УДК 519.85

О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОДНІЄЇ КОМБІНАТОРНОЇ ЗАДАЧІ УПАКУВАННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ З НЕЧІТКИМИ РОЗМІРАМИ

Вступ

У прикладних задачах комбінаторної оптимізації (див., наприклад, [1–8]) часто постає проблема більш адекватного врахування вихідних даних. У більшості праць із комбінаторної оптимізації невизначеність вхідних даних до цих пір не враховується.

Відомі праці, пов'язані з комбінаторною оптимізацією, в яких враховується невизначеність вхідних даних за допомогою інтервальної (див., зокрема, [7]) та стохастичної невизначеностей (див. [9]).

Але на сьогодні в задачах комбінаторної оптимізації немає апарата врахування невизначеності, яка адекватно моделюється нечіткими множинами (див., наприклад, [10]). У працях [11, 12] робляться певні кроки моделювання задачами комбінаторної оптимізації із врахуванням невизначеності нечіткими множинами, вводяться та досліджуються деякі необхідні для цього операції над нечіткими числами.

Постановка задачі

Мета статті – показати, як враховувати невизначеність даних, заданих нечіткими множинами, при моделюванні задачі геометричного проектування на прикладі задачі упакування прямокутників у смугу.

Моделювання однієї задачі геометричного проектування

Нехай є деяка напівнескінченна (достатньо довга) смуга, яка розділена на смужки однакової ширини h (рис. 1). Задано ще p прямокутників з довжинами $a_1, \ldots, a_p$, шириною h. Задача полягає в розміщенні прямокутників без накладань один на одного у смузі на її початку таким чином, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімально можливою.

Під довжиною зайнятої частини смужки будемо розуміти суму довжин прямокутників, що розміщуються в цій смужці. Серед цих сум виберемо найбільшу. Вона й буде відповідати довжині зайнятої частини смуги.

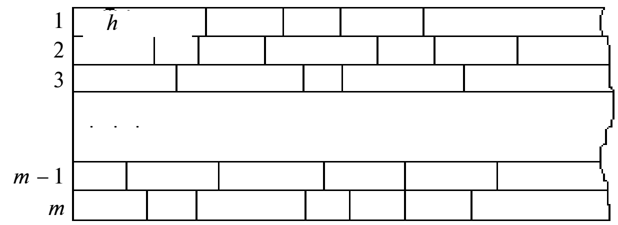

Рис. 1. Ілюстрація задачі упаковки прямокутників

При розгляді питання упакування прямокутників у смугу з метою врахування невизначеності вхідних даних можна метричні характеристики об'єктів розглядати як нечіткі числа.

Означення* 1 [12]. Нечітким числом a називають нечітку множину виду $a = \{(a_1|\mu_1), \ldots, (a_k|\mu_k)\}$, де $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ $(a_i \in R^1\ \forall i \in J_k)$ – носій нечіткої множини; $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k\}$, $(\mu_i \in R^1\ \forall i \in J_k)$ – множина значень функції приналежності, $0 \le \mu_i \le 1$ $\forall i \in J_k$ [10]. Тут і надалі J_k позначаємо множину перших k натуральних чисел.

Зауважимо, що дійсне число α можна представити як нечітке число $a = \{(\alpha|1{,}0)\}$.

Розглянемо задачі упакування прямокутників у смугу (або прямокутник, якщо довжина прямокутника така, що її треба враховувати, не вважаючи смугу достатньо довгою – "напівнескінченною").

Нехай розміри прямокутника (смуги) задаються дійсними числами h_0 і d_0 (рис. 2). Зв'яжемо з нижнім лівим кінцем смуги початок прямокутної декартової системи координат, спрямувавши осі так, як показано на рис. 2.

Розглянемо прямокутник П, який розміщується в смузі. Розміщення прямокутників будемо розглядати такі, що осі системи координат, зв'язаної з кожним із прямокутників, паралельні осям Ox_1x_2 (див. рис. 2) та направлені в той же бік.

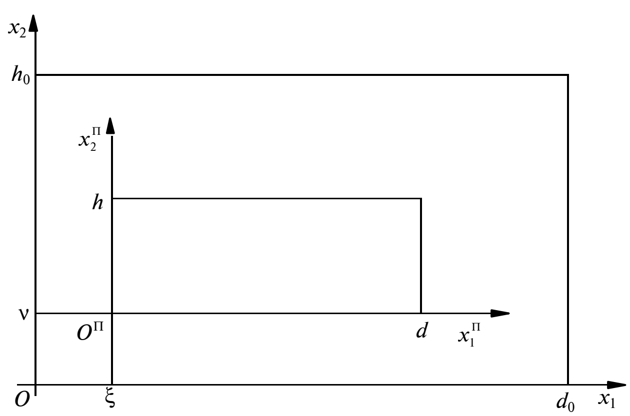

Рис. 2. Розміщення прямокутника П в смузі

* Означення 1–6 та деякі поняття взяті із статті [12].

Зручно початок O^{Π} власної системи координат прямокутника поміщати в лівий нижній кут прямокутника. Цю точку O^{Π} прямокутника будемо називати полюсом. Прямокутники розміщатимемо в смузі, щоб його сторони були паралельні (перпендикулярні) сторонам смуги (див. рис. 2). Тоді прямокутник Π_i відносно смуги H визначається такими параметрами:

ξ_i – абсциса полюса в системі координат Ox_1x_2;

ν_i – ордината полюса в системі координат Ox_1x_2;

h_i – ширина (висота) прямокутника;

d_i – довжина прямокутника.

Прямокутник позначатимемо $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ або просто Π_i.

Нехай числа ξ_i, ν_i, h_i – звичайні (дійсні числа) і нехай d_i – нечітке число $d_i = \{(d_1^i | \mu_1^i), \ldots$ $\ldots, (d_n^i | \mu_n^i)\}$. Виникає питання: щó таке прямокутник П з висотою h ("чітке" число) та довжиною $d = \{(d_1 | \mu_1), \ldots, (d_n | \mu_n)\}$?

Оскільки число d – це:

1) d_1 із значенням функції приналежності μ_1;

2) d_2 із значенням функції приналежності μ_2;

……………………………………………………………

i) d_i із значенням функції приналежності μ_i;

……………………………………………………………

n) d_n із значенням функції приналежності μ_n, то П – це прямокутник з розмірами:

1) $h \times d_1$ із значенням функції приналежності μ_1;

2) $h \times d_2$ із значенням функції приналежності μ_2;

……………………………………………………………

i) $h \times d_i$ із значенням функції приналежності μ_i;

……………………………………………………………

n) $h \times d_n$ із значенням функції приналежності μ_n,

тобто П – це звичайний прямокутник з розмірами $h \times d_i$, тільки d_i набуває одного з n можливих значень, що характеризується значенням функції приналежності μ_i.

Для математичної постановки задач розміщення (упаковки) прямокутників Π_i в смузі треба дати означення:

1) розміщення прямокутника в смузі (попадання в смугу);

2) взаємного перетину прямокутників Π_i і Π_j, $i \neq j$, які розміщені в смузі;

3) взаємного неперетину прямокутників Π_i і Π_j, $i \neq j$, які розміщені в смузі;

4) дотику прямокутників Π_i і Π_j, $i \neq j$, при їх розміщенні в смузі.

Ці означення можна дати, ввівши поряд із поняттями суми та лінійної впорядкованості нечітких чисел поняття характеристичної функції (функціонала) $H(x)$ нечіткого числа x як $H(x)$: $X \to R^1$, яка діє з множини нечітких чисел X в R^1 (множину дійсних чисел) та узагальнює такі метричні властивості дійсного числа:

1) якщо $x \in R^1$, то $H(x) = x$;

2) для будь-яких двох нечітких чисел і характеристичної функції H виконувалась рівність $H(A + B) = H(A) + H(B)$;

3) для будь-яких трьох нечітких чисел $x = \{(x_1|\mu_1^x), \ldots, (x_\alpha|\mu_\alpha^x)\}$, $y = \{(y_1|\mu_1^y), \ldots, (y_\beta|\mu_\beta^y)\}$, $z = \{(z_1|\mu_1^z),$ $\ldots, (z_\gamma|\mu_\gamma^z)\}$, таких, що $\sum_{k=1}^{\alpha}\mu_k^x = \sum_{k=1}^{\beta}\mu_k^y = \sum_{k=1}^{\gamma}\mu_k^z = 1$, $x_1 <$ $< \ldots < x_\alpha$, $y_1 < \ldots < y_\beta$, $z_1 < \ldots < z_\gamma$, виконувалось таке правило: якщо $x \prec y$, то $x + z \prec y + z$, де "$\prec$" означає лінійну впорядкованість;

4) $x \prec y$ тоді і тільки тоді, коли $H(x) \le H(y)$.

Також необхідно, щоб для операції додавання нечітких чисел виконувались комутативність і асоціативність, тобто $A + B = B + A$ і $(A + B) +$ $+ D = A + (B + D)$.

Таким чином, необхідно ввести поняття суми, лінійної впорядкованості та характеристичної функції, які б відповідали перерахованим властивостям.

Поняття суми нечітких чисел було введено нами в статті [12].

Сума $A + B$ двох нечітких чисел $A = \{(a_1|\mu_1^A),$ $\ldots, (a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ і $B = \{(b_1|\mu_1^B), \ldots, (b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ утворювалась за допомогою побудови множини пар [12]:

$$\tilde{C} = \{(\tilde{c}_1|\mu_1^{\tilde{C}}), \ldots, (\tilde{c}_\eta|\mu_\eta^{\tilde{C}})\} =$$

$$= \left\{ \left(a_1 + b_1 \left| \frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A} \frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B} \right.\right), \ldots, \left(a_1 + b_\beta \left| \frac{\mu_1^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A} \frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B} \right.\right), \right.$$

$$\left(a_2+b_1\left|\frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_2+b_\beta\left|\frac{\mu_2^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\quad(1)$$

....

$$\left(a_\alpha+b_1\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_1^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right),\ldots,\left(a_\alpha+b_\beta\left|\frac{\mu_\alpha^A}{\sum_{i=1}^{\alpha}\mu_i^A}\frac{\mu_\beta^B}{\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j^B}\right.\right)\Bigg\}.$$

Перші елементи $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\eta$, де η = αβ, цих пар утворюють мультимножину $\tilde{C}^* = \{\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\eta\}$ [12]. Основа $S(\tilde{C}^*)$ мультимножини $\tilde{C}^*$ це $S(\tilde{C}^*) = \{c_1, \ldots, c_r\}$ – носій нечіткого числа $A + B = \{(c_1|\mu_1), \ldots, (c_r|\mu_r)\}$. Значення функції приналежності знаходять за правилом [12]

$$\mu_t = \sum_{\substack{\forall i \in J_\eta:\\ c_t = \tilde{c}}} \mu_i^{\tilde{C}},\ i \in J_\eta,\ t \in J_r, \qquad (2)$$

тобто значення μ_t визначають як суму таких чисел $\mu_i^{\tilde{C}}$, для яких $\tilde{c}_i = c_t$, а r – число різних елементів в $\tilde{C}^*$.

Отже, маємо такі означення (див. [12]).

***Означення* 2** [12]. Сумою $A + B$ двох нечітких чисел A і B називається нечітке число $C = \{(c_1|\mu_1), \ldots, (c_r|\mu_r)\}$, де $\{c_1, \ldots, c_r\} = S(\tilde{C}^*)$ – основа мультимножини $\{\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\eta\}$, яка визначається за правилом (1), а значення μ_t – за правилом (2).

***Означення* 3** [12]. Сумою трьох нечітких чисел $A = \{(a_1|\mu_1^A), \ldots, (a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$, $B = \{(b_1|\mu_1^B), \ldots, (b_\beta|\mu_\beta^B)\}$ та $D = \{(d_1|\mu_1^D), \ldots, (d_\delta|\mu_\delta^D)\}$ називають нечітке число $A + B + D = E + D$, де $E = A + B$.

Один із можливих варіантів означення характеристичної функції (функціонала) $H(x)$ нечіткого числа x $H(x)$: $X \to R^1$ є такий.

***Означення* 4** [12]. Характеристичною функцією (функціоналом) $H(x)$: $X \to R^1$ нечіткого числа $A = \{(a_1|\mu_1^A), \ldots, (a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ називають функцію, яка нечіткому числу $A \in X$ ставить у відповідність число $H(A) \in R^1$ за правилом

$$H(A) = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A}.$$

Нехай задано два нечіткі числа: $A = \{(a_1|\mu_1^A), \ldots, (a_\alpha|\mu_\alpha^A)\}$ і $B = \{(b_1|\mu_1^B), \ldots, (b_\beta|\mu_\beta^B)\}$. Позначимо $a = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$, $b = \{b_1, \ldots, b_\beta\}$, $u = a \cup b = \{u_1, \ldots, u_\gamma\}$. Тоді число A можна записати у вигляді

$$A^u = \{(u_1|\mu_1^{A^u}), \ldots, (u_\gamma|\mu_\gamma^{A^u})\},$$

де $\mu_i^{A^u} = \begin{cases} \mu_j^A, \text{ якщо } u_i = a_j \in a, \\ 0, \text{ якщо } u_i \notin a. \end{cases}$

Число B запишемо у вигляді

$$B^u = \{(u_1|\mu_1^{B^u}), \ldots, (u_\gamma|\mu_\gamma^{B^u})\},$$

де $\mu_i^{B^u} = \begin{cases} \mu_j^B, \text{ якщо } u_i = b_j \in b, \\ 0, \text{ якщо } u_i \notin b. \end{cases}$

Наведемо означення впорядкованості нечітких чисел, які були дані в [12].

***Означення* 5** [12]. Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за зростанням ($A < B$), якщо:

а) або $\dfrac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} < \dfrac{\sum_{j=1}^{\beta} b_j \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B}$, тобто, коли $H(A) < H(B)$;

б) або $H(A) = H(B)$, тобто $\dfrac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i \mu_i^A}{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_i^A} = \dfrac{\sum_{j=1}^{\beta} b_j \mu_j^B}{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_j^B}$,

але $\mu_1^{A^u} = \mu_1^{B^u}$, ..., $\mu_k^{A^u} = \mu_k^{B^u}$, $\mu_{k+1}^{A^u} < \mu_{k+1}^{B^u}$, $(k < \gamma)$.

Говоритимемо, що A передує B за зростанням.

***Означення* 6** [12]. Два нечіткі числа A і B називаються впорядкованими за неспаданням (позначається $A \prec B$), якщо:

а) або $A < B$;

б) або $A = B$, тобто тоді, коли $a_i = b_i$ і $\mu_i^A = \mu_i^B$ $\forall i$.

Для введеної таким чином характеристичної функції, операції додавання та лінійної впорядкованості виконуються зазначені вище властивості [12].

Маючи характеристичну функцію $H(A)$ для нечіткого числа A можна перейти до формалізації понять дотику прямокутників, неперетину їх, перетину (накладання) прямокутників тощо.

Нехай смуга (прямокутник), в якій відбувається розміщення, задана у вигляді $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0, d_0 \in R^1$, h_0 – ширина (висота) прямокутника, d_0 – його довжина. Система координат розміщена так, як показано на рис. 2.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ і $\Pi_j(\xi_j, \nu_j, h_j, d_j)$ за умови, що $h_i = h_j = h_0 \in R^1$, а $d_i, d_j \in X$ – множині нечітких чисел, ξ_i, ξ_j, взагалі кажучи, також належать X (нагадаємо, що $R^1 \in X$).

Нехай $\xi_i = x \in R^1$. Тоді отримаємо таке означення.

***Означення* 7**. Прямокутник Π_j назвемо таким, що дотикається до прямокутника Π_i справа (в смузі Π_0), якщо

$$H(x+d_i) = H(\xi_j). \tag{3}$$

Зауваження. Враховуючи властивості характеристичної функції $H(A)$ нечіткого числа A з (3) маємо

$$H(x+d_i) = H(x) + H(d_i) = x + H(d_i).$$

Отже, рівність (3) набуває вигляду

$$x + H(d_i) = H(\xi_j), \tag{4}$$

тобто прямокутник Π_j називається таким, що дотикається до прямокутника Π_i справа (в смузі Π_0), якщо значення характеристичної функції абсциси його полюса дорівнює сумі абсциси полюса прямокутника Π_i та характеристичної функції його (Π_i) довжини.

***Приклад* 1**. Нехай смуга задана так: $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0, d_0 \in R^1$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови, що $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$, а $d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$.

Нехай $h_0 = 2$, $d_0 = 10$, $\Pi_1(\xi_1 = \{(1|1)\}, \nu_1 = 0, h_1 = 2$, $d_1 = \{(1|0,4), (6|0,6)\})$ і $\Pi_2(\xi_2 = \{(5|1)\}, \nu_2 = 0, h_2 = 2$, $d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,\ H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 4,\ \xi_1 + H(d_1) = $$
$$= 1 + 4 = 5,\ H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5,$$
$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$
$$\xi_2 + H(d_2) = 5 + 3,25 = 8,25.$$

Оскільки 5 = 5, тобто $\xi_1 + H(d_1) = H(\xi_2)$, і справджується рівність (4), то прямокутник Π_2 дотикається до прямокутника Π_1 справа.

***Означення* 8**. Прямокутник Π_j розміщений правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0 (тобто Π_i і Π_j називаються такими, що не перетинаються, не налягають один на одного), якщо

$$H(x+d_i) < H(\xi_j),$$

або, те ж саме,

$$x + H(d_i) < H(\xi_j), \tag{5}$$

тобто прямокутник Π_j розміщений правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0, якщо значення характеристичної функції абсциси його полюса більше, ніж сума абсциси полюса прямокутника Π_i та характеристичної функції його (Π_i) довжини.

***Приклад* 2**. Нехай смуга задана так: $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0, d_0 \in R^1$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови, що $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1$, а $d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$.

Нехай $h_0 = 2$, $d_0 = 11$, $\Pi_1(\xi_1 = \{(1|1)\}, \nu_1 = 0, h_1 = 2$, $d_1 = \{(1|0,1), (2|0,5), (3|0,4)\})$, $\Pi_2(\xi_2 = \{(6|1)\}, \nu_2 = 0, h_2 = 2$, $d_2 = \{(2|0,1), (3|0,5), (4|0,2)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,\ H(d_1) = \frac{1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,4}{0,1 + 0,5 + 0,4} = 2,3,$$
$$\xi_1 + H(d_1) = 3,3,$$
$$H(\xi_2) = \frac{6 \cdot 1}{1} = 6,\ H(d_2) = \frac{2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2}{0,1 + 0,5 + 0,2} = 3,25,$$
$$\xi_2 + H(d_2) = 6 + 3,25 = 9,25.$$

Оскільки 3,3 < 6, тобто $\xi_1 + H(d_1) < H(\xi_2)$, і справджується нерівність (5), то прямокутник Π_2 розміщений правіше прямокутника Π_1.

***Означення* 9**. Прямокутники Π_i і Π_j (що розміщені в смузі Π_0) називаються такими, що перетинаються, якщо

$$H(x) \le H(\xi_j) < H(x+d_i),$$

або, що те ж саме,

$$x \le H(\xi_j) < x + H(d_i). \tag{6}$$

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(h_0, D_0)$, де $h_0 \in R^1$, $D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ і $\Pi_j(\xi_j, \nu_j, h_j, d_j)$ за умови, що $h_i = h_j = h_0 \in R^1$, а $d_i, d_j, \xi_i, \xi_j \in X$.

Нехай $\xi_i = x \in X$. Тоді маємо означення.

***Означення* 10**. Прямокутник Π_j назвемо таким, що:

1) дотикається до прямокутника Π_i справа (в смузі Π_0), якщо

$$H(x+d_i) = H(\xi_j),$$

або

$$H(\xi_i) + H(d_i) = H(\xi_j);$$

2) розміщений правіше прямокутника Π_i в смузі Π_0 (тобто Π_i і Π_j називаються такими, що не перетинаються, не налягають один на одного), якщо

$$H(x+d_i) < H(\xi_j),$$

або, що те ж саме,

$$H(\xi_i) + H(d_i) < H(\xi_j);$$

3) перетинаються, якщо

$$H(x) \le H(\xi_j) < H(x+d_i),$$

або, що те ж саме,

$$H(\xi_i) \le H(\xi_j) < H(\xi_i) + H(d_i).$$

***Приклад* 3.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(h_0, D_0)$, де $h_0 \in$ $\in R^1$, $D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови $h_0 = h_1 = h_2 \in R^1, d_1, d_2, \xi_1, \xi_2 \in X$.

Нехай $h_0 = 2$, $D_0 = \{(12|1)\}$, $\Pi_1(\xi_1 = \{(1|1)\}, \nu_1 = 0$, $h_1 = 2, d_1 = \{(1|0{,}4), (6|0{,}6)\})$, $\Pi_2(\xi_2 = \{(5|1)\}$, $\nu_2 = 0$, $h_2 = 2$, $d_2 = \{(2|0{,}1$ $d_2 = \{(2|0{,}1), (3|0{,}5), (4|0{,}2)\})$, $\Pi_3(\xi_3 = \{(8|1)\}, \nu_3 = 0$, $h_3 =$ $= 2$, $d_3 = \{(2|0{,}5), (4|0{,}5)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,\ H(d_1) = \frac{1 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6} = 4,\ H(\xi_1) + H(d_1) = 1 + 4 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5,\ H(d_2) = \frac{2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2}{0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}2} = 3{,}25,\ H(\xi_2) + H(d_2) = 5 + 3{,}25 = 8{,}25,$$

$$H(\xi_3) = \frac{8 \cdot 1}{1} = 8,\ H(d_3) = \frac{2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 3,\ H(\xi_3) + H(d_3) = 8 + 3 = 11,\ H(D_0) = \frac{12 \cdot 1}{1} = 12.$$

Оскільки 5 = 5, тобто $H(\xi_1) + H(d_1) = H(\xi_2)$, то прямокутник Π_2 дотикається до прямокутника Π_1 справа.

Оскільки 5 < 8, тобто $H(\xi_1) + H(d_1) < H(\xi_3)$, то прямокутник Π_3 розміщений правіше прямокутника Π_1.

Оскільки 5 < 8 < 8,25, тобто $H(\xi_2) < H(\xi_3) <$ $< H(\xi_2) + H(d_2)$, то прямокутник Π_2 перетинається з прямокутником Π_3.

Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ і $\Pi_j(\xi_j, \nu_j, h_j, d_j)$ за умови $\xi_i, \xi_j, \nu_i, \nu_j, h_i, h_j, d_i, d_j \in X$.

***Означення* 11**. Прямокутник Π_i назвемо таким, що розміщується (поміщається) в смузі Π_0 (рис. 3), якщо

$$\begin{cases} 0 \le H(\xi_i), \\ H(\xi_i + d_i) \le H(D_0), \\ 0 \le H(\nu_i), \\ H(\nu_i + h_i) \le H(H_0), \end{cases}$$

або, що те ж саме,

$$\begin{cases} 0 \le H(\xi_i) \le H(D_0) - H(d_i), \\ 0 \le H(\nu_i) \le H(H_0) - H(h_i), \end{cases} \tag{7}$$

а умови (7) назвемо умовами розміщення прямокутника Π_i в смузі Π_0.

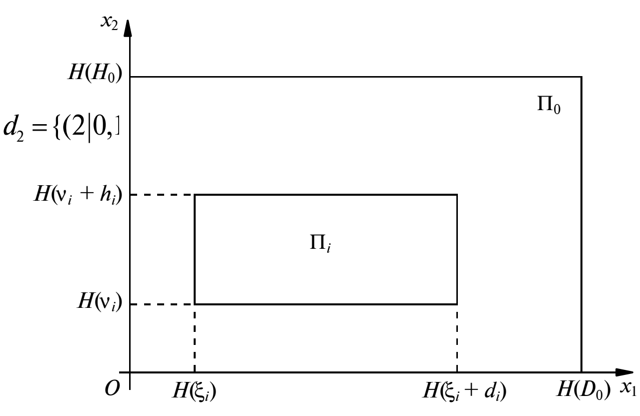

Рис. 3. Ілюстрація розміщення прямокутника Π_i в смузі Π_0

***Приклад* 4.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення прямокутника $\Pi_1(\xi_1,$ $\nu_1, h_1, d_1)$ за умови $\xi_1, \nu_1, h_1, d_1 \in X$.

Нехай $H_0 = \{(6|1)\}$, $D_0 = \{(12|1)\}$. Прямокутник $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ задається так:
$\Pi_1(\xi_1 = \{(1|0{,}5), (2|0{,}5)\}$, $\nu_1 = \{(2|0{,}5), (4|0{,}5)\}$, $h_1 =$ $= \{(1|0{,}5), (3|0{,}5)\}$, $d_1 = \{(1|0{,}4), (6|0{,}6)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1)=\frac{1\cdot 0,5+2\cdot 0,5}{0,5+0,5}=1,5,\ H(d_1)=\frac{1\cdot 0,4+6\cdot 0,6}{0,4+0,6}=4,$$

$$H(\xi_1)+H(d_1)=1,5+4=5,5,$$

$$H(\nu_1)=\frac{2\cdot 0,5+4\cdot 0,5}{0,5+0,5}=3,\ H(h_1)=\frac{1\cdot 0,5+3\cdot 0,5}{1}=2,$$

$$H(\nu_1)+H(h_1)=3+2=5,$$

$$H(H_0)=\frac{6\cdot 1}{1}=6,\ H(D_0)=\frac{12\cdot 1}{1}=12,$$

$$H(H_0)-H(h_1)=6-2=4,\ H(D_0)-H(d_1)=12-4=8.$$

Прямокутник Π_1 поміщається в смузі Π_0, оскільки

$$\begin{cases}0<5,5<8,\\0<3<4,\end{cases}$$

тобто справджується умова (7).

***Означення* 12**. Прямокутники Π_i та Π_j назвемо такими, що перетинаються, якщо виконується або (рис. 4) умова

$$\begin{cases}H(\xi_i)\le H(\xi_j)<H(\xi_i)+H(d_i),\\H(\nu_i)\le H(\nu_j)<H(\nu_i)+H(h_i),\end{cases}\qquad(8)$$

або (рис. 5) умова

$$\begin{cases}H(\xi_i)\le H(\xi_j)<H(\xi_i)+H(d_i),\\H(\nu_j)\le H(\nu_i)<H(\nu_j)+H(h_j);\end{cases}\qquad(9)$$

умови (8) та (9) назвемо умовами взаємного перетину двох прямокутників.

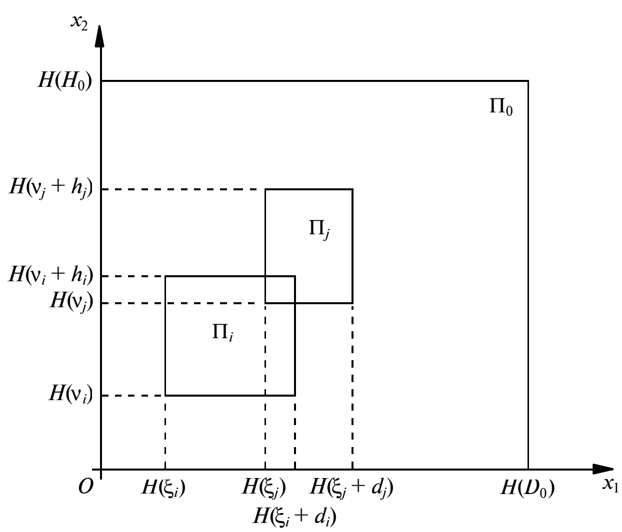

Рис. 4. Ілюстрація умови перетину прямокутників Π_j і Π_i

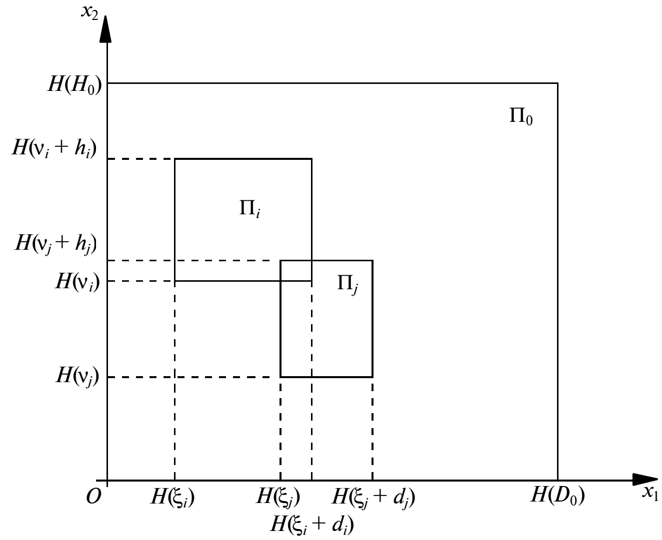

Рис. 5. Ілюстрація умови перетину прямокутників Π_i і Π_j

***Приклад* 5.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1,\nu_1,h_1,d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2,\nu_2,h_2,d_2)$ за умови $\xi_1,\xi_2,\nu_1,\nu_2,h_1,h_2,d_1,d_2\in X$.

Задано два прямокутники:

$\Pi_1(\xi_1=\{(1|0,5),(2|0,5)\},\ \nu_1=\{(2|0,5),(4|0,5)\},\ h_1=$
$=\{(1|0,5),(3|0,5)\},\ d_1=\{(1|0,4),(6|0,6)\}),$
$\Pi_2(\xi_2=\{(2|0,6),(7|0,4)\},\ \nu_2=\{(1|0,6),(3,5|0,5)\},\ h_2=$
$=\{(1|0,5),(3|0,5)\},\ d_2=\{(2|0,1),(3|0,5),(4|0,2)\})$.

Тоді $H(\xi_1)=\dfrac{1\cdot 0,5+2\cdot 0,5}{0,5+0,5}=1,5,$

$$H(\nu_1)=\frac{2\cdot 0,5+4\cdot 0,5}{0,5+0,5}=3,\ H(h_1)=\frac{1\cdot 0,5+3\cdot 0,5}{0,5+0,5}=2,$$

$$H(d_1)=\frac{1\cdot 0,4+6\cdot 0,6}{0,4+0,6}=4,$$

$$H(\xi_1)+H(d_1)=1,5+4=5,5,\ H(\nu_1)+H(h_1)=3+2=5,$$

$$H(\xi_2)=\frac{2\cdot 0,6+7\cdot 0,4}{0,6+0,4}=4,\ H(\nu_2)=\frac{1\cdot 0,6+3,5\cdot 0,4}{0,6+0,4}=2,$$

$$H(h_2)=\frac{1\cdot 0,5+3\cdot 0,5}{0,5+0,5}=2,$$

$$H(d_2)=\frac{2\cdot 0,1+3\cdot 0,5+4\cdot 0,1}{0,1+0,5+0,2}=3,25,$$

$$H(\xi_2)+H(d_2)=5,5+3,25=8,75,\ H(\nu_2)+H(h_2)=2+2=4.$$

Оскільки $1,5<4<5,5$, тобто $H(\xi_1)<H(\xi_2)<$ $<H(\xi_1)+H(d_1)$, тобто справджуються умови (9), то прямокутники Π_1 і Π_2 перетинаються.

***Означення* 13.** Прямокутники $П_i$ і $П_j$ назвемо такими, що не перетинаються (рис. 6), якщо виконується:
або умова
$$H(\xi_j) > H(\xi_i) + H(d_i),$$
або умова
$$H(\nu_j) > H(\nu_i) + H(h_i).$$

Іншими словами, виконується сукупність нерівностей
$$\left[\begin{array}{l} H(\xi_j) > H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(\nu_j) > H(\nu_i) + H(h_i). \end{array}\right.$$

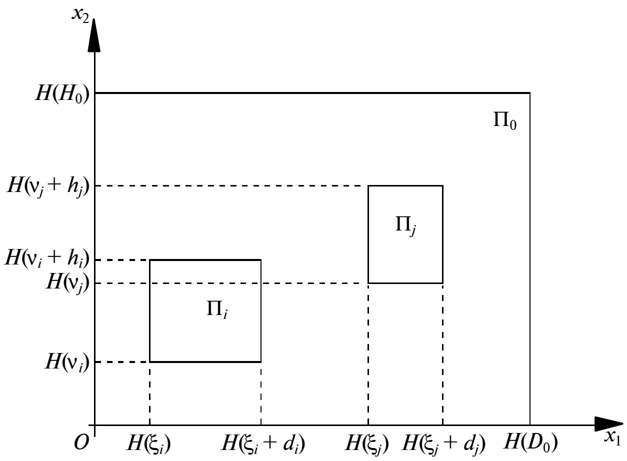

Рис. 6. Ілюстрація умови неперетину прямокутників $П_j$ і $П_i$

***Приклад* 6.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $П_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $П_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ і $П_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови $\xi_1, \xi_2, \nu_1, \nu_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$.

Задано два прямокутники:

$П_1(\xi_1 = \{(1|0{,}5), (2|0{,}5)\},\ \nu_1 = \{(2|0{,}5), (4|0{,}5)\},\ h_1 =$
$= \{(1|0{,}5), (3|0{,}5)\},\ d_1 = \{(1|0{,}4), (6|0{,}6)\}),$

$П_2(\xi_2 = \{(4|0{,}5), (8|0{,}5)\},\ \nu_2 = \{(1|0{,}6), (3{,}5|0{,}5)\},\ h_2 =$
$= \{(1|0{,}5), (3|0{,}5)\},\ d_2 = \{(2|0{,}1), (3|0{,}5), (4|0{,}2)\}).$

Тоді
$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 1{,}5,$$
$$H(\nu_1) = \frac{2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 3,\ H(h_1) = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 2,$$
$$H(d_1) = \frac{1 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6} = 4,$$
$$H(\xi_1) + H(d_1) = 1{,}5 + 4 = 5{,}5,\ H(\nu_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$
$$H(\xi_2) = \frac{4 \cdot 0{,}5 + 8 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 6,\ H(\nu_2) = \frac{1 \cdot 0{,}6 + 3{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}6 + 0{,}4} = 2,$$
$$H(h_2) = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 2,$$
$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}1}{0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}2} = 3{,}25,$$
$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5{,}5 + 3{,}25 = 8{,}75,$$
$$H(\nu_2) + H(h_2) = 2 + 2 = 4.$$

Оскільки $6 > 5{,}5$, тобто $H(\xi_2) > H(\xi_1) + H(d_1)$, то прямокутники $П_1$ і $П_2$ не перетинаються.

***Означення* 14.** Прямокутники $П_i$ і $П_j$ назвемо такими, що дотикаються, якщо виконується:
або умова
$$\begin{cases} H(\xi_j) = H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(\nu_i) \le H(\nu_j) \le H(\nu_i) + H(h_i), \end{cases}$$
або
$$\begin{cases} H(\xi_j) = H(\xi_i) + H(d_i), \\ H(\nu_i) \le H(\nu_j) + H(h_j) \le H(\nu_i) + H(h_i), \end{cases}$$
або
$$\begin{cases} H(\nu_j) = H(\nu_i) + H(h_i), \\ H(\xi_i) \le H(\xi_j) \le H(\xi_i) + H(d_i), \end{cases}$$
або
$$\begin{cases} H(\nu_j) = H(\nu_i) + H(h_i), \\ H(\xi_i) \le H(\xi_j) + H(d_i) \le H(\xi_i) + H(d_i), \end{cases}$$
або деякі з цих умов виконуються одночасно (рис. 7).

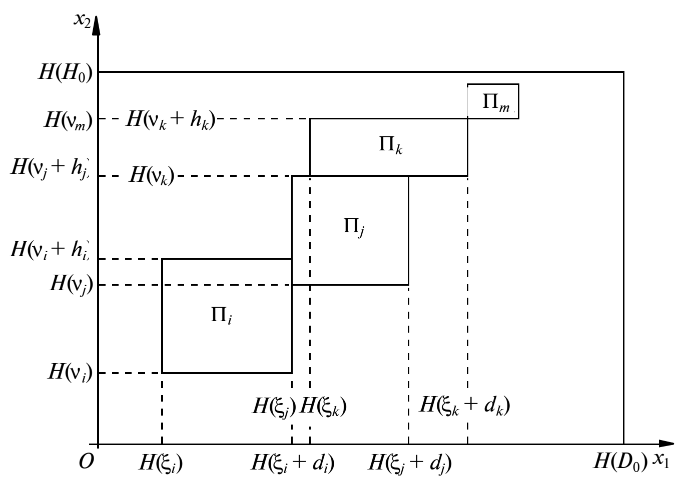

Рис. 7. Ілюстрація дотику прямокутників

***Приклад* 7.** Нехай смуга, в якій відбувається розміщення, задана так: $\Pi_0(H_0, D_0)$, де $H_0, D_0 \in X$.

Розглянемо розміщення двох прямокутників $\Pi_1(\xi_1, \nu_1, h_1, d_1)$ і $\Pi_2(\xi_2, \nu_2, h_2, d_2)$ за умови $\xi_1, \xi_2, \nu_1, \nu_2, h_1, h_2, d_1, d_2 \in X$.

Задано два прямокутники:

$\Pi_1(\xi_1 = \{(1|0{,}5), (2|0{,}5)\}, \nu_1 = \{(2|0{,}5), (4|0{,}5)\}, h_1 =$
$= \{(1|0{,}5),(3|0{,}5)\},\ d_1 = \{(1|0{,}4),(6|0{,}6)\})$,

$\Pi_2(\xi_2 = \{(5|0{,}5), (6|0{,}5)\}, \nu_2 = \{(1|0{,}6), (3{,}5|0{,}5)\}, h_2 =$
$= \{(1|0{,}5), (3|0{,}5)\},\ d_2 = \{(2|0{,}1), (3|0{,}5), (4|0{,}2)\})$.

Тоді

$$H(\xi_1) = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 1{,}5,$$

$$H(\nu_1) = \frac{2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 3,\ H(h_1) = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 2,$$

$$H(d_1) = \frac{1 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6} = 4,\ H(\xi_1) + H(d_1) = 1{,}5 + 4 = 5{,}5,$$

$$H(\nu_1) + H(h_1) = 3 + 2 = 5,$$

$$H(\xi_2) = \frac{5 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 5{,}5,\ H(\nu_2) = \frac{1 \cdot 0{,}6 + 3{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}6 + 0{,}4} = 2,$$

$$H(h_2) = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} = 2,$$

$$H(d_2) = \frac{2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}1}{0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}2} = 3{,}25,$$

$$H(\xi_2) + H(d_2) = 5{,}5 + 3{,}25 = 8{,}75,$$

$$H(\nu_2) + H(h_2) = 2 + 2 = 4.$$

Оскільки $5{,}5 = 5{,}5$, тобто $H(\xi_2) = H(\xi_1) + H(d_1)$, то прямокутники Π_1 і Π_2 дотикаються.

***Означення* 15**. Розміщенням прямокутника $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ в смузі $\Pi_0(H_0, D_0)$, де H_0, D_0 є нечіткими числами, називатимемо розміщення прямокутника в смузі $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $h_0 = H(H_0)$, $d_0 = H(D_0)$.

***Означення* 16**. Розміщенням прямокутника $\Pi_i(\xi_i, \nu_i, h_i, d_i)$ в смузі $\Pi_0(h_0, d_0)$, де $\xi_i, \nu_i, h_i, d_i \in X$, $h_0, d_0 \in R^1$, називатимемо розміщення прямокутника $\Pi^i(x_i, y_i, h^i, d^i)$ в Π_0, де $x_i = H(\xi_i)$, $y_i = H(\nu_i)$, $h^i = H(h_i)$, $d^i = H(d_i)$.

Ввівши означення 15 і 16, одержуємо таке очевидне твердження.

Твердження. Означення 15, 16 та відповідні попередні означення еквівалентні.

Зауважимо, що підхід, розглянутий у даній статті, може бути застосований до будь-якого узагальнення прямокутника (чи то з "інтервальними" розмірами (як інтервал), чи то з "ймовірнісними" (як випадкова величина) тощо), що враховують невизначеність вимірювання розмірів.

***Означення* 17**. Нечітке число A_1 називається мінімальним серед нечітких чисел $A_1, A_2, ..., A_k$ числом, якщо $A_1 \prec A_2 \prec ... \prec A_k$.

***Означення* 18**. Нечітке число A_k називається максимальним серед нечітких чисел $A_1, A_2, ..., A_k$ числом, якщо $A_1 \prec A_2 \prec ... \prec A_k$.

Побудуємо математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами, вважаючи, що довжини прямокутників a_i задаються нечіткими числами.

У кожній смужці в оптимальному розв'язку, очевидно, може розміщуватися від одного до $p - (m - 1) = p - m + 1$ прямокутників, де m — кількість смужок, на яку розділено смугу, тобто ціла частина частки від ділення ширини смуги на h. Позначимо $n = m(p - m + 1)$ та введемо до розгляду $n - p$ прямокутників з шириною h та довжиною a_0, де a_0 є нечітким числом вигляду $a_0 = \{(0|1)\}$, тобто звичайним нулем, $a_0 \in R^1$.

Тоді можна вважати, що в кожній смужці стоїть рівно $p - m + 1$ прямокутників. Позначимо x_{ij} — нечітку довжину прямокутника, що стоїть у i-й смужці на j-му від початку смуги місці, $i \in J_m$, $j \in J_{p-m+1}$.

Розглянемо вектор x вигляду

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{1,\, p-m+1}, x_{21}, \ldots, x_{2,\, p-m+1}, \ldots ,$$
$$x_{i1}, \ldots, x_{i,\, p-m+1}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{m,\, p-m+1}).$$

Утворимо мультимножину $G = \{a_1, ..., a_p, a_0, ...$ $..., a_0\}$, в якій елемент a_0 зустрічається $n - p$ раз. Тоді вектор x можна розглядати як елемент множини $E_n(G)$ переставлень з елементів мультимножини G, тобто $x \in E_n(G)$. При цьому кожному переставленню x буде відповідати певне розміщення прямокутників у смузі і навпаки.

Використовуючи введені операції додавання, лінійної впорядкованості, знаходження максимального і мінімального нечіткого числа, математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами можна подати в такому вигляді:

$$F^*(x^*) = \min_{x \in E_n(G)} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}, \qquad (10)$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_n(G)} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}, \qquad (11)$$

де $\arg f(x)$ позначає точку x, що доставляє значення $f(x)$ функції f.

Формула (10) дає мінімально можливу довжину зайнятої частини смуги у вигляді нечіткого числа, а формула (11) – переставлення x^*, на якій ця довжина $F^*(x^*)$ досягається. Задача може бути розв'язана методом гілок та меж, аналогічно, як це зроблено в [11].

Висновки

У задачах комбінаторної оптимізації використовуються, як правило, параметри, що не містять невизначеності, оскільки її важко враховувати. У статті здійснено врахування невизначеності в одній із комбінаторних оптимізаційних задач – задачі упакування прямокутників у випадку, коли один із параметрів прямокутника є нечітким числом. Розглянутий підхід до моделювання такої ситуації може поширюватися на будь-які інші задачі евклідової комбінаторної оптимізації, якщо необхідно враховувати ту чи іншу невизначеність за допомогою нечіткої множини.

У подальшому доцільно направити зусилля на розробку точних та наближених методів розв'язування таких задач.

О.А. Емец, А.О. Емец

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С НЕЧЕТКИМИ РАЗМЕРАМИ

Определено расположение прямоугольников с нечеткими размерами в полосе: касание, пересечение, непересечение, а также расположение прямоугольников с нечеткими размерами в полосе нечеткого размера: попадание в полосу, касание, пересечение, непересечение. Построена новая математическая модель одной задачи упаковки прямоугольников в виде задачи комбинаторной оптимизации на множестве нечетких перестановок.

Oleg O. Yemets′, Oleksandra O. Yemets′

THE CONSTRUCTION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE ONE COMBINATORIAL PROBLEM OF RECTANGLES PACKING WITH FUZZY SIZES

In this paper, we define the arrangement of rectangles with fuzzy sizes in a breadth – tangency, intersection, non-intersection. We also define the arrangement of rectangles with fuzzy sizes in the fuzzy size breadth – tangency, intersection, non-intersection. Finally, we construct a new mathematical model of the one problem of the rectangle packing as a problem of the Euclidian combinatorial optimization on a set of fuzzy permutations.

1. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. – К.: Наук. думка, 2003. – 264 с.
2. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
3. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 104 с.
4. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Комбинаторная оптимизация на размещениях. – К.: Наук. думка, 2008. – 160 с.
5. *Панишев А.В., Плечистый Д.Д.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. – Житомир: ЖГТУ, 2006. – 300 с.
6. *Гуляницький Л.Ф.* Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України. – К., 2005. – 32 с.
7. *Гребеннік І.В.* Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Ін-т проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного. – Харків, 2006. – 34 с.
8. *Павлов О.А., Павлова Л.О.* Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язуваних комбінаторних задач // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 1997. – № 1. – С. 22–26.
9. *Емец О.А., Роскладка А.А.* О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С. 35–44.
10. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
11. *Роскладка А.А., Емец А.О.* Решение одной комбинаторной задачи упаковки с учетом неопределенности данных, описанной нечеткими числами // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 132–141.
12. *Ємець О.О., Ємець Ол-ра О.* Деякі операції та відношення над нечіткими числами // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 5. – С. 39–46.

Рекомендована Радою факультету прикладної математики НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 3 грудня 2007 року