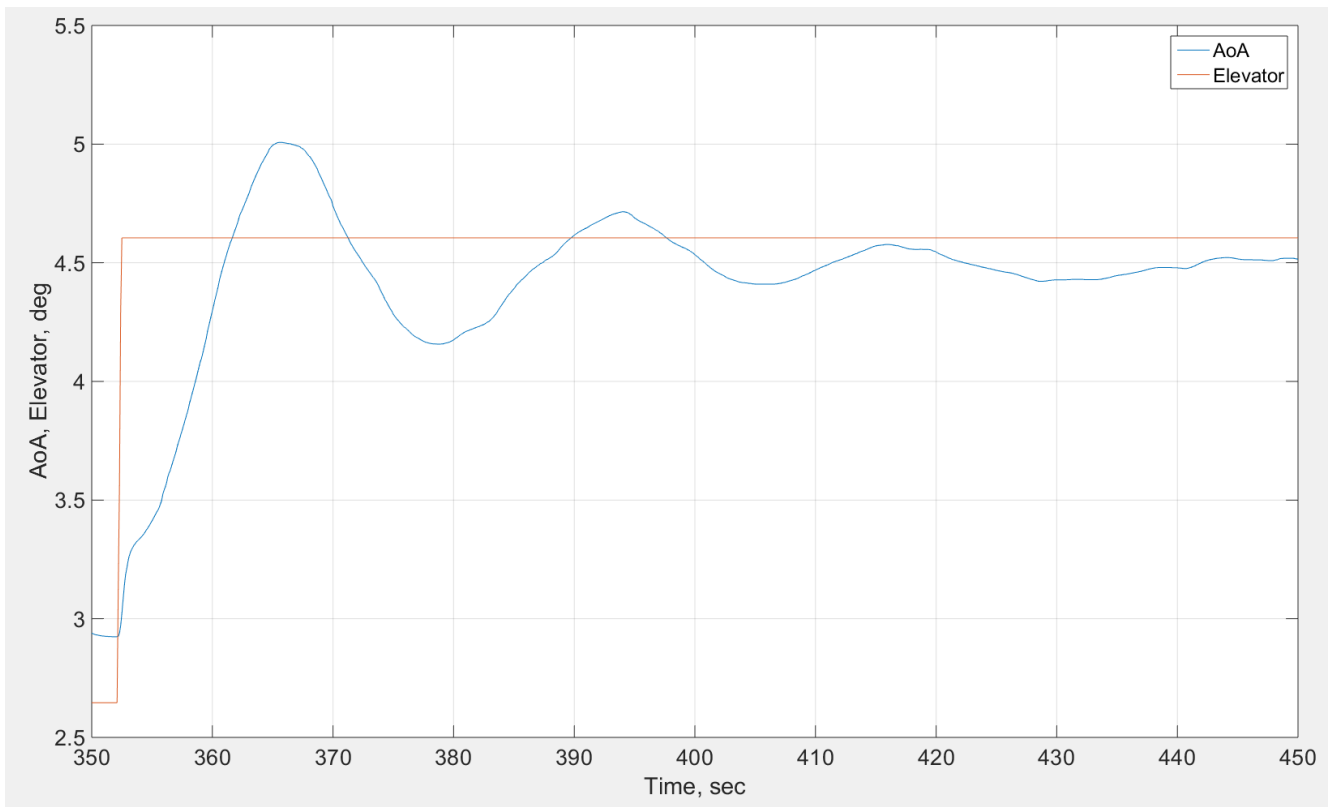


Рис. 4.6 Тестовий політ №13

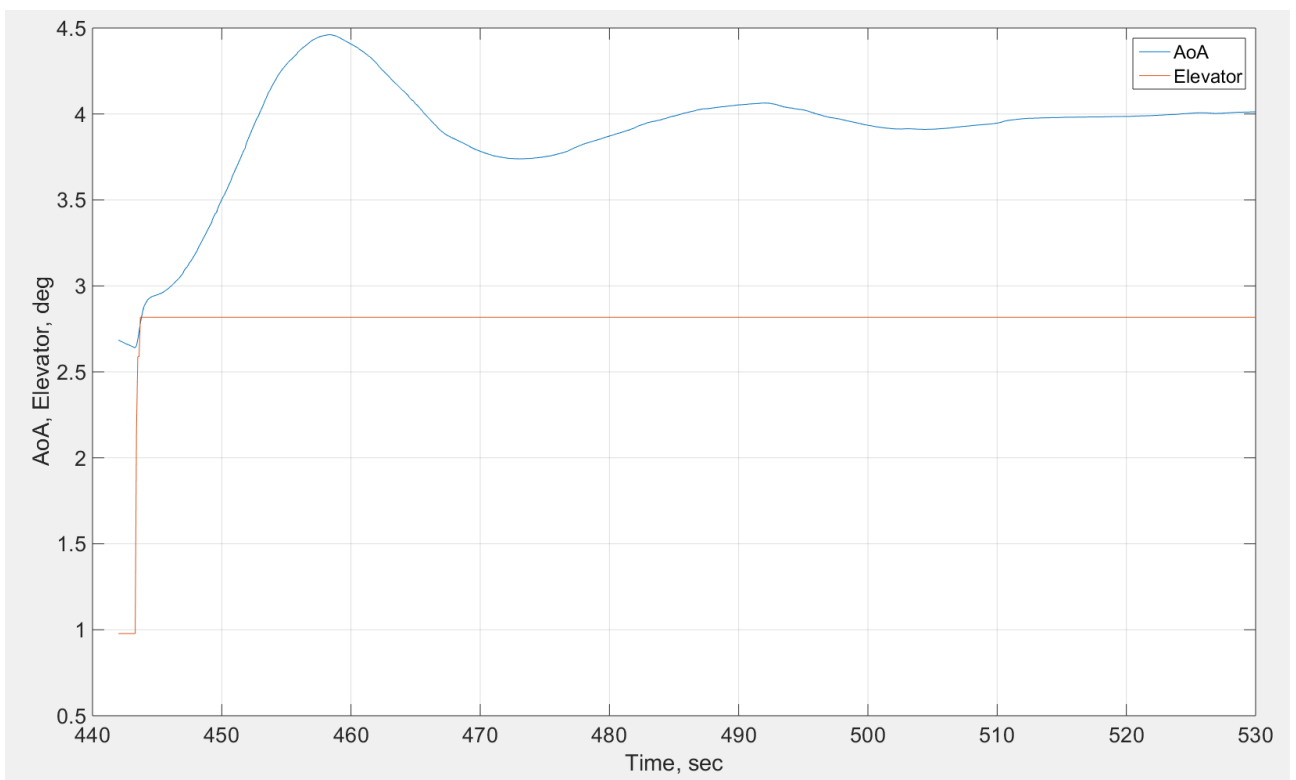


Рис. 4.7 Тестовий політ №14

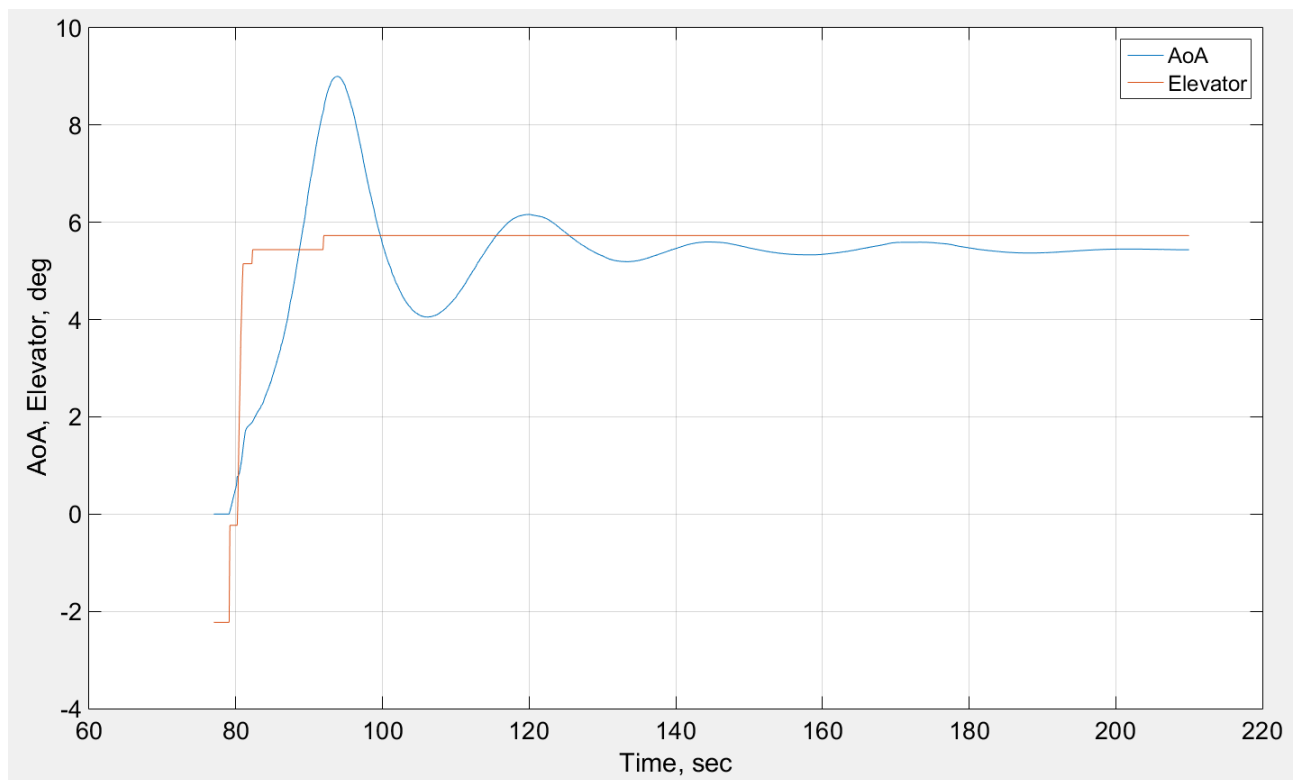


Рис. 4.8 Тестовий політ №20

Обробка результатів експерименту

Результати зведено в таблицю 2.

Експеримент	Політ №13	Політ №14	Політ №20
Балансувальний кут атаки $\alpha_0, ^\circ$	2,92	2,65	0
Максимальний кут атаки $\alpha_{max}, ^\circ$	5,00	4,46	9,00
Усталений кут атаки $\alpha_{уст}, ^\circ$	4,47	3,99	5,45
Перерегулювання σ_α	0,342	0,351	0,65
Коефіцієнт демпфування $\hat{\xi}$, од.	0,323	0,316	0,136
Теоретичний коефіцієнт демпфування ξ , од	0,339	0,328	0,145
Відносна похибка $\delta\xi$, %	5	4	7
Початкова швидкість V_0 , км/год	121,6	124,2	145

Табл. 2. Результати ідентифікації

Із графіків на рис. 4.6 та 4.7 видно, що результати ідентифікації коефіцієнта демпфування за цими експериментальними даними дещо більш чутливі до похибки вимірювачів бортової системи орієнтації, оскільки початкове балансування відбулося на підвищених кутах атаки, внаслідок чого значення відхилення усталеного кута атаки від початкового знижено. Розрахунок для польоту №20 (рис. 4.8) цього недоліку позбавлений, однак на підвищених швидкостях значення коефіцієнта демпфування змінюється, що відповідає залежності ξ від динамічних коефіцієнтів $a_{11}, a_{12}, a_{42}, \dot{a}_{12}$, наведеній у [25]:

$$\xi = \frac{a_{11} + a_{42} + \dot{a}_{12}}{2\sqrt{a_{12} + a_{11}a_{42}}}. \quad (3.21)$$

Тут

$$a_{11} = -\frac{m_z^{\omega z} \cdot \rho V S b_A^2}{2I_z}; \quad (3.22)$$

$$a_{12} = -\frac{57.3 \cdot m_z^{\alpha} \cdot \rho V^2 S b_A}{2I_z}; \quad (3.23)$$

$$a_{42} = \frac{57.3 \cdot C_y^{\alpha} \cdot \rho V S + 2P}{2m}. \quad (3.24)$$

b_A – середня аеродинамічна хорда крила, м.

Доданком \dot{a}_{12} , який характеризує вплив на момент тангажу запізнення скошу потоку на горизонтальному оперенні, зазвичай нехтують. Із отриманих формул випливає, що при проведенні експериментів на різних швидкостях та, відповідно, на різних режимах роботи двигуна, в результаті буде отримано значення повздовжнього коефіцієнта демпфування для конкретної швидкості. Для того, аби отримати залежність $\xi = f(V, P)$, необхідно провести серію випробувань для різних швидкостей у балансувальному режимі та на різних режимах роботи двигуна в ході експерименту.

Однак розраховані коефіцієнти демпфування відповідають загальному виду перехідного процесу (за рис. 1), а також, розраховані на основі змінних флайт-моделі літака А-22LS [34] значення коефіцієнта повздовжнього демпфування відрізняються від ідентифікованих на величину, меншу за максимально допустиму похибку. Отже, алгоритм ідентифікації є працездатним.

Висновки до розділу.

Розділ містить: результати імітаційного моделювання алгоритму ідентифікації – рис. 4.2 – 4.5, які підтверджують дотримання точності ідентифікації при роботі алгоритму в умовах наявності похибок вимірювання параметрів руху та проведення льотного експерименту в неспокійній атмосфері; результати проведення льотного експерименту на симуляторі літака Аеропракт А-22LS у вигляді графіків зміни параметрів польоту у часі (рис. 4.6 – 4.8); обробку отриманих даних та визначення шуканих коефіцієнтів передатних функцій (табл. 2); аналіз отриманих результатів. В ході проведення експерименту підтвердилась правильність побудови льотної моделі А-22 для Microsoft Flight Simulator X, було досліджено демпфування в повздовжньому каналі літака.

Висновки

У цій роботі було розроблено удосконалений алгоритм для проведення ідентифікації параметрів математичної моделі легкого пілотованого або безпілотного літака. Досліджено відомі у наукових виданнях методи, обрано один із найбільш простих з точки зору організації експерименту та обробки отриманих даних – метод ступінчастої вхідної дії.

Досліджено точність ідентифікації з використанням цього методу, побудовано математичну модель похибки, що враховує швидкість вітру, параметри польоту та похибки їх вимірювання, а також показники якості перехідних процесів. Отримані аналітичні вирази для допустимих складових швидкості поривів вітру, а також для допустимої середньої швидкості вітру, які містять допустимі похибки ідентифікації і швидкість польоту та дозволяють планувати проведення експериментів в залежності від прогнозу погоди. Отримані аналітичні вирази для допустимих похибок вимірювання параметрів рух літального апарату, які містять параметри перехідного процесу, та дозволяють обрати навігаційну систему для проведення експерименту в залежності від потрібної точності ідентифікації.

За вхідними даними щодо бажаної точності ідентифікації, та очікуваних значеннях деяких фізичних величин в ході експериментів було враховано вимоги до бортових датчиків системи орієнтації та супутникової навігації, а також погоди під час проведення тестового польоту. Для літака Аеропракт А-22LS ці вимоги становлять: точність системи орієнтації $\Delta\vartheta = \pm 0,1^\circ$, точність вимірювання швидкостей за допомогою СНС $\Delta\dot{H} = \pm 0,123 \frac{M}{c}$, $\Delta V = \pm 0,341 \frac{M}{c}$. Допустима швидкість середнього горизонтального вітру – $W_{20} = 12,8 \frac{M}{c}$.

Було визначено, що стандартна авіоніка літака А-22LS, на симуляторі якого проводилися експерименти, має недостатню точність системи орієнтації. Було виконано успішний пошук підходящих вимірювальних пристроїв сторонніх виробників. Зрештою, було проведено серію експериментів на авіаційному симуляторі, які показали працездатність алгоритму ідентифікації.

Список використаної літератури

1. Справочник по теории автоматического управления. / Под ред. А. А. Красовского. Москва: Наука, 1987. 712 с.
2. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти тт.; 2-е изд, перераб. и доп. Т. 2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления. / Под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. Москва: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 638 с.
3. Лобатый, А. А. Параметрическая идентификация стохастической системы неградиентным случайным поиском / А. А. Лобатый, В. Ю. Степанов // Наука и техника, 2017. № 3. С. 256–261.
4. Лобатый, А. А. Поисковый алгоритм параметрической идентификации электропривода системы мониторинга / А. А. Лобатый, А. С. Абуфанас, А. А. Шведко // Системный анализ и прикладная информатика, 2017. № 2(14). С. 39–45.
5. Гроп Д. Методы идентификации систем: Пер. с англ., Москва, 1979. 300 с.
6. Семенов. А.Д. Идентификация объектов управления: учебное пособие / Семенов А.Д., Артамонов Д.В., Брюхачев А.В. Пенза, 2003. 215 с.
7. Wesley M. DeBusk. Real-Time System Identification of a Small Multi-Engine Aircraft / Wesley M. DeBusk, Girish Chowdhary, and Eric N. Johnson // Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA. August, 2009. DOI: 10.2514/6.2010-3472
8. Моунг Хтанг Ом, Разработка алгоритма повышения точности идентификации аэродинамических коэффициентов на основе гармонических входных сигналов / Моунг Хтанг Ом, Чжо Зин Латтё, Приходько С.Ю. // Труды МАИ. Выпуск № 99.
9. А. Г. Шумихин. Идентификация управляемого объекта по частотным характеристикам, полученным экспериментально на нейросетевой динамической модели системы управления / А. Г. Шумихин, А. С. Александрова // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. т. 9 № 5

10. Т.А. Пьявченко. Метод идентификации промышленного объекта по его временной и частотной характеристикам / Т.А. Пьявченко // Известия ЮФУ. Технические науки, 2010.

11. С.В. Ефимов. Структурно-параметрическая идентификация объекта управления на основе характеристик переходного процесса / С.В. Ефимов, С.В. Замятин, С.А. Гайворонский // Управление, вычислительная техника и информатика, 2010.

12. Valerij Goncharov . Identification of control objects with the distributed parameters / Global International Scientific Analytical Project (GISAP). 2012. URL: <http://dx.doi.org/10.18007/gisap:tsc.v0i8.1421>

13. А. Лобатый. Идентификация упрощенной математической модели беспилотного летательного аппарата / А.А. Лобатый, Ю.Ф. Яцына, С.С. Прохорович, Е.А. Хвилько // Системный анализ и прикладная информатика: Управление техническими объектами. 2020. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/identifikatsiya-uproschennoy-matematicheskoy-modeli-bespilotnogo-letatel'nogo-apparata>

14. Корсун О. Н. Прогнозирование параметров движения самолета на основе идентификации упрощенной линейной модели / Корсун О. Н., Веселов Ю. Г., Гулевич С. П. // Наука и Образование. 2011. №12. С.1-15.

15. Dongwon Jung. Modeling and Hardware-in-the-Loop Simulation for a Small Unmanned Aerial Vehicle / Dongwon Jung and Panagiotis Tsiotras : Infotech@Aerospace 2007 Conference and Exhibit, 2007

16. J. Velasco. Multi-Objective Optimization for Wind Estimation and Aircraft Model Identification / J. Velasco-Carrau, S. Garcia-Nieto, and J. V. Salcedo // Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol. 39, No. 2, February 2016

17. David G. Ward. Development and Flight Testing of a Parameter Identification Algorithm for Reconfigurable Control / David G. Ward and Jeffrey F. Monaco // Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol. 21, No. 6, November–December 1998.

18. Носков О. В. Обработка алгоритмов идентификации аэродинамических коэффициентов летательного аппарата на имитационной модели / Носков О. В., Семёнов И.А., Разнополов О. А. Ракетно-космическая техника. 2014. №1. С.18.

19. Завальная О. С. Управление движением беспилотного летательного аппарата в условиях неопределенности / Завальная О. С., Бурнашев В. В. // Механiка гiроскопiчних систем. 2015. №29. DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/0203-377129201562696>

20. Кліпа А.М. Ідентифікація динамічних характеристик легких пілотованих та малих безпілотних літальних апаратів: автореф. дис. на отримання ступеня кандидата технічних наук: 2009. Київ., 23 С.

21. Girish Chowdhary. Aerodynamic Parameter Estimation from Flight Data Applying Extended and Unscented Kalman Filter/ Girish Chowdhary and Ravindra Jategaonkar // AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit 21 - 24 August 2006, Keystone, Colorado

22. С. А. Белоконь. Нечёткая кластеризация в задачах определения аэродинамических характеристик и моделирования динамики летательного аппарата / С. А. Белоконь, Ю. Н. Золотухин, М. Н. Филиппов // АВТОМЕТРИЯ. 2018. № 5. Т.54. С.99-107.

23. Shaaban A. Salman. Real-time Validation and Comparison of Fuzzy Identification and State-space Identification for a UAV Platform / Shaaban A. Salman, Vishwas R. Puttige, Sreenatha G. Anavatti // Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications. Munich, Germany, October 4-6, 2006

24. Асланян А. Э. Системы автоматического управления полетом летательных аппаратов. Часть 1 / Асланян А. Э. Киев: Типография КВВАИУ, 1984. 430 с.

25. Лебедев А.А. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов / Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Москва: «Машиностроение», 1973. 616 с.

26. Рэндал У. Биард., Тимоти У. МакЛэйн. Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика / Рэндал У. Биард. Москва: «Техносфера», 2015. 312 с.

27. Н.С. Аржаников . – Аэродинамика : учебник / Н.С. Аржаников, В.Н. Мальцев. — 2-е изд. / Репринтное воспроизведение издания 1956 г. Москва: ЭКОЛИТ, 2011. 488 с.

28. ОСТ 1 02514-84. Модель турбулентности атмосферы. Характеристики. [Введен впервые: 20.09.1984]. Министерство авиационной промышленности СССР, 1984. 13 С.

29. Таблицы распределений. Стандартное нормальное (Z) распределение: веб-сайт. URL: <http://statsoft.ru/home/textbook/modules/sttable.html>

30. АЭРОПРАКТ-22LS. Руководство по лётной эксплуатации. А22LS-РЛЭ-03 // Аеропракт: веб-сайт. URL: http://www.jekabpilsflight.lv/doc/a-22LS_rle_sn-143.pdf

31. G3X/G3X Touch Installation Manual. // Garmin: веб-сайт. URL: https://static.garmin.com/pumac/190-01115-01_am.pdf

32. MGL Avionics. SP-6 Magnitometer, SP-7 AHRS. User and installation manual // MGL Avionics: веб-сайт. URL: <https://www.mglavionics.co.za/sp7.html>

33. Dynon Avionics. SkyView. System Installation Guide. // Dynon Avionics: веб-сайт. URL: https://dynonavionics.com/public_html/yabbfiles/Attachments/SkyView_System_Installation_Guide-Rev_W_v14_0.pdf

34. Flight Dynamics in MSFS v. 1.0 // fsdeveloper.com: веб-сайт. URL: <https://www.fsdeveloper.com/forum/resources/flight-dynamics-in-msfs-v1-0.169/download>

Публікації автора за темою дисертації

35. Dunai O., Burnashev V. (2019). IDENTIFICATION OF THE UNMANNED AIRPLANE MATHEMATICAL MODEL. XII International Scientific Conference “Intelligence. Integration. Reliability”: зб. наукових праць міжнародної наукової конференції, 43-44

36. Дунай О. Б., Бурнашев В. В. (2020). Ідентифікація параметрів математичної моделі руху літального апарату. «АВІА-РАКЕТОБУДУВАННЯ: ПЕРСПЕКТИВИ ТА НАПРЯМКИ РОЗВИТКУ»: зб. наукових праць міжнародної наукової конференції, 23-25