

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ДИНАМІКИ І МІЦНОСТІ МАШИН ТА ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

«На правах рукопису»
УДК _____

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_____ Сергій ПИСКУНОВ
«__» _____ 2020 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-професійною програмою «Динаміка і міцність машин»
зі спеціальності 131 «Прикладна механіка»
на тему:
«Аналітична модель для розрахунку на міцність балки з близьким
розташуванням проміжних опор»

Виконав:
студент VI курсу, групи МП-91мп
Осипенко Андрій Дмитрович _____

Керівник:
к.т.н., доц.
Онищенко Євген Євгенович _____

Рецензент:
д.т.н., проф.
Данильченко Ю.М. _____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань.
Студент

Київ – 2020 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Механіко-машинобудівний інститут
Кафедра динаміки і міцності машин та опору матеріалів

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 131 «Прикладна механіка»

Освітньо-професійна програма – «Динаміка і міцність машин»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Сергій ПИСКУНОВ

« ___ » _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Осипенко Андрія Дмитровича

1. Тема дисертації «Аналітична модель для розрахунку на міцність балки з близьким розташуванням проміжних опор», науковий керівник дисертації Онищенко Євген Євгенович, к.т.н., доц., затверджені наказом по університету від «___» _____ 2020 р. № _____
2. Термін подання студентом дисертації: 10.12.2020 р.
3. Об'єкт дослідження: двопрогінна балка двотаврового перерізу з близьким розташуванням опор.
4. Предмет дослідження: розробка аналітичної моделі, визначення її похибки та границь можливості застосування.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
 - 1) Огляд та аналіз літератури;
 - 2) Побудова аналітичної моделі на основі відомих теоретичних залежностей;
 - 3) Побудова моделі балки за допомогою методу скінченних елементів;
 - 4) Порівняння результатів розрахунків, оцінка похибки та визначення меж застосування аналітичної моделі;
 - 5) розробка стартап–проекту.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу – 6 і більше.
7. Орієнтовний перелік публікацій – 1 і більше.
8. Дата видачі завдання: 01.09.2020 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Аналіз літератури	01.09.20 - 19.09.20	
2	Аналітичний розрахунок балки	20.09.20 – 09.10.20	
3	Моделювання балки за допомогою методу скінчених елементів	10.10.20 – 31.10.20	
4	Порівняння результатів розрахунків	01.11.20 – 19.11.20	
5	Стартап-проект та висновки	20.11.20 – 10.12.20	

Студент

Андрій ОСИПЕНКО

Науковий керівник _____

Євген ОНИЩЕНКО

Реферат

Дана магістерська дисертація за обсягом роботи складає 69 сторінок, 34 ілюстрацій, 2 таблиці та містить 12 літературних джерел.

У даній роботі досліджувалась двопрогінна балка з близьким розташуванням опори. На основі відомих теоретичних даних побудована аналітична модель для заданої статично невизначуваної балки з близьким розташуванням проміжної опори, яка дає більш точні результати у порівнянні з моделлю, побудованою на основі елементарної теорії Ейлера-Бернуллі.

Встановлено що, похибка для розрахунку консольної балки прямокутного поперечного перерізу навантаженої зосередженою силою на вільному кінці при застосуванні створеної моделі у порівнянні з розрахунками за точними формулами, отриманими методами теорії пружності не перевищує 5%, якщо відношення довжини балки до висоти поперечного перерізу більше 1,8.

Розбіжність результатів розрахунку двопрогінної статично невизначуваної балки двотаврового поперечного перерізу при дії рівномірно розподіленого по її довжині навантаження при застосуванні створеної моделі у порівнянні з чисельними розрахунками методом скінчених елементів не перевищує 5%, якщо відношення відстані між її близько розташованими опорами до висоти поперечного перерізу більше за 1,9.

Зроблено важливий для практичного застосування висновок про те, що у випадку коли відношення відстані між її близько розташованими опорами до висоти поперечного перерізу не перевищує 1,6 запропонована аналітична модель, може бути використана для оціночних розрахунків на міцність і жорсткість на етапі вибору конструктивних рішень при проектуванні балки крила літака.

Ключові слова: статично невизначувана балка, балка Тимошенко, метод Мора, прогин, реакція, метод скінчених елементів.

Зміст

Реферат	1
Зміст	5
Вступ.....	7
Розділ 1 Огляд літератури	8
1.1 Класична теорія згину балок	9
1.2 Основні гіпотези	10
1.3 Теорія згину балок Тимошенко.....	10
1.4 Рівняння теорії пружності	11
1.5 Метод скінченних елементів.	13
Розділ 2 Аналітичне дослідження	15
2.1 Рішення задач теорії пружності	15
2.2 Консольна балка. Розрахунок методом теорії пружності.....	20
2.3 Коефіцієнт розподілу дотичних напружень	25
2.4 Основні положення для розрахунку статично невизначених систем	28
2.5 Метод Мора.....	29
2.6 Консольна балка по теорії згину балок Тимошенко	30
2.7 Двопрогінна балка по теорії згину балок Тимошенко	33
Розділ 3 Метод скінченних елементів.....	35
3.1 Переміщення в стінці.....	35
3.2 Деформації та напруження що діють в стінці	36
3.3 Зусилля що діють в стінці та їхня робота	39
3.4 Параметри скінчено елементної моделі.....	45
3.5 Функцій форми СЕ та матриця жорсткості СЕМ для стінки	48
3.6 СВЕАМ - балковий елемент	51
3.7 Матриця жорсткості СЕ моделі фланців.	54
3.8 Співвідношення МСЕ для фланців при просторовому навантаженні.	56
3.9 Створення моделі в САД системі Patran.....	61
Розділ 4 Результати розрахунків	67
4.1 Результати розрахунків для консольної балки.....	67

4.2	Результати розрахунків для двопрогінної балки.....	69
Розділ 5 Розроблення стартап-проекту		71
5.1	Зміст ідеї проекту.....	71
5.2	Технологічний аудит	71
5.3	Аналіз ринкових можливостей запуску стартап–проекту	72
5.4	Розроблення ринкової стратегії проекту	76
5.5	Розроблення маркетингової програми стартап-проекту.....	77
5.6	Результати маркетингового дослідження:.....	77
Висновки.....		78
Список використаних джерел.....		79

Вступ

Балка крила - один з найбільш важливих і відповідальних елементів конструкції літака. Оцінка її міцності на етапі прийняття конструктивних рішень потребує надійних і швидких методів розрахунку. Оскільки сучасні методи скінчених елементів дозволяють отримувати прийнятні результати, але потребують значних витрат часу для пристосування розробленої чисельної моделі для кожного варіанту конструкції, а точні рішення у замкненій формі, отримані методами теорії пружності, існують лише для деяких поперечних перерізів і схем навантаження, то актуальним є розробка такої аналітичної моделі балки, яка б дозволяла отримувати прийнятні оціночні результати у вигляді формул для більш широкого кола задач.

У даній роботі ставилось за мету розробити аналітичну модель для розрахунку на міцність балки, яка є ідеалізованим наближенням до реальної конструкції балки крила літака

Задачею дослідження була розробка аналітичної моделі нерозрізної двопрогінної балки з близьким розташуванням опор, визначення її похибки та границь можливості застосування.

Розроблена аналітична модель дозволить скоротити час на прийняття конструктивних рішень на етапі проектування або модернізації балки крила літака.

Об'єкт дослідження – двопрогінна балка сталого двотаврового перерізу з близьким розташуванням опор, під дією навантаження рівномірно розподіленого по її довжині.

Для вирішення задачі дослідження було використано наступні методи:

- аналітичні методи теорії пружності;
- методи класичного опору матеріалів;
- метод скінчених елементів.

Розділ 1 Огляд літератури

При розрахунку конструкцій на жорсткість при поперечному вигині величина переміщень точок системи залежить від багатьох чинників: виду розрахункової схеми (опорні зв'язку і навантаження), властивостей матеріалу конструкцій, геометричних характеристик поперечних перерізів елементів конструкцій, внутрішніх зусиль, що виникають в поперечних перетинах при навантаженні. При визначенні прогинів балок в більшості випадків враховують тільки згинальний момент, а поперечною силою нехтують.

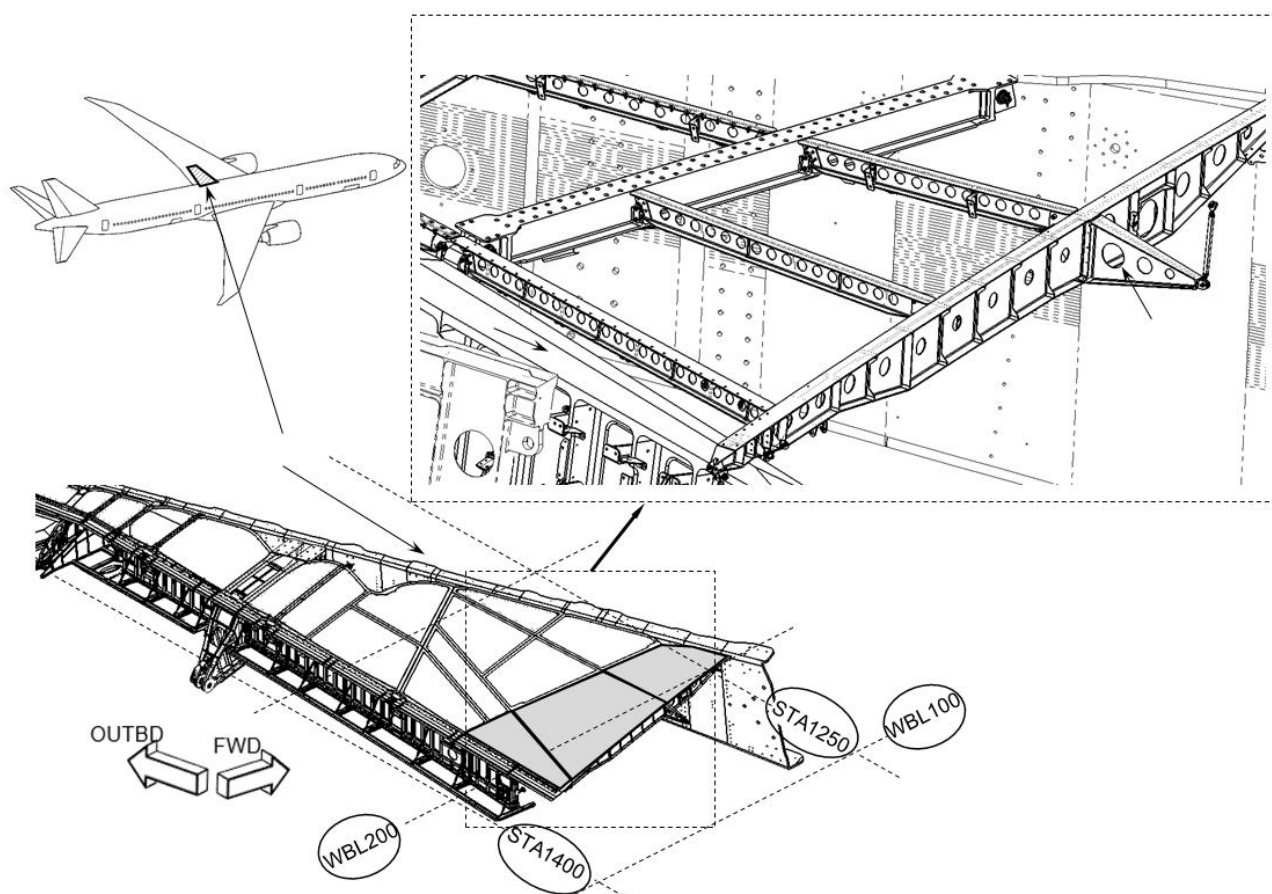


Рисунок 1.1

Разом із тим, згин елементів конструкцій рідко буває чистим, зазвичай виникає поперечний згин, при якому в поперечних перетинах елементів, що згинаються виникають нормальні σ і дотичні τ напруження. Ці напруження інтегрально пов'язані з внутрішніми зусиллями - згинальним моментом M і поперечною силою Q [1-3].

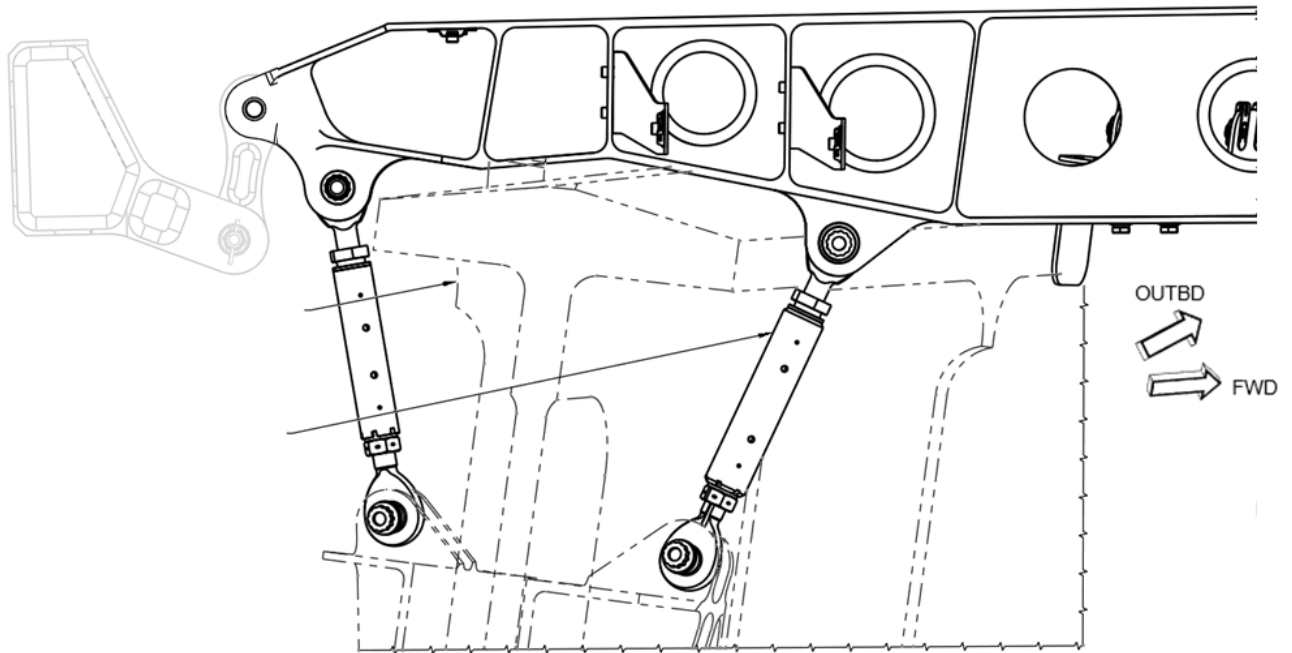


Рисунок 1.2

Точні значення напружень і деформацій, що виникають в матеріалі балки, дозволяють визначити методи теорії пружності [4-7]. Хоча ці підходи і точні, але, як правило, є досить складними і непрактичними при визначенні прогинів балок. Метод визначення прогинів балок, запропонований С.П. Тимошенко [8], передбачає розглядати повний прогин балки у як суму прогинів, що розглядаються класичною теорією згину і обумовлених в перетині згинальним моментом u_M і прогином, обумовленим тільки деформаціями поперечного зсуву u_Q , викликаного поперечною силою Q

1.1 Класична теорія згину балок

Згин - в опорі матеріалів вид деформації, при якому відбувається викривлення осей прямих брусів або зміна кривизни осей кривих брусів, зміна кривизни / викривлення серединної поверхні пластини або оболонки. Згин пов'язаний з виникненням в поперечних перетинах бруса або оболонки згинальних моментів. Прямий вигин балки виникає в разі, коли вигинає момент в даному поперечному перерізі бруса діє в площині, що проходить через одну з головних центральних осей інерції цього перерізу. У разі, коли площина дії

згинального моменту в даному поперечному перерізі бруса не проходить через одну з головних осей інерції цього перерізу, вигин називається косим.

Якщо при прямому або косому вигині в поперечному перерізі бруса діє тільки згинальний момент, то відповідно має місце чистий прямий або чистий косий вигин. Якщо в поперечному перерізі діє також і поперечна сила, то виникає поперечний прямий або поперечний косий вигин.

Нерідко термін «прямий» в назві прямого чистого і прямого поперечного згину не вживають і їх називають відповідно чистим згином і поперечним згином.

1.2 Основні гіпотези

Гіпотеза плоских перетинів (гіпотеза Ейлера-Бернуллі): перетини балки, які до деформації були плоскими і перпендикулярними до осі, залишаються після деформації плоскими і перпендикулярними до вигнутої осі балки. Таким чином, відносне переміщення (зсув) шарів не враховується. Єдиним напруженням в поперечному перерізі, що розглядаються в цій теорії, є нормальне напруження;

Переміщення і деформації передбачаються малими;

Розміри поперечного перерізу балки передбачаються малими в порівнянні з радіусом кривизни осі балки;

Матеріал розглядається як лінійно пружний відповідно до закону Гука.

1.3 Теорія згину балок Тимошенко

Дана теорія базується на тих же гіпотезах, що і класична, проте гіпотеза Бернуллі модифікується: передбачається, що перетини, що були до деформації плоскими і нормальними до осі балки, залишаються плоскими, але перестають бути нормальними до вигнутої осі. Таким чином, дана теорія враховує деформацію зсуву і дотичні напруження, що робить її придатною для опису поведінки товстих балок, сендвіч-панелей при статичному і динамічному навантаженні, зокрема, при високочастотних коливаннях балок, коли довжина хвилі цих коливань стає зрівняною з товщиною балки. Врахування дотичних напружень є важливим для розрахунку композитів і деталей з дерева, оскільки їх

руйнування може відбуватися за рахунок руйнування при зсуві. На відміну від моделі вигину балок Ейлера-Бернуллі модель С.П. Тимошенко призводить до рівняння четвертого порядку, яке також містить і часткові похідні другого порядку. Фізично врахування механізмів деформації ефективно знижує жорсткість балки і призводить до більшого відхилення при статичному навантаженні і до передбачення менших власних частот для заданого набору граничних умов. Останній наслідок найбільш помітний для високих частот, оскільки довжина хвилі коливань стає коротшою і відстань між протилежно спрямованими зсувними силами зменшується.

Якщо модуль зсуву матеріалу балки покласти рівним нескінченності (і отже заборонити балці відчувати зсувні деформації) і якщо знехтувати ефектами інерції на обертання, то модель Тимошенко зводиться до звичайної теорії вигину балки.

Крайові (граничні) умови.

Два рівняння, які описують деформацію балки Тимошенко, повинні бути доповнені крайовими (граничними) умовами. Коректно поставлене завдання вимагає завдання чотирьох граничних умов. Зазвичай граничними умовами є:

Двоопорні балки: Зсув задається рівним нулю в місцях розташування двох опор. Також потрібно задати згинальний момент прикладений до балки. Обертання і поперечна зсувна сила не задані.

Жорстко затисненого балка (консоль): Зсув і обертання задаються рівними нулю в місці затисненого кінця балки. Якщо один з кінців балки вільний, то зсувна сила і згинальний момент необхідно задати для цього кінця [8].

1.4 Рівняння теорії пружності

Основною системою рівнянь теорії пружності для визначення визначення напружено-деформованого стану тривірного тіла є три рівняння рівноваги, що містять шість невідомих компонентів симетричного тензора напружень. Симетричність тензора напружень ізотропного тіла обумовлюється гіпотезою парності дотичних напружень. Для замикання системи рівнянь використовують рівняння сумісності деформацій (для тіла, що залишається в процесі деформації

суцільним, компоненти тензора деформації, не можуть бути незалежними - ці компоненти виражаються через три функції - складові переміщення точки тіла: симетричні співвідношення Коші). Шість рівнянь сумісності деформацій і рівняння узагальненого закону Гука замикають систему рівнянь теорії пружності.

Крім очевидних статичних задач (стійкість будівель і інших споруд, міцність транспортних засобів), теорія пружності залучається і для вирішення динамічних задач (наприклад, стійкість конструкцій при землетрусах і під дією потужних звукових хвиль; вібростійкості різних апаратів і установок). Теорія пружності тут перетинається з матеріалознавством і служить одним з опорних пунктів при пошуку нових матеріалів. Теорія пружності важлива також і для сейсморозвідки.

Розрізняють три варіанти постановок задач теорії пружності.

1. Постановка задач теорії пружності в переміщеннях

Основні невідомі - три компоненти вектора переміщень (надалі - переміщення). Вони повинні задовольняти трьом рівнянням рівноваги, записаним в переміщеннях. У кожній точці поверхні тіла переміщення повинні задовольняти трьом граничним умовам. Граничні умови можуть бути сформульовані в трьох варіантах:

- задані переміщення;
- задані комбінації напружень, записані через нормальні і дотичні похідні від переміщень;
- задані комбінації напружень і переміщень, записані через нормальні і дотичні похідні від переміщень і через самі переміщення.

За відомими переміщеннями деформації визначаються диференціюванням (симетричні співвідношення Коші). Знайдені по переміщенням деформації тотожно задовольняють шести рівнянням сумісності деформацій. За відомими переміщеннями можна знайти диференціюванням компоненти тензора поворотів і псевдовектори поворотів (антисиметричні співвідношення Коші). За відомими деформаціями напруження визначаються алгебраїчно (рівняння закону Гука).

2. Постановка задач теорії пружності в напруженнях. Основні невідомі - шість компонент симетричного тензора напружень. Вони повинні задовольняти трьом рівнянням рівноваги, записаним в напружених, і шести рівнянням сумісності деформацій, записаним за допомогою рівнянь закону Гука в напружених. Деформації визначаються алгебраїчно за знайденими напруженням зворотних рівнянь закону Гука. Переміщення інтегруються в квадратурі по знайденим деформаціям за допомогою формул Чезаро, причому інтегрованість забезпечена, так як задоволені рівняння сумісності деформацій. Для спрощення постановки напруження можна виразити через тензорний потенціал так, що рівняння рівноваги будуть задовольнятися тотожно, а рівняння спільності розділяться на окремі рівняння для кожної з компонент тензора-потенціалу напружень. Утримуючи ті чи інші компоненти симетричного тензора-потенціалу напружень, а решту вважаючи нулю, можна отримати як окремі випадки відомі постановки Максвелла, Моррера, Ейрі.

1.5 Метод скінченних елементів.

Метод скінченних елементів (МСЕ) застосовується для чисельного розв'язування задач механіки конструкцій. Суть МСЕ полягає в тому, що суцільне середовище з нескінченно великим числом сукупності елементів, які мають ступені вільності, апроксимується. Між цими елементами встановлюється взаємозв'язок і це дає змогу визначити шукану функцію в середині елемента за значеннями в точках де вони сполучаються. Ці точки називають вузлами. А ступені вільності можуть включати в себе видовження, обертання та похідні високого порядку по переміщеннях.

У межах кожного елемента задаються функції, так звані функції форми, які визначають переміщення у внутрішній області елемента по переміщенням у вузлах. В МСЕ невідомими величинами є можливі і незалежні переміщення вузлів скінчено елементної моделі (СЕМ). Тобто, СЕМ будь-якої конструкції являє собою систему закріплених вузлів. Саме тому для цілої конструкції, переміщення вузлів, зазвичай, задають у глобальній системі координат, яка вводиться для цілої

конструкції. Ця система координат є загальною для всіх СЕ. В глобальній системі співвідношення МСЕ для переміщень будуються на основі отриманих співвідношень в локальній системі координат СЕ шляхом елементарних математичних перетворень з вектором переміщень.

Оскільки елементи, що пов'язані між собою лише зовнішніми вузлами повинні покривати всю множину якомога точніше, то для досягнення більшої точності результатів розрахунків за МСЕ сітку роблять більш дрібною, тобто зменшують розміри елементів, збільшуючи цим самим точність апроксимації геометричних характеристик разом з функціями переміщень в межах скінченного елемента. СЕМ складних конструкцій досягають сотень і навіть мільйонів ступенів вільності, а тому МСЕ є машинно-орієнтованим методом, реалізація якого можлива тільки засобами комп'ютерної техніки.

Співвідношення МСЕ формуються в локальній системі координат і будуються на основі положень технічної теорії пружності. В основу цих положень закладені два фундаментальних скаляра – потенціальна і кінетична енергія пружної конструкції. Визначення цих скалярів не залежить від обраної системи координат, що дозволяє записувати співвідношення МСЕ в інваріантній формі. Співвідношення МСЕ, зазвичай, записуються в компактній матричній, або тензорній формі. [10,11,12]

Розділ 2 Аналітичне дослідження

2.1 Рішення задач теорії пружності

Рішення задач теорії пружності, коли об'ємні сили відсутні або постійні, зводиться до інтегрування диференціального рівняння при граничних умовах [9].

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (2.1)$$

Для випадку довгої прямокутної смуги представляють інтерес рішення рівняння в формі поліномів. Вибираючи поліноми різних ступенів і підбираючи для них відповідні коефіцієнти, можна вирішити багато практично важливих задач.

Почнемо з полінома другого ступеня який, очевидно, задовольняє рівняння (1.1).

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (2.2)$$

Всі три компоненти напружень постійні по всьому об'єму тіла; таким чином, функції напруження (1.2) відповідає випадок комбінованого однорідного розтягування або стиснення в двох взаємно перпендикулярних напрямках і однорідного зсуву. На границі тіла зусилля прямокутної пластинки зі сторонами, паралельними координатним осям, ці умови показані на рис. 2.1.

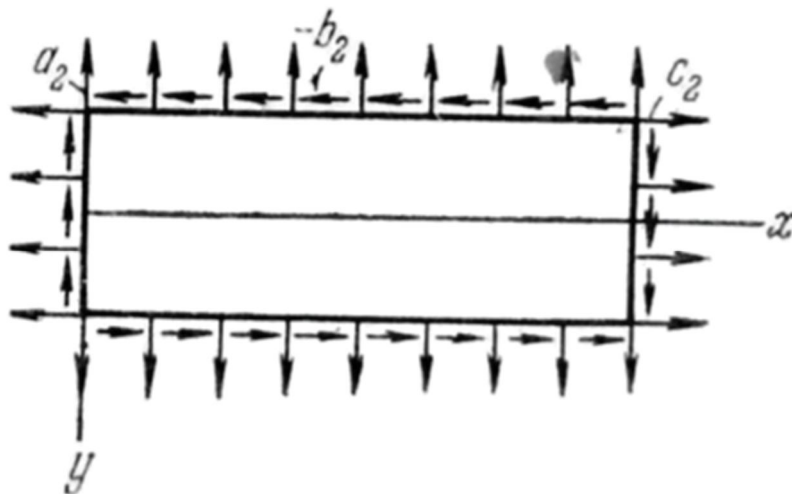


Рисунок 2.1

Розглянемо тепер функцію напружень у вигляді полінома третього ступеня:

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} x y^2 + \frac{b_3}{3 \cdot 2} y^3. \quad (2.3)$$

Ця функція також задовольняє рівняння (2.1).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для прямокутної пластинки, показаної на рисунку 2.2, поклавши все коефіцієнти, крім d_3 , рівними нулю, отримуємо напружений стан чистого вигину. Якщо лише один коефіцієнт a_3 відмінний від нуля, отримуємо випадок чистого вигину під дією нормальних напружень, прикладених до сторін пластинки $y = \pm c$.

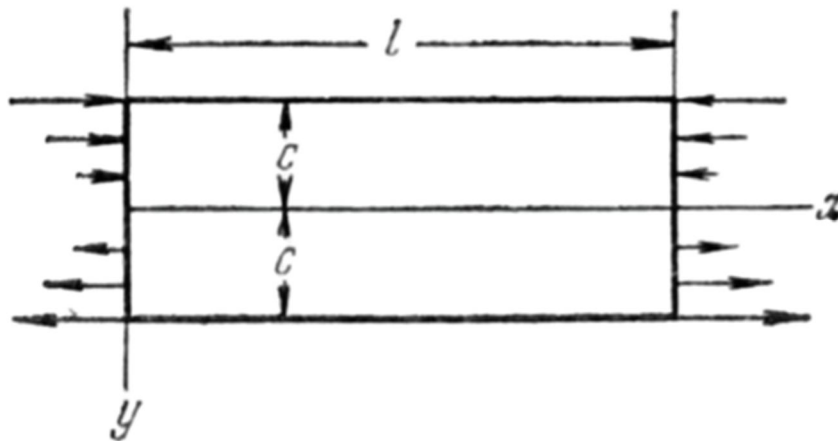


Рисунок 2.2

Якщо вважати відмінними від нуля коефіцієнти b_3 або c_3 , то знаходимо, що по краях пластинки діють не тільки нормальні, але також і дотичні напруження. Рисунок 2.3 показує випадок в якому функції (2.3) дорівнюють нулю всі коефіцієнти, крім b_3 .

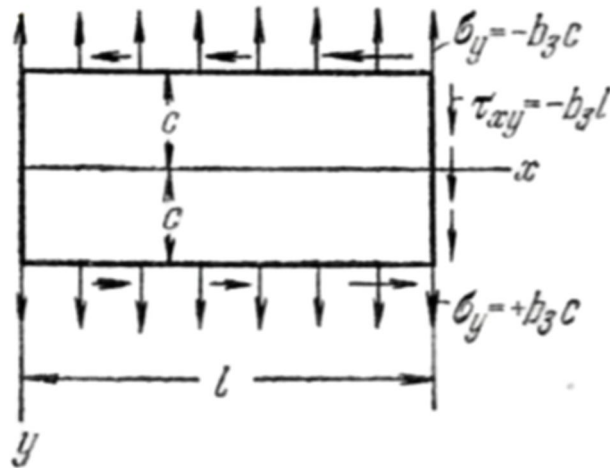


Рисунок 2.3

Уздовж країв $y = \pm c$ маємо рівномірний розподілені розтягуючі і стискаючі напруження, а також дотичні напруження, пропорційні координаті x . На краю $x = l$ діє тільки одне постійне дотичне напруження $-b_3 l$, а на краю $x = 0$ напруження відсутні. Аналогічний розподіл напружень виходить в тому випадку, якщо прийняти відмінним від нуля коефіцієнт c_3 . Взявши функцію напружень у вигляді поліномів другого або третього ступеня, ми не накладаємо ніяких обмежень на вибір величин коефіцієнтів, оскільки рівняння (2.1) задовольняється при будь-яких їх значеннях. У разі поліномів більш високих ступенів рівняння (2.1) задовольняється лише в тому випадку, якщо між коефіцієнтами виконуються відповідні умови зв'язку. Візьмемо функцію напружень у вигляді полінома четвертого ступеня.

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x y^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4. \quad (2.5)$$

Підставляючи вираз (2.5) в рівність (2.1), знаходимо, що воно задовольняється лише в тому випадку, коли:

$$e_4 = -(2c_4 + a_4). \quad (2.6)$$

Компоненти тензора напружень в цьому випадку виражаються формулами

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 xy - (2c_4 + a_4) y^2, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 xy + c_4 y^2, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 xy - \frac{b_4}{2} y^2.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Коефіцієнти a_3, \dots, d_4 в цих формулах довільні; підбираючи їх відповідним чином, можна отримати різні умови навантаження прямокутної пластинки. Беручи всі коефіцієнти, за винятком d_4 , рівними нулю, знаходимо

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{b_4}{2} y^2. \quad (2.8)$$

Якщо вважати коефіцієнт d_4 додатним, то сили, що діють на прямокутну пластинку і викликають напруження (2.6), мають вигляд, представлений на рисунок 2.4.

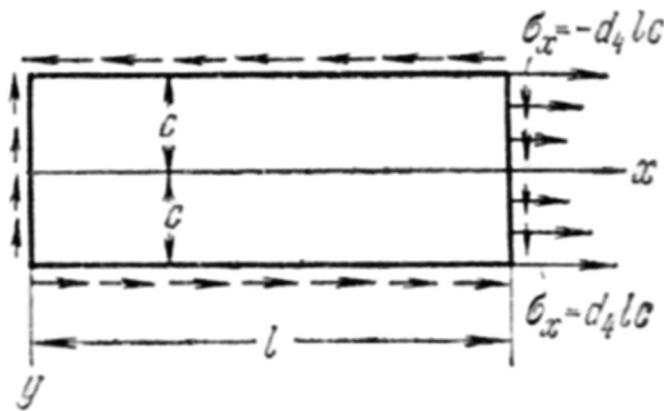


Рисунок 2.4

На поздовжніх сторонах пластинки $y = \pm c$ діють рівномірно розподілені дотичні зусилля, по кінцях – дотичні зусилля, розподілені по параболічного закону. Дотичні зусилля, діючі по контуру пластинки, приводяться до пари з моментом.

$$M = \frac{d_4 c^2 l}{2} 2c - \frac{1}{3} \frac{d_4 c^2}{2} 2cl = \frac{2}{3} d_4 c^3 l. \quad (2.9)$$

Ця пара врівноважується іншою парою, утвореною нормальними зусиллями, що діють на краю пластинки $x = l$.

Розглянемо функцію напружень у вигляді полінома п'ятого ступеня.

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 5} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{e_5}{4 \cdot 3} xy^4 + \frac{f_5}{5 \cdot 4} y^5. \quad (2.10)$$

Підстановка виразу (2.7) в рівняння (2.1) показує, що це рівняння задовольняється, якщо:

$$e_5 = -(2c_5 + 3a_5), \quad f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5). \quad (2.11)$$

Відповідні компоненти напруження рівні.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3} x^2 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) xy^2 - \frac{1}{2}(b_5 + 2d_5) y^3, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 xy^2 + \frac{d_5}{3} y^3, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{b_5}{3} x^3 - c_5 x^2 y - d_5 xy^2 + \frac{1}{3}(2c_5 + 3a_5) y^3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Коефіцієнти a_5, \dots, d_5 знову довільні, і вибираючи їх, можна отримати рішення для різних умов навантаження пластинки. Беручи всі коефіцієнти, крім d_5 , рівними нулю, знаходимо

$$\sigma_x = d_5 \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^2 \right), \quad \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5 xy^2. \quad (2.13)$$

При цьому нормальні зусилля рівномірно розподіляються вздовж поздовжнього краю пластинки (рис. 2.5 а).

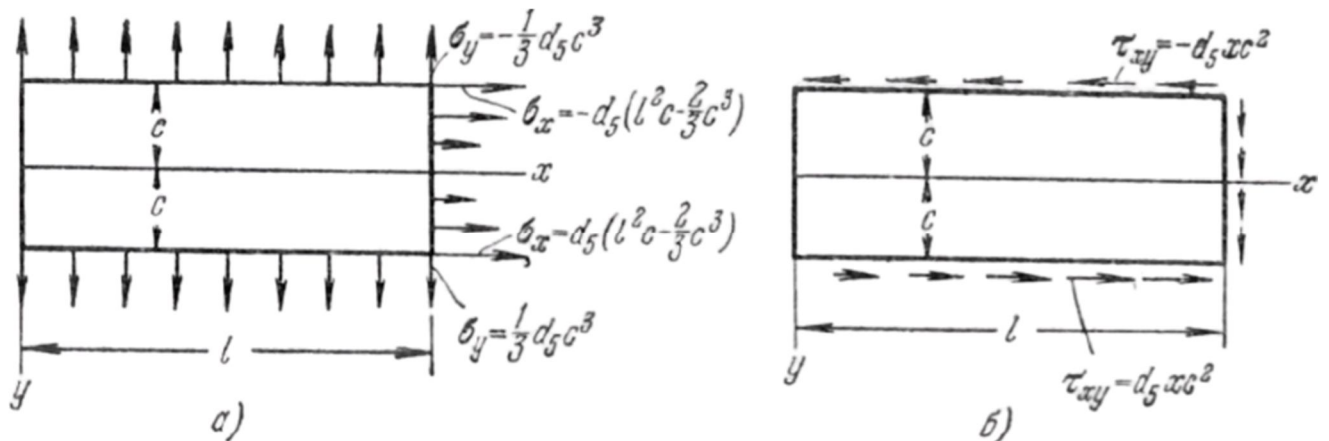


Рисунок 2.5

Уздовж краю $x = l$ нормальні зусилля складаються з зусиль, розподілених за лінійним законом, і зусиль, розподілених за законом кубічної параболи. Дотичні напруження на поздовжніх краях пластинки пропорційні x , а вздовж краю $x = l$ розподілені по параболічному закону. Розподіл цих напружень по контуру пластинки показано на рис. 2.5 б.

Оскільки рівняння (2.1) являє собою лінійне диференціальне рівняння, то сума декількох рішень цього рівняння також буде його рішенням.

2.2 Консольна балка. Розрахунок методом теорії пружності

Розглянемо консоль, що має прямокутний поперечний переріз одиничної товщини і згинатися силою P , прикладеною на вільному кінці (рис 2.6).

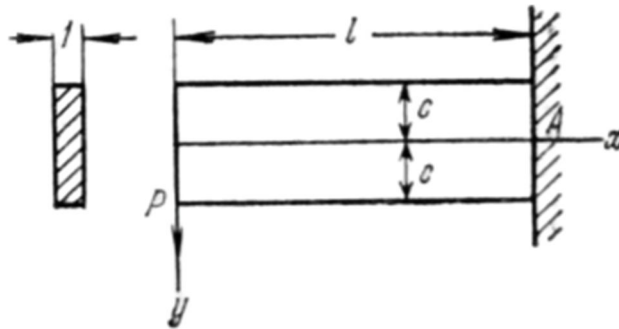


Рисунок 2.6

Верхня і нижня границі консолі вільні від навантаження на торці $x = 0$ розподілені дотичні зусилля, які мають рівнодійну P . Накладаючи стан чистого зсуву на напружений стан, отримуємо:

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2. \quad (2.14)$$

Щоб поздовжні краї консолі були вільні від зусиль, необхідно прийняти:

$$\left(\tau_{xy} \right)_{y=\pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 = 0, \quad (2.15)$$

звідки

$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}. \quad (2.16)$$

Для задоволення умови на навантаженому кінці консолі, сума дотичних зусиль, розподілених по торцю, повинна дорівнювати P . Звідси:

$$-\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \int_{-c}^c \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy = P. \quad (2.17)$$

З цієї залежності отримаємо:

$$b_2 = \frac{3P}{4c}. \quad (2.18)$$

підставляючи знайдені вирази для коефіцієнтів d_4 і b_2 в рівняння (2.14), отримаємо:

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{2c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right). \quad (2.19)$$

помічаючи, що $2/3c^3$ - це момент інерції I поперечного перерізу консолі, отримуємо:

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} (c^2 - y^2). \quad (2.20)$$

Це рішення повністю збігається з елементарним рішенням, яке дається в курсах опору матеріалів. Це рішення є точним лише в тому випадку, коли дотичні зусилля на кінці розподіляються по тому ж параболічному закону, що і дотичні напруження і інтенсивність нормальної сили в защемленні пропорційна Y . Якщо зусилля на кінці розподіляються іншим чином, розподіл напружень (2.15) не є точним рішенням для області поблизу кінця консолі, однак в силу принципу Сен-Венана воно може вважатися задовільним для поперечних перерізів, досить віддалених від цього кінця.

Застосовуючи закон Гука, знаходимо деформації, які відповідають напруженням (2.15),:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\nu P}{EI} xy, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau}{G} = -\frac{P}{2JG} (c^2 - y^2). \quad (2.21)$$

Процедура визначення компонент переміщення 1 і 2 складається в інтегруванні рівнянь (в) і (г). Інтегруючи рівняння (в), знаходимо:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y), \quad v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + f_1(x), \quad (2.22)$$

де $f(y)$ і $f_1(x)$ - невідомі функції, з яких одна залежить тільки від y , інша - тільки від x . Підставляючи ці значення u і v в рівняння (2.21), отримуємо:

$$-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{vPy^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG}(c^2 - y^2). \quad (2.23)$$

У цьому рівнянні деякі члени є функціями тільки від x , а деякі - тільки від y ; один з членів не залежить ні від x , ні від y . Позначимо ці групи членів відповідно через $F(x), G(y), K$, так що:

$$F(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx}, \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{vPy^2}{2EI} - \frac{Py^2}{2IG}, \quad K = -\frac{Pc^2}{2IG}. \quad (2.24)$$

Тепер рівняння можна переписати у вигляді:

$$F(x) + G(y) = K. \quad (2.25)$$

З цього співвідношення випливає, що функція $F(x)$ тотожно дорівнює деякій сталій величині d , а функція $G(y)$ - деякій сталій величині e . В іншому випадку функції $F(x)$ і $G(y)$ змінювалися б в залежності від x і y , і при зміні однієї тільки змінної x або однієї тільки змінної y рівність неодмінно порушувалося. Таким чином:

$$e + d = -\frac{Pc^2}{2IG} \quad (2.26)$$

та

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{Px^2}{2EI} + d, \quad \frac{df(y)}{dy} = -\frac{vPy^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} + e. \quad (2.27)$$

Значить, функції $f(y)$ і $f_1(x)$ мають вигляд:

$$f(y) = -\frac{vPy^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g, \quad f_1(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h. \quad (2.28)$$

Підставляючи їх в вирази для u і v , знаходимо:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{vPy^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g, \quad v = \frac{vPxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h. \quad (2.29)$$

Тепер постійні d, e, g, h можна визначити з рівняння (2.26) та з трьох умов закріплення, які необхідні, щоб перешкодити руху балки в площині xu як абсолютно твердого тіла. Припустимо точка А, що є центром ваги кінцевого

поперечного перерізу, фіксована. Тоді при $x = l$, $y = 0$ компоненти переміщень u і v дорівнюють нулю та з рівнянь (2.29) слідує, що:

$$g = 0, \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl. \quad (2.30)$$

Рівняння зігнутої осі консолі виходить при підстановці $y = 0$ в друге рівняння (2.29). Звідси:

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l-x). \quad (2.31)$$

Для визначення постійної d в цьому рівнянні нам потрібно скористатися третьою умовою закріплення, що виключає можливість обертання балки в площині x щодо фіксованої точки А. Цю умову можна реалізувати декількома способами.

1) Елемент осі балки на кінці А зафіксовано. Тоді умова закріплення має вигляд:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \quad (2.32)$$

2) Вертикальний елемент поперечного перерізу в точці А зафіксовано. Тоді умова закріплення набуває вигляду:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0. \quad (2.33)$$

В першому випадку з рівняння (і) отримуємо:

$$d = \frac{Pl^2}{2EI}, \quad (2.34)$$

А з рівняння (2.26) слідує:

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}. \quad (2.35)$$

Підставляючи знайдені сталі величини в рівняння (2.29), знаходимо:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{vPy^3}{6EI} + \frac{Py^2}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG} \right) y, \quad v = \frac{vPxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}. \quad (2.36)$$

Рівняння зігнутої осі балки має вигляд:

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}. \quad (2.37)$$

Воно дає значення прогину для навантаженого кінця, рівне $\frac{Pl^3}{3EI}$. Це значення збігається зі значенням, яке зазвичай отримують в елементарних курсах опору матеріалів.

Щоб проілюструвати деформацію поперечного перерізу, викликану наявністю дотичних напружень, розглянемо переміщення u на закріпленому кінці. Для цього кінця з рівнянь (2.36) маємо:

$$(v)_{x=l} = -\frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Pl^3}{6IG} - \frac{Pc^2y}{2IG}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l} = -\frac{\nu Py^2}{6EI} + \frac{Pl^2}{2IG} - \frac{Pc^2}{2IG}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=l, y=0} = -\frac{Pc^2}{2IG} = -\frac{3P}{4cG}. \quad (2.38)$$

Форма поперечного перерізу після його деформації показана на рис 2.7.

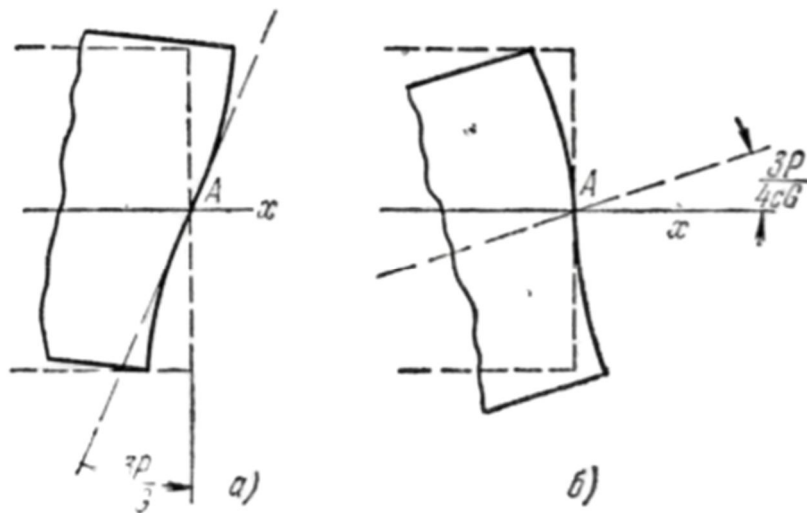


Рисунок 2.7

Під дією дотичного напруження $\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c}$ в точці А елемент поперечного перерізу в цій точці повертається навколо точки А в площині xu на кут $\frac{3P}{4cG}$ за годинниковою стрілкою. Якщо замість того, щоб фіксувати горизонтальний елемент осі, зафіксувати вертикальний елемент поперечного перерізу в точці А (рис 2.7), то з умови (2.37) і першого з рівнянь (2.29) отримуємо:

$$e = \frac{Pl^2}{2EI}, \quad (2.40)$$

а з рівняння (2.26) знаходимо:

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}. \quad (2.41)$$

підставляючи вираз (2.41) у другу з рівнянь (2.29), маємо:

$$(v)_{y=0} = -\frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(l-x). \quad (2.42)$$

Порівнюючи цю залежність з рівнянням (2.39), можна зробити висновок, що внаслідок повороту осі в точці А вертикальні переміщення осі консолі збільшуються на величину:

$$\frac{Pc^2}{2IG}(l-x) = \frac{3P}{4cG}(l-x). \quad (2.43)$$

Це одна з можливих кількісних оцінок так званого впливу поперечної сили на прогини балки. На практиці на защемленому кінці ми маємо умови, відмінні від показаних на малюнку 2. Зафіксований перетин зазвичай не може деформуватися і розподіл зусиль на цьому кінці консолі відрізняється від того, яке дається в рівнянні (2.16). Однак рішення (2.16) дає задовільні результати для порівняно довгих консолей на значній відстані від кінців.

2.3 Коефіцієнт розподілу дотичних напружень

При визначенні в згинальних системах потенційної енергії, роботи внутрішніх сил, переміщень від внутрішніх навантажень з урахуванням впливу поперечних сил в розрахунок вводиться коефіцієнт нерівномірності розподілу дотичних напружень при вигині, величина якого визначається виразом [1]:

$$k = \frac{F}{I_z^2} \int_F \frac{S_z^2}{b^2} dF \quad (2.45)$$

де F, I_z - площа і момент інерції поперечного перерізу елемента;

b - ширина (закон зміни ширини) поперечного перерізу;

S_z - статичний момент відсіченої частини перерізу відносно центральної осі.

Коефіцієнт k для прямокутного перерізу.

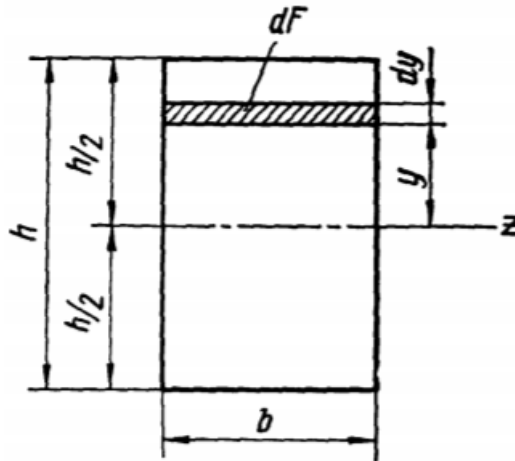


Рисунок 2.8

Для цього перерізу площа $F = bh$; момент інерції $I = \frac{bh^3}{12}$; площа елементарної площадки $dF = bdy$; статичний момент частини перетину, розташованої вище площадки dF , щодо осі z :

$$S = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{\frac{h}{2} + y}{2} = \left(\frac{b}{2} \right) \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (2.46)$$

отже за формулою (37.7):

$$\begin{aligned} k &= \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12} \right)^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2 \frac{bdy}{b^2} = \frac{b^4 h \cdot 144}{b^4 h^6 \cdot 4} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy = \\ &= \frac{36h^5}{h^2} \cdot 2 \left(\frac{1}{16 \cdot 2} - \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} \right) = 1,2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Коефіцієнт k для двотаврового перерізу.

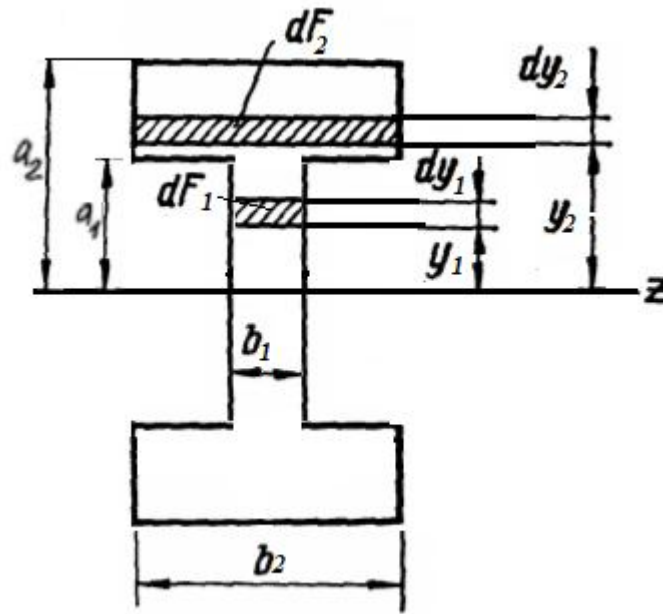


Рисунок 2.9

Для цього перерізу площа:

$$\frac{1}{2}F = a_1 b_1 + (a_2 - a_1) b_2; \quad (2.47)$$

Момент інерції:

$$\frac{1}{2}I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{1}{12} [b_1 a_1^3 + b_2 (a_2 - a_1)^3 + 3a_1 b_1 + 3(a_2 + a_1)^2 (a_2 - a_1) b_1]; \quad (2.48)$$

Статичний момент частини перетину, розташованої вище площадки dF , щодо осі z :

$$\frac{1}{2} \int_F \frac{S_z^2}{b^2} dF = \int_{F_1} \frac{S_z^2}{b_1^2} dF_1 + \int_{F_2} \frac{S_z^2}{b_2^2} dF_2 = \frac{1}{b_1} \int_0^{a_1} S_z^2(y_1) dy_1 + \frac{1}{b_2} \int_{a_1}^{a_2} S_z^2(y_2) dy_2$$

$$S_z(y_1) = y_{c1}(y_1) \cdot F_1(y_1) + y_{c2} F_2 = \frac{1}{2} [(a_1^2 - y_1^2) b_1 + (a_2^2 - a_1^2) b_2] \quad (2.49)$$

$$S_z(y_2) = y_{c2}(y_2) \cdot F_2(y_2) = \frac{1}{2} (a_2^2 - y_2^2) b_2$$

отже за формулою (37.7):

$$k = \frac{F}{I_z^2} \cdot \left(\frac{2}{b_1} \int_0^{a_1} S_1(y_1)^2 dy_1 + \frac{2}{b_2} \int_{a_1}^{a_2} S_2(y_2)^2 dy_2 \right) = 2,645 \quad (2.50)$$

2.4 Основні положення для розрахунку статично невизначених систем

Для розрахунку статично невизначених систем існує декілька методів, основним з яких є метод сил.

Методом сил називається метод визначення зусиль в статично невизначених системах, при якому в якості невідомих вибираються сили (наприклад реакції зв'язків).

Задана система - це розрахункова схема статично невизначеної балки.

Основну систему отримують із заданої шляхом відкидання діючого навантаження і зайвих зв'язків.

Еквівалентна система - це основна система, завантажена діючим навантаженням і силами, які заміняють дію відкинутих зв'язків y_i . Невідомі сили y_i за величиною і напрямком дії дорівнюють відповідним реактивним силам.

В еквівалентній і заданій системах зусилля, що виникають у відповідних перетинах, і їх переміщення відповідно однакові. Застосування методу Мора і способу Верещагіна призводить до зручної стандартної (канонічної) форми рівнянь.

Невідомі силові фактори y_i визначаються з умови рівності нулю переміщень в перетинах, де прикладені невідомі сили y_i замість відкинутих зв'язків:

$$\Delta_{iP}(y_i, P) = \Delta_{iy_k} + \Delta_{iP} = 0, \quad (2.51)$$

де Δ_{iy_k} - переміщення по напрямку сили y_i під дією сили y_k ;

Δ_{iP} - переміщення по напрямку сили y_i під дією сили P .

З огляду на лінійну залежність між силами і деформаціями, можна записати вираз Δ_{iy_k} як переміщення від одиничної сили δ_{ik} , збільшені в y_k раз:

$$\Delta_{iy_k} = \delta_{ik} \cdot y_k, \quad (2.52)$$

де δ_{ik} - питома переміщення від одиничної сили y_i в напрямку сили y_k .

З огляду на те, що дії відкинутих зв'язків замінені невідомими силами y_i (відсутність переміщень в цих перетинах) і, з огляду на принцип незалежності дії сил, формулу (2.51) можна записати в наступному вигляді:

$$\Delta_i(y_i, p) = \delta_{ik} \cdot y_k + \Delta_{ip} = 0, \quad (2.53)$$

де $\Delta_i(y_i, p)$ – переміщення в i -м напрямку від дії сил $(y_i; P)$;

y_i – невідомі силові фактори;

δ_{ik} – питома переміщення в i -м напрямку від сил y_i ;

Δ_{ip} – переміщення в i -м напрямку від зовнішніх силових факторів P .

В загальному вигляді канонічне рівняння буде мати вигляд:

$$\Delta_i = \sum \delta_{ik} y_i + \Delta_{ip} = 0. \quad (2.54)$$

Переміщення δ_{ik} и Δ_{ip} , що входять до канонічних рівнянь, найчастіше визначають за методом Мора, а інтеграл Мора обчислюють за способом Верещагіна. В даній роботі буде використано метод Мора. При цьому для балок впливом поперечних сил, як правило, нехтують і враховують лише згинальні моменти. Однак, визначаючи переміщення в балках прямокутного поперечного перерізу, для яких відношення висоти перерізу до довжини прогону $h/L = 1/5$, поперечні сили враховувались.

2.5 Метод Мора

Метод Мора заснований на теоремі Кастільяно:

Приватна похідна від потенційної енергії деформації системи по узагальненій силі дорівнює переміщенню точки прикладання цієї сили по її напрямку.

Мор узагальнив теорему Кастільяно на будь-яку довільну точку пружної системи, в якій відсутня зовнішня сила, застосувавши прийом введення фіктивної сили. Скористаємося тепер теоремою про взаємність робіт, згідно з якою робота зовнішніх сил, прикладених до допоміжної балки на відповідних переміщеннях заданої балки дорівнює взятій з протилежним знаком роботі внутрішніх сил заданої балки на відповідних переміщеннях допоміжної балки. Тоді:

$$\Delta_{1P} = \sum \int_0^L \bar{M}_z \cdot \frac{M_z \cdot dx}{EI_z} + \sum \int_0^L \bar{Q}_y \cdot \frac{Q_y \cdot dx}{GF} \cdot k \quad (2.55)$$

де \bar{M}_z і M_z – згинальні моменти відповідно від заданого навантаження і одиничної сили;

\bar{Q}_y і Q_y – поперечні сили відповідно від заданого навантаження і одиничної сили;

k – коефіцієнт розподілу дотичних напружень по перерізу що залежить від форми і розмірів поперечного перерізу балки.

E – модуль Юнга

I_z – головний центральний момент інерції

Таким чином, для визначення за допомогою формули Мора переміщень в балці або стрижневій системі від дії заданих навантажень проводиться розрахунок системи на дію заданих навантажень і визначаються зусилля M_z , Q_y вантажного стану. Потім у напрямку шуканого переміщення прикладається одинична сила або одиничний момент і визначаються викликані їх дією внутрішні зусилля \bar{M}_i , \bar{Q}_i . Після чого, вирази для зусиль підставляються в формулу і здійснюється інтегрування в межах довжини стержня ℓ і підсумовування результатів інтегрування по всіх стержнів системи.

Якщо в результаті обчислень величина Δ_{ip} виявилася додатною, то напрямок переміщення збігається з напрямком дії одиничного навантаження, а якщо від'ємною - то віно протилежний цьому напрямку.

2.6 Консольна балка по теорії згину балок Тимошенко

В перетинах балок, виникають, як правило, два внутрішніх силових фактори - поперечна сила Q_y і згинальний момент M_z .

Поперечна сила в перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій зовнішніх сил, прикладених по одну сторону від розглянутого перерізу, на поперечну (вертикальну) вісь.

Правило знаків для Q_y : поперечну силу в перерізі вважають додатною, якщо зовнішнє навантаження, прикладене до розглянутої відсіченої частини, прагне

повернути даний переріз за годинниковою стрілкою і від'ємною - в іншому випадку.

Схематично це правило знаків представлено на рис. 2.10

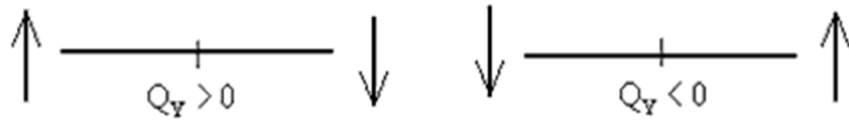


Рисунок 2.10

Згинальний момент M_z в перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, прикладених по одну сторону від розглянутого перерізу, щодо осі x , що проходить через даний перетин.

Правило знаків для M_z : згинальний момент в перерізі вважають додатним, якщо зовнішнє навантаження, прикладене до розглянутої відсіченої частини, призводить до розтягування в даному перетині нижніх волокон балки і від'ємною - в іншому випадку.

Схематично це правило знаків представлено на рис.2.11:

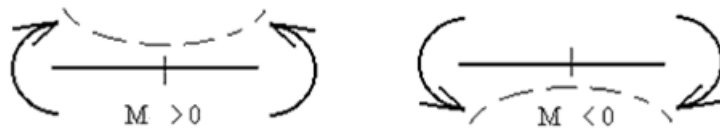


Рисунок 2.11

При використанні правила знаків для M_z в зазначеному вигляді, еюра M_z завжди виявляється побудованою з боку стиснутих волокон балки.

Визначимо функцію згинального моменту M_z та поперечної сили Q_y від зовнішніх навантажень і функцію одиничного моменту \bar{M}_z та одиничного моменту \bar{Q}_y , побудувавши еюри $M_z, Q_y, \bar{M}_z, \bar{Q}_y$. (рис.2.12).

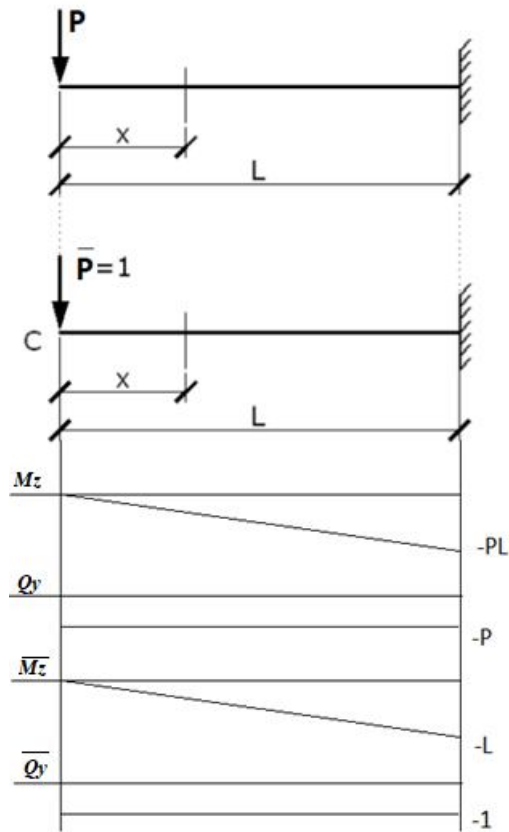


Рисунок 2.12

Функція згинального моменту та поперечної сили від зовнішнього навантаження:

$$M_z = -Px; \quad Q_y = -p.$$

Функція згинального моменту та поперечної сили від одиничної сили:

$$\bar{M}_z = -x; \quad \bar{Q}_y = -1.$$

Тоді підставляючи функції $M_x, Q_y, \bar{M}_x, \bar{Q}_y$ в рівняння (2.55) та проінтегрувавши, отримаємо:

$$\Delta_{1P} = \int_0^L \bar{M}_1 \cdot \frac{M_p dx}{EI_z} + \int_0^L \bar{Q}_1 \cdot \frac{Q_p dx}{GF} \cdot k = \int_0^L \frac{-x \cdot (-Px) dx}{EI_z} + \int_0^L \frac{-1 \cdot (-P) dx}{GF} \cdot k = \frac{PL^3}{3EI_z} + \frac{PL}{GA} \cdot k. \quad (2.56)$$

Результати розрахунків будуть приведені в розділі 4

2.7 Двопрогінна балка по теорії згину балок Тимошенко

Так як наша балка один раз статично невизначена, канонічне рівняння матиме наступний вигляд:

$$\delta_{11} \cdot y_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Відкинемо зайву опору в точці $A = y_1$. В результаті отримаємо балку, показану на рис. 2.13.

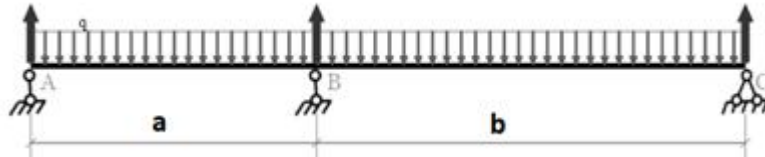


Рисунок 2.13

Для отриманої балки визначимо функції згинального моменту M_z та поперечної сили Q_y від зовнішніх навантажень. Також знайдемо функцію одиничного моменту \bar{M}_z та сили \bar{Q}_y від одиничної сили, прикладеної в напрямку відкинutoї опорної реакції в точці А. Побудуємо епюри $M_z, Q_y, \bar{M}_z, \bar{Q}_y$. (рис. 2.14).

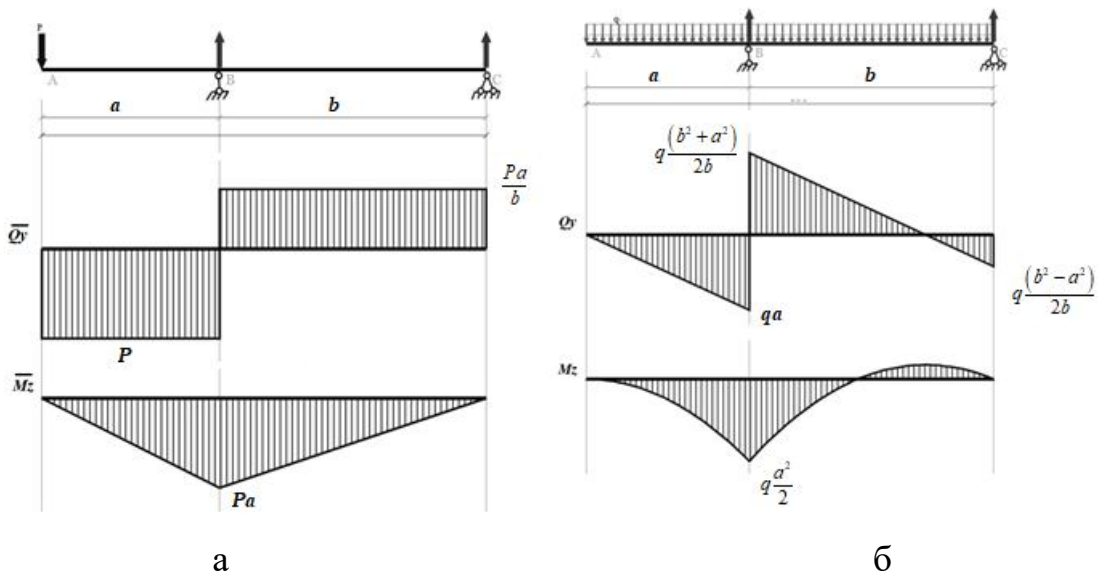


Рисунок 2.14

Функція згинального моменту та поперечної сили від зовнішнього навантаження:

$$M_{z1} = -\frac{qx_1^2}{2}; \quad M_{z2} = -qa \cdot \left(\frac{a}{2} + x_2 \right) - \frac{qx_2^2}{2} + \frac{q \cdot (a+b)^2 \cdot x_2}{2b};$$

$$Q_{y1} = -q \cdot x_1; \quad Q_{y2} = -q \cdot (a + x_2) + q \cdot \frac{(a+b)^2}{2b}.$$

Функція згинального моменту та поперечної сили від одиничної сили:

$$\bar{M}_{z1} = x_1; \quad \bar{M}_{z2} = (a + x_2) - \frac{(a+b)}{b} \cdot x_2;$$

$$\bar{Q}_{y1} = -1; \quad \bar{Q}_{y2} = -1 + \frac{(a+b)}{b}.$$

Для визначення прогину Δ_{1P} в точці А необхідно підставити функції $M_{xi}, Q_{yi}, \bar{M}_{xi}, \bar{Q}_{yi}$ в рівняння (2.56) та проінтегрувавши, отримаємо:

$$\Delta_{1P} = \frac{aq \cdot (12a^2kEI_z + 12abkEI_z - bFG(3a^3 + b(4a^2 - b^2)))}{24bEI_zFG}$$

Для визначення прогину δ_{11} в точці А необхідно підставити функції \bar{M}_x, \bar{Q}_y в рівняння (2.56) та проінтегрувавши, отримаємо:

$$\delta_{11} = \frac{a(3a^2kEI_z + b(a^2FG + abFG + 3kEI_z))}{3bEI_zFG}$$

Отримаємо:

$$y_1 = \frac{q \cdot [12a^2kEI_z + 12abkEI_z - bFG \cdot [3a^3 + b \cdot (4a^2 - b^2)]]}{8 \cdot [3akEI_z + b \cdot (a^2FG + abFG + 3kEI_z)]}.$$

Результати розрахунків будуть приведені в розділі 4.

Розділ 3 Метод скінченних елементів

3.1 Переміщення в стінці

Перша гіпотеза Кірхгофа, через відсутність зсуву шарів припускає, що зміщення має вигляд (3.1):

$$\begin{cases} \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \\ \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial w}{\partial x_2} \end{cases}$$

Після інтегрування (3.1) по x_3 , отримуємо:

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} x_3 + f_1(x_1 \cdot x_2) \\ u_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_2} x_3 + f_2(x_1 \cdot x_2) \end{cases} \quad (3.2)$$

Згідно з третьою гіпотезою переміщення у межах серединної площини $u_1 = 0$ та $u_2 = 0$. Таким чином для $x_3 = 0$ постійні інтегрування $f_1(x_1 \cdot x_2) = 0$, $f_2(x_1 \cdot x_2) = 0$. Тоді:

$$\begin{cases} u_1(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = -\frac{\partial w}{\partial x_1} x_3 \\ u_2(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = -\frac{\partial w}{\partial x_2} x_3 \end{cases} \quad (3.3)$$

На серединній площині проявляється тільки прогин згідно з гіпотезою 2 (рис. 3.1), в довільній точці на нормалі, прогини будуть такі ж, як і у відповідній точці на серединній поверхні. Переміщення по x_1 та x_2 виражаються через функцію прогинів згідно з (3.2). Можна зробити висновок, що для обчислення переміщень у довільній точці в пластині достатньо визначити функцію прогинів серединної поверхні $w = w(x_1, x_2)$. [8,9]

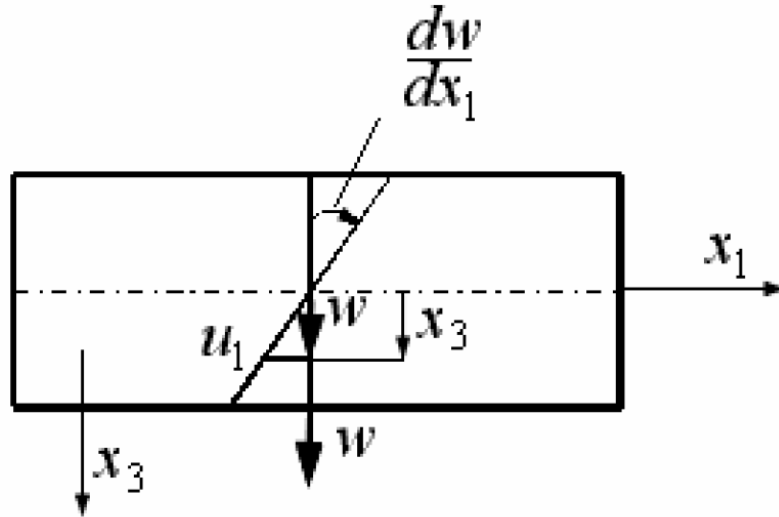


Рисунок 3.1 Прогин на серединній площині

3.2 Деформації та напруження що діють в стінці

Деформації визначаємо за наступим рівняннями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} x_3 = k_{11} x_3, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} x_3 = k_{22} x_3, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} x_3 = 2k_{12} x_3\end{aligned}\quad (3.4)$$

Другі похідні від функції прогинів по координатах x_1 та x_2 мають назву кривин або згинальних деформацій:

$$k_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; k_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} x_3 \quad (3.5)$$

та деформації скручування

$$k_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.6)$$

Напруження визначаємо використовуючи закон Гука та рівняння теорії пружності:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]; \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})]; \gamma_{13} = 0; \\ \varepsilon_{33} &= 0; \gamma_{23} = 0;\end{aligned}\quad (3.7)$$

Або

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11} \end{cases}\quad (3.8)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (3.8) відносно напружень:

$$\sigma_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & -\frac{\nu}{E} \\ \varepsilon_{22} & \frac{1}{E} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \nu \\ \frac{E}{E} & -\frac{E}{E} \end{vmatrix}} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})\quad (3.9)$$

Аналогічно: $\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})$

Виразимо напруження через функції прогинів:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} (k_{11} + \nu k_{22}) \\ \sigma_{22} &= -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} (k_{22} + \nu k_{11}) \\ \tau_{12} = G\gamma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \left(-2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = -\frac{Ex_3}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{Ex_3}{(1+\nu)} k_{12}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Що стосується напружень $\tau_{13} = G\gamma_{13}$ і $\tau_{23} = G\gamma_{23}$, то виходить, що вони повинні дорівнювати нулю. Але таке положення не відповідає рівнянням рівноваги.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Розглядаємо навантаження, нормальне до серединної площини

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} &= -\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) + \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \\ &= \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] = \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w, \end{aligned} \quad (3.12)$$

де $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$ – оператор Лапласа.

Остаточно для напружень τ_{13} і τ_{23} маємо наступні диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w \\ \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_3} = \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w \end{cases} \quad (3.13)$$

Визначимо дотичні напруження шляхом інтегрування по x_3

$$\tau_{13} = \frac{Ex_3^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w + f_3(x_1 x_2) \quad (3.14)$$

На граничній поверхні пластини $x_3 = \frac{1}{2}$ дотичне напруження $\tau_{13} = 0$. З цих

умов визначимо постійну інтегрування $f_3(x_1 x_2)$

$$\tau_{13} \Big|_{x_3=\frac{1}{2}} = -\frac{Et^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w + f_3(x_1 x_2) = 0 \quad (3.15)$$

звідки $f_3(x_1 x_2) = -\frac{Et^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w$

Остаточно: $\tau_{13} = -\frac{Ex_3^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w - \frac{Et^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w$

$$\begin{cases} \tau_{13} = -\frac{Ex_3^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w \\ \tau_{23} = -\frac{Ex_3^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w \end{cases} \quad (3.16)$$

Переміщення і напруження в межах пластини є функціями прогину (рис. 3.2).

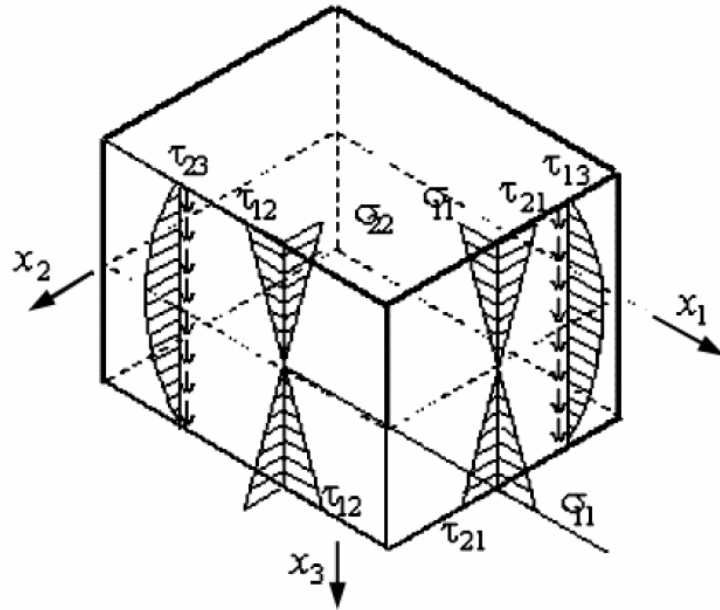


Рисунок 3.2 Розподілення напружень в пластині

3.3 Зусилля що діють в стінці та їхня робота

Внутрішні зусилля віднесені до одиниці ширини перерізу пластини (рис. 3.3) та розраховуються наступним чином:

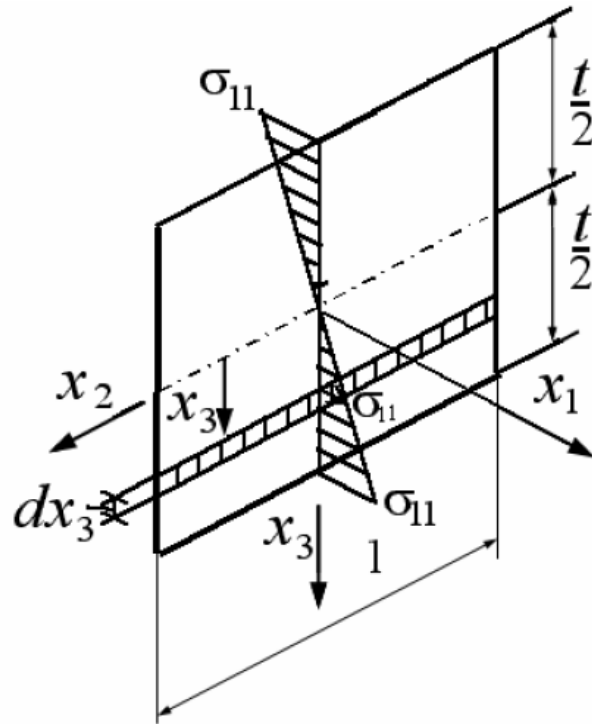


Рисунок 3.3 Внутрішні зусилля віднесені до одиниці ширини пластини

$$N_{11} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{11} dx_3 = \frac{E}{1-\nu^2} (k_{11} + \nu k_{22}) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3 dx_3 = 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{11} x_3 dx_3 = \frac{E}{1-\nu^2} (k_{11} + \nu k_{22}) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3^2 dx_3 = \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} (k_{11} + \nu k_{22}) \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} = \frac{Et^3}{1-\nu^2} (k_{11} + \nu k_{22}) = \\ &= D(k_{11} + \nu k_{22}) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

де $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$\begin{aligned} M_{12} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{12} x_3 dx_3 = \frac{E}{1+\nu} k_{12} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3^2 dx_3 = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} k_{12} = \\ &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) k_{12} = D(1-\nu) k_{12} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Погонна поперечна сила на одиницю ширини перерізу пластини:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{13} dx_3 = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right) dx_3 = \\
&= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w \left(\frac{t^2}{4} x_3 - \frac{x_3^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w \left(\frac{t^2}{4} \left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2} \right) - \frac{t^3}{12} \right) = \\
&= -\frac{Et}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Визначимо напруження через зусилля, виходячи із відношень:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{11}}{M_{11}} &= \frac{Ex_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)}{-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)} = \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)D} = \frac{Ex_3 \cdot 12 \cdot (1-\nu^2)}{(1-\nu^2)Et^3} = \frac{12x_3}{t^3} \\
&\left\{ \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{12M_{11}x_3}{t^3} \\ \sigma_{22} &= \frac{12M_{22}x_3}{t^3} \\ \sigma_{12} &= \frac{12M_{12}x_3}{t^3} \end{aligned} \right. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{13}}{Q_1} &= \frac{E \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right)}{2(1-\nu^2)D} = \frac{E \cdot 12(1-\nu^2)}{2(1-\nu^2)Et^3} \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right) = \frac{6}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right) \\
&\left\{ \begin{aligned} \tau_{13} &= \frac{6Q_1}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right) \\ \tau_{23} &= \frac{6Q_2}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - x_3^2 \right) \end{aligned} \right. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Q_1 і Q_2 визначаються оператором Лапласа.

Розглянемо умови рівноваги нескінченно малого фрагмента базової поверхні пластини від дії розподіленого нормального навантаження $q(x_1, x_2)$ до базової поверхні (рис.3.4). [10,11]

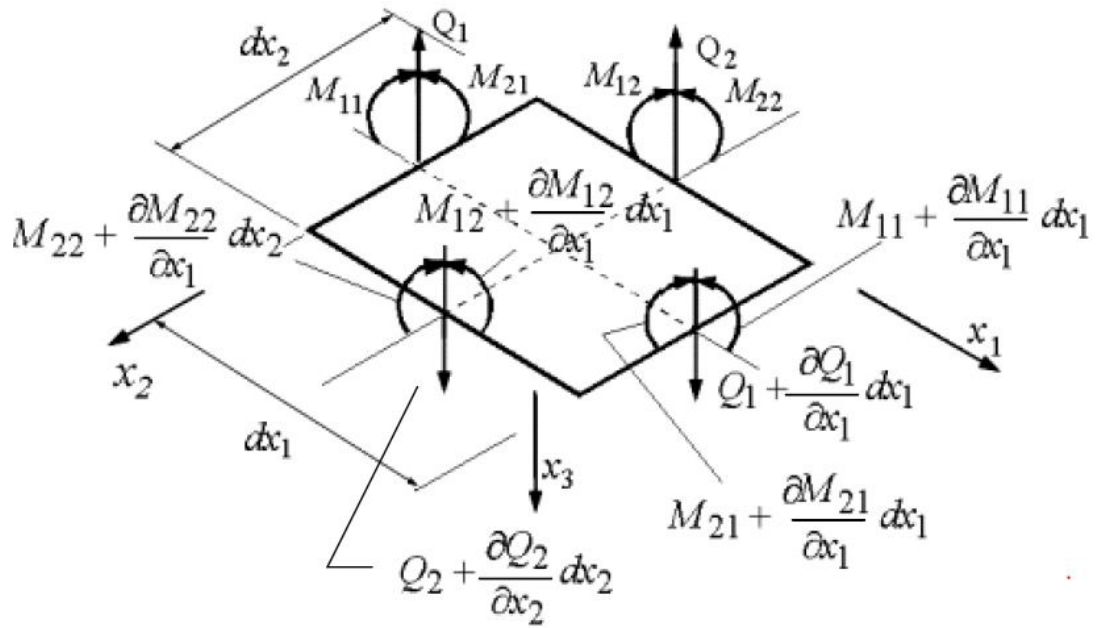


Рисунок 3.4 Умови рівноваги в пластині

$$\sum F_{x_3} = 0.$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = -F_3(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{x_2} &= -M_{11} dx_2 - M_{12} dx_1 + \left(M_{11} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + \left(M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - \\ &- \left(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_1 dx_2 - \left(Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_2 + Q_2 dx_1 \frac{dx_1}{2} - q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \frac{dx_1}{2} = \\ &= -M_{11} dx_2 - M_{12} dx_1 + M_{11} dx_2 + \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + M_{12} dx_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 - Q_1 dx_1 dx_2 - \\ &- \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} Q_2 dx_1^2 dx_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_1^2 dx_2 + \frac{1}{2} Q_2 dx_1^2 - \frac{1}{2} q(x_1, x_2) dx_1^2 dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Аналогічно записуються рівняння моментів відносно осі x_1 . Після скорочення на $dx_2 dx_1$ і нехтування малими більш високого порядку, одержимо рівняння:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = Q_1 \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases} \quad (3.24)$$

Відповідно до початку можливих переміщень робота внутрішніх сил на варіаціях переміщень дорівнює роботі зовнішніх сил на тих самих переміщеннях і записується у вигляді:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_v [\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + (\tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{13}\gamma_{13} + \tau_{23}\gamma_{23})] dx_3 dx_2 dx_1 \quad (3.25)$$

Напруження σ_{33} , τ_{13} і τ_{23} значно менші інших компонент пластини. Саме тому ними нехтують.

Формула для визначення роботи внутрішніх сил набуває вигляду

$$U = \frac{1}{2} \iiint_v [\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \tau_{12}\gamma_{12}] dx_3 dx_2 dx_1 \quad (3.26)$$

Враховуючи значення деформацій, як функцій прогину базової поверхні:

$$\varepsilon_{11} = k_{11}x_3, \varepsilon_{22} = k_{22}x_3, \gamma_{12} = k_{12}x_3 \quad (3.27)$$

Після перетворень вираз для роботи внутрішніх сил набуває наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_v \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\sigma_{11}x_3k_{11} + \sigma_{22}x_3k_{22} + \tau_{12}x_3k_{12}] dx_3 dx_2 dx_1 = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_v [M_{11}k_{11} + M_{22}k_{22} + M_{12}k_{12}] dx_2 dx_1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

де $M_{11} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{11}k_3 dx_3$ – погонний згинаючий момент відносно осі x_2 який являє

собой інтегральну характеристику нормальних напружень у напрямку осі x_1 ;

$M_{22} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{22}k_3 dx_3$ – погонний згинаючий момент відносно осі x_2 ;

$M_{12} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{12}k_3 dx_3$ – погонний момент скруту.

Формула для визначення роботи зовнішніх нормально розподілених до базової поверхні сил має вигляд:

$$A = \iint_s q(x_1, x_2) w dx_1 dx_2 \quad (3.29)$$

У матричній формі співвідношення щодо роботи внутрішніх сил мають вигляд:

$$U = \frac{1}{2} \int_s \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} ds,$$

де:

$$\{\varepsilon\} = [\partial] w = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ 2k_{12} \end{Bmatrix};$$

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ 2k_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D(k_{11} + \nu)k_{22} \\ D(k_{22} + \nu)k_{11} \\ D(1-\nu)k_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix};$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \text{—циліндрична жорсткість пластини;}$$

ν —коefficient Пуассона;

$[E]$ — матриця пружності;

$\{\varepsilon\}$ — вектор деформації по області серединної поверхні пластини,

компонентами якого є криві:

$$k_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \text{— крива серединної поверхні у напрямку осі } x,$$

$$k_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \text{ – к напрямку осі } x_2,$$

$$k_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_1} \text{ – змішана крива серединної поверхні};$$

$\{\sigma\}$ – вектор напружень по області пластини, складовими якого є погонні згинаючі моменти і момент скрути. З урахуванням усіх введених позначень функціонал повної потенціальної енергії тонкої жорсткої пластини, що згинається приймає вигляд [8,9]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_s \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} ds - \int_s q(x_1, x_2) w ds \quad (3.30)$$

3.4 Параметри скінчено елементної моделі

Пластину з прямокутним контуром розділяють на скінченні елементи прямокутної форми (рис. 3.5).

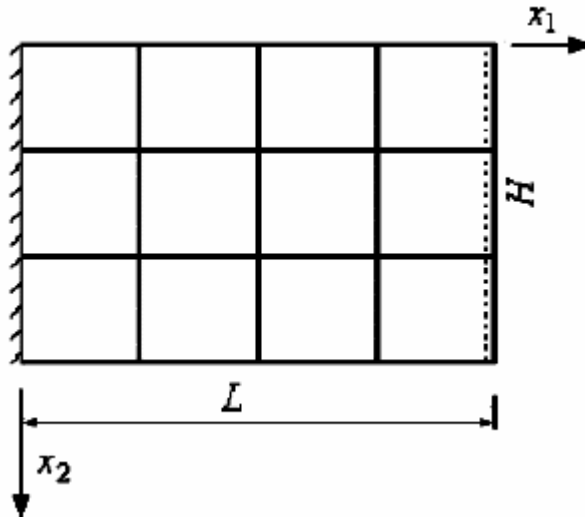


Рисунок 3.5 Розділена на скінченні елементи пластина

Гіпотези Кірхгофа дають змогу розглядати скінченний елемент пластини у вигляді прямокутника як частини серединної площини (рис. 3.6).

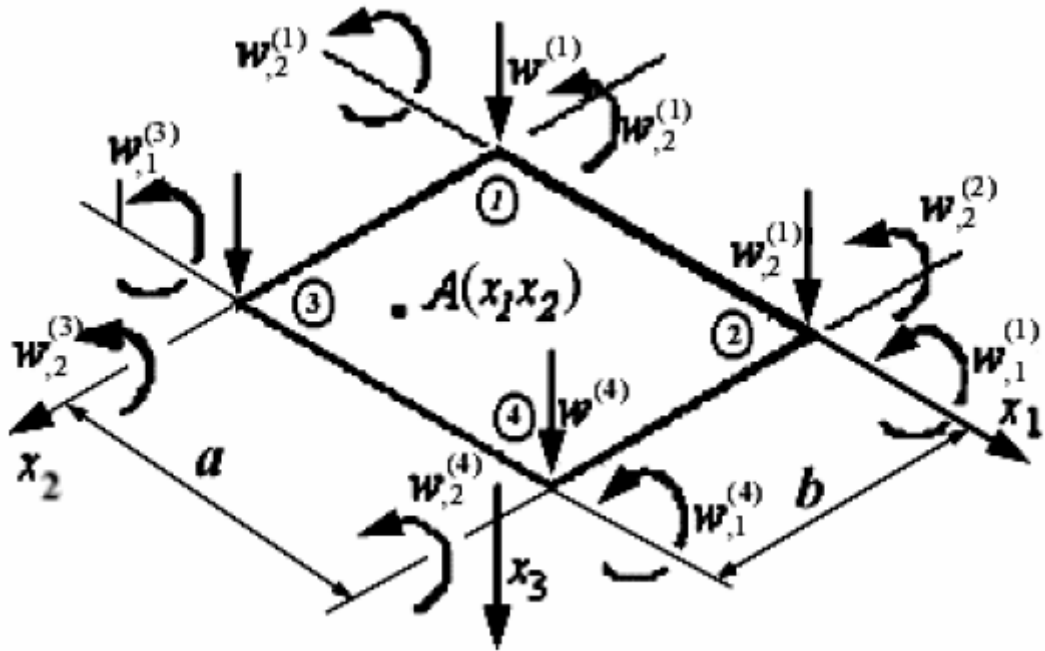


Рисунок 3.6 Умови рівноваги в скінченному елементі

Деформований стан пластини визначається функцією прогинів серединної площини і тому задача вважатиметься розв'язаною, якщо ця функція буде визначеною: $w = w(x_1, x_2)$

Враховуючи те, що функція, яку треба визначити є неперервною, апроксимацію її виконаємо поліномом. До функціоналу повної потенціальної енергії (3.6) входять другі похідні від функції прогинів. А тому ступінь апроксимуючого поліному має бути не менше 2-го порядку. Постійні коефіцієнти поліному визначають через вузлові переміщення скінченного елемента, мінімальне число яких для кожного вузла дорівнює трьом (рис. 3.6): лінійне переміщення (прогин) w та два кутових переміщення $\varphi_1^{(i)}$ $\varphi_2^{(i)}$, відносно координатних осей x_1 та x_2 . [10,11]

$$\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1} = w_1; \varphi_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} = w_2 \quad (3.31)$$

Викладені міркування дають змогу зробити висновок, що апроксимацію прогинів по області скінченного елемента можна виконати неповним поліномом 4-го ступеня від двох змінних:

$$w(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 + \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1 x_2^3 \quad (3.32)$$

У компактному запису апроксимація лінійних і кутових переміщень у межах скінченного елемента має вигляд

$$w(x_1, x_2) = [p]\{\alpha\}, w_1(x_1; x_2) = \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial [p]}{\partial x_1}\{\alpha\}, \quad (3.33)$$

$$w_2(x_1; x_2) = \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{\partial [p]}{\partial x_2}\{\alpha\}$$

Коефіцієнти поліному виражаються через переміщення вузлів скінченного елемента. Формується систему алгебраїчних рівнянь відносно постійних коефіцієнтів поліному α_i , підставляючи координати вузлів скінченного елемента у функції переміщень:

$$\begin{Bmatrix} w \\ w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 & x_1^2 x_2 & x_1^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_1^3 x_2 & x_1 x_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 & 2x_1 x_2 & x_2^2 & 3x_1^2 & 0 & 3x_1^2 x_2 & x_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 & x_1^2 & 2x_1 x_2 & 0 & 3x_2^2 & x_1^3 & 3x_1^2 x_2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Координати чотирьох вузлів СЕ $(0,0)$, $(a, 0)$, $(0,b)$, (a,b) по черзі підставляються в (3.8). У результаті утворюється система сумісних лінійних алгебраїчних рівнянь дванадцятого порядку відносно постійних коефіцієнтів полінома α_i , яка в компактному запису має вигляд:

$[C]\{\alpha\} = \{v\}$, (Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует..35)

де $\{v\}$ – вектор вузлових переміщень;

$[C]$ – матриця коефіцієнтів при невідомих α_i ($i = 1, 2, \dots, 12$);

$\{\alpha\}$ – вектор коефіцієнтів полінома.

Розв'язок системи (5.30) виконується за стандартною схемою:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{v\}, \text{ (Ошибка! Текст указанного стиля}$$

в документе отсутствует..36)

Матриця $[C]$ є числовою матрицею і складається з координат вузлів СЕ. Сучасні обчислювальні засоби дають змогу без проблем отримати зворотну матрицю $[C]^{-1}$, що входить до (3.30). [10,11]

3.5 Функцій форми СЕ та матриця жорсткості СЕМ для стінки

Функції форми визначають вклад кожного з вузлових переміщень в значення прогину w_A в довільній точці $A(x_1, x_2)$ скінченного елемента

$$w(x_1, x_2) = [N]\{v\}, \quad (3.37)$$

де $[N]$ матриця функцій форми;

$\{v\}$ – вектор вузлових переміщень.

Підставимо в перше рівняння (3.33) співвідношення щодо компонент вектора коефіцієнтів полінома (3.36). Отримаємо наступну залежність:

$$w(x_1, x_2) = [p]\{\alpha\} = [p][C]^{-1} \{v\} \quad (3.38)$$

Порівнюючи (5.11) та (5.12), можемо зробити висновок, що матриця функцій форми визначається рівнянням.

$$[N] = [p][C]^{-1} \quad (3.39)$$

Виходимо з умов рівноваги навантаженої пластини:

$$\delta U - \delta A = \sum_e (\delta U_e - \delta A_e) = 0 \quad (3.40)$$

Формула для обчислення роботи внутрішніх сил на можливих переміщеннях у межах СЕ має стандартний вигляд:

$$\delta U_e = \iint_S \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} ds \quad (3.41)$$

Вектор деформацій $\{\varepsilon\}$ визначається через вузлові переміщення:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [\partial]w = [\partial][N]\{v\} = [\partial][p][C]^{-1}\{v\} = [B][C]^{-1}\{v\}, \\ [B] &= [\partial][p] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Таким же чином визначається і вектор напружень:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} = [E][B][C]^{-1}\{v\}, \quad (3.43)$$

Підставимо (3.42) і (3.43) в (3.41), враховуючи дії, що стосуються транспонування матриць :

$$\{\varepsilon\}^T = \left[[E][B][C]^{-1}\{v\} \right]^T = \{v\}^T \cdot \left([B][C]^{-1} \right)^T = \{v\}^T \left([C]^{-1} \right)^T [B]^T$$

Остаточно отримуємо формулу для визначення роботи внутрішніх сил на можливих переміщеннях в межах СЕ:

$$\delta U_e = \iint_S \{\delta v\}^T \left([C]^{-1} \right)^T [B]^T [E][B][C]^{-1}\{v\} ds \quad (3.44)$$

Винесемо за знак інтеграла всі числові матриці:

$$\delta U_s = \{\delta v\}^T [K]\{v\}$$

де $[K] = \left([C]^{-1} \right)^T \iint_S [B]^T [E][B] ds [C]^{-1}$ – матриця жорсткості СЕ пластини.

Матриця $[B]$ в розгорнутій формі має вигляд:

$$\begin{aligned}
[B] = [\partial][P] &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} [P] = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x_2 & 0 & -6x_1 & 0 & -6x_1x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x_1 & 0 & -6x_2 & 0 & 6x_1x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Формула, що визначає роботу зовнішніх сил на можливих переміщеннях являється вихідною для побудови вектора приведених вузлових сил.

$$\delta A_e = \iint_S \delta w \cdot q ds = \iint_S \{\delta v\}^T [N]^T q ds = \{\delta v\}^T \iint_S ([C]^{-1})^T [P]^T q ds = \{\delta v\}^T \cdot \{Q\}_s \quad (3.46)$$

Перетворення в (3.46) виконані з урахуванням співвідношень (3.36) і (3.38).

Вектор зведених вузлових сил, що відповідають рівномірно розподіленому навантаженню в СЕ інтенсивністю q визначається рівнянням

$$\{Q\}_s = ([C]^{-1})^T \iint_S [P]^T q ds \quad (3.47)$$

і при виконанні всіх дій в (3.18) остаточно отримуємо таке співвідношення:

$$\{Q\}_s^T = \left\{ \frac{ab}{4}q \quad 0 \quad 0 \quad \frac{ab}{4}q \quad 0 \quad 0 \quad \frac{ab}{4}q \quad 0 \quad 0 \quad \frac{ab}{4}q \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (3.48)$$

Позначимо:

$$\{V\}^T = \{w^{(1)} \quad w_1^{(1)} \quad w_2^{(1)} \quad w^{(2)} \quad w_1^{(2)} \quad w_2^{(2)} \dots w^{(15)} \quad w_1^{(15)} \quad w_2^{(15)} \dots w^{(n)} \quad w_1^{(n)} \quad w_2^{(n)}\}$$

– вектор переміщення вузлів СЕ – моделі пластини.

Співвідношення $\{V\}_e = [I]_e \{V\}$, де $[I]_e$ – матриця відповідності елемента, забезпечує вибірку вузлових переміщень щодо одного СЕ з повного набору переміщень вузлів СЕ-моделі пластини.

Вся послідовність дій, пов'язаних з побудованою СЕ-моделі пластини в математичному аспекті показана нижче:

$$\begin{aligned}
 \delta U - \delta A &= \sum_{e=1}^n \delta U_e - \sum_{e=1}^n \delta A_e = \sum_{e=1}^n \{\delta v\}_e^T [K]_e \{v\}_e - \sum_{e=1}^n \{\delta v\}_e^T \{Q\}_e = \\
 &= \sum_{e=1}^n \{\delta V\}^T [I]_e^T [K]_e [I]_e \{V\} - \sum_{e=1}^n \{\delta V\}^T [I]_e^T \{Q\}_e = \\
 &= \{\delta V\}^T \left([K]_e^* \{ \delta V \} - \{ Q \}^* \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Розглянемо випадок, коли можливі переміщення вузлів СЕ $\{\delta V\} \neq 0$, тоді:

$$[K]_e^* \{ \delta V \} - \{ Q \}^* = 0 \tag{3.50},$$

де $[K]_e^* = [I]_e^T [K]_e [I]_e$; $\{Q\}^* = \sum_{e=1}^n [I]_e^T \{Q\}_e$ – відповідно матриця жорсткості і

вектор зведених вузлових сил СЕМ пластини.

СЕ – модель пластини являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно переміщень вузлів СЕМ у глобальній системі координат.

$$\{V\} = [K]^{-1} \{Q\}^*$$

Зведені співвідношення для СЕ пластини отримані Клафом. [10,11]

3.6 СВЕАМ - балковий елемент

СВЕАМ - балковий елемент загального вигляду. На відміну від попереднього випадку тут враховується розбіжність осі центрів зсуву з нейтральною віссю. Вважається, що вісь x системи координат елемента проходить через центри зсуву перетинів. При цьому положення нейтральної осі визначається завданням e_y - і e_z -координат. У кожному вузлі даного елемента крім шести основних ступенів свободи визначається ще одна - депланація перетину.

СВЕАМ дозволяє моделювати балки змінними уздовж осі геометричними характеристиками перетину. Ці характеристики можна задавати щонайбільше для

десяти перетинів балки, включаючи кінцеві. Для балок сталого поперечного перерізу допускається його неоднорідність (тобто зміна матеріалу), що часто використовується для моделювання композитних стержнів. Слід зазначити, що даний елемент будується на базі кінематичної моделі Тимошенко, яка враховує в першому наближенні деформації поперечного зсуву. При цьому коефіцієнти зсуву K_1 і K_2 тут визначаються відношенням ефективної площі перетину при зсуві у відповідній площині до загальної площі поперечного перерізу. Для виключення врахування деформації поперечного зсуву (тобто для переходу до балочній теорії Бернуллі-Ейлера) необхідно покласти $K_1 = K_2 = 0$. За замовчуванням вони дорівнюють одиниці. Стержень є просторовим тілом, два розміри якого, ширина і висота, набагато менші за довжину. Це дає можливість розглядати його фізичну модель у вигляді лінії, яка проходить через центри перерізів. Якщо зовнішні сили, прикладені до стержня, розташовані в одній площині з його моделлю, можна вважати, що деформації стержня відбуваються у цій же площині. З математичної точки зору геометричні характеристики, переміщення і напруження в межах стержня є функціями одного аргументу. Співвідношення теорії пружності базуються на гіпотезі плоских перерізів стержня. Зв'язок між деформаціями і напруженнями відповідає лінійному закону Гука. У кожному перерізі стержня визначаються три переміщення – u , w , ϕ (рис. 3.7, а, б), з яких поздовжнє u і прогин w незалежні, а кут повороту виражається через прогин $\phi = dw / dx$. Для нескінченно малої ділянки стержня dx справедливі співвідношення [5] (рис. 3.7,в):

$$du = \frac{N \cdot dx}{EA}; \quad \frac{du}{dx} = \varepsilon; \quad du = \varepsilon dx; \quad N = EA \frac{du}{dx}.$$

Потенціальну енергію деформації стержня природно обчислювати в локальній системі координат, вісь x якої збігається з віссю стержня, а вісь y перпендикулярна до осі стержня (рис.3.7,а).

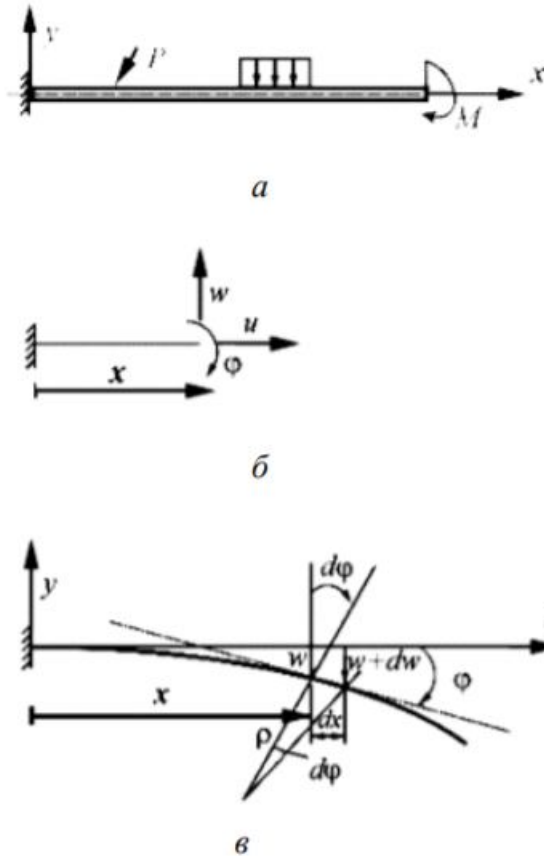


Рисунок 3.7

У компактному запису співвідношення (3.1) набуває вигляду:

$$U = \frac{1}{2} \int_l \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx,$$

де $\{\varepsilon\} = [D]\{u\}; \quad \{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\};$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \quad \text{– матриця диференціювання;}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EA \end{bmatrix} \quad \text{– матриця фізико-геометричних характеристик}$$

стержня;

$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$ – вектор незалежних переміщень у довільній точці.

Для підтвердження відповідності формули (3.2) співвідношенню (3.1), виконаємо наступні матричні дії:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [D]\{u\} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 \\ 0 & d^2/dx^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/dx \\ d^2w/dx^2 \end{Bmatrix}, \\ \{\sigma\} &= [E]\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du/dx \\ d^2w/dx^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA & du/dx \\ EI & d^2w/dx^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}, \\ U &= \frac{1}{2} \int_l \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx = \frac{1}{2} \int_l \begin{Bmatrix} du/dx & d^2w/dx^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_l N du/dx \cdot dx + \frac{1}{2} \int_l M d^2w/dx^2 \cdot dx. \end{aligned}$$

Слід звернути увагу на те, що компонентами вектора напружень $\{\sigma\}$ у формулі (3.2), що визначає потенціальну енергію деформації стержня, є внутрішні зусилля. У подальшому при побудові співвідношень МСЕ для різних конструкцій формула, що визначає потенціальну енергію деформації, буде мати вигляд (3.2), але наповнення векторів деформацій $\{\varepsilon\}$ і напружень $\{\sigma\}$ буде відповідати гіпотезам і співвідношенням теорії пружності щодо конкретної конструкції.

3.7 Матриця жорсткості СЕ моделі фланців.

Невідомими МСЕ є можливі і незалежні переміщення вузлів скінченних елементів. Співвідношення МСЕ для стержневого СЕ визначалися в локальній системі координат, виходячи з умов простоти запису роботи внутрішніх сил на переміщеннях, де вони природно мають фізичне трактування. У випадку побудови співвідношень МСЕ для цілої конструкції, переміщення вузлів слід задавати у глобальній системі координат, яка вводиться для цілої конструкції і є загальною для всіх СЕ. Співвідношення МСЕ для переміщень в глобальній системі будуються на основі отриманих співвідношень в локальній системі координат СЕ шляхом елементарних математичних перетворень з вектором переміщень (рис. 3.8).

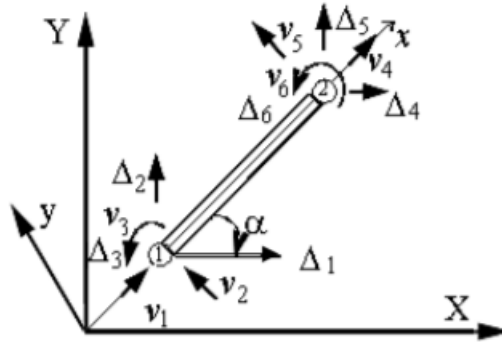


Рисунок 3.8

$\{V\}_s^T = \{V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6\}$, $\{\Delta\}_s^T = \{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_5 \Delta_6\}$ – вектори вузлових переміщень скінченного елемента у локальній $\{v\}_s$ і глобальній $\{\Delta\}_s$ системі координат. Зв'язок між цими векторами визначається формулою

$$\{V\}_s = [T]\{\Delta\}_s,$$

де $[T]$ – матриця перетворень.

$$\text{тоді } [T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначення матриці жорсткості СЕ для вузлових переміщень у глобальній системі координат виконується формально:

$$\delta U_s = \{\delta v\}_s^T [K]_s \{v\}_s = \{\delta \Delta\}_s^T [T]^T [K]_s [T] \{\Delta\}_s = \{\delta \Delta\}_s^T [K]_s \{\Delta\}_s,$$

де $[K]_s = [T]^T [K] [T]$ – матриця жорсткості СЕ, що відповідає переміщенням вузлів у глобальній системі координат.

Аналогічно виконується перетворення вектора зведених вузлових сил.

$$\delta A_s = \{\delta v\}_s^T \{Q\}_s = \{\delta \Delta\}_s^T [T]^T \{Q\}_s = \{\delta \Delta\}_s^T \{Q\}_s;$$

$$\{Q\} = [T]^T \{Q\}_s.$$

Подальші дії щодо побудови матриці жорсткості СЕМ цілої конструкції виконуються в наступній послідовності. Введемо вектор переміщень вузлів рами

в глобальній системі координат $\{V\}^T = \{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \dots \Delta_{3n}\}$, (n – загальне число вузлів СЕ) і матрицю відповідності $[I]_s$ для кожного скінченного елемента СЕМ. Матриця відповідності S-го СЕ забезпечує вибірку компонент вектора $\{V\}$, які стосуються цього елемента

$$\{\Delta\}_s = [I]_s \{V\}.$$

Виходячи з умов рівноваги рами, маємо:

$$\begin{aligned} \delta U - \delta A &= \sum_s \left(\{\delta\Delta\}_s^T [K]_s \{\Delta\}_s - \{\delta\Delta\}_s^T \{Q\}_s \right) = \sum_s \{\delta\Delta\}_s^T [I]_s^T [K]_s [I]_s \{V\} - \{\delta\Delta\}_s^T [I]_s^T \{Q\}_s = \\ &= \{\delta\Delta\}^T \left([\tilde{K}] \{V\} - \{\tilde{Q}\} \right) = 0, \end{aligned}$$

де $[\tilde{K}] = \sum_s \left([I]_s^T [K]_s [I]_s \right)$ – матриця жорсткості СЕМ цілої конструкції;

$\{\tilde{Q}\} = \sum_s [I]_s^T \{Q\}_s$ – вектор зведених вузлових сил СЕМ конструкції.

Аналізуючи (3.10), зробимо висновок, що вектор можливих переміщень вузлів рами $\{\delta V\}$ у загальному випадку не є нульовим. Компоненти його можуть приймати можливі нескінченно малі значення. Тоді виходить, що нульовим повинен бути другий співмножник у лівій частині (3.10):

$$[\tilde{K}] \{V\} - \{\tilde{Q}\} = 0.$$

Таким чином, в математичному аспекті СЕМ рами являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь, у якій невідомими є дійсні переміщення вузлів СЕ – моделі в глобальній системі координат.

3.8 Співвідношення МСЕ для фланців при просторовому навантаженні.

Віднесемо стержень до загальноприйнятої системи координат x у z (рис. 15,а), де вісь x співпадає з віссю стержня, а осі y та z – головні осі інерції перерізу стержня. Стержень підлягає поздовжній деформації, скруту та поперечному згину в двох площинах – $хоу$ та $хоз$. Якщо розміри перерізу стержня малі у порівнянні з його довжиною, то можна нехтувати зусиллями зсуву і вважати, що нормальні

напруження в перерізі розподіляються по лінійному закону відповідно до гіпотези плоских перерізів.

У цьому випадку поздовжнє переміщення $u(x)$, кут скрути стержня α_x та прогини w_y і v_z в напрямку осей ou та oz можна вважати незалежними.

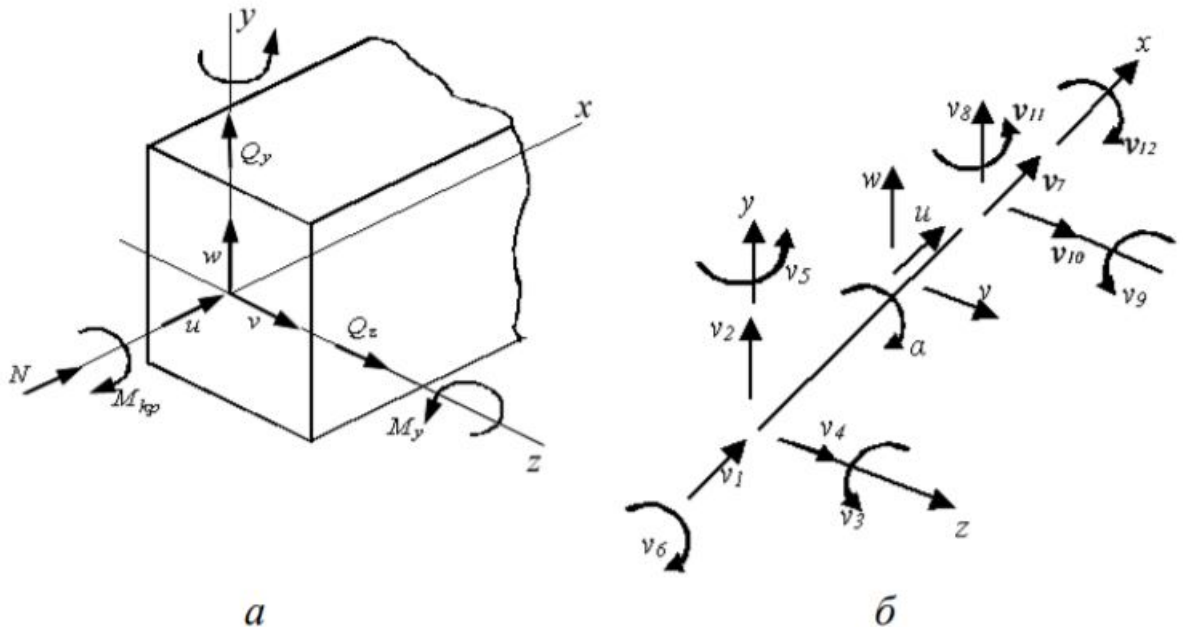


Рисунок 3.9

Робота внутрішніх сил на можливих переміщеннях визначається формулою:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_l (N \delta \varepsilon_x + M_{kp} \delta \alpha_x + M_z \delta \beta_y + M_y \delta \gamma_z) = \\ &= \int_l \left[EA \cdot \frac{du}{dx} \delta \frac{du}{dx} + GI_{kp} \frac{d\alpha}{dx} \delta \frac{d\alpha}{dx} + EI_z \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \frac{d^2 w}{dx^2} + EI_y \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \frac{d^2 v}{dx^2} \right] dx, \end{aligned}$$

де u , w , v – лінійні переміщення в межах стержня по напрямку осей x, y, z , відповідно; α , β , γ – кути повороту перерізів стержня навколо осей x , y , z ; EA , GI_{kp} , EI_y , EI_z – поздовжня жорсткість стержня, жорсткість на скручування і жорсткості на згин відносно осі y та осі z . Кутові переміщення β і γ є функціями прогинів v і w у напрямку осей OZ та OY .

$$\left(\beta = \frac{dw}{dx}; \quad \gamma = \frac{dv}{dx} \right).$$

Наближене подання (апроксимацію) функцій незалежних переміщень у межах стержня виконаємо поліномами, число членів яких залежить від порядку

похідних у формулі (3.11). Для функцій $u(x)$ і α_x приймаємо лінійну апроксимацію, враховуючи той факт, що до (3.11) вони входять у складі першої похідної і поліном має два степені вільності – $u(x) = c_1 + c_2x$. А для $w(x)$ і $v(x)$ треба вже використовувати кубічний поліном, який має чотири степені вільності $w(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^4$. Коефіцієнти поліномів, як і у випадку зі стержнем, навантаженим у площині, виражаються через переміщення вузлів СЕ. (рис. 15,б) за вже визначеною схемою. Тому апроксимацію всіх чотирьох незалежних переміщень (u, α, w, v) по області стержня подано через функції форми, які визначені для плоского стержня.

$$\{u\} = [N]\{v\},$$

де $\{u\} = \{u, w, v, \alpha\}$ – вектор переміщень у довільній точці СЕ,

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & N_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4 & N_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{10} & N_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{12} \end{bmatrix} \quad - \quad \text{матриця}$$

функцій форми СЕ;

$$\{V\}^T = \{V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6 V_7 V_8 V_9 V_{10} V_{11} V_{12}\} \quad - \quad \text{вектор вузлових переміщень СЕ,}$$

фізична суть яких показана на рис.15,б.

Наведемо розгорнуту форму співвідношення (3.12):

$$u(x) = N_1v_1 + N_7v_7, \quad w(x) = N_2v_2 + N_3v_3 + N_8v_8 + N_9v_9,$$

$$v(x) = N_4v_4 + N_5v_5 + N_{10}v_{10} + N_{11}v_{11}, \quad \alpha(x) = N_6v_6 + N_{12}v_{12}.$$

Функції форми мають вигляд

$$N_1 = N_6 = \frac{l-x}{l} = \left(1 - \frac{x}{l}\right); \quad N_7 = N_{12} = \frac{x}{l}; \quad N_2 = N_4 = \frac{1}{l^3}(2x^3 - 3lx^2 + l^3);$$

$$N_3 = N_5 = \frac{1}{l^2}(x^3 - 2lx^2 + l^3x); \quad N_8 = N_{10} = \frac{1}{l^3}(2x^3 - 3lx^2); \quad N_9 = N_{11} = \frac{1}{l^2}(x^3 - lx^2).$$

Математичні викладки щодо побудови матриці жорсткості (МЖ) просторового СЕ отримаємо за тією ж схемою, що і для плоского СЕ, виходячи з компактного запису (3.11):

$$\delta U_s = \int_l \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dx,$$

$$\text{де } \{\varepsilon\} = [D]\{u\} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2/dx^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^2/dx^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d/dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \\ a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du/dx \\ d^2w/dx^2 \\ d^2v/dx^2 \\ da/dx \end{Bmatrix};$$

$$\{y\} = [E]\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_{kp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ k_y \\ k_z \\ \varepsilon_\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \\ M_{kp} \end{Bmatrix}.$$

Зробимо перетворення в (3.13) з урахуванням (3.12):

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{v\} = [B]\{v\}$$

Матриця жорсткості СЕ будується в локальній системі координат, в якій формули для обчислення роботи внутрішніх і зовнішніх сил мають просту структуру. Стосовно побудови МЖ усієї конструкції потрібно виходити з того, що переміщення її вузлів повинні задаватися в глобальній системі координат XYZ, пов'язаній з конструкцією. Установимо зв'язок між компонентами вектора вузлових переміщень, поданими в локальній і глобальній системах координат:

$$\{v\} = [T]\{\Delta\},$$

де $\{\Delta\}$ – вектор переміщень у глобальній системі координат;

$[T]$ – матриця перетворень.

Формула, що визначає роботу внутрішніх сил на можливих переміщеннях дискретної моделі набуває вигляду:

$$\delta U_s = \int_l \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dx = \{\delta n\}_s^T [K]_s \{n\}_s = \{\delta \Delta\}_s^T [T]^T [K]_s [T] \{\Delta\} = \{\delta \Delta\}_s^T [K]_s \{\Delta\},$$

де $[K]_s = [T]^T [T]$ – матриця жорсткості СЕ для переміщень вузлів у глобальній системі координат.

Для побудови матриці перетворень $[T]$ подамо довільний вектор R у двох ортогональних системах координат з базисами $\{\bar{l}_1' \ \bar{l}_2' \ \bar{l}_3'\}$ і $\{g_1 \ g_2 \ g_3\}$. Для зручності подальших записів усі індексовані величини визначаються в глобальній системі координат:

$$R = R'_x \bar{l}'_1 + R'_y \bar{l}'_2 + R'_z \bar{l}'_3,$$

$$R = r_x \bar{g}_1 + r_y \bar{g}_2 + r_z \bar{g}_3,$$

$$R'_x \bar{l}'_1 + R'_y \bar{l}'_2 + R'_z \bar{l}'_3 = r_x \bar{g}_1 + r_y \bar{g}_2 + r_z \bar{g}_3.$$

Визначимо скалярні добутки лівої і правої частини (3.14) на базисні вектори $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ і врахуємо

$$(\bar{g}_i \cdot \bar{g}_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

У результаті отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} r_x = C_{1'1} R'_x + C_{2'1} R'_y + C_{3'1} R'_z, \\ r_y = C_{1'2} R'_x + C_{2'2} R'_y + C_{3'2} R'_z, \\ r_z = C_{1'3} R'_x + C_{2'3} R'_y + C_{3'3} R'_z. \end{cases}$$

або в компактній формі $\{r\} = [C]R'$.

Елементи матриці перетворень $C_{i'j} = (\bar{e}_{i'} \cdot \bar{g}_j)$ є косинуси кутів між \bar{l}'_i та \bar{g}_i , базисними векторами глобальної і локальної систем координат.

3.9 Створення моделі в CAD системі Patran

У даній роботі було створено модель балки з прямокутним і двотавровим поперечним перерізом з однаковими вздовж осі стержня геометричними характеристиками але з різним положенням опор. Нижче описані основні кроки створення моделі.

Опорні точки сітки

Вибираємо модуль *Elements*. Для рівномірного розташування опорних точок сітки використовуємо поєднання Create/Mesh Seed/ Uniform (рис. 3.9)

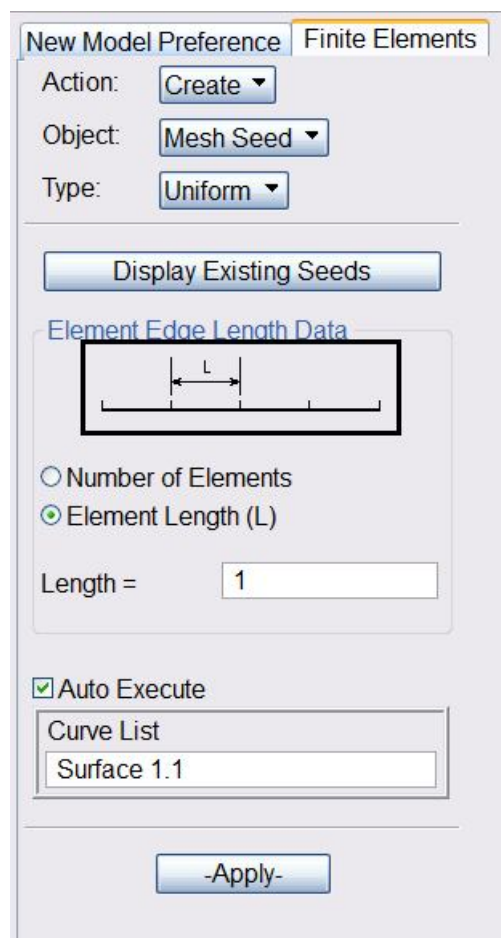


Рисунок 3.9

Вибираємо *Element Length (L)* і задаємо розмір елемента, після цього необхідно вибрати кромки нашої моделі і натиснути *Apply*.

Розбиваємо поверхню на кінцеві елементи.

Для генерації сітки в тому ж модулі використовуємо поєднання Create/Mesh/Surface та Create/Mesh/Curve

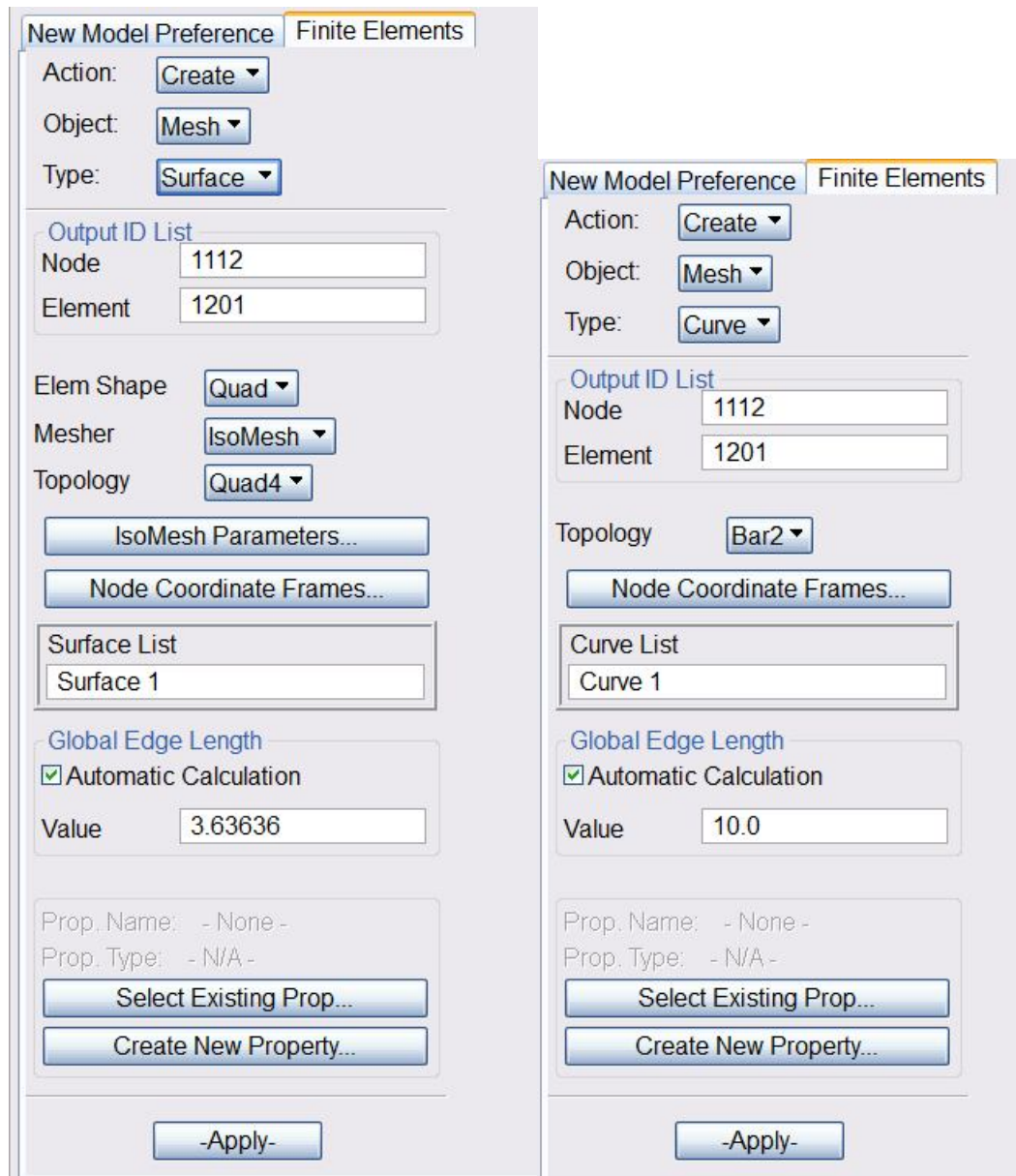


Рисунок 3.10

Отримана сітка показана на рисунку 3.11

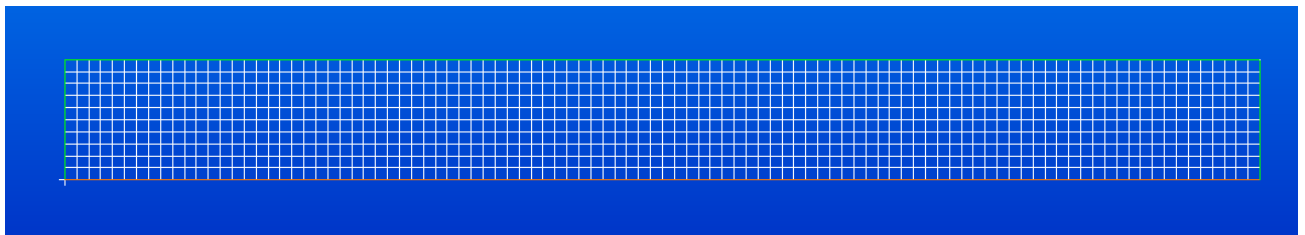


Рисунок 3.11

Задаємо властивості матеріалу.

Вибираємо модуль *Materials*. Вибираємо поєднання *Create/Isotropic/Manual Input*. В поле *Material Name* вводимо назву матеріалу. Далі натискаємо кнопку *Input Properties*. При цьому з'являється додаткове вікно, де у відповідні поля вводимо:

Elastic Modulus = $0.717 \cdot 10^{11}$ (модуль Юнга в МПа)

Poisson Ratio = 0.33 (коефіцієнт Пуассона)

В кінці натискаємо кнопку *Apply*. При цьому створена модель матеріалу з'являється в списку існуючих матеріалів *Existing Materials* (рис 3.11).

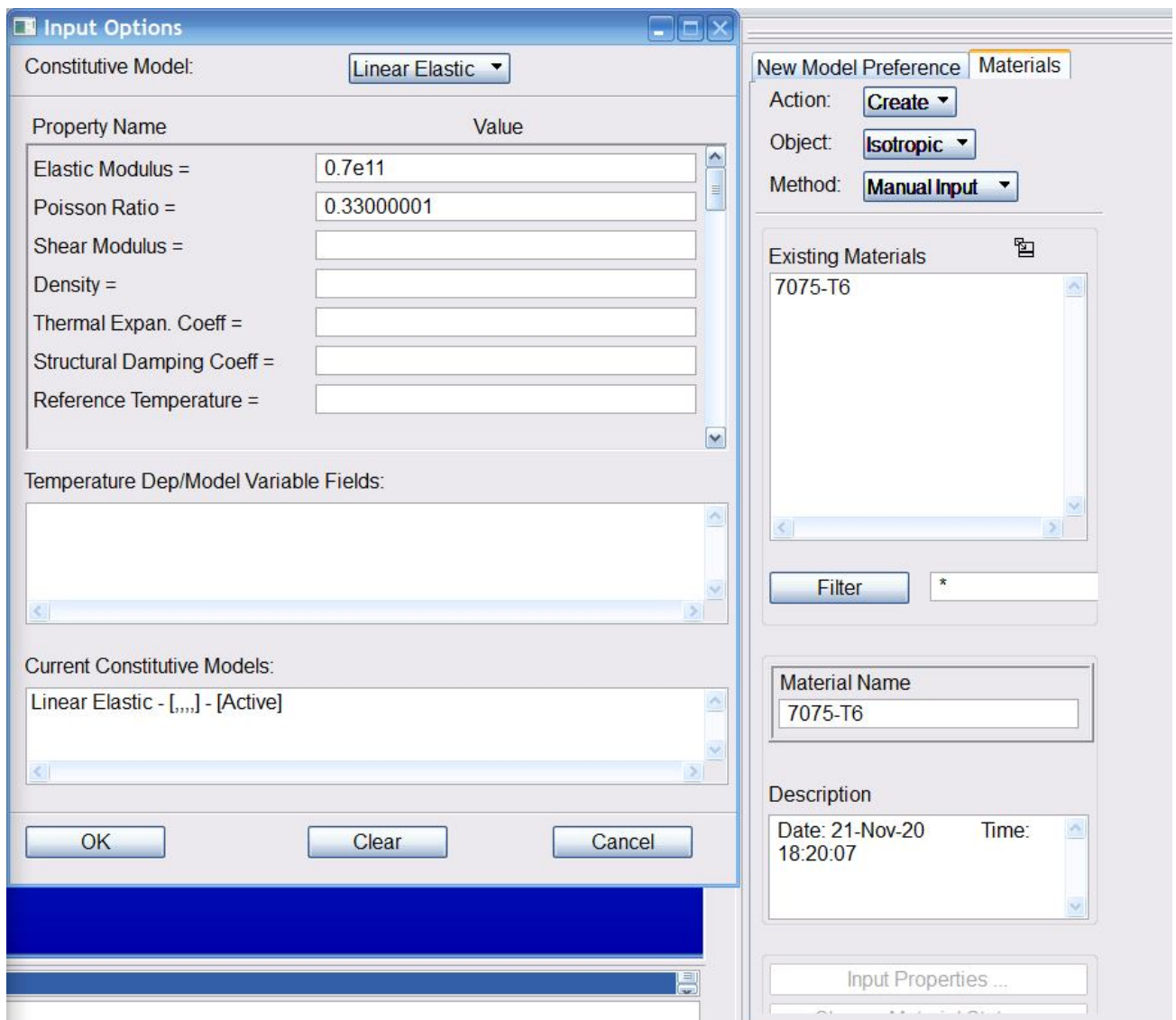



Рисунок 3.11

Задаємо властивості елементів.

Вибираємо модуль Properties. Для створення властивостей стінки використовуємо наступне поєднання Create/2D/Shell. В поле Property Set Name вводимо ім'я Wall. Далі натискаємо кнопку Input Properties. При цьому з'являється додаткове вікно, де необхідно задати матеріал та товщину стінки (рис. 3.12). Натискаємо кнопку  та зі списку існуючих матеріалів вибираємо 7075-T6, після цього з'являється запис. Потім для вибору області застосування введених властивостей натискаємо кнопку *Select Application Region*. Тут також з'являється додаткове вікно.

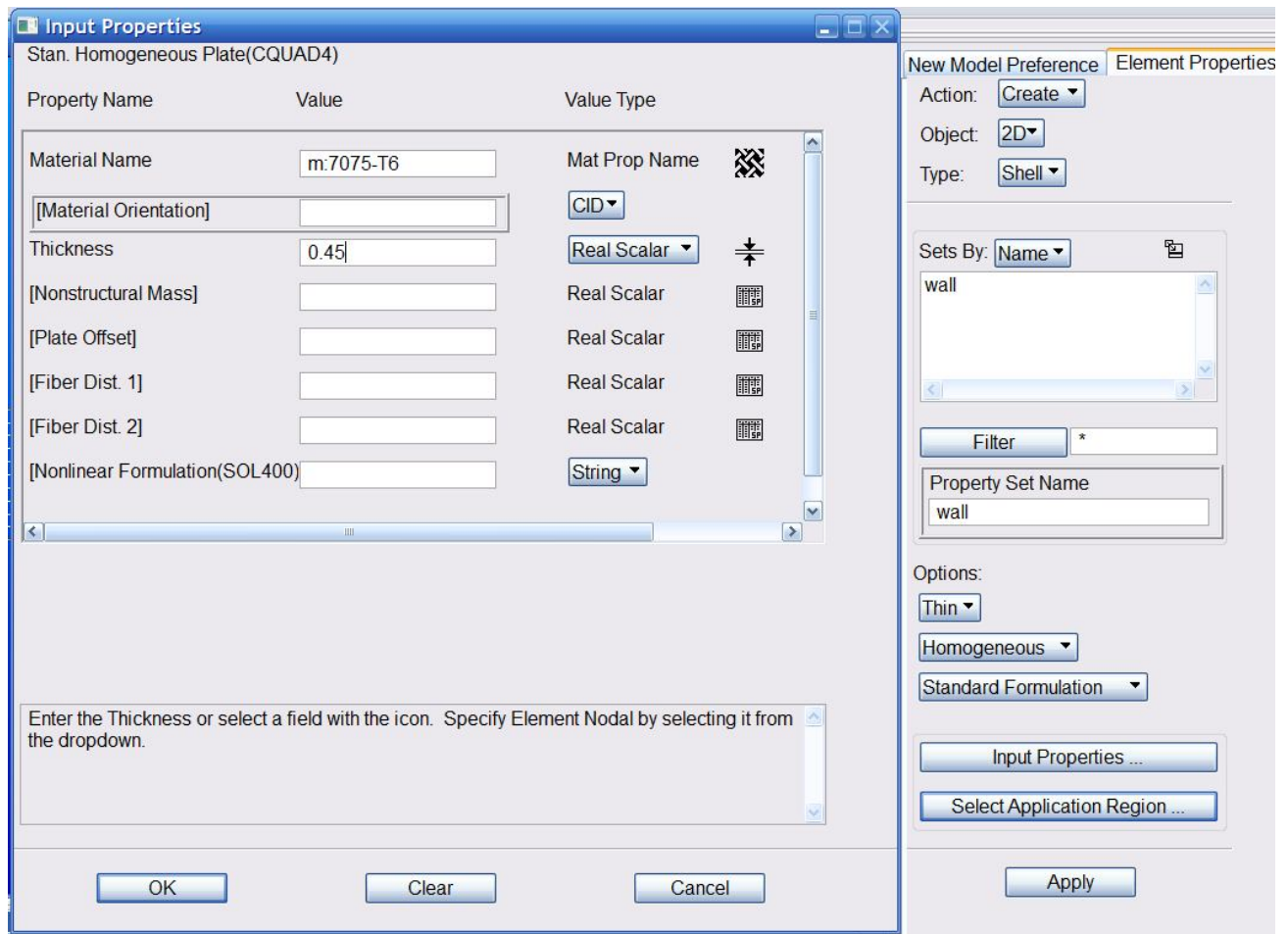


Рисунок 3.12

Для створення властивостей фланців використовуємо наступне поєднання Create/1D/Beam

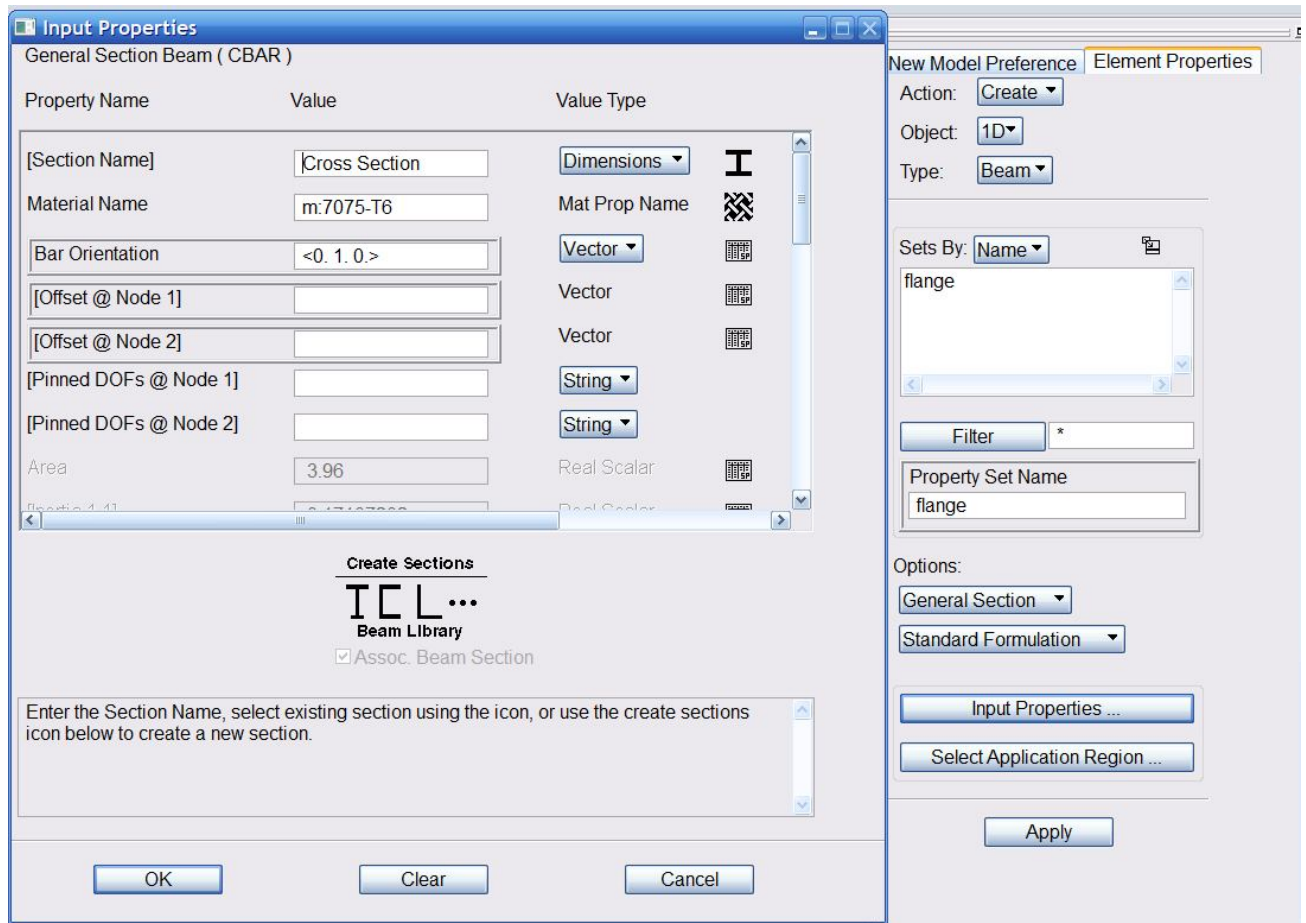


Рисунок 3.13

Задати граничні умови.

Запускаємо програму «Loads / BCs» і для завдання переміщень встановлюємо поєднання Create / Displacement / Nodal. В поле «New Set Name» вводимо ім'я новостворюваного набору. Натискаємо кнопку Input Data (введення даних) і в полі «Translations» (поступальні переміщення) вводимо $\langle 0, 0 \rangle$ що відповідає забороні переміщень в напрямку осі Y, Z. В полі «Rotation» вводимо $\langle 0, 0, \rangle$ що відповідає забороні повороту навколо осі X, Y. ОК. Далі натискаємо кнопку Select Application Region. Для вибору елемента встановлюємо опцію «Select»: FEM.

Вибираємо необхідний елемент і послідовно натискаємо кнопки Add, ОК і Apply. Ім'я з'являється в списку «Existing Sets». Аналогічно ставимо інші граничні умови для всіх опор заборонивши для однієї опори всі переміщення. Слід

значити, що граничні умови зображуються просторовими стрілками, причому поруч вказується номер закріпленого ступеня вільності.

Прикладаємо навантаження.

У розглянутій задачі навантаження здійснюється погонними силами інтенсивністю 100 Н/см. У тому ж додатку вибираємо поєднання Create / Distributed Load / Element Uniform. В поле «New Set Name» вводимо ім'я нового набору load. В якості типу цільових елементів вибираємо поверхневі, тобто «TargetElement Type»: 2D. Натискаємо кнопку Input Data і в поле «Edge Distr Load» вводимо значення <0 -80 0>. ОК. Далі натискаємо кнопку Select Application Region. Для вибору елементів встановлюємо опцію «Select»: FEM.

Активізуємо поле «Select Surfaces or Edges», в піктографічне меню вибору натискаємо кнопку (кромка) і вказуємо праву кромку поверхні. З'являється запис Surface 1.2. Послідовно натискаємо кнопки Add, ОК і Apply. Ім'я load з'являється в списку «Existing Sets». Прикладене навантаження, а також граничні умови показані на рис 3.14

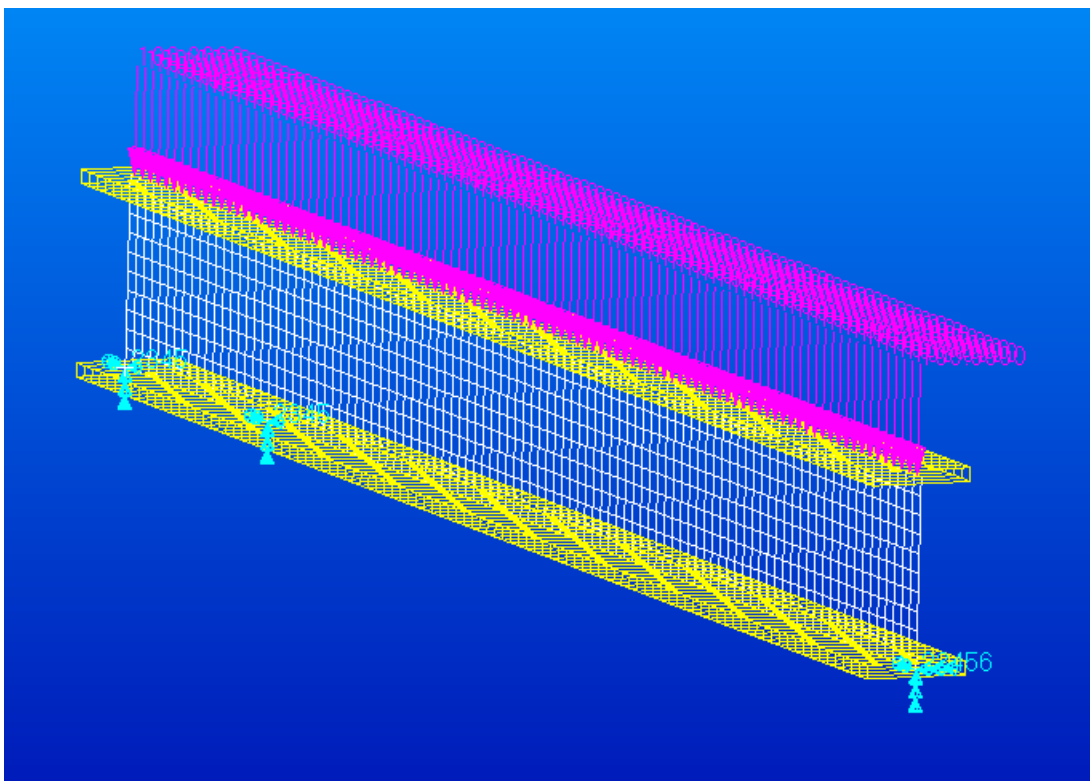


Рисунок 3.14

Розділ 4 Результати розрахунків

Результати розрахунків представлені в таблицях та побудовані графіки залежності реакції зайвої опори статично невизначуваної балки від співвідношення довжини балки до її висоти.

4.1 Результати розрахунків для консольної балки

Для розрахунку було прийнято наступні вхідні данні:

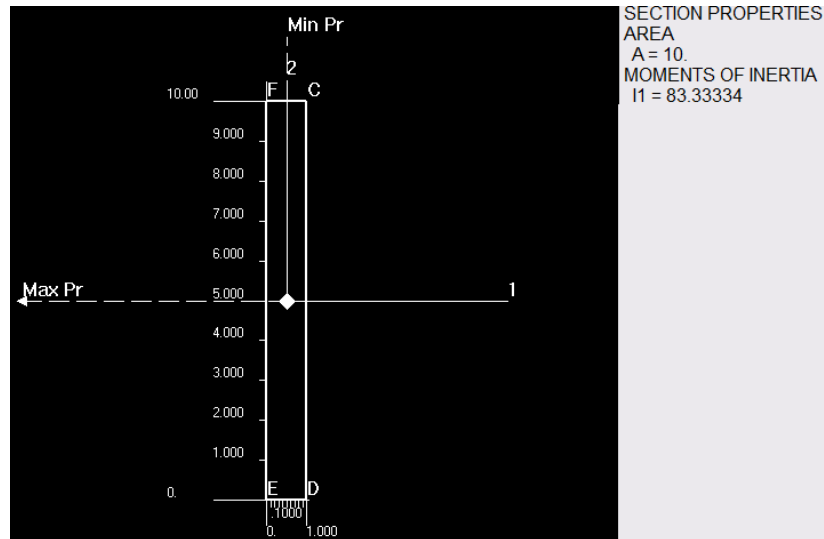
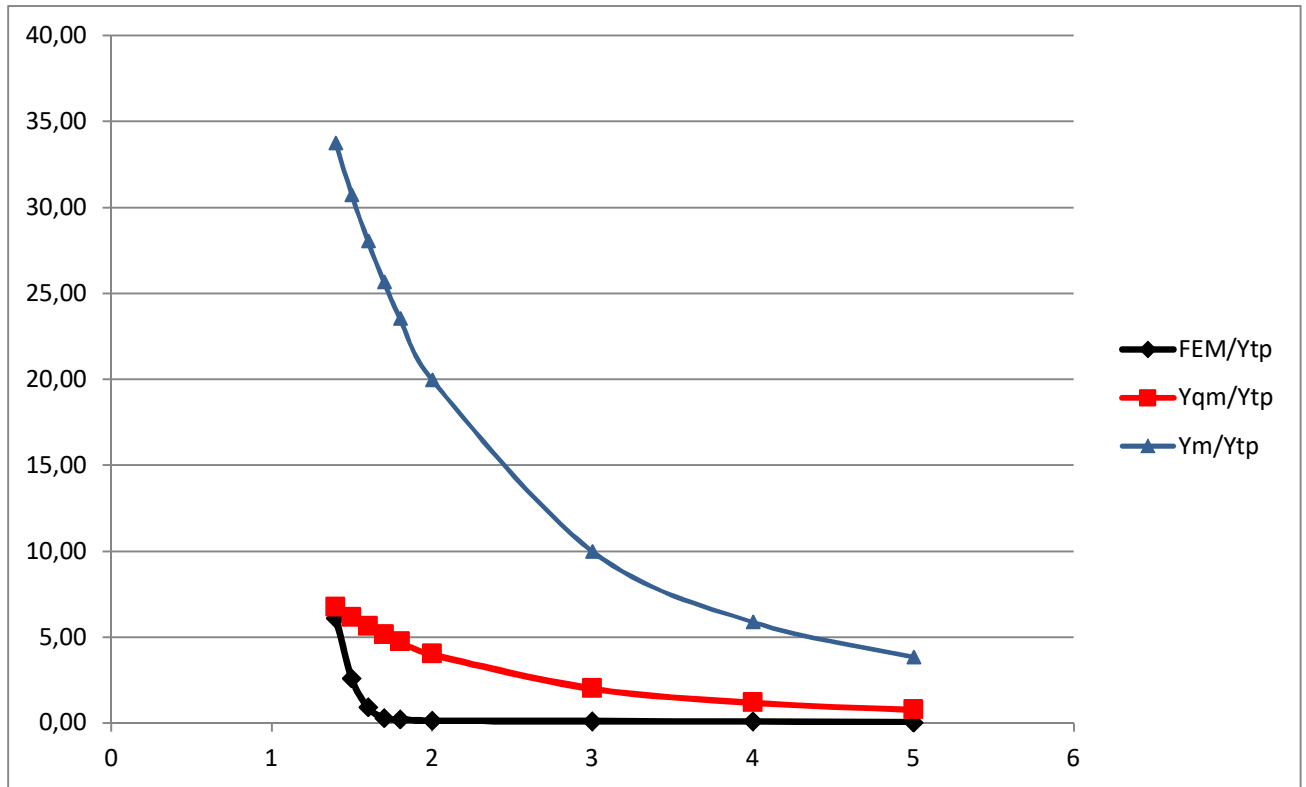


Рисунок 4.1

$$P = 100 \text{ кг}; \quad E = 0,717 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}; \quad \mu = 0,33.$$

Співвідношення L/h	Прогин				Похибка, %		
	Теорія пружності, Y_{tp}	З урахування Q, Y_{qm}	Без урахування $Q,$ Y_t	Метод скінченних елементів, Y_{FEM}	Y_{tp}/Y_{FEM}	Y_{qm}/Y_{FEM}	Y_t/Y_{FEM}
5	7,25E-07	7,20E-07	6,97E-07	7,25E-07	0,039	0,77	3,84
4	3,79E-07	3,75E-07	3,57E-07	3,79E-07	0,09	1,17	5,87
3	1,67E-07	1,64E-07	1,51E-07	1,67E-07	0,11	2,00	9,98
2	5,58E-08	5,35E-08	4,46E-08	5,58E-08	0,14	3,99	19,96
1,8	4,26E-08	4,05E-08	3,25E-08	4,26E-08	0,21	4,71	23,54
1,7	3,69E-08	3,50E-08	2,74E-08	3,69E-08	0,30	5,13	25,66
1,6	3,18E-08	3,00E-08	2,29E-08	3,18E-08	0,92	5,61	28,04
1,5	2,72E-08	2,55E-08	1,88E-08	2,72E-08	2,60	6,14	30,72
1,4	2,31E-08	2,15E-08	1,53E-08	2,31E-08	6,10	6,75	33,73

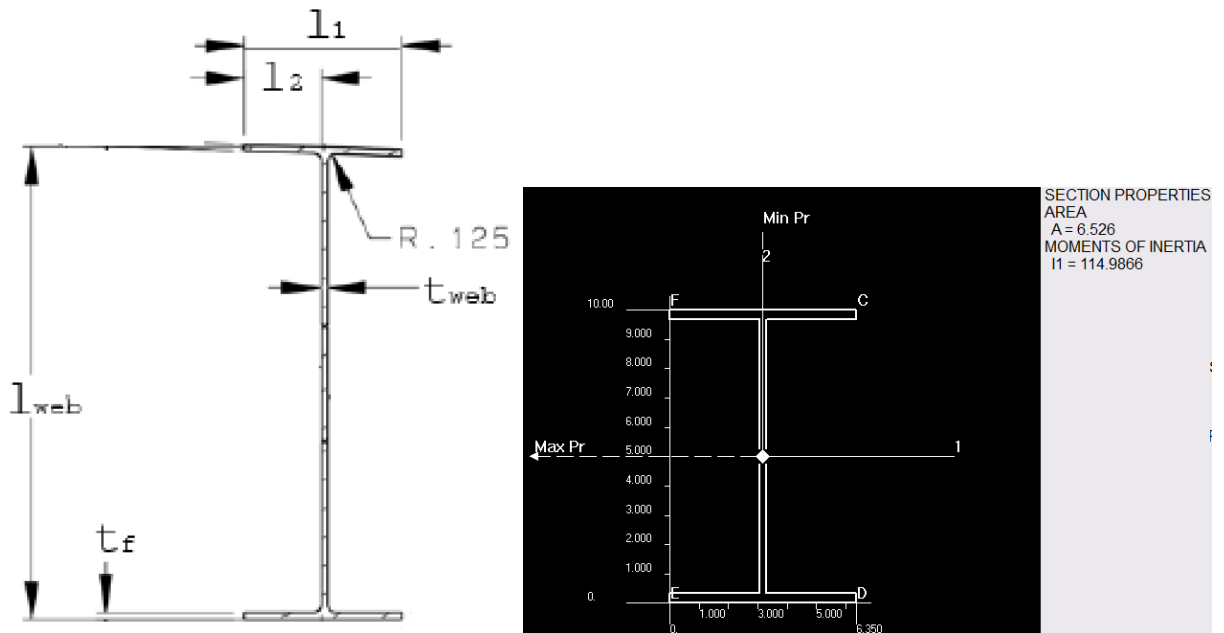


Похибка результатів розрахунку консольної балки прямокутного поперечного перерізу навантаженої зосередженою силою на вільному кінці при застосуванні створеної моделі у порівнянні з розрахунками за точними формулами, отриманими методами теорії пружності дає похибку до 5% при співвідношенні до $L/h > 1,8$. При співвідношенні $L/h < 1,2$ похибка суттєво зростає і перевищує 20%.

У порівнянні з моделлю, побудованою на основі елементарної теорії Ейлера-Бернуллі, запропонована модель враховує наявність дотичних напружень і дозволяє отримувати більш точні результати. При співвідношенні $L/h > 5$ різниця становить менше 5%, при співвідношенні $L/h < 5$ різниця становить більше 5% і різко зростає при зменшенні цього відношення.

4.2 Результати розрахунків для двопрогінної балки

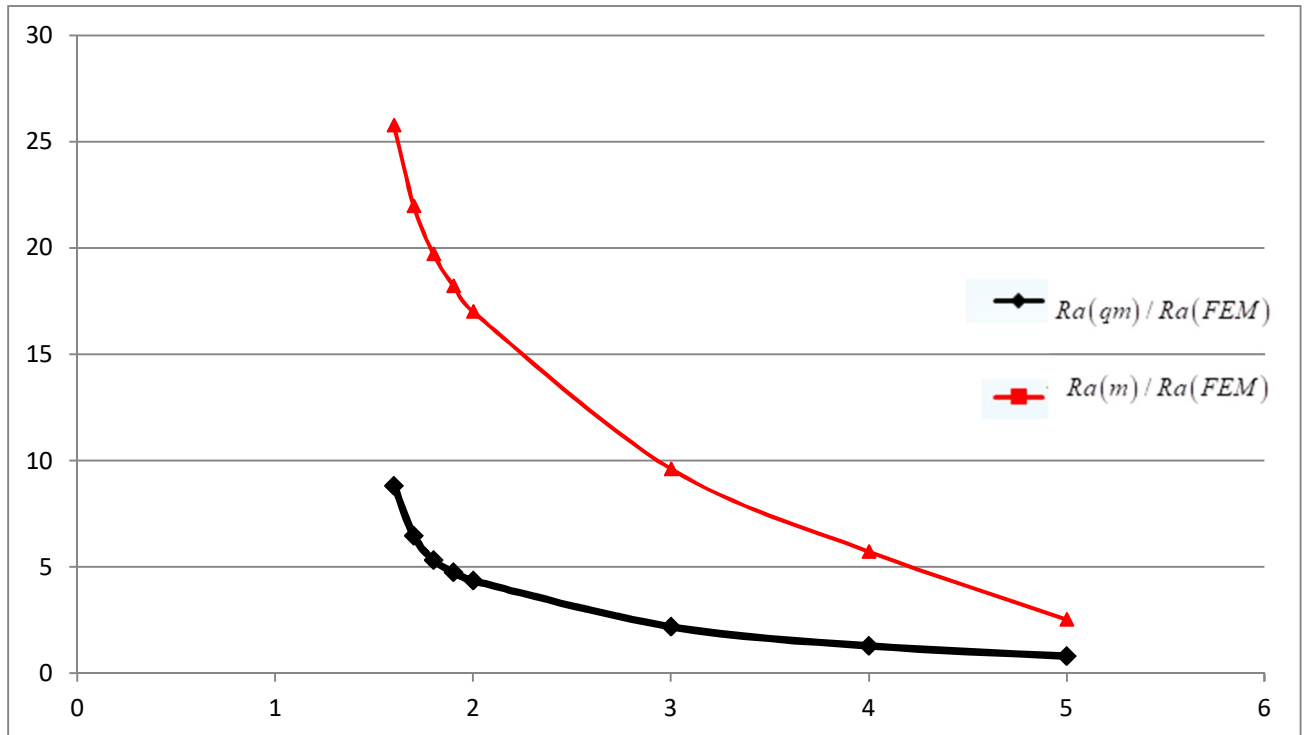
Для розрахунку було прийнято наступні вхідні данні:



$l_1, \text{ см}$	$l_2, \text{ см}$	$l_{\text{web}}, \text{ см}$	$t_f, \text{ см}$	$t_{\text{web}}, \text{ см}$
6,35	3.05	10	0.33	0.25

Рисунок 4.2

Співвідношення L/a	Реакція в точці А			Похибка, %	
	З урахуванням $Q, Ra(qm)$	Метод скінченних елементів, $Ra(FEM)$	Без урахування $Q, Ra(m)$	$Ra(qm)/Ra(FEM)$	$Ra(m)/Ra(FEM)$
5	-1843,9	-1829,0	-1875,0	0,8	2,5
4	-3502,7	-3458,1	-3656,2	1,3	5,7
3	-5943,3	-5815,9	-6375,0	2,2	9,6
2	-10201,0	-9775,5	-11437,5	4,4	17,0
1,9	-10824,1	-10332,7	-12215,1	4,8	18,2
1,8	-11504,0	-10922,7	-13075,0	5,3	19,7
1,7	-12248,4	-11503,6	-14031,6	6,5	22,0
1,6	-13069,0	-12008,7	-15103,1	8,8	25,8



Розбіжність результатів розрахунку двопрогінної статично невизначуваної балки двотаврового поперечного перерізу при дії рівномірно розподіленого по її довжині навантаження при застосуванні створеної моделі у порівнянні з чисельними розрахунками методом скінчених елементів становить менше 5% при співвідношенні $L/a \geq 1,9$, при зменшенні цього співвідношення похибка зростає і при співвідношенні $1,6 > L/a$ похибка перевищує 10%.

Розділ 5 Розроблення стартап-проекту

В розділі проведено маркетинговий аналіз стартап проекту, а також визначені можливості та доцільність його впровадження на ринок.

5.1 Зміст ідеї проекту

Таблиця 5.1 Опис ідеї стартап-проекту

Зміст ідеї	Напрямки застосування	Вигоди для користувача
Підвищення допустимих циклів нальоту літака з ум'ятиною на фюзеляжі	Для виробничих потреб	Обшивку літака можна оглядати рідше, що зменшить час на технічний огляд техніки
	Для авіакомпаній	Допускає ум'ятин стає більше, що зменшить кількість ремонтів на фюзеляжі літака

Таблиця 5.2 Визначення сильних, слабких та нейтральних характеристик ідеї проекту

№	Техніко-економічні характеристики ідеї	Ідея проекту
1	Економія затрат часу	S
2	Підвищення надійності	N
3	Складність розрахунку	N
4	Економія фінансів	S
5	Інформаційне забезпечення	W

Дана таблиця показує, що конкурентоспроможність ідеї висока.

5.2 Технологічний аудит

Реалізувати ідею проекту можна за допомогою проектних розрахунків.

Таблиця 5.3 Технологічна здійсненність ідеї проекту

№	Ідея проекту	Шлях реалізації	Наявність технології	Доступність технології
1	Створення конструкторської документації, необхідної для точного та якісного виготовлення деталі	Створення конструкторської документації	наявні	Доступно
2	Використання приміщення та спеціалізованого обладнання для виготовлення авіаційних конструкцій	Виготовлення на підприємстві	наявні	Доступно
Шлях реалізації і можливості – доступні				

5.3 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Визначення ринкових можливостей, які можна використати під час ринкового впровадження проекту, та ринкових загроз, які можуть перешкодити реалізації проекту, є досить складними в умовах того, що різні методи рішення поставленої задачі є елементом довгострокового наукового розвитку галузі. Тобто дати оцінку потенційного ринку стартап-проекту можна лише у довгостроковій перспективі, не базуючись на чітких числових характеристиках ринку.

В умовах дослідження ідеї проекту під потенційним ринком можна вважати різні авіа-компанії пасажирських літаків та компанії що виготовляють літаки, які зацікавлені у пошуку зменшенні кількості технічних оглядів літака та покращення конструкції.

Таблиця 5.4 Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

№	Показники стану ринку	Характеристика
1	Кількість головних гравців, од	6
2	Загальний обсяг продаж , грн/ум.од	3700000
3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	зростає
4	Наявність обмежень для входу	немає
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	авіаційні правила
6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	58%

Потенційні групи клієнтів можна умовно поділити на первинних та вторинних споживачів продукту. Первинною групою є компанії-виробники обшивок фюзеляжа, вторинною – авіакомпанії, що купують літаки. Орієнтовний перелік вимог до товару для кожної групи наведено в Таблиці 5.5.

Таблиця 5.5 Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

Потреба, що формує ринок	Цільова аудиторія	Відмінності	Вимоги споживачів до товару
Отримання прибутку	Фірми-виробники	Поведінка диктується ситуацією на ринку, популярністю товару серед різних груп покупців, окупністю продукту	Ефективність конструкції та вага
Економія грошових ресурсів	підприємства-покупці		Ремонтопригодність
Економія грошових ресурсів	Авіакомпанії		Співвідношення ціна/якість

Щоб провести глибинний аналіз ринкового середовища складаються таблиці факторів, що сприяють ринковому впровадженню проекту, та факторів, що йому перешкоджають. Вищеназвані фактори загроз та можливостей наведені знизу в Таблиці 5.6 та 5.7.

Таблиця 5.6 Фактори загроз

№	Фактор	Зміст загрози	Реакція компаній/науковців
1	Науковий	Досягнення науково-технічного прогресу, розробка нових технологій	Неустанний розвиток ідеї, постійне покращення існуючого методу, пошук радикально нових і ліпших методів
2	Технічний	Різкі зміни умов на ринку технічного програмного забезпечення	Постійне відслідковування ситуації на даному ринку
3	Фінансовий	При погіршенні макроекономічних умов фірма-виробник балок може прийняти рішення зекономити за рахунок зменшення витрат на науковий відділ	Виділення стійкого фінансування, яке не підвласне зовнішнім фінансовим факторам при повному розумінні того, що в розробках наук відділу криються майбутні перспективи галузі
4	Політичний	Політична ситуація в країні, або в конкретному економічному регіоні	Запасні бази даних, архівування інформації з проведених досліджень, моніторинг політичної ситуації.

Таблиця 5.7 Фактори можливостей

№	Фактор	Зміст можливості	Можлива реакція компанії
1	Підвищення попиту на старі літаки	Підвищення попиту на вдосконалення продукту, і як наслідок, на нові вдосконалені підходи до розрахунку	Збільшення прибутків компанії підштовхне до збільшення кількості кадрів
2	Поява нового літака	Позитивний вплив з точки зору вдосконалення та впровадження даної конструкції.	Частіше та ефективніше використання даної конструкції
3	Використання в інших сферах	Подальше дослідження даного констркції з метою вдосконалення	Розширення асортименту продукції

Таблиця 5.8 Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

Особливості конкурентного середовища	В чому проявляється дана характеристика	Вплив на діяльність підприємства
Тип конкуренції: чиста	На ринку немає обмежень для вступу нових учасників	Постійне відслідковування ситуації на даному ринку, збереження конкурентоспроможності
Локальний рівень конкурентної боротьби	Ринок представлений точково в різних державах у різній степені концентрації	Динамічний розвиток ринку буде відбуватись лише у випадку спільної роботи його учасників.
Внутрішньогалузева конкуренція	Конкуренція на ринку відбувається між представниками одної галузі виробництва або одного напрямку дослідження	Постійний аналіз тенденцій, політика постійної конкурентної боротьби
Товаро-родова конкуренція за видом товару	Конкуренція між різними конфігураціями	Науковий відділ знаходиться під постійною загрозою появи нових розробок
Марочна інтенсивність	Конкурентами являються компанії з подібним продуктом	Ведення діяльності в умовах постійної конкуренції

Після аналізу конкуренції проводимо більш детальний аналіз умов конкуренції в галузі (табл.5.9).

Таблиця 5-9 Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

Складові аналізу	Прямі конкуренти в галузі	Потенційні конкуренти	Клієнти	Товари-замінники
	Немає	Бар'єрів впровадження нема	Boeing, Airbus	Загрози з боку замінників є
Висновки :	Низька інтенсивність	Є можливість входження в галузь	Диктують умови роботи на ринку. Такі, як час на розрахунок і забезпечення потрібним програмним забезпеченням	Відсутність обмежень від замінників

З огляду на конкурентну ситуацію існує можливість виходу на ринок даної галузі. Щоб бути конкурентоспроможним на ринку даному проекту необхідно розробити програмне забезпечення для швидкісного розрахунку методики.

Таблиця 5-10 Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)
1	Точність розрахунків	Удосконалення отримання результатів
2	Використання отриманих даних	Максимальне вичерпання ресурсу

За визначеними факторами конкурентоспроможності (табл.5-10) проведемо аналіз сильних та слабких сторін мого стартап-проекту (табл.5-11).

Таблиця 5-11 Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін «Коефіцієнт для приведення кількості циклів до руйнування пластини з отвором в кількість циклів до руйнування пластини з ум'ятиною»

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Бали 1-20	Рейтинг методи у порівнянні з проектом конкурента						
			-3	-2	-1	0	1	2	3
1	Менша потреба у витратах	20					•		
2	Точність розрахунків	20				•			
3	Використання отриманих даних	20					•		
4	Точність розрахунку в проекті	15					•		

Фінальним етапом ринкового аналізу можливостей впровадження проекту є складання SWOT-аналізу (матриці аналізу сильних (Strength) та слабких (Weak) сторін, загроз (Troubles) та можливостей (Opportunities) (табл.5.12) на основі виділених ринкових загроз та можливостей, та сильних і слабких сторін (табл.5.11).

Перелік ринкових загроз та ринкових можливостей складається на основі аналізу факторів загроз та факторів можливостей маркетингового середовища. Ринкові загрози та ринкові можливості є наслідками впливу факторів, і, на відміну від них, ще не є реалізованими на ринку та мають певну ймовірність здійснення.

Таблиця 5.12 SWOT- аналіз стартап-проекту

Сильні сторони: Безпечне вичерпання ресурсу елементів	Слабкі сторони: складність програмної підтримки методики
Можливості: завоювання всієї галузі	Загрози: розробка точнішої методики

На основі SWOT-аналізу розробляються альтернативи ринкової поведінки для виведення стартап-проекту на ринок та орієнтовний оптимальний час їх ринкової реалізації з огляду на потенційні проекти конкурентів, що можуть бути виведені на ринок.

5.4 Розроблення ринкової стратегії проекту

Розроблення ринкової стратегії першим кроком передбачає визначення стратегії охоплення ринку: опис цільових груп потенційних споживачів (табл.5.13).

Таблиця 5.13 Вибір цільових груп потенційних споживачів

№ п/п	Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів	Готовність споживачів сприйняти продукт	Орієнтовний попит в межах цільової групи	Інтенсивність конкуренції в сегменті	Простота входу у сегмент
1	Boeing, Airbus	Повністю готові	Високий	Середня	Просто

Для роботи в обраному сегменті ринку необхідно сформувати базову стратегію розвитку (табл.5.14).

Таблиця 5-14 Визначення базової стратегії розвитку

Обрана альтернатива розвитку проекту	Стратегія охоплення ринку	Ключові конкурентоспроможні позиції відповідно до обраної альтернативи	Базова стратегія розвитку
Альтернативна	Охоплення на 65-75 %	Конк.№1 та Конк№2	Спеціалізація

Далі виберемо стратегію конкурентної поведінки (табл.5.15).

Таблиця 5-15 Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

Чи є проект «першопроходцем» на ринку?	Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?	Чи буде компанія копіювати основні характеристики то-вару конкурента, і які?	Стратегія конкурентної поведінки
Ні	Так	Копіювати лише загально використані ідеї	Стратегія заняття галузі

Результатом даного підрозділу є узгоджена система рішень щодо ринкової поведінки стартап-компанії, яка визначатиме напрями роботи стартап-компанії на ринку:

- використання в проекті сучасних технологій;
- напрям роботи лише у заданій ніші ринку.

5.5 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Першим кроком є формування маркетингової концепції товару, який отримає споживач. Для цього у табл.5.16 підсумуємо результати попереднього аналізу конкурентоспроможності товару.

Таблиця 5.16. Визначення ключових переваг концепції потенційного товару

№ п/п	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами
2	Підвищений попит у галузі авіабудування	Зменшення кількості ремонтів	Зменшення затрат на розрахунки

Останньою складовою маркетингової програми є розроблення концепції маркетингових комунікацій, що спирається на попередньо обрану основу для позиціонування, визначену специфіку поведінки клієнтів (табл.5.17).

Таблиця 5.19. Концепція маркетингових комунікацій

Специфіка поведінки цільових клієнтів	Канали комунікацій, якими користуються цільові клієнти	Ключові позиції, обрані для позиціонування	Завдання рекламного повідомлення	Концепція рекламного звернення
Комунікабельні	Мережа інтернет, наукові праці	Реклама методики на конференціях	Розширення цільових клієнтів	Показати, що інша методика краща та доцільніша

5.6 Результати маркетингового дослідження:

- попит на ринку наразі є і буде розвиватись
- Висока конкурентоспроможність
- унікальність ідеї

Висновки.

1. Для заданої статично невизначуваної балки крила літака з близьким розташуванням проміжної опори на основі відомих теоретичних залежностей побудована її спрощена аналітична модель для здійснення оціночних розрахунків на міцність і жорсткість.

2. Похибка результатів розрахунку консольної балки прямокутного поперечного перерізу навантаженої зосередженою силою на вільному кінці при застосуванні створеної моделі у порівнянні з розрахунками за точними формулами, отриманими методами теорії пружності дає похибку до 5% при відношенні довжини балки до висоти поперечного перерізу (L/h) більше 1,8. У проміжку 1,2-1,8 похибка перевищує 5% але менше 10%. При відношенні $L/h < 1,2$ похибка суттєво зростає і перевищує 20%.

У порівнянні з моделлю, побудованою на основі елементарної теорії Ейлера-Бернуллі, запропонована модель враховує наявність дотичних напружень і дозволяє отримувати більш точні результати. При співвідношенні довжини балки до висоти поперечного перерізу більше 4 різниця становить менше 5%, при відношенні довжини балки до висоти поперечного перерізу менше 4 різниця становить більше 5% і різко зростає при зменшенні цього відношення.

3. Розбіжність результатів розрахунку двопрогінної статично невизначуваної балки двотаврового поперечного перерізу при дії рівномірно розподіленого по її довжині навантаження при застосуванні створеної моделі у порівнянні з чисельними розрахунками методом скінчених елементів становить менше 5% при відношенні відстані між її близько розташованими опорами до висоти поперечного перерізу більше або дорівнює 1,9, при зменшенні цього відношення похибка зростає і при відношенні 1,6 або менше похибка перевищує 10%.

4. Розроблена аналітична модель, може бути використана для оціночних розрахунків на міцність і жорсткість на етапі вибору конструктивних рішень при проектуванні балки крила літака, коли відношення відстані між її близько розташованими опорами до висоти поперечного перерізу балки не перевищує 1,6.

Список використаних джерел

1. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Альянс, 2014. – 624 с.
2. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: Учеб. Пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин. – М.: Физматлит, 2005. – 544с.
3. Каримов, И. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] / Электронный учебный курс для студентов очной и заочной форм обучения. – Режим доступа: <http://www.soprotmat.ru>. – Загл. с экрана.
4. Андреев, В.И. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Учебник / В.И. Андреев – М.: ИНФРА-М, 2014. – 638 с.
5. Доннелл, Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Пер. с англ. Под ред. Э.И. Григолюка / Л.Г. Доннелл. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 568 с.
6. Липовцев, Ю. Прикладная теория упругости / Ю. Липовцев, М. Русин. – М.: Дрофа, 2008. – 321 с.
7. Саргсян, А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов: Учебник для вузов / А.Е. Саргсян. – М.: Высшая школа, 2000. – 286 с.
8. Timoshenko, S. P. mechanics of materials. Volume I. Elementary theory and problems / S. p. Timoshenko. - М.: Science, 1965. - 368 p
9. Теория упругости, перев. с англ., Тимошенко С.П., Гудьер Дж., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1975. – 576 с.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике, перев. с англ., издательство «МИР». 1975. – 543с.
11. Стренг Г., Фикс Г. Теория метода конечных элементов, перев. с англ., издательство «МИР». 1977. – 351с.
12. Легостаев А.Д. Метод скінченних елементів: Конспект лекцій. – К.:КНУБА, 2004. – 112с.