Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

С.М. Шукаєв
С.О. Пискунов
О.С. Мусієнко

Механіка композиційних матеріалів

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Динаміка і міцність машин»
спеціальності 131 Прикладна механіка

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 539.3
539

Автори: *Шукаєв Сергій Миколайович*, д-р техн. наук, проф.
Пискунов Сергій Олегович, д-р техн. наук, проф.
Мусієнко Ольга Станіславівна, доктор філософії , ст.викл.
Рецензент: *Бородій, М.В.*, д-р техн. наук, професор, Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, м. Київ
Відповідальний редактор *Крищук Микола Георгійович,* д-р техн. наук, проф. КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 09.01.2025 р.)
за поданням Вченої ради Навчально-наукового Механіко-машинобудівного інституту
(протокол № 5 від 23.12.2024 р.)

131 ***Механіка композиційних матеріалів****. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Динаміка і міцність машин» спец. 131 Прикладна механіка / С. М. Шукаєв та ін. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 147 с.*

У посібнику викладено основи механіки композиційних матеріалів, розглянуто сучасні підходи до моделювання пружних властивостей волокнистих і шаруватих композитів, приділено увагу критеріям руйнування односпрямованого композиційного матеріалу, наведено методики випробувань композитів на розтяг, стиск і зсув.

Навчальний посібник призначений для здобувачів освітнього ступеня бакалавр за спеціальністю 131 Прикладна механіка, також буде корисним для магістрантів, аспірантів, викладачів та наукових працівників.

УДК 539.3 (539)

Реєстр. № НП 24/15-200. Обсяг 7 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© С.М. Шукаєв, С.О. Пискунов, О.С. Мусієнко
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

Передмова

Механіка композиційних матеріалів розглядає поведінку та властивості матеріалів, створених із двох або більше компонентів із різними фізичними чи хімічними характеристиками. Ці матеріали, завдяки своїй високій міцності при малій вазі, стійкості до корозії та здатності витримувати високі температури, стають незамінними в сучасній інженерії. Композиційні матеріали вже знайшли широке застосування в авіаційній, автомобільній, суднобудівній галузях, а також у спортивному інвентарі та медичному обладнанні.

Навчальний посібник спрямований на вивчення фундаментальних принципів механіки композиційних матеріалів, зокрема аналізу їхньої структури, поведінки під навантаженнями та методів прогнозування їхніх характеристик. У ньому розглянуто, зокрема, сучасні підходи до моделювання пружних властивостей волокнистих композитів, теорії міцності та стандартні механічні випробування композиційних матеріалів.

Завдяки своїм унікальним властивостям, композиційні матеріали стали важливим компонентом сучасних технологій. Для науковців та інженерів розуміння механіки цих матеріалів є ключем до створення інноваційних рішень у різних галузях.

Навчальний посібник призначений для здобувачів освітнього ступеня бакалавр за спеціальністю 131 Прикладна механіка, водночас буде корисним для магістрантів, аспірантів, викладачів та наукових працівників, які прагнуть поглибити свої знання з механіки композиційних матеріалів.

Посібник підготовлений за спонсорської підтримки Державного департаменту США в рамках Проєкту «Реновація освіти в галузі літакобудування» (uCAREER – «Aircraft Engineering Education Renovation»), що реалізовувався за Програмою «Малі гранти публічної дипломатії – ОСВІТА на 2023 рік» Посольства США в Україні.

ЗМІСТ

ЗМІСТ 4
Умовні позначення 6
ВСТУП 8
1. ТИПИ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ 12
1.1. Класифікація композиційних матеріалів 14
1.2. Властивості композиційних матеріалів, їх переваги та недоліки 16
1.3. Типи матриць та волокон, які використовуються у композитах 20
1.3.1. Типи матриць. 21
1.3.2. Армуючі елементи (волокна) 27
2. ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ 33
2.1. Узагальнений закон Гука для анізотропного тіла 33
2.1.1. Просторовий напружений стан 33
2.1.2. Плоский напружений стан 42
2.2. Ефективні фізико-механічні характеристики односпрямованого композиційного матеріалу 43
2.2.1. Правило сумішей 43
2.2.2. Ефективні модулі пружності односпрямованого композиту 45
2.3. Коефіцієнти лінійного температурного розширення 50
2.4. Питомі характеристики композиційних матеріалів 53
3. ДЕФОРМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ 55
3.1. Структура шаруватих композиційних матеріалів 55
3.2. Перетворення пружних характеристик односпрямованого матеріалу при повороті осей системи координат 57
3.3. Пружні характеристики багатошарових композитів 61
3.3.1. Пружні характеристики багатошарових композитів для випадку плоского напруженого стану 61
3.3.2. Пружні характеристики багатошарових композитів (об’ємний напружений стан) 70
4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ КОМПОЗИТІВ 74
4.1. Міцність односпрямованого композиту 74
4.1.1. Міцність односпрямованого композиту за розтягання вздовж волокон. 75

4.1.2. Міцність односпрямованого композиту за стискання вздовж волокон 81
4.1.3. Міцність односпрямованого композиту за розтягання (стискання) поперек волокон 83
4.1.4. Міцність односпрямованого композиту за чистого зсуву 85
4.2. Оцінка міцності односпрямованого композиту за складного напруженого стану 86
4.2.1. Призначення механічних теорій міцності 87
4.2.2. Класичні теорії міцності для ізотропного матеріалу 88
4.2.3. Характеристики міцності односпрямованого композиту за складного напруженого стану 93
4.2.4. Узагальнення класичних теорій міцності для анізотропних матеріалів 96
4.2.5. Тензорно-поліноміальні критерії міцності для анізотропних матеріалів 103
5. ВИПРОБУВАННЯ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ 112
5.1. Випробування композиційних матеріалів з полімерною матрицею на розтяг. 113
5.2. Випробування композиційних матеріалів з полімерною матрицею на стиск 123
5.3. Випробування на зсув.....132
Посилання.....142
ДОДАТКИ 143
ДОДАТОК А Перелік чинних Державних стандартів України з випробувань композиційних матеріалів.....144
ДОДАТОК Б Публікації кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів КПІ ім. Ігоря Сікорського з досліджень композиційних матеріалів 145

Умовні позначення

d	-	діаметр волокна
s	-	відстань між центрами волокон
$[B]$	-	матриця підатливості матеріалу
b_{ij}	-	коефіцієнт матриці підатливості
[C]	-	матриця жорсткості матеріалу
c_{ij}	-	коефіцієнт матриці жорсткості
σ_{ii}	-	компоненти нормальних напружень
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	-	головні нормальні напруження
$\sigma_c, \sigma_р, \tau$	-	межі міцності ізотропного матеріалу за стиску, розтягу, зсуву
$\sigma_{пц}, \varepsilon_{пц}$	-	межа пропорційності за розтягання і відповідна їй деформація
$\sigma_м, \varepsilon_м$	-	межа міцності за розтягання і відповідна їй деформація
$\sigma_{екв}$	-	еквівалентні напруження за теорією міцності
$\sigma_{1c}, \sigma_{2c}, \cdots, \sigma_{3p}$	-	межі міцності ортотропного матеріалу за стиску і розтягу
$\underline{\sigma}_{12,45}, \cdots, \sigma_{23,45}$	-	межі міцності за стиску і розтягу ортотропного матеріалу у діагональних напрямах
$\underline{\sigma}_{д12}, \cdots, \sigma_{д23}$	-	межі міцності за двовісного рівномірного стиску і розтягу ортотропного матеріалу
τ_{ij}	-	компоненти дотичних напружень
$\tau_{12}, \underline{\tau}_{12}, \cdots, \tau_{23,45}, \underline{\tau}_{23,45},$	-	межі міцності на зсув ортотропного матеріалу в основних і діагональних напрямах
ε_{ii}	-	компоненти лінійних деформацій
γ_{ij}	-	компоненти кутових деформацій
Δ_K	-	величина повного видовження КМ
E	-	модуль пружності (модуль Юнга)
$E_В$	-	модуль пружності матеріалу волокна КМ
E_M	-	модуль пружності матеріалу матриці КМ
E_K	-	модуль пружності КМ
E_i	-	модуль пружності КМ у напрямку вісі x_i
G	-	модуль пружності другого роду (модуль зсуву)
G_{ij}	-	модуль зсуву КМ у площині $x_i 0 x_j$;

μ	-	коефіцієнт Пуассона
μ_B	-	коефіцієнт Пуассона матеріалу волокна КМ
μ_M	-	коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці КМ
μ_{21}, μ_{12}	-	ефективні коефіцієнти Пуассона для КМ
ψ	-	об'ємна частка матеріалу волокна КМ
α	-	лінійний коефіцієнт теплового розширення
α_B	-	лінійний коефіцієнт теплового розширення матеріалу волокна КМ
α_M	-	лінійний коефіцієнт теплового розширення матеріалу матриці КМ
T	-	температура тіла
$[T]$	-	матриця перетворення координат
ε_T	-	температурні деформації
α_i	-	лінійний коефіцієнт теплового розширення КМ у напряму вісі x_{i}
ρ_B		питома вага матеріалу волокна КМ
ρ_M		питома вага матеріалу матриці КМ
$(E)_\rho$		питома жорсткість КМ
$\varphi^{(k)}$	-	кут орієнтації армуючих волокон шару k КМ відносно вісей загальної системи координат
h_k	-	товщина шару k у КМ
$F_i, F_{ij}, F_{ijk}, \ldots$	-	тензори поверхні міцності (тензори міцності) другого четвертого, шостого і наступних парних рангів
$X_{\varepsilon T},\ Y_{\varepsilon T},\ Z_{\varepsilon T}$	-	граничні деформації розтягу в головних напрямках
$X_{\varepsilon C},\ Y_{\varepsilon C},\ Z_{\varepsilon C}$	-	граничні деформації стиску в головних напрямках
$R,\ S,\ T$	-	граничні зсувні деформації в головних площинах

ВСТУП

Машинобудування у XX сторіччі головним чином базувалося на чорній металургії, яка виплавляла чавун і низькоякісні сталі. Застосування таких конструкційних матеріалів має суттєві недоліки:

- вироби з них є дуже металоємкими і багато важать;
- корозія “з’їдає” до 20% річного виробництва чавуну і сталі;
- для підтримки працездатності таких машин потрібна ціла армія ремонтників - більш 10% від всіх робітників.

Ще у другій половині минулого сторіччя стало зрозумілим, що далі на чорних металах працювати недоцільно. Тим більше, що суттєвого приросту виробництва чорних металів в найближчі роки не очікується.

Застосування таких металів як титан, алюміній, магній, високоякісних легованих сталей призвели до революції у сучасному машинобудуванні. Легкі, міцні, корозійностійкі сплави дозволяють в декілька разів зробити машини легшими, в 10 разів скоротити витрати на ремонт і у 2 рази - на паливо.

У найближчі десятиліття машинобудування має перейти на випуск алюмінієво-титанової рухомої техніки, легкої і нержавіючої, економічної, з великим безремонтним ресурсом. Але у такого майбутнього є свої ресурсні обмеження. Назріває криза, пов’язана з нестачею металів. Уже вибухнула криза із титаном, відчувається дефіцит свинцю, молібдену, танталу, платини і срібла. Далі настане черга хрому, кобальту, магнію і вольфраму.

У найближчі роки немає ніякої надії на швидке зростання виробництва металів. Тому, невідкладною вимогою сьогодення є розробка і виробництво нових конструкційних матеріалів. Серед яких особливий інтерес викликають композиційні матеріали (КМ).

Композиційні матеріали володіють низкою корисних якостей у застосуванні до інженерних потреб. Відмінною особливістю виготовлення конструкцій із КМ є те, що матеріал та виріб у більшості випадків створюються одночасно. При цьому виробам, в більшості випадків, одразу надають задані геометричні розміри і форму, що дозволяє суттєво знизити їх вартість порівняно з виробами з традиційних матеріалів, незважаючи на те, що вихідні матеріали для КМ можуть мати більшу вартість.

На відміну від металообробних технологій процеси виробництва виробів із КМ дозволяють суттєво підвищити коефіцієнт використання матеріалу та довести його до значень 0,8 - 0,95. Крім того, порівняно з металевими конструкціями, вдається скоротити кількість складальних одиниць, усунути цілу низку складальних операцій, замінивши їх клейовими сполуками, або відразу отримати готові вироби безпосередньо при формуванні. У результаті знижується трудомісткість виготовлення виробів із КМ в 1,5-2,5 разу проти традиційних металевих аналогів.

Механічні властивості композиту визначаються співвідношенням властивостей армуючих елементів та матриці, а також міцністю зв'язку між ними. В результаті поєднання армуючих елементів і матриці утворюється комплекс властивостей композиту, який не тільки відображає вихідні характеристики його компонентів, але і включає властивості, які окремі компоненти не мають. Зокрема, наявність границь розділу між армуючими елементами та матрицею істотно підвищує тріщиностійкість матеріалу, і в композитах, на відміну від металів, підвищення статичної міцності призводить не до зниження, а, як правило, до підвищення характеристик в'язкості руйнування.

Визначення фізико-механічних характеристик композиту і оцінка міцнісних і жорсткісних властивостей виробу з КМ являє собою складну задачу, яка включає визначення ефективних фізико-механічних характеристик на основі даних про характеристики складових КМ і його структуру, формулювання і апробація критеріїв міцності, які ураховують складний напружений стан і анізотропію властивостей композиту, експериментальну перевірку отриманих результатів та інші.

При визначення фізико-механічних характеристик КМ можна виділити два підходи. Макроскопічний підхід, що ґрунтується на розгляді композиту як суцільного матеріалу та передбачає усереднення характеристик напружено-деформованого стану по об’єму матеріалу і подальше отримання результатів на основі співвідношень механіки суцільного середовища без урахування ефектів на межі розділу складових КМ та деталізації його структури. Мікроскопічний підхід ураховує названі ефекти, і може бути реалізований як із використанням аналітичних співвідношень так і використанням числових методів , наприклад методу скінченних елементів (МСЕ). Числовий експеримент із використанням МСЕ також є ефективним засобом перевірки достовірності запропонованих критеріїв міцності, проектуванні композитних

матеріалів із певними наперед заданими фізико-механічними властивостями, виявленні особливостей деформування та оцінки міцності конструкцій з композитів.

На кафедрі динаміки і міцності машин та опору матеріалів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» накопичений значний досвід вирішення перелічених питань із використанням різних методик і постановок задач дослідження. Відповідні результати відображені у низці публікацій (дивись Додаток А).

Можливість регулювання структури і управління якістю перехідного шару, схемою армування та ін. дозволяє створювати нові матеріали з різним спектром необхідних властивостей.

Висока міцність композиційних матеріалів за відносно малої ваги, корозійна стійкість та інші цінні властивості визначають ефективність їх широке застосування у сучасних машинах, конструкціях і виробах в різних галузях техніки і виробництва, зокрема в авіації, космонавтиці, військовій техніці, інших сферах машинобудування, в енергетиці, медицині та інших.

Основний принцип створення виробів з КМ полягає в тому, що вибір матеріалів, проектування конструкції і розробка технологічного процесу – три взаємопов’язаних складових єдиної задачі.

Сучасне виробництво має широкий вибір високоефективних композиційних матеріалів (з цілого ряду армуючих наповнювачів та зв’язуючих), структурних схем укладання в конструкції, технологічних способів формоутворення та вибору раціональної геометрії конструкції.

На сьогоднішній день створено великомасштабні виробництва унікальних КМ різного типу, які не тільки перевершують за своїми фізико-механічними показниками самі високоміцні сталі, але і володіють більш низькою щільністю, високою хімічною стійкістю до агресивних середовищ, унікальними теплофізичними властивостями.

Традиційно властивості матеріалів визначаються експериментально і потім узагальнюються у довідниках. Такий підхід виявляється недоцільним для КМ через їх велику різноманітність. Тому активно розвиваються підходи, спрямовані на розробку аналітичних процедур (на основі властивостей волокон і матриці, об'ємних фракцій і, можливо, розподілу волокон) для визначення властивостей композитів. Тобто, властивості КМ визначаються з погляду механіки конструкцій, а не

матеріалознавства. Справді, композити є складними конструкціями, а не матеріалами у класичному сенсі.

КМ ідеально підходять для конструкцій, де необхідні високі співвідношення міцності до ваги і жорсткості до ваги (питома міцність і жорсткість матеріалу), наприклад, в космічних апаратах та літаках.

Застосування композиційних матеріалів та технологій на їх основі в ракетно-космічній та авіаційній техніці на сьогоднішній день є одним із головних факторів, що забезпечує їх прогрес.

Якщо в конструкціях військових літальних апаратів (ЛА) КМ практично замінили традиційні метали, а у цивільних літаках останнього покоління до 20% відносної ваги несучих поверхонь, агрегатів та фюзеляжу виготовляються з КМ, то в сучасному Boing 787 вага КМ досягла 50%.

Українські підприємства ракетно-космічної та авіаційної галузей також, як і провідні закордонні підприємства, широко використовують КМ у виробництві. Вітчизняними підприємствами накопичено великий практичний досвід використання КМ, знайдено низку оригінальних конструкторсько-технологічних рішень, застосовано унікальні технологічні процеси, які дозволили створити конструкції високої вагової досконалості.

1. ТИПИ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Композиційні матеріали – матеріали з новим корисним комплексом фізико-механічних та експлуатаційних властивостей, утворені поєднанням двох і більше компонентів, які мають межі розподілу та різняться хімічним складом, структурою і фізико-хімічними характеристиками.

Один з найдавніших описів виготовлення композиційного матеріалу наводиться в Старому Завіті (Вихід, гл.5), де згадується застосування соломи при виготовлені цегли в Єгипті. При будівництві Великого китайського муру використовували ще один композит - вербові гілки, клейку рисову кашу з домішкою гашеного вапна. У Давньому Єгипті близько 4500 років тому тіло померлого після відповідної підготовки обмотували смужками тканини чи папірусу і промащували природною смолою. У результаті утворювався твердий «кокон» — мумія. У XVIII ст. цей метод заново відкрили, використавши як наповнювач папір (вироби з пап'є-маше). До середини XX ст. з пап'є-маше робили іграшки і навіть меблі.

Попередник обпаленої глини, саман - суміш землі, глини, піску, соломи і води – широко використовувся у будівництві житла в різних країнах, особливо в степових і гірських районах. Подібна технологія будівництва була досить поширена і в Україні, зокрема, саме так будували вельми поширені колись мазанки.

Рис. 1.1. Українська хата (Ілля Ріпин, 1880)

Появу армованого бетону (залізобетону) в середині XIX століття можна вважати важливим кроком у розвитку композитних технологій. Поєднання сталі та бетону створило матеріал із покращеними властивостями, що широко використовується в будівництві.

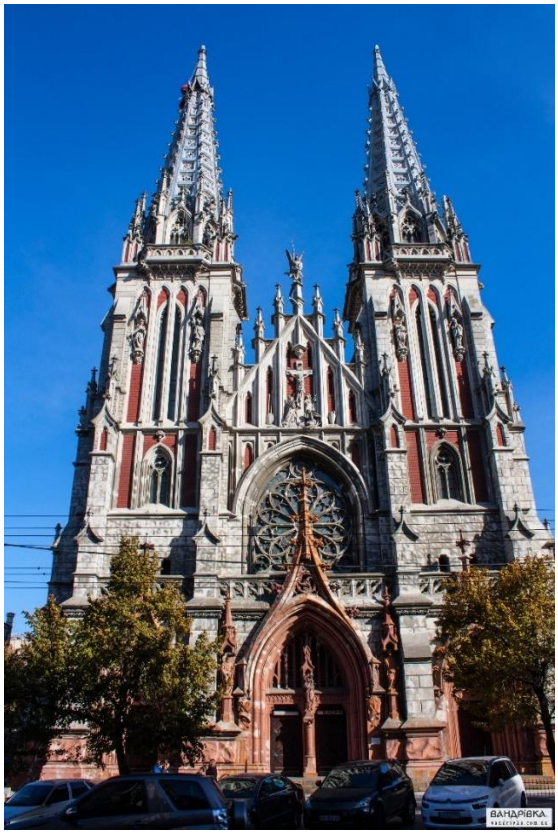


Рис. 1.2. Костел Святого Миколая (Київ)

Костел Святого Миколая в місті Києві є блискучим прикладом застосування залізобетону. Розробка і будівництво будівлі проводилися під керівництвом відомого київського архітектора Владислава Городецького. Костел, побудований у стилізованих готичних формах із високими стрілчастими вежами і шпилями, вирізняється стрункими пропорціями і легкістю конструкції. Складні умови будівництва та архітектурного рішення спонукали архітекторів застосувати новаторські на той час інженерні технології. Уперше в тогочасній будівельній практиці було запропоновано закладення фундаменту на бетонних палях, а в конструкціях широко використовувався залізобетон - новий будівельний матеріал.

Винахід у 1930-ті роки скловолокна та його поєднання з полімерними матрицями став ключовим моментом у розвитку сучасних композитів. Дуже символічно, що сходи космічного коробля «Аполо», по яких людина вперше зійшла на поверхню Місяця, були виготовлені із склопластику. Розпочалася ера сучасних композитів. Зокрема, у 1950-ті роки з’явилися композити на базі вуглецевих волокон, у 1960-ті роки - арамідних волокон (Kevlar), а у 1970-ті роки розпочалося використання полімерних композитів. Виникнення нановолокон привело до появи нанокомпозитів із покращеними механічними та електричними властивостями. Таким чином, композитні матеріали пройшли довгий шлях від примітивних натуральних композицій до високотехнологічних матеріалів.

1.1. Класифікація композиційних матеріалів

Властивості композиційних матеріалів дозволяють їм бути надзвичайно корисними у різних галузях промисловості. Основні властивості КМ включають високу міцність на розтяг, низьку густину, стійкість до корозії, високу жорсткість і відмінний опір втомі.

Характерними ознаками композиційних матеріалів є:

- складаються з двох або більше різнорідних матеріалів, включаючи матрицю та армуючі елементи;
- між компонентами композиційного матеріалу існують тільки фізичні зв'язки, без хімічної взаємодії;
- компоненти у складі композиційного матеріалу не змішуються між собою, оскільки завжди існує границя розділу фаз;
- компоненти підбираються таким чином, щоб забезпечити явище синергізму, при якому властивості кінцевого матеріалу перевершують характеристики кожного окремого компонента;
- матриця композиційного матеріалу створює суцільне середовище, яке зв’язує всі інші компоненти;
- під час виготовлення виробів з композитів матриця часто знаходиться в рідкому або пластичному стані, що дозволяє надавати виробам необхідної форми;
- жорсткість матриці зазвичай нижча, ніж жорсткість армуючих елементів, тому основне навантаження у виробах з композиційних матеріалів припадає на армуючі елементи;
- композиційні матеріали мають багатофункціональні властивості, що дозволяє їм повніше задовольняти вимоги, пов'язані з їхнім призначенням.

Композиційні матеріали мають орієнтовану структуру і за своєю природою є гетерогенними. У зв’язку з цим КМ прийнято класифікувати за наступними ознаками:

За формою армуючого компонента:

- *волокнисті*: армуються волокнами (скляними, вуглецевими, азбестовими, базальтовими тощо). Волокна можуть бути безперервними і дискретними*;*
- *шаруваті*: складаються з послідовно укладених шарів різних матеріалів*;*

– *дисперсно-зміцнені*: армуються дисперсними частинками (оксидами алюмінію, кремнію, титану тощо).

За видом матеріалу матриці:

– *полімерні*: мають полімерну матрицю (епоксидну, фенольну, поліамідну тощо)*;*
– *металеві*: мають металеву матрицю (алюмінієву, магнієву, титанову тощо)*;*
– *керамічні*: мають керамічну матрицю*;*
– *вуглецеві*: мають вуглецеву матрицю.

За типом армування:

– *неперервно армовані*: армуючий компонент розподілений по всьому об'єму матеріалу;
– *дискретно армовані*: армуючий компонент розподілений у вигляді окремих елементів (тканини, сітки тощо).

За видом матеріалу армуючого компонента:

– *металеві частинки*;
– *металеві волокна і шари*;
– *вуглецеві, борні, скляні, керамічні волокна*.

Поділ композиційних матеріалів за структурними ознаками дає змогу виявити їхні принципові відмінності.

У волокнистих і шаруватих композиційних матеріалах несучим елементом є армуюче волокно, дріт, фольга (фаза-зміцнювач), вміст якого може коливатися в межах від 15 до 75% від об'єму. Армуючі елементи за своєю природою мають високу міцність, мають досить високий модуль пружності і, як правило, порівняно низьку щільність.

У волокнистих композиціях матриця скріплює волокна або інші зміцнювальні елементи в єдиний моноліт, захищаючи їх від пошкоджень. Матриця є середовищем, що передає навантаження на волокна, а в разі руйнування окремих волокон перерозподіляє напруження. Крім того, її механічні властивості визначають характер поведінки матеріалу під час зсуву, стиснення і втомного руйнування.

Шаруватими композиціями називаються системи, що складаються з набору двомірних армувальних компонентів, які чергуються у вигляді листових, пластинчастих і фольгових матеріалів, жорстко пов'язаних між собою по всій поверхні.

У дисперсно-зміцнених матеріалах, навпаки, несучим елементом є матриця, в якій за допомогою великої кількості ультрадисперсних, практично нерозчинних частинок і однорідної дислокаційної структури створюється ефективне гальмування дислокацій аж до температури початку плавлення. Ефективність зміцнення за мінімальної взаємодії з матрицею залежить від виду частинок, їхньої об'ємної концентрації, а також від рівномірності розподілу в матриці.

До дисперсно-зміцнених композиційних матеріалів відносяться, зокрема, металоматричні композити, у яких матриця з чистого металу або його сплаву зміцнюється штучно введеними ультрадисперсними частками розміром менше 0,1 мкм. Об'ємна частка цих частинок (включень) становить 0,1-15%. Використовують дисперсні частинки оксидів (Al_2O_3, SiO_2), карбідів (SiC, B_4C, TiC), нітридів (BN) та інших тугоплавких з'єднань, які мають малу густину і високий модуль пружності, а також волокна бору, вуглецю тощо.

Серед методів виробництва дисперсно-зміцнених композитів, найперспективнішими та економічно вигідними вважаються методи порошкової металургії.

Практично у всіх композиційних матеріалах, за винятком евтектичних, структурні елементи композицій - матрицю і армуючий компонент вибирають готовими, а остаточну структуру формують штучно під час виготовлення виробу або напівфабрикату.

1.2. Властивості композиційних матеріалів, їх переваги та недоліки

Сучасний розробник виробів має широкий вибір високоефективних композиційних матеріалів (із цілої низки армуючих наповнювачів і зв'язуючих), структурних схем укладання в конструкції, технологічних способів формоутворення і вибору раціональної геометрії конструкції.

У волокнистих композиційних матеріалах правильний вибір технологічної схеми і дотримання її режимів істотно впливають на формування структури і властивостей матеріалу. При цьому виходять принаймні з трьох умов. По-перше, технологічний процес має забезпечити рівномірний розподіл волокон за заданої об'ємної кількості; волокна мають бути ізольовані між собою шаром матриці. По-друге, механічне пошкодження волокон має бути зведене до мінімуму. По-третє, взаємодія

волокон з навколишнім середовищем і з матрицею в процесі їх укладання має бути мінімальною.

У волокнистих і шаруватих КМ зсувний механізм гальмування тріщин, який має місце в традиційних сплавах, доповнюється гальмуванням тріщин самими ж волокнами на поверхні ослабленого зчеплення матриці з армуючими зміцнювачами. У цих композиціях вибір компонентів зумовлений отриманням певного (оптимального) ступеня взаємодії з метою узгодження високої межі міцності з підвищеною в'язкістю руйнування.

КМ матеріали не тільки мають відмінні механічні властивості, але й забезпечують гнучкість у дизайні та високу стабільність розмірів, що розширює сферу їх застосування. Наприклад, у авіаційній та космічній промисловості композитні матеріали використовуються як основні несучі конструкції в Airbus A350 та Boeing 787. Це не тільки значно знижує масу конструкції, що призводить до зменшення витрат палива, але й покращує загальні механічні характеристики літаків. Застосування КМ і технологій на їхній основі в ракетно-космічній та авіаційній техніці на сьогоднішній день є одним із головних чинників, який забезпечує прогрес цих галузей.

Переваги композиційних матеріалів

До переваг композиційних матеріалів можна віднести наступні їх властивості.

1. Висока питома міцність. Однією з основних переваг композитів є їх висока міцність на розтяг. Наприклад, композити на основі вуглецевих волокон мають границю міцності до 1500 МПа, що значно перевищує міцність традиційних металів. Висока питома міцність забезпечує надійність і довговічність конструкцій, виготовлених з композитів, що особливо важливо для авіаційної та космічної промисловості.

2. Низька густина. Композити мають низьку густину, що робить їх ідеальними для застосування в авіаційній та автомобільній промисловості, де важливим є зниження ваги конструкцій. Це призводить до зниження витрат палива і підвищення ефективності використання енергії. Наприклад, використання композитів у виробництві кузовів автомобілів дозволяє значно зменшити вагу транспортних засобів, що, в свою чергу, знижує витрати на пальне і викиди CO_2. Таким чином, композити сприяють екологічно чистішому транспорту.

3. Стійкість до корозії. На відміну від металів, КМ не піддаються корозії, що робить їх придатними для застосування в агресивних середовищах, таких як морські структури або хімічні заводи. Стійкість до корозії забезпечує довговічність конструкцій, знижуючи потребу в частому обслуговуванні і ремонті. Це дозволяє використовувати композити в умовах, де звичайні матеріали швидко зношуються. Наприклад, такі композити, як склопластик та вуглепластик активно використовуються в суднобудуванні для виготовлення корпусів човнів, яхт та офшорних платформ, що експлуатуються у морській воді.

4. Висока жорсткість. Вироби з КМ мають надзвичайно високу жорсткість за відносно низької ваги, що дозволяє використовувати їх у будівництві, виробництві спортивного обладнання та інших галузях, де важлива міцність і стійкість до деформацій. Так, вуглецево-волокнисті композити та склопластик використовуються для виготовлення лопатей вітрових турбін, які потребують високої жорсткості для ефективного перетворення вітрової енергії в електричну, а бор-волокна застосовують у літакобудуванні та космічній техніці. Використання КМ в галузях, де критично важлива висока жорсткість і міцність при одночасному зниженні ваги, надає їм значні переваги перед традиційними матеріалами, такими як метали.

5. Висока зносостійкість. Композиційні матеріали можуть забезпечувати високу зносостійкість завдяки поєднанню твердих і міцних армуючих елементів з матрицею, що робить їх придатними для використання в умовах високих механічних навантажень та тертя. Так, арамідні волокна (Kevlar) мають високу стійкість до тертя і стирання, зберігаючи свої механічні властивості навіть в умовах інтенсивного зносу. Kevlar широко використовується у виготовленні куленепробивних жилетів, шоломів, захисного спорядження, а також у шинах для велосипедів і транспортних засобів.

6. Високий опір втомі. Композиційні волокнисті матеріали, на відміну від високоміцних сплавів, характеризуються низькою чутливістю до концентраторів напружень, що забезпечує їм вищу стійкість до втомного руйнування. Втомні дослідження КМ, які розпочалися у 70-х роках минулого сторіччя, продемонстрували, що композити є малочутливими до втомного руйнування. Наприклад, вуглецеві композиційні матеріали мають чудові механічні характеристики за циклічного навантажування. Циклічне руйнування в них, як правило, не

відбувається за напружень, що є нижчими за 60% межі міцності за статичного навантаження. Тому тривалий час вважали, що циклічним навантаженням можна знехтувати під час проєктування деталей із композитів.

Однак це твердження з часом було поставлено під сумнів. Вдосконалення методів проєктування з КМ і необхідність мінімізації маси сучасних конструкцій (зокрема авіаційних і космічних), призвело до ситуації, коли композитні конструкції піддаються навантаженням, які дедалі більше наближаються до їхньої статичної міцності. Через це, дослідження втомного руйнування композиційних матеріалів зараз викликають підвищений інтерес.

7. Властивостями композиційного матеріалу можна керувати. Композити дозволяють інженерам створювати матеріали з необхідними властивостями. Це відкриває широкі можливості для інновацій у дизайні виробів. Наприклад, у спортивному обладнанні, такому як тенісні ракетки або велосипеди, можна створити унікальні конструкції з оптимальними характеристиками для конкретних видів спорту. Це дає можливість створювати продукцію, яка максимально відповідає вимогам користувачів.

Недоліки композиційних матеріалів

Композитні матеріали мають ряд унікальних характеристик, які роблять їх незамінними у багатьох галузях промисловості. Однак, поряд з численними перевагами, вони мають і певні недоліки, які варто враховувати при їх використанні.

1. Висока вартість виробництва. Виробництво КМ зазвичай є дорожчим порівняно з традиційними матеріалами через складність технологічних процесів і вартість компонентів. Наприклад, виробництво вуглецевих волокон є енерговитратним процесом, що підвищує загальну вартість кінцевого продукту. Це може обмежувати використання композитів у деяких галузях через високі початкові витрати.

2. Анізотропія властивостей. Через анізотропію властивостей КМ складніше передбачити їх поведінку під навантаженням, оскільки характеристики композиту змінюються в залежності від орієнтації волокон і способу навантаження. Для адекватного моделювання потрібен більш складний аналіз, що враховує властивості матеріалу за кожним напрямом. Це ускладнює проєктування порівняно з ізотропними матеріалами, де властивості однакові за всіма напрямами.

3. Складність ремонту. КМ мають низьку ремонтопридатність і високу вартість експлуатації. Це пов'язано з необхідністю застосування спеціальних трудомістких методів, спеціальних інструментів для доопрацювання та ремонту виробів із композитів. Часто такі об'єкти взагалі не підлягають будь-якій доробки та ремонту.

4. Відсутність єдиних стандартів для оцінки властивостей і надійності. Відсутність єдиних стандартів і критеріїв для оцінки властивостей і надійності композитів ускладнює їх впровадження в нові галузі, створює труднощі для сертифікації нових матеріалів і технологій. Відсутність стандартизації може обмежувати використання композитів у нових проєктах та сповільнювати розвиток інновацій.

5. Гігроскопічність. До інших недоліків композиційних матеріалів слід віднести гігроскопічність (тобто схильність вбирати вологу) і токсичність.

6. Підвищена наукоємність виробництва КМ. Виробництво КМ потребує спеціального обладнання та сировини, а отже розвиненого промислового виробництва та наукової бази країни.

На сьогоднішній день серед авіавиробників відзначається, що головними перепонами у застосуванні КМ, зокрема з полімерною матрицею (ПКМ), у несучих конструкціях пасажирських і транспортних літаків є:

- чутливість конструкцій з ПКМ до факторів експлуатації, таких, як механічні пошкодження та кліматичні впливи;
- значна ймовірність технологічних похибок під час виробництва;
- нестабільність властивостей відформованих пластиків;
- висока вартість агрегатів із ПКМ.

1.3. Типи матриць та волокон, які використовуються у композитах

Композиційні матеріали складаються з двох основних компонентів: матриці та волокон (або інших армуючих елементів). Матриця забезпечує зв'язок волокон та передачу навантажень між ними, тоді як волокна надають матеріалу високу міцність та жорсткість. Розглянемо деякі найбільш поширені типи матриць і волокон.

1.3.1. Типи матриць.

Від матеріалу матриці значно залежать властивості композиту: міцність, тепло- і вологостійкість, стійкість до дії агресивних середовищ, а також від методу отримання виробу.

Полімери як матрицю використовують або в чистому вигляді (порошки, гранули, листи, плівки), або у вигляді зв'язника.

Зв'язник представляє собою дво- або багатокомпонентну систему з синтетичного полімеру і затверджувачів, ініціаторів або каталізаторів, прискорювачів затвердіння. В зв'язник з метою надання необхідних технологічних і експлуатаційних властивостей можуть бути додані розчинники, барвники, пластифікатори, стабілізатори та інші компоненти.

При виробництві армованих пластиків найбільш часто застосовують термореактивні зв'язники, при нагріванні яких відбуваються незворотні структурні і хімічні перетворення. Безперервно розширюється використання термопластичних полімерів. Виділяють наступні типи матриць.

Термореактивні полімерні матриці

В'яжучі матеріали цього типу складаються зі смоли, отверджувача і розчинника, який іноді додають для зменшення в'язкості та покращення процесу просочення армуючих елементів. Ці полімери піддаються хімічній реакції, що призводить до утворення тривимірної сітки, яка надає матеріалу високу міцність і термічну стабільність. Після затвердіння вони не можуть бути розплавлені або переплавлені. У виробництві конструкцій із композиційних матеріалів найбільш широке застосування отримали: поліефірні, фенолформальдегідні, епоксидні, кремнійорганічні, поліамідні зв'язуючи.

Фенолформальдегідні смоли (фенопласти) є одним з найстаріших і найбільш широко використовуваних термореактивних полімерів. Вони утворюються в результаті конденсаційної полімеризації фенолу і формальдегіду, що призводить до утворення тривимірної сітки з міцними хімічними зв'язками. Цей тип смоли відзначається відмінними механічними і тепловими властивостями.

Епоксидні смоли є одними з найбільш широко використовуваних термореактивних полімерів завдяки їхнім винятковим властивостям, таким як висока міцність, адгезія та хімічна стійкість. Вони утворюються

в результаті полімеризації епоксидних олігомерів з використанням різних затверджувачів.

Поліамідні смоли, також відомі як нейлони, є групою термореактивних полімерів, які відзначаються високою механічною міцністю, термостійкістю та стійкістю до хімічних впливів. Вони широко використовуються в різних галузях промисловості завдяки своїм винятковим властивостям.

Поліефірні смоли є одними з найбільш використовуваних термореактивних полімерів завдяки їхній доступності, легкості обробки та хорошим механічним властивостям. Вони утворюються в результаті полімеризації поліефірів з використанням затверджувачів і відзначаються високою стійкістю до впливу зовнішніх факторів.

Кремнійорганічні смоли (або силіконові смоли) є унікальним класом термореактивних полімерів, які мають кремній-кисневий хребет у своїй молекулярній структурі. Завдяки цій структурі вони демонструють виняткові властивості, що робить їх надзвичайно корисними у багатьох промислових та медичних застосуваннях.

Деякі характеристики розглянутих матриць наведені в табл. 1.1 (числові дані наведені згідно з виданням: Верещака С. М. Механіка композиційних матеріалів: навчальний посібник / С. М. Верещака. – Суми: Сумський державний університет,. 2013. – 160 с.).

Табл. 1.1. Фізико-механічні характеристики полімерних матриць.

Параметри	Поліефірні	Фенол-формальдегідні	Епоксидні	Кремній-органічні	Поліамідні
Межа міцності, МПа: розтягання стискання	50-70 100-150	40-70 100-125	35-100 90-160	25-50 60-100	90-95 250-280
Модуль пружності, ГПа	3-4	7-11	2,4-4,2	6,8-10	3,2-5,0
Густина·10^3, кг/м^3	1,2-1,4	1,2-1,3	1,2-1,3	1,35-1,4	1,4-1,43
Теплостійкість, °С	80-150	140-180	130-150	250-280	250-320
Відносне подовження, %	1-2	0,4-0,5	2-9	0,3-0,5	1-2,5
Загальна усадка, %	1-5	15-25	1-5	15-20	3-20

Термопластичні полімерні матриці

В термопластичних матрицях на стадії приготування перебуває в розплавленому в'язкому або пластичному стані, а на стадії експлуатації – у твердому стані. Термопласти збудовані з лінійних або розгалужених макромолекул, між якими виникає тільки вандерваальсова (фізична) сила тяжіння. При нагріванні термопласти переходять у розплав, при охолоджені твердіють. Термопласти на любій стадії розчиняється у відповідних розчинниках.

В якості матриці в термопластах використовують такі синтетичні полімери:

- поліетилени низької, середньої та високої щільності;
- поліпропілен;
- полістирол та його сополімери;
- політетрафторетилен (фторопласт - 4);
- поліетилентерефталат (ПЕТ);
- полікарбонат;
- поліміди в кевларопластах;
- поліаміди, наприклад, капрон.

Поліетилен (ПЕ) - один з найбільш широко застосовуваних полімерів. Промисловістю випускається поліетилен низького тиску (ПЕНТ) і поліетилен високого тиску (ПЕВТ). Міцність, теплостійкість і хімічна стійкість ПЕНТ вище, ніж ПЕВТ. Газопроникність, навпаки, вище у ПЕВТ. Деструкція поліетилену протікає при температурі вище 290 °С, а сонячна радіація веде до термічного старіння.

Поліпропілен (ПП) – термопластичний полімер пропілену. Він має високу зносостійкість і добре витримує деформування згином.

Полівінілхлорид (ПВХ) - аморфний полімер з високими електроізоляційними властивостями, стійкий до хімічних реагентів, що не підтримує го-ріння. Атмосферостійкий, але має низьку морозостійкість (до мінус 100 °С) і теплостійкість.

Політетрафторетилен (ПТФЕ) - найбільш хімічно стійкий до дії висококонцентрованих і розбавлених кислот і лугів, сильних окислювачів полі-мер, не схильний до дії грибків. Полімер непрозорий, має властивості само-змащування, має низький коефіцієнт тертя.

Полістирол (ПС) - крихкий полімер, що має високу радіаційну стійкість, але легко піддається старінню. Термічна деструкція починається при температурі вище 260 °С.

Полікарбонат (ПК) - це складний поліефір хлорангідрида вугільної кислоти (фосгену) і дифенилолпропана. Полімер оптично прозорий, стійкий до дії УФ випромінювання, має низьку гігроскопічність і стійкістю до дії мікроорганізмів. Інша назва ПК - дифлон.

Поліамід (ПА), один з найвідоміших типів якого — капрон (поліамід- 6). В Україні він відомий під марками «капролон», а також зустрічаються міжнародні назви, такі як найлон-6 і найлон-66.

Поліетилентерефталат (ПЕТФ) - складний лінійний ароматичний поліефір терефталевої кислоти. В Україні та РФ відомий як лавсан. Полімер відрізняється низьким коефіцієнтом тертя і гігроскопічністю. Для виробів, виготовлених з нього, характерна стабільність форми. ПЕТФ стійкий до дії слабких кислот, мінеральних солей, ефірів, жирів.

Поліформальдегід (поліметіленоксід) - лінійний полімер, який має хімічну формулу $[-CH_2-O-]n$. За кордоном поліформальдегід відомий під на-звою «ацетальна або поліацетальна смола». Полімер добре пручається втомним і динамічним знакозмінним навантаженням, має низьку повзучість і високу зносостійкість, має низький коефіцієнт тертя по сталі (0,2…0,35). При переробці поліформальдегіду використовують метод лиття під тиском, екструзії. Матеріал добре обробляється різанням.

Поліфеніленоксід (ПФО) - простий ароматичний поліефір лінійної будови. Отримують дегідрополіконденсацією 2,6-диметилфенолу. Поліфеніленоксід може багаторазово без зміни властивостей перероблятися на ливарних машинах, відрізняється високою технологічністю. Полімер нетоксичний, стійкий до агресивних середовищ, грибкової цвілі.

Поліфеніленсульфід (ПФС) - простий ароматичний поліефір. По хімічній стійкості поступається лише політетрафторетілену. Вироби з поліфеніленсульфіда можуть тривалий час експлуатуватися при 260 °С, механічні та фізичні властивості полімеру зберігаються незмінними протягом 200 год. при 260^0С, повне розкладання відбувається при 720 °С.

Поліїміди (ПІ) Фізико-механічні властивості поліамідів стабільні в широкому температурному інтервалі (від мінус 200 до плюс 300 °С). Для виробів, виготовлених їх поліамідів, характерні висока стабільність розмірів, низька повзучість при високих температурах, висока термостійкість і стійкість до дії γ-випромінювання, швидких електронів і нейтронів. Розбавлені кислоти на поліїміди впливу майже не роблять. Мають низький коефіцієнт тертя по сталі (0,05...0,17).

Фізико-механічні характеристики розглянутих термопластичних полімерів наведені в табл. 1.2 (числові дані наведені згідно з виданням: Верещака С. М. Механіка композиційних матеріалів: навчальний посібник / С. М. Верещака. – Суми: Сумський державний університет,. 2013. – 160 с.).

Табл. 1.2. Фізико- механічні характеристики термопластичних полімерів.

Матеріал	$\sigma_р$, МПа	$\sigma_т$, МПа	$E_р$, МПа	$H_Б$, МПа	$A_н$, кДж/м^2
Поліетилен ВТ	7 … 15	7 … 14	90 … 220	14 … 25	н. р.
Поліетилен НТ	18 … 26	18 … 26	610 … 750	48 … 52	≥ 2
Поліпропілен	29 … 40	27 … 35	1080…1540	40 … 70	5 … 8
Полівінілхлорид	46 … 53	41 … 53	2450 … 4200	10 … 160	≥ 2
Політетрафторетилен	35 … 50	7 … 45	980 … 1580	60 … 80	14
Полістирол	40 … 46	38 … 55	3080 … 3500	140 … 150	1,4 … 1,6
Полікарбонат	50 … 70	55	2200 … 2300	103 … 110	25 … 50
Поліамід	50 … 75	100 … 150	950 … 1700	70 … 84	14 … 20
Поліетилентерефталат	60 … 70	---	2900 … 3000	95 … 100	---
Поліформальдегід	65 … 70	35 … 70	1300 … 3100	110 … 145	7 … 12
Поліфеніленоксід	60 … 74	---	2300 … 2500	160 … 170	5,8 … 8,6
Поліфеніленсульфід	76 … 77	---	3400 … 4000	---	1,6
Полііміди	150 … 180	---	3000 … 3600	180 … 280	10
Поліетилен ВТ	90…110	–45…–120	0,91…0,93	≈ 0,02	2,0 … 3,0
Поліетилен НТ	120 … 130	–60…–150	0,94…0,97	≤ 0.03	1,0 … 4,0
Поліпропілен	140 … 155	–8 … –15	0,90…0,91	0.01…0.09	1,0 … 2,5
Полівінілхлорид	40 … 85	– 15	1,20…1,55	0.1 … 0.5	1,0 … 5,0
Політетрафторетилен	100 … 160	–190…–270	2,0 … 4,0	≈ 0	3,0 … 7,0
Полістирол	80 … 105	– 60	1,05…1,10	0.2 … 0.3	0,4 … 0,8
Полікарбонат	140 … 150	– 130	1,19…1,20	0.15…0.20	0,5 … 0,8
Поліамід	205 … 215	– 60	1,12…1,16	6,0…7,0	0,6 … 2,5
Поліетилентерефталат	160 …190	---	1,34…1,41	---	---
Поліформальдегід	150 … 155	---	1,41…1,42	---	---
Поліфеніленоксід	130 … 180	– 40…– 60	1,05…1,10	---	0,8…1,5
Поліфеніленсульфід	---	---	1,34	---	---
Полііміди	---	- 250	1,30…1,40	0,2 … 0,3	---

Термоеластопласти (ТЕП)

Якщо ПКМ при кімнатній температурі перебувають у високоеластичному (гумоподібному) стані, то їх називають еластомерами. Якщо еластомери мають лінійні або розгалужені

макромолекули і при нагріванні плавляться, то їх називають термоеластопластами – ТЕПами (наприклад, поліуретан). На стадії виготовлення виробів із ТЕПів використовують олігомери, які хімічно взаємодіють з утворенням лінійних або розгалужених молекул. Із ТЕПів виготовляють взуття, шкірозамінники, привідні паски, футеровку хімічних реакторів тощо.

Гумові суміші

Гумові суміші – це суміші на основі каучуків, макромолекули яких мають лінійну або розгалужену будову. На стадії виготовлення таких ПКМ матриця утворюється із пластичних ГС, які після хімічної реакції зшивки молекулами сірки (вулканізації) перетворюються в гуму. Макромолекули гуми зв'язані між собою міцними хімічними зв'язками, утвореними двовалентними атомами сірки. Гума в розчинниках каучуку не розчиняється. При нагріванні гума не переходить в в'язкий або пластичний стан.

Вуглецеві матриці

Композити на основі вуглецевої матриці одержують у результаті спеціальної обробки (карбонізації) систем, утворених із вуглецевих волокон і фенольних смол. Затверділу смолу піддають піролізу в інертному середовищі або у вакуумі. Піроліз, як правило, супроводжується осіданням і збільшенням пористості, що викликає подальше ущільнення матриці.

Процес здійснюють при відносно високій температурі, порядку 1000 – 1500 °С. Основні переваги композитів із вуглецевою матрицею полягають у високій теплостійкості, стійкості до теплового удару й опромінення, інертності. Ці матеріали мають високі механічні характеристики. До недоліків відносяться складність технологічного процесу виробництва.

Металеві матриці

Останні роки суттєве поширення мають металеві композиційні матеріали, що утворюються високомодульними борними або вуглецевими волокнами і пластичною металевою матрицею. Ці матеріали жорсткіші й міцніші порівняно з композитами, які виготовляють на основі полімерних матриць. Для утворення металевої матриці широко використовують сплави на основі алюмінію, що має густину 2700 кг/м^3, модуль пружності 70 ГПа і температуру плавлення 700 °С. До основних

недоліків металевої матриці можна віднести складність технологічного процесу виробництва елементів конструкцій на її основі.

Керамічні матриці

Керамічні матриці поділяються на звичайну і технічну кераміку. Звичайна кераміка містить силікати (SiO_2) і виробляється силікатною промисловістю. Технічна кераміка використовується для спеціальних технічних призначень і включає різні оксиди, карбіди, нітриди, бориди, силіциди та сульфіди. Існують також змішані типи кераміки, такі як "сіалон" (Si_6-xAlxN_8-xOx), який поєднує властивості іонної оксидної кераміки Al_2O_3 та ковалентної безкисневої кераміки Si_3N_4. Цей матеріал використовують для виготовлення блоків циліндрів двигунів і газотурбінних лопаток. Деякі керамічні матеріали, відомі як кермети, комбінують кераміку з металами, наприклад, оксид алюмінію з хромом, нікелем або кобальтом. Кермети можуть також включати оксиди магнію, берилію, титану, цирконію та інших елементів. Кераміка може розглядатися як тверда речовина з неметалевою природою зв'язку та не полімерною структурою, тобто вона не є ні металом, ні полімером.

1.3.2. Армуючі елементи (волокна)

Армуючі волокна, що застосовуються в конструкційних композитах, мають задовольняти комплексу експлуатаційних і технологічних вимог. До перших відносяться вимоги до міцності, жорсткості, щільності, стабільності властивостей в певному температурному інтервалі, хімічної стійкості і т.п.

При створенні волокнистих композитів застосовуються високоміцні скляні, вуглецеві, борні і органічні волокна, металеві дроти, а також волокнисті і ниткоподібні кристали ряду карбідів, оксидів, нітридів та інших з'єднань. Діаметр безперервних волокон вуглецю, бору, а також тугоплавких сполук (B_4C, SiC та ін.) зазвичай складає 100 ... 150 мкм. Армуючі компоненти в композитах застосовуються у вигляді моноволокон, ниток, дротів, джгутів, сіток, тканин, стрічок, полотен.

Важливою вимогою є також сумісність волокон з матеріалом матриці, тобто можливість досягнення міцного зв'язку волокно - матриця за умов, що забезпечують збереження вихідних значень механічних властивостей компонентів.

Технологічність волокон визначає можливість створення високопродуктивного процесу виготовлення виробів на їх основі.

Розглянемо основні типи волокон.

Скляні волокна

Неперервні скляні волокна утворюються з розплавленої скломаси шляхом витягування струменя на виході із філь'єр до діаметра $(5 - 20)\cdot 10^{-6}$ м і швидкого охолодження.

Границя міцності скляних волокон після витягування становить 2 – 6 ГПа і залежить від складу скломаси, технології витяжки та подальшої обробки. Модуль пружності волокна коливається від 50 до 130 ГПа, а густина становить 2500 – 2600 кг/м^3. Скляні волокна із непошкодженою поверхнею мають граничну міцність 5 – 6 ГПа.

Температура суттєво впливає на міцність скляних волокон. Наприклад, границя міцності промислових алюмоборосилікатних волокон при зниженні температури до -196°С збільшується в півтора-два рази, а з підвищенням температури знижується, найбільш інтенсивно після 300°С. Модуль пружності скляних волокон при підвищенні температури знижується неістотно.

У 1920 році англійський вчений Алан Гріффіт провів експерименти зі скляними волокнами, започаткувавши теорію крихкого руйнування матеріалів. Ці експерименти теоретично й експериментально обґрунтували основну властивість тонких волокон – високу міцність у порівнянні з монолітним матеріалом.

Високомодульні скловолокна мають такі механічні характеристики:

- густина 2,40-2,58 г/см^3;
- модуль пружності 83-95 ГПа;
- середня міцність на базі 10 мм - 4,20 ГПа;
- гранична деформація 4,8%.

(Для порівняння - міцність легованих сталей 1,6 – 2,2 ГПа).

Вуглецеві волокна

Вуглецеві волокна мають унікальні механічні та фізико-хімічні властивості: високу теплостійкість, низький коефіцієнт тертя та термічного розширення, стійкість до атмосферних впливів і хімічних реагентів, різноманітні електрофізичні властивості (від напівпровідників до провідників), розвинену поверхню (1000- 2000 м^2/г) та високі питомі механічні характеристики.

Вуглецеві волокна поділяються на два основні типи:

- карбонізовані волокна: температура термообробки 1500-2000 °С, вміст вуглецю 80-90%.
- графітизовані волокна: Температура термообробки до 3000 °С, вміст вуглецю вище 99%.

Процес виготовлення вуглецевих волокон включає послідовну термічну та механічну обробку органічних волокон:

- перший етап: нагрівання розтягнутих волокон до 220 °С для утворення хімічних зв'язків між макромолекулами полімеру.
- другий етап: нагрівання до 1000 °С для отримання карбонізованих волокон (80-95% вуглецю).
- третій етап: обробка при температурах 1500-2500 °С для отримання графітизованого волокна з кристалічною структурою.

Модуль пружності вуглецевих волокон варіюється від 220 до 700 ГПа, а границя міцності становить 2-3,5 ГПа.

Високоміцні високомодульні вуглецеві волокна мають такі механічні характеристики:

- густина 1,5...1,9 г/см^3;
- модуль пружності до 600 ГПа;
- середня міцність на базі 10 мм 1,4...3,5 ГПа;
- гранична деформація 2,7...5,0 %.

Борні волокна

Борні волокна отримують осадженням бору на розігріту вольфрамову нитку діаметром 12-16 мкм. У процесі осадження утворюється борна оболонка, яка частково взаємодіє з матеріалом нитки. Промислово виготовлені борні волокна мають діаметр 100-200 мкм, границю міцності 2-4 ГПа, модуль пружності 370-430 ГПа і густину 2500- 2700 кг/м^3. Вони добре поєднуються з полімерними та кристалічними матрицями, забезпечуючи високу жорсткість і міцність при стисканні. Вони відзначаються високою жорсткістю, міцністю при стисканні, і високим модулем пружності, але мають високу вартість, крихкість, і низьку технологічність.

Борні волокна широко використовуються у виробництві композитів на основі полімерної та алюмінієвої матриць. Композити на основі борних волокон та алюмінієвої матриці переважають аналогічні матеріали на полімерній основі, оскільки вони можуть працювати при температурах до 640 К і оброблятися на звичайному технологічному обладнанні.

Процес виробництва складається з осадження бору при 1127 °С з суміші газів BCl_3 і H_2 на вольфрамову нитку діаметром ~12 мкм, утворюючи серцевину з боридів вольфраму та шар полікристалічного бору. Для підвищення жаростійкості і захисту від металевих матриць волокна покривають карбідом кремнію осадженням у середовищі аргону та водню, отримуючи волокна борсіку. Після цього проводять поверхневе травлення для зменшення дефектність і підвищує міцність волокон.

Структура волокна складається з серцевини - борид вольфраму, діаметром 15-17 мкм та зовнішнього шару -полікристалічного бору

Характерними дефектами такого волокна є радіальні тріщини через залишкові напруження.

Борні волокна мають такі механічні характеристики:

- густина 2,5...2,8 г/см^3;
- модуль пружності 390...420 ГПа;
- середня міцність на базі 10 мм 2,9...3,8 ГПа;
- гранична деформація 0,6...1,0 %.

Борні волокна мають велику в порівнянні з іншими типами армувальних волокон зсувною жорсткістю. Модуль зсуву G = 180 ГПа.

Високомодульні органічні волокна

Арамідні волокна використовуються для створення високоміцних і високомодульних композитів з полімерною матрицею. Вони мають високу міцність, термостабільність, діелектричні показники та низьку повзучість. Арамідні волокна відрізняються низькою щільністю і перевершують інші армувальні волокна за питомою міцністю. Вони добре піддаються текстильній обробці, зберігаючи до 90% початкової міцності. Виробництво включає формування, осадження, орієнтаційну витяжку та фіксацію структури волокон. Арамідні волокна переважають скляні волокна за питомою міцністю та жорсткістю, але поступаються при стисненні.

Виробництва високомодульних органічних волокон складається з процесу формування (полімерні концентровані розчини пропускають через фільєри), осадження(видаляється основна частина розчинника) та орієнтаційної витяжки з подальшою фіксацією.

Широковідомим прикладом арамідного волокна є кевлар. Це зареєстрована торгова марка арамідного волокна, розробленого компанією DuPont у 1965 році.

Органічні арамідні волокна мають такі механічні характеристики:

– густина 1,43…1,45 г/см^3;
– модуль пружності 110…160 ГПа;
– середня міцність на базі 10 мм 2,1…4,2 ГПа;
– гранична деформація 2,7…5,0%.

Фізико-механічні характеристики деякий волокон наведені у табл. 1.3 (числові дані наведені згідно з виданням: Верещака С. М. Механіка композиційних матеріалів: навчальний посібник / С. М. Верещака. – Суми: Сумський державний університет,. 2013. – 160 с.).

Кожен тип матриці та волокон має свої переваги і недоліки, що впливає на вибір матеріалів залежно від конкретних вимог до експлуатації — від високих температур і механічних навантажень до агресивного середовища.

Табл. 1.3. Фізико-механічні характеристики волокон.

Параметри	Скляні	Вуглецеві		Борні	Органічні	Сталь
		високо-модульні	високо-міцні			
Густина·10^{-3}, кг/м^3	2,5	1,95	1,76	2,5	1,45	7,8
Модуль пружності, ГПа	89	400	260	400	120	210
Межа міцності, ГПа (розтягання)	3,5	2,1	3,3	3,5	2,8	2,9
Питома жорсткість·10^{-6}, м	3,6	20,3	14,7	16	8,3	2,7
Питома міцність·10^{-3}, м	140	108	187	140	193	37

Згідно з прогнозом від компанії BOEING у найближчому майбутньому розвиток безавтоклавних технологій у частині матеріалів і процесів їх виготовлення буде розвиватися за наступними напрямами.

Матеріали:

–застосовуватимуться волокна з вищою міцністю і вищим модулем;

–зв'язуючі матимуть вищу стійкість;

–процеси обробки матеріалів матимуть вищий ступінь повторюваності;

–вартість препрегів зменшуватиметься.

Процеси:

–ступінь автоматизації процесів збільшуватиметься;

–повний цикл виробництва скорочуватиметься (укладання, затвердіння)

–будуть виготовлятися дуже великі за розміром і/або за товщиною елементи;

–вартість процесів зменшуватиметься;

–швидкість укладання підвищуватиметься.

Поверхня розділу фаз

При розробці КМ не можна забувати і про межу фаз між волокном і матрицею. У більшості випадків це є найслабшою ланкою у структурі КМ. Поганий зв'язок між фазами може призводити до розшарування, тріщиноутворення та передчасного руйнування матеріалу під дією різних навантажень, зокрема циклічних, а також під впливом зовнішніх середовищ, таких як волога, ультрафіолетове випромінювання та агресивні хімічні речовини.

Для підвищення адгезії між волокнами і матрицею використовують різноманітні технології обробки поверхні волокон, спрямовані на покращення їх взаємодії з матрицею. Зокрема, вуглецеві волокна піддають контрольованому окисленню; для скляних волокон застосовують спеціальні покриття – апрети, які здатні вступати в хімічні реакції як з поверхнею волокна, так і з матрицею під час її затвердіння. Також використовують плазмову обробку, наноструктурування поверхні та обробку силанами волокон. Ці заходи дозволяють покращити взаємодію між фазами і підвищити загальну надійність композиту.

2. ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ

Анізотропними називають матеріали, властивості яких змінюються в залежності від напряму. Це означає, що такі характеристики, як міцність, жорсткість або теплопровідність, будуть різними вздовж різних осей або площин у межах матеріалу. Композиційні матеріали як правило є анізотропними, що обумовлено насамперед їх неоднорідною структурою. Така анізотропія є конструкційною, оскільки її спеціально закладають в КМ для досягнення бажаних характеристик у певних напрямах. На відміну від цього, існує технологічна анізотропія, що виникає внаслідок пластичної деформації ізотропних матеріалів (наприклад, металів), а також фізична анізотропія, характерна для кристалів через особливості їхньої кристалічної структури.

В загальному випадку, самі складові композиційного матеріалу можуть мати не однакові в різних напрямах фізико-механічні властивості, а їх взаємодія між собою може бути не ідеальною. Фізичні співвідношення, які пов'язують напруження і деформації в загальному випадку мають ураховувати всі перелічені особливості механічних властивостей.

З іншого боку, урахування структури КМ і раціональний вибір напрямів, за якими проводиться аналіз деформування, у прив'язці до структурних особливостей матеріалу, дозволяє суттєво спростити такі залежності і отримати відносно прості та зручні для практичної реалізації співвідношення для опису механічних властивостей композиту. Особливо зручним такий підхід є у випадку, коли складові композиту можна розглядати як ізотропні матеріали.

В техніці найчастіше використовують анізотропні КМ з певною симетрією властивостей. Найбільш часто орієнтовані КМ вдається представити як ортотропні або як трансверсально-ізотропні середовища.

2.1. Узагальнений закон Гука для анізотропного тіла

2.1.1. Просторовий напружений стан

Розглянемо нескінченно малий фрагмент деформованого тіло в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 (рис. 2.1). На його гранях, що утворені площинами, перпендекулярними до координатних вісей, діють

нормальні σ_{ii} і дотичні τ_{ij} напруження ($i, j = 1, 2, 3$). Внаслідок закону парності дотичних напружень

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

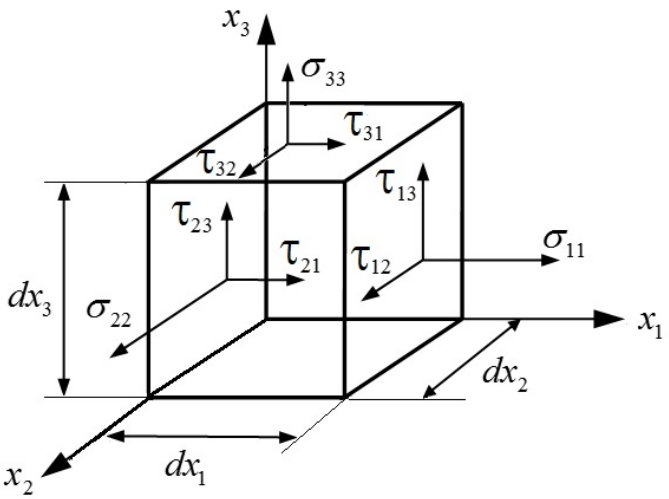


Рис. 2.1. Напружений стан у точці деформованого твердого тіла

Компоненти тензора деформацій ε_{ij} визначаються лінійними співвідношеннями (співвідношеннями Коші):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{2.1}$$

де u_1, u_2, u_3 – переміщення у напрямках координатних вісей осі x_1, x_2, x_3 відповідно.

Внаслідок структури рівнянь (2.1) для деформацій зсуву виконуються тотожності:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}\ ,\ (i \neq j). \tag{2.2}$$

Деформації зсуву можуть бути подані через кути зсуву γ_{ij}

$$\gamma_{ij} = \left(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}\right) = 2\varepsilon_{ij}\ . \tag{2.3}$$

За пружного деформування переміщення точок тіла є прямопропорційними прикладеним навантаженням. Взаємозв'язок між напруженнями і відносними деформаціями визначається законом Гука, який визначає прямопропорційну залежність між цими величинами. Узагальнений вираз закону Гука може бути поданий у матричній формі:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\sigma\}. \tag{2.4}$$

де $[B]$ – матриця підатливості матеріалу;

$\{\varepsilon\}$ і $\{\sigma\}$ – вектори-стовпці, які складаються з незалежних компонент тензора деформації і тензора напружень:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \varepsilon_{33}\ \gamma_{23}\ \gamma_{13}\ \gamma_{12}\}. \qquad \{\sigma\} = \{\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{33}\ \tau_{23}\ \tau_{13}\ \tau_{12}\}.$$

Кожна компонента матриці $[B]$ – коефіцієнт матриці підатливості b_{ij} – являє собою величину відносної деформації, яка буде виникати в тілі за умови пружного деформування матеріалу у напрямі x_i за дії в напрямі x_j напруження, яке дорівнює одиниці.

Для ізотропного тіла, пружні властивості якого однакові в усіх напрямах, співвідношення між деформаціями і напруженнями при складному напруженому стані мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \qquad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{33})]\ ,\ \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{11})]\ ,\ \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

де E – модуль пружності (модуль Юнга або модуль пружності першого роду);

μ – коефіцієнт Пуассона;

G – модуль пружності при зсуві (або модуль пружності другого роду).

Ці сталі, які характеризують пружні властивості ізотропного матеріалу, пов'язані співвідношенням:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{2.7}$$

Використовуючи подання у матричній формі (2.4) для матриці підатливості ізотропного тіла отримаємо:

$$[\mathrm{B}] = \frac{1}{\mathrm{E}}\begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

При розв'язанні практичних задач також виникає необхідність використання виразів складових напружень через складові деформації. Таке подання здійснюється із використанням зворотної форми закону Гука, який у матричній формі можна записати у вигляді:

$$\{\sigma\} = [\mathrm{C}]\{\varepsilon\}, \tag{2.9}$$

де [C]– матриця жорсткості матеріалу:

Кожна компонента цієї матриці [C] – коефіцієнт матриці жорсткості c_{ij} – являє собою величину напруження, яке виникало б у тілі за напрямом вісі x_i при виникненні в напрямі x_j деформації, яка дорівнює одиниці, за умови пружного деформування матеріалу.

Варто зауважити, що деформація, що дорівнює одиниці, тобто 100%, яка відповідає збільшенню абсолютного характерного розміру вдвічі із збереженням пружного деформування є можливою лише для вельми обмеженого кола матеріалів (каучук, та ін.). Це протиріччя усувається тим, що для більшості конструкційних матеріалів модуль пружності вимірюється в МПа, а отже у більшості випадків фактичні деформації матимуть порядок долей відсотка.

Для ізотропного тіла співвідношення між напруженнями і деформаціями мають вигляд:

$$\sigma_{11} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Theta + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{11} \ ,$$

$$\sigma_{22} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Theta + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{22} \ ,$$

$$\sigma_{33} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\Theta + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{33} \ , \qquad (2.10)$$

$$\tau_{12} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{12} = G\gamma_{12},$$

$$\tau_{23} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{23} = G\gamma_{23},$$

$$\tau_{13} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{13} = G\gamma_{13},$$

де $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{E}{1-2\mu}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$.

Використовуючи матричне подання закону Гука у зворотній формі (2.9) для матриці жорсткості ізотпропного тіла отримаємо:

$$[C] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\mu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\mu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\mu)/2 \end{bmatrix}. \qquad (2.11)$$

Зіставивши рівняння (2.8) і (2.11), неважко встановити зв'язок між матрицями піддатливості та жорсткості:

$$[\mathrm{C}] = [B]^{-1}. \tag{2.12}$$

Найважливішою особливістю закону Гука для ізотропного тіла є те, що матриця піддатливості (2.8) або матриця жорсткості (2.11) є інваріантними до вибору систем координат і формуються із використанням лише двох незалежних констант – E і μ, які повністю визначають пружні властивості ізотропного тіла. Крім того, у випадку ізотропного тіла за складного напруженого стану деформації ε_{ii} не залежать від дотичних напружень τ_{ij}, але пов'язані з усіма компонентами нормальних напружень σ_{ii}, а деформації зсуву γ_{ij} залежать лише від дотичних напружень τ_{ij}. Тому для пружного ізотропного тіла головні вісі напруженого стану завжди збігаються із головними осями деформованого стану.

Для анізотропного тіла, пружні властивості якого відрізняються в різних напрямах деформований стан є набагато складнішим. Експериментальні випробування анізотропних тіл свідчать, що навіть для простих типів деформацій зміна будь-якої компоненти тензора напружень σ_{ij} може привести до виникнення всіх компонент ε_{ij} тензора деформації, в тому числі пов'язаних з зсувом.

Узагальнений закон Гука для анізотропного тіла у вигляді залежності деформацій від напружень в матричній формі має такий саме вигляд, як і для ізотропного тіла (2.4) або (2.9). Відмінність полягає у значенні компонент матриць $[B]$ або [C], коефіцієнти яких в загальному випадку утворюють повністю заповнену матрицю розміром 6х6. Наприклад для матриці $[B]$:

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{12} & \mathrm{b}_{13} & \mathrm{b}_{14} & \mathrm{b}_{15} & \mathrm{b}_{16} \\ \mathrm{b}_{21} & \mathrm{b}_{22} & \mathrm{b}_{23} & \mathrm{b}_{24} & \mathrm{b}_{25} & \mathrm{b}_{26} \\ \mathrm{b}_{31} & \mathrm{b}_{32} & \mathrm{b}_{33} & \mathrm{b}_{34} & \mathrm{b}_{35} & \mathrm{b}_{36} \\ \mathrm{b}_{41} & \mathrm{b}_{42} & \mathrm{b}_{43} & \mathrm{b}_{44} & \mathrm{b}_{45} & \mathrm{b}_{46} \\ \mathrm{b}_{51} & \mathrm{b}_{52} & \mathrm{b}_{53} & \mathrm{b}_{54} & \mathrm{b}_{55} & \mathrm{b}_{56} \\ \mathrm{b}_{61} & \mathrm{b}_{62} & \mathrm{b}_{63} & \mathrm{b}_{64} & \mathrm{b}_{65} & \mathrm{b}_{66} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Внаслідок теореми про взаємність робіт для компонент матриці піддатливості $b_{mn} = b_{nm} \quad (n \neq m) \quad (m, n = 1,2\ldots6)$. Тому в матриці $[B]$ незалежним є лише 21 коефіцієнт, тобто матриця є симетричної відносно головної діагоналі. Для матриці [C] аналогічна умова симетрії $c_{mn} =$

c_{nm} $(n \neq m)$ $(m, n = 1,2\ldots6)$ виконується внаслідок теореми про взаємність переміщень.

Анізотропія загального вигляду в реальних матеріалах, коли матриця піддатливості $[B]$ містить 21 незалежний коефіцієнт, трапляється рідко. Зазвичай структура реального композита така, що його пружні властивості у деяких напрямах однакові. В цьому випадку кількість незалежних коефіцієнтів у матриці піддатливості зменшується і при відповідному виборі системи координат запис закону Гука спрощується. Розглянемо випадки, які найчастіше використовуються у практичних розрахунках.

Площина пружної симетрії. У випадку, коли в анізотропному тілі пружні властивості однакові в будь-яких двох напрямах, симетричних відносно деякої площини, то така площина називається площиною пружної симетрії (рис.2.2).

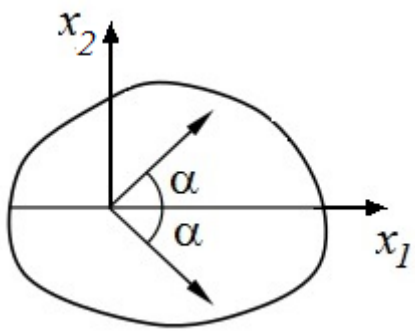


Рис.2.2. Площина пружної симетрії

Кількість ненульових коефіцієнтів матриці $[B]$ в цьому випадку зменшується до 13. Тоді при суміщенні однієї з координатних площин, наприклад з площиною $x_1 0 x_2$ із площиною пружної симетрії, закон Гука набирає більш простого вигляду і матриця піддатливості (2.13) матиме вигляд:

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{12} & \mathrm{b}_{13} & 0 & 0 & \mathrm{b}_{16} \\ & \mathrm{b}_{22} & \mathrm{b}_{23} & 0 & 0 & \mathrm{b}_{26} \\ & & \mathrm{b}_{33} & 0 & 0 & \mathrm{b}_{36} \\ & & & \mathrm{b}_{44} & \mathrm{b}_{45} & 0 \\ & \text{сим.} & & & \mathrm{b}_{55} & 0 \\ & & & & & \mathrm{b}_{66} \end{bmatrix}. \qquad (2.14)$$

При одновісному розтяганні анізотропного тіла у напрямі, перпендикулярному до площини пружної симетрії, виконуються наступні співвідношення:

$$\varepsilon_{11} = b_{13}\sigma_{33}, \quad \varepsilon_{22} = b_{23}\sigma_{33}, \quad \varepsilon_{33} = b_{33}\sigma_{33},$$
$$\gamma_{23} = \gamma_{13} = 0, \quad \gamma_{12} = b_{36}\sigma_{33}, \tag{2.15}$$

а матеріал зазнає деформації зсуву тільки у площині пружної симетрії. Таким чином, якщо одна із головних осей напруженого стану перпендикулярна до площини пружної симетрії, тоді й одна із головних осей деформованого стану також буде перпендикулярна до цієї площини. Тому напрям, перпендикулярний до площини пружної симетрії, називають головним напрямом, або головною віссю пружності.

Ортотропний матеріал. У випадку, коли матеріал має три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії його називають ортотропним. Для цього достатньо, щоб в тілі існувало дві взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії. Тоді перпендикулярна до них площина буде також площиною пружної симетрії. Це випливає з міркування про те, що при наявності двох головних вісей напруженого стану, які перпендикулярні до двох площин пружної симетрії та збігаються із двома головними напрямами пружності матеріалу, з їх напрямами збігатимуться і дві головні осі деформованого стану. Таким чином, третя головна вісь деформованого стану також збігатиметься з третьою головною віссю напруженого стану, і перпендикулярна до них площина буде площиною пружної симетрії тіла.

Вуглепластики та склопластики, які мають ортотропні властивості завдяки орієнтації волокон, використовуються для виготовлення корпусів літаків, автомобільних кузовів, крил, фюзеляжів та інших компонентів, де потрібна висока міцність і низька вага.

Закон Гука для ортотропного тіла найбільш просто записується при суміщенні координатних площин із площинами пружної симетрії. Матриця піддатливості (2.13) набуває вигляду:

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_{11} & \mathrm{b}_{12} & \mathrm{b}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathrm{b}_{22} & \mathrm{b}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathrm{b}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathrm{b}_{44} & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & \mathrm{b}_{55} & 0 \\ & & & & & \mathrm{b}_{66} \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Коефіцієнти матриці піддатливості (2.16) можна записати за допомогою модулів пружності, модулів зсуву та коефіцієнтів Пуассона:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \qquad (2.17)$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності у відповідному напрямі x_1, x_2, x_3;

G_{23}, G_{13}, G_{12} – модулі зсуву відповідно у площинах $x_2 0 x_3$, $x_1 0 x_3$, $x_1 0 x_2$;

$\mu_{23}, \mu_{13}, \mu_{12}$ – коефіцієнт Пуассона: перший індекс позначає напрям діючого напруження, другий – напрям поперечної деформації, яка при цьому виникає.

Кількість незалежних параметрів у (2.17) дорівнює 9, оскільки внаслідок симетрії матриці піддатливості виконуються тотожності:

$$\mu_{12}E_2 = \mu_{21}E_1, \qquad \mu_{13}E_3 = \mu_{31}E_1, \qquad \mu_{23}E_3 = \mu_{32}E_2. \qquad (2.18)$$

Зі співвідношень (2.18) можна отримати такий вираз:

$$\mu_{12}\mu_{31}\mu_{23} = \mu_{21}\mu_{13}\mu_{32}. \qquad (2.19)$$

Якщо закон Гука записати у вигляді (2.13), для ортотропного тіла коефіцієнти матриці жорсткості можна отримати у вигляді:

$$\begin{gathered} c_{11} = E_1(1 - \mu_{23}\mu_{32})/\Delta, \\ c_{22} = E_2(1 - \mu_{31}\mu_{13})/\Delta, \\ c_{33} = E_3(1 - \mu_{21}\mu_{12})/\Delta, \\ c_{12} = E_2(\mu_{12} + \mu_{13}\mu_{32})/\Delta = E_1(\mu_{21} + \mu_{23}\mu_{31})/\Delta, \\ c_{13} = E_3(\mu_{13} + \mu_{12}\mu_{23})/\Delta = E_1(\mu_{31} + \mu_{32}\mu_{21})/\Delta, \\ c_{23} = E_3(\mu_{23} + \mu_{21}\mu_{13})/\Delta = E_2(\mu_{32} + \mu_{31}\mu_{12})/\Delta, \\ c_{44} = G_{23}; \qquad c_{55} = G_{13}; \qquad c_{66} = G_{12}, \end{gathered} \qquad (2.20)$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\mu_{12} & -\mu_{13} \\ -\mu_{21} & 1 & -\mu_{23} \\ -\mu_{31} & -\mu_{32} & 1 \end{vmatrix}$.

Ортотропне тіло, в якому пружні властивості однакові у всіх трьох напрямах головних осей пружності, потребує трьох незалежних коефіцієнтів для опису пружних властивостей;

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, G_{23} = G_{13} = G_{12} = G,$$

$$\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{32} = \mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{23} = \mu \qquad (2.21)$$

На відміну від ізотропного тіла в цьому частковому випадку сталі E, G, μ, що характеризують пружні властивості матеріалу, є незалежними величинами.

Трансверсально – ізотропне тіло. Площину, в якій пружні властивості у всіх напрямах ідентичні, називають площиною ізотропії, а тіло, що має таку площину, називають трансверсально-ізотропним.

Кількість незалежних коефіцієнтів, що характеризують пружні властивості тіла дорівнює п'яти. Нехай координатна площина $x_1 0 x_2$ збігається з площиною ізотропії, тоді отримаємо такі вирази для матриці піддатливості:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & b_{11} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{44} & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & & b_{44} & 0 \\ & & & & & b_{66} \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

або

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_1}{E_1} & -\frac{\mu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & \frac{1}{G_3} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_3} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_1} \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

де E_1, E_3– модулі пружності в площині ізотропії і у напрямі, перпендикулярному до площини ізотропії відповідно;

$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$ – модуль зсуву;

$G_3 = \frac{E_3}{2(1+\nu_3)}$ – модуль зсуву у площинах, перпендикулярних до площини ізотропії;

μ_1 і μ_3 – коефіцієнти Пуассона, що характеризують поперечні деформації у відповідних площинах, перпендикулярних до напрямів дії відповідних нормальних напружень.

У трансверсально-ізотропному тілі всі напрями в площині ізотропії, а також у напрямі, перпендикулярному до цієї площини, є головними напрямами пружності. Тому для такого тіла головні осі деформованого стану збігаються з головними осями напруженого стану, якщо одна з головних осей напруженого стану перпендикулярна до площини ізотропії.

2.1.2. Плоский напружений стан

Значна кількість композиційних матеріалів являє собою сукупність по різному орієнтованих плоских шарів, утворених з односпрямованих паралельних армуючих волокон, з'єднаних між собою матеріалом матриці. Напружений стан, який реалізується для таких матеріалів в багатьох випадках є наближеним до плоского напруженого стану.

Для плоского напруженого стану односпрямованого матеріалу закон Гука у вигляді аналогічному (2.9), набирає вигляду

$$\{\sigma\} = [C_0]\{\varepsilon\}, \tag{2.24}$$

де [C] – матриця жорсткості матеріалу для плоского напруженого стану:

$$[C_0] = \begin{bmatrix} c_{11}^0 & c_{12}^0 & 0 \\ c_{21}^0 & c_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66}^0 \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

{ε} і {σ} – вектори-стовпці, які складаються з незалежних компонент тензора деформації і тензора напружень та розглядаються у випадку плоского напруженого стану:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{12}\}^T, \ \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12}\}^T .$$

Компоненти матриці жорсткості пов'язані з пружними сталими композиту наступними співвідношеннями:

$$c_{11}^0 = \frac{E_1}{1-\mu_{12}\,\mu_{21}}, \qquad c_{22}^0 = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\,\mu_{21}},$$

$$c_{12}^0 = \frac{E_1\mu_{21}}{1-\mu_{12}\,\mu_{21}} = \frac{E_2\mu_{12}}{1-\mu_{12}\,\mu_{21}}, \qquad c_{66}^0 = G_{12} \tag{2.26}$$

Аналогічно до (2.12) коефіцієнти матриці жорсткості й матриці піддатливості пов'язані співвідношенням:

$$[C_0] = [B_0]^{-1}, \tag{2.27}$$

де $[B_0]$ – матриця піддатливості матеріалу для плоского напруженого стану

$$[B_0]=\begin{bmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 & 0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{66}^0 \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

$$b_{11}^0=\frac{c_{22}^0}{c_{11}^0\ c_{22}^0-\left(c_{12}^0\right)^2}=\frac{1}{E_1}, \qquad b_{22}^0=\frac{c_{11}^0}{c_{11}^0\ c_{22}^0-\left(c_{12}^0\right)^2}=\frac{1}{E_2},$$

$$b_{12}^0=-\frac{c_{12}^0}{c_{11}^0\ c_{22}^0-\left(c_{12}^0\right)^2}=-\frac{\mu_{12}}{E_1}=-\frac{\mu_{21}}{E_2}, \qquad b_{66}^0=\frac{1}{c_{66}^0}=\frac{1}{G_{12}}. \tag{2.29}$$

Використовуючи ці співвідношення можна знайти технічні сталі матеріалу:

$$E_1=c_{11}^0-\frac{\left(c_{12}^0\right)^2}{c_{22}^0}=\frac{1}{b_{11}^0}, \qquad E_2=c_{22}^0-\frac{\left(c_{12}^0\right)^2}{c_{11}^0}=\frac{1}{b_{22}^0},$$

$$\mu_{12}=\frac{c_{12}^0}{c_{22}^0}=-\frac{b_{12}^0}{b_{11}^0}, \qquad \mu_{21}=\frac{c_{12}^0}{c_{11}^0}=-\frac{b_{12}^0}{b_{22}^0},$$

$$G_{12}=c_{66}^0=\frac{1}{b_{66}^0}. \tag{2.30}$$

Наведені в цьому параграфі співвідношення дозволяють проводити як опис напружено-деформованого стану як окремих шарів односпрямованого КМ, так і шаруватого матеріалу в цілому.

2.2. Ефективні фізико-механічні характеристики односпрямованого композиційного матеріалу

2.2.1. Правило сумішей

Розглянемо композиційний матеріал, утворений з суцільних односпрямованих паралельних волокон (смуг) довільної форми поперечного перерізу, укладених в матрицю. Для визначеності введемо систему координат таким чином, щоб вісь x_1 була спрямована вздовж волокон, вісь x_2 - перпендикулярна волокнам, шари матеріалу, утворені цими волокнами, паралельні площині x_1-x_2. Площина x_2-x_3 в цьому випадку буде утворювати поперечний переріз композиту (рис.2.3).

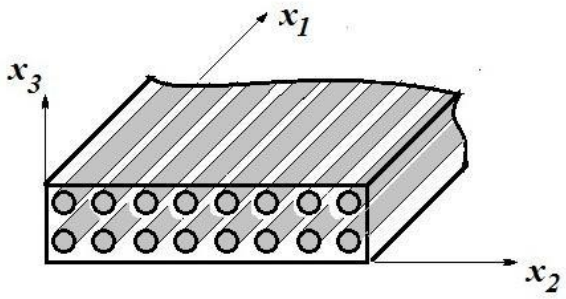


Рис.2.3. Загальний вигляд перерізу односпрямованого композиту

Для опису питомого вмісту матеріалів волокна і матриці в композиційному матеріалі вводиться параметр ψ – об'ємна частка матеріалу волокна; $(1-\psi)$ – об'ємна частка матеріалу матриці. Величину ψ називають також коефіцієнтом армування.

Якщо припустити, на межі розділу волокно – матриця повністю виконуються умови сумісності деформацій та під час деформування не відбувається розшарувань, то переважна більшості параметрів, які описують напружено-деформований стан матеріалу (зовнішнє навантаження, яке сприймається армованим композиційним матеріалом, напруження і деформації, модуль пружності, характеристики міцності, коефіцієнт температурного розширення та інші характеристики) можуть бути подані у вигляді лінійної функції від об'ємної частки матеріалу волокон:

$$Y_{ij} = Y_{ij_B}\psi + Y_{ij_M}(1-\psi), \qquad (2.31)$$

де Y_{ij} – узагальнене позначення перелічених вище фізико-механічних характеристик або параметрів, що ураховує їх прив'язку до вісей координат; «B» і «M» – індекси, як ідентифікують належність характеристики або параметру до матеріалів волокна або матриці відповідно.

Рівняння (2.31) називають рівнянням сумішей (правилом сумішей) або рівнянням (правилом) адитивності. Така модель ураховує тільки об'ємний вміст компонентів (або питому частку кожного з компонентів) в площі поперечного перерізу.

Величина ψ може змінюватись теоретично від 0 (однорідний матеріал матриці) до 0,9…0,92. Максимальні значення при цьому обмежуються геометричними міркуваннями і залежать від розташування

волокон, форми їх поперечного перерізу, однаковості розмірів перерізу та ін. Максимальні значення, наприклад, досягаються при щільному наповненні матриці волокнами круглого поперечного перерізу, при якому дотик волокон здійснюється вздовж їх утворюючих. При великих значеннях ψ ($\psi > 0{,}7$) порушується суцільність матриці та композиційний матеріал проявляє схильність до утворення тріщин і розшарувань, тому такі значення слід вважати верхньою межею. З іншого боку, при дуже малих ψ крихкі волокна після їх руйнування не зможуть обмежити деформацію матриці в той час як матриця ще буде сприймати навантаження. Зруйновані волокна фактично знижуватимуть міцність матеріалу оскільки їх наявність буде спричиняти ефект введення в матрицю ниткоподібних порожнин. В цілому питання про оптимальний питомий вміст волокон є окремою проблемою, яка має вирішуватись на основі співставлення характеристик міцності волокон, матриці та їх комбінації в матеріалі.

Крім того є інші аспекти, які накладають обмеження на використання правила сумішей (2.31). Волокна можуть руйнуватись не одночасно, а вибірково, через наявність в них дефектів, що, в цілому зменшить міцність композиційного матеріалу порівняно з розрахованою за правилом сумішей. Те ж можна сказати про випадок, коли матриця має недостатній запас пластичності, що приводить до появи розшарувань і тріщин на межі розділу і в тілі матриці та до передчасного руйнування композиційного матеріалу в цілому. Можливі і зворотні випадки, коли реальна міцність односпрямованого армованого матеріалу виявляється вищою, ніж та, що передбачається рівнянням адитивності. Наприклад це відбувається при доволі високій пластичності матеріалів і волокон: волокна тоді деформуються більш рівномірно, ніж при їх розтягуванні як окремого матеріалу. Проте, рівняння (2.31) можна використовувати для попередньої оцінки деформівних властивостей і міцності композиційного матеріалу.

2.2.2. Ефективні модулі пружності односпрямованого композиту

Розглянемо односпрямований шар композитного матеріалу, армований поздовжніми волокнами. Напружений стан композита може бути зведеним до напружень, які спрямовані вздовж та поперек волокон

(рис.2.4). Тому найбільш важливим є визначення характеристик матеріалу в цих напрямах. Надалі при описі деформування індекси 1 і 2 будуть визначати величини, що відносяться до компонент напружень, спрямованих уздовж та поперек волокон відповідно та до характеристик волокон, матриці і композиційного матеріалу в цих напрямах.

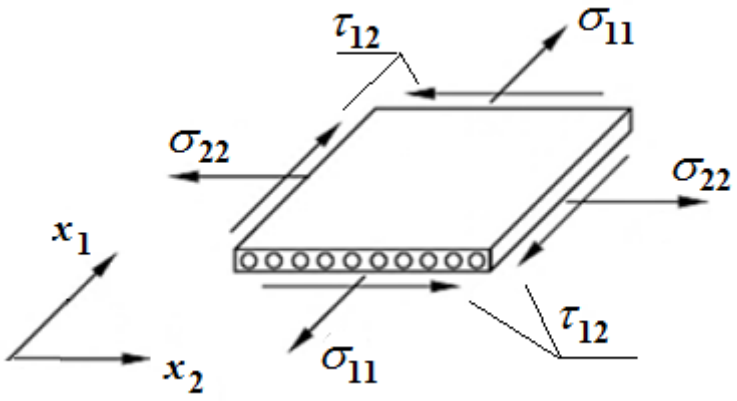


Рис. 2.4 – Плоский напружений стан у точці для односпрямованого композиційного матеріалу

На бокових гранях елемента діють середні рівномірно розподілені по поверхням граней нормальні σ_{11} і σ_{22} та дотичні τ_{12} напруження, які викликають середні лінійні та кутові деформації ε_{11}, ε_{22} і γ_{12}. Вважається, що односпрямований матеріал зазнає плоского напруженого стану ($\sigma_{33} = 0$). В термінах зазначених середніх деформацій і напружень закон Гука для композиційного матеріалу можна записати у вигляді:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \mu_{21}\frac{\sigma_{22}}{E_2}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \mu_{12}\frac{\sigma_{11}}{E_2}; \quad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}. \qquad (2.32)$$

де E_1 і E_2 – ефективні (або зведені чи усереднені) модулі пружності композиційного матеріалу вздовж і поперек волокон,

G_{12} – ефективний модуль зсуву у площині шару;

μ_{21} і μ_{12} – ефективні коефіцієнти Пуассона, які визначають величину поперечної деформації у напряму, що позначений другим індексом від дії навантаження, що діє у напряму, позначеному першим індексом.

Для позначення компонент напружено-деформованого стану, які стосуються волокон і матриці, будемо використовувати індекси «В» і «М» відповідно.

При подальшому розгляді будемо вважати, що волокна та матриця виконані з лінійно-пружних матеріалів, кожний з яких характеризується

власними пружними властивостями – модулем пружності та коефіцієнтом Пуассона волокон та матриці. Вважаючи матеріали матриці і волокон ізотропними матеріалами, запишемо для них закон Гука у вигляді:

$$\varepsilon_{11_B} = \frac{1}{E_B}\left[\sigma_{11_B} - \mu_B \sigma_{22_B}\right],$$

$$\varepsilon_{22_B} = \frac{1}{E_B}\left[\sigma_{22_B} - \mu_B \sigma_{11_B}\right], \quad \gamma_{12_B} = \frac{\tau_{12_B}}{G_B} \tag{2.33}$$

$$\varepsilon_{11_M} = \frac{1}{E_M}\left[\sigma_{11_M} - \mu_M \sigma_{22_M}\right],$$

$$\varepsilon_{22_M} = \frac{1}{E_M}\left[\sigma_{22_M} - \mu_M \sigma_{11_M}\right], \quad \gamma_{12_M} = \frac{\tau_{12_M}}{G_M}. \tag{2.34}$$

Установимо зв'язок між напруженнями та деформаціями у волокні та матриці з середніми напруженнями у композиті, а також зв'язок між пружними характеристиками волокна і матриці та зведеними або ефективними характеристиками композита.

Нехтуючи для простоти ефектом виникнення поперечних деформацій окремо у волокнах і матриці, розглянемо розтяг вздовж волокон. В цьому випадку середні напруження, обчислені на основі правила сумішей (2.31), складаються з пропорційних внесків напружень матеріалу волокон і матриці.

$$\sigma_{11} = \sigma_{11_B}\psi + \sigma_{11_M}(1 - \psi),$$

Деформації за цим напрямом будуть однакові:

$$\varepsilon_{11_B} = \varepsilon_{11_M} = \varepsilon_{11}.$$

Вважаючи в першому наближенні $\sigma_{11_B} = E_B \varepsilon_{11_B}$ і $\sigma_{11_M} = E_M \varepsilon_{11_M}$ отримаємо:

$$\sigma_{11} = [E_B\psi + E_M(1 - \psi)]\varepsilon_{11}.$$

Порівнюючи цей вираз з першим з рівнянь (2.32) за умови $\mu_{21} = 0$ отримаємо:

$$E_1 = E_B\psi + E_M(1 - \psi). \tag{2.35}$$

Для випадку розтягу поперек волокон напруженням σ_{22} отримаємо:

$$\sigma_{22_B} = \sigma_{22_M} = \sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22_B}\psi + \varepsilon_{22_M}(1 - \psi)$$

Вважаючи, як і в попередньому випадку, $\sigma_{22_B} = E_B \varepsilon_{22_B}$ і $\sigma_{22_M} = E_M \varepsilon_{22_M}$ отримаємо:

$$\varepsilon_{22} = \left[\frac{\psi}{E_B} + \frac{1-\psi}{E_M}\right]\sigma_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_2}.$$

Звідки

$$E_2 = \frac{E_B E_M}{\psi E_M + (1-\psi) E_B}. \tag{2.36}$$

У випадку зсуву під дією напруження τ_{12}:

$$\tau_{12_B} = \tau_{12_M} = \tau_{12}\,,$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12_B}\psi + \gamma_{12_M}\left(1-\psi\right).$$

Ураховуючи вираз закону Гука, обчислимо деформації для складових матеріалу:

$$\gamma_{12_B} = \frac{\tau_{12}}{G_B}, \gamma_{12_M} = \frac{\tau_{12}}{G_M}.$$

Тоді

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_B}\psi + \frac{\tau_{12}}{G_M}(1-\psi) = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}.$$

Звідки

$$G_{12} = \frac{G_B G_M}{\psi G_M + (1-\psi) G_B}. \tag{2.37}$$

Виконуючи аналіз деформування розтягу-стиску з урахуванням виникнення поперечних деформацій для компонент матеріалу (з урахуванням коефіцієнтів Пуассона волокон і матриці) можна отримати наступні вирази для лінійних деформацій:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\psi E_B + (1-\psi) E_M} - \frac{\psi\mu_B + (1-\psi)\mu_M}{\psi E_B + (1-\psi) E_M}\sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = \left[\frac{\psi E_M + (1-\psi) E_B}{E_B E_M} - \frac{\psi(1-\psi)(\mu_M E_B - \mu_B E_M)^2}{E_B E_M[\psi E_B + (1-\psi) E_M]}\right]\sigma_{22}$$
$$- -\frac{\psi\mu_B + (1-\psi)\mu_M}{\psi E_B + (1-\psi) E_M}\sigma_{11},$$

Звідки

$$\mu_{12} = \mu_{12_B}\psi + \mu_{12_M}(1-\psi). \tag{2.38}$$

Величина μ_{21} визначається з умов симетрії:

$$\mu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\mu_{12}. \tag{2.39}$$

Зважаючи, що для більшості односпрямованих композиційних матеріалів $E_1 >> E_2$, то $\mu_{21} >> \mu_{12}$.

Уточнений вираз для E_2 можна подати у наступному вигляді:

$$E_2 = \frac{E_B E_M E_1}{E_1[E_M\psi + E_B(1-\psi)] - \psi(1-\psi)(\mu_M E_B - \mu_B E_M)^2}. \qquad (2.40)$$

Отримані вирази дають можливість визначення величини пружних характеристик односпрямованого композиту за відповідними значеннями його складових.

Приклад. Визначити пружні характеристики односпрямованого вуглепластика при розтягуванні вздовж волокон. Об'ємний вміст волокон $\psi = 0.62$, механічні характеристики складових: волокно – вуглецева нитка, $E_B = 3 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0.28$, матриця – епоксидна смола, $E_M = 4 \cdot 10^3$ МПа $= 0{,}04 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0.22$.

Розв'язок. Модуль пружності вздовж волокон (2.35):

$$E_1 = 3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}62 + 4 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0{,}62) = 1{,}8752 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Модуль пружності поперек волокон (2.29):

$$E_2 = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}62 + 4 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0{,}62)} = 0{,}10302 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Уточнене значення модуля пружності у напряму поперек волокон (2.40):

$$E_1[E_M\psi + E_B(1-\psi)] = 1{,}8752 \cdot 10^5[4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}62 + 3 \cdot 10^5 \cdot (1 - 0{,}62)] = 2{,}184233 \cdot 10^{10}$$

$$\psi(1-\psi)(\mu_M E_B - \mu_B E_M)^2 = 0{,}62 \cdot (1 - 0{,}62)\left(0{,}22 \cdot 3 \cdot 10^5 - 0{,}28 \cdot 4 \cdot 10^3\right)^2 = 0{,}099174 \cdot 10^{10}$$

$$E_2 = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8752 \cdot 10^5}{2{,}184233 \cdot 10^{10} - 0{,}099174 \cdot 10^{10}} = 0{,}10792 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

Зауважимо, що відмінність величин E_2, отриманих за формулами (2.36) і (2.40) становить біля 5 %.

Для обчислення модулю зсуву композиційного матеріалу за (2.37) попередньо обчислимо модулі зсуву волокон і матриці:

$$G_B = \frac{E_B}{2(1+\mu_B)} = \frac{3 \cdot 10^5}{2(1+0{,}28)} = 1{,}22951 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$G_M = \frac{E_B}{2(1+\mu_M)} = \frac{4 \cdot 10^3}{2(1+0{,}22)} = 0{,}01538 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

Повне значення модуля зсуву

$$G_{12} = \frac{1{,}22951 \cdot 10^5 \cdot 0{,}01538 \cdot 10^5}{0{,}62 \cdot 0{,}01538 \cdot 10^5 + 0{,}38 \cdot 1{,}22951 \cdot 10^5} = 0{,}03966 \cdot 10^5 = 3966 \text{ МПа}.$$

Коефіцієнт Пуассона при навантаженні у напряму 1 (2.38) і у напряму 2 (2.39):

$$\mu_{12} = 0{,}28 \cdot 0{,}62 + 0{,}22 \cdot (1 - 0{,}62) = 0{,}25,$$

$$\mu_{21} = \frac{0{,}10792 \cdot 10^5}{1{,}8752 \cdot 10^5} 0{,}25 = 0{,}0137.$$

Як видно, кількісна відмінність коефіцієнтів Пуассона μ_{12} і μ_{21} становить біля 15 разів.

2.3. Коефіцієнти лінійного температурного розширення

Більшість матеріалів під час нагрівання та охолодження деформуються, змінюючи свої лінійні розміри. Цей факт призводить до додаткових деформацій і в деяких випадках, зокрема за обмеженості деформацій тіла, до додаткових напружень.

Кількісна оцінка температурних деформації ε_{T}, що виникають в тілі, визначається так званим лінійним коефіцієнтом теплового розширення (ЛКТР) α, який дорівнює відносному подовженню тіла за зміни температури на один градус:

$$\varepsilon_{\mathrm{T}} = \alpha \Delta T, \tag{2.41}$$

де ΔT – змінення температури.

Величина ЛКТР для більшості конструкційних матеріалів має порядок 10^{-5}, розмірність ЛКТР – 1/°С або $1/°K$.

Також розглядається об'ємний коефіцієнт теплового розширення, який визначає відносне змінення елементарного об’єму матеріалу за зміни температури на 1 градус. Для ізотропних матеріалів, коефіцієнт лінійного теплового розширення становить приблизно одну третину об'ємного коефіцієнту теплового розширення.

Зауважимо, що оскільки (2.41) визначає відносні деформації, то величини повних переміщень (наприклад видовжень у випадку нагріву) є пропорційними до лінійних розмірів тіла.

Для композиційного матеріалу, внаслідок його складної структури, лінійні коефіцієнти теплового розширення є дуже важливими характеристиками через значні відмінності цієї величини для матеріалу волокон і матеріалу матриці. Наприклад для вуглецю, який

використовується в якості матеріалу волокон, $\alpha_B = 3 \cdot 10^{-6} 1/°K$, а для матеріалу матриці – епоксідної смоли $\alpha_M = 60 \cdot 10^{-6} 1/°K$.

Матеріали з анізотропної структурою як правило мають різні коефіцієнти лінійного розширення у різних напрямах. Відповідно, об'ємне розширення є нерівномірним серед трьох осей. У таких випадках для розрахунків теплового розширення вводять тензор коефіцієнта теплового розширення, який може містити до шести незалежних компонентів.

Аналіз температурної деформації композиту зазвичай виконується на основі припущення про ізотропне температурне розширення складових композиту – матеріалів матриці і волокна.

Розглянемо деформацію елементу композиційного матеріалу за його нагрівання на ΔT градусів. Будемо вважати, що кожна з складових композитного матеріалу отримує вільну деформацію:

$$(\varepsilon_{11})_{\mathrm{T}_B} = \alpha_B \Delta T, \;\; (\varepsilon_{11})_{T_M} = \alpha_M \Delta T. \tag{2.42}$$

В той же час волокно та матриця отримують спільну деформацію в складі матеріалу:

$$(\varepsilon_{11})_T = \alpha_1 \Delta T. \tag{2.43}$$

де α_1 – ЛКТР композиційного матеріалу в напрямку волокон (вісь x_1, рис.2.1).

Внаслідок деформування у матеріалах волокна і матриці виникають самозріноважені складові напруження:

$$(\sigma_{11})_B = \mathrm{E_B}(\varepsilon_{11})_{\mathrm{T}_B} = \mathrm{E_B} \Delta T(\alpha_1 - \alpha_B),$$

$$(\sigma_{11})_M = \mathrm{E}_M(\varepsilon_{11})_{\mathrm{T}_M} = \mathrm{E}_M \Delta T(\alpha_1 - \alpha_M). \tag{2.44}$$

Зважаючи, що зовнішнє навантаження відсутнє, їх рівнодіюча має дорівнювати нулю. На основі правила сумішей (адитивності) (2.31) це напруження дорівнює:

$$\sigma_{11} = (\sigma_{11})_B \psi + (\sigma_{11})_M (1 - \psi) = 0,$$

або, з урахуванням виразів для деформацій (2.42)

$$\sigma_{11} = \mathrm{E_B} \Delta T(\alpha_1 - \alpha_B)\psi + \mathrm{E}_M \Delta T(\alpha_1 - \alpha_M)(1 - \psi) = 0.$$

Розв’язуючи останнє рівняння відносно α_1 отримаємо:

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{E_B}\alpha_B \psi + \mathrm{E}_M \alpha_M (1-\psi)}{\mathrm{E_B}\psi + \mathrm{E}_M (1-\psi)}. \tag{2.45}$$

При розгляді деформування у напряму, перпендикулярному до волокон (вісь x_2), температурне подовження композиту Δ_2, подане через подовження його складових компонентів, дорівнює:

$$\Delta_2 = \Delta_B + \Delta_M = \Delta T[\alpha_B s + \alpha_M(t - s)] \quad . \tag{2.46}$$

де s – характерний розмір волокна у напряму x_2 (рис.2.1); t – характерна товщина шару композиту, який розглядається, за напрямом x_2.

Температурна деформація вздовж x_2 визначається як відношення цього подовження до товщини шару:

$$(\varepsilon_{22})_T^* = \frac{\Delta_2}{t} = \Delta T[\alpha_B \psi + \alpha_M(1 - \psi)]. \tag{2.47}$$

Крім цієї деформації волокна та матриця отримують додаткову деформацію, пов'язану із поперечним деформуванням шару матеріалу від напружень $(\sigma_{11})_B$ і $(\sigma_{11})_M$:

$$(\varepsilon_{22})_T^{**} = -\mu_{\text{B}} \Delta T(\alpha_1 - \alpha_B)\psi - \mu_M \Delta T(\alpha_1 - \alpha_M)(1 - \psi). \tag{2.48}$$

Повна деформація у напрямі x_2 дорівнює сумі зазначених вище складових деформацій (2.47) і (2.48), а з іншого боку може бути обчислена за формулою вигляду (2.41):

$$\varepsilon_{22} = (\varepsilon_{22})_T^* + (\varepsilon_{22})_T^{**} = \alpha_2 \Delta T.$$

Після підстановки в останній вираз складових деформацій (2.47) і (2.48) і, з урахуванням раніше визначеного виразу (2.45) для α_1, отримаємо:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\text{E}_{\text{B}}\psi + \text{E}_M(1 - \psi)}[\big(\alpha_B \psi + \alpha_M(1 - \psi)\big)\big(\text{E}_{\text{B}}\psi + \text{E}_M(1 - \psi)\big) +$$

$$+\psi(1 - \psi)(\alpha_M - \alpha_B)(\text{E}_{\text{B}}\mu_M - \text{E}_M\mu_B)] \quad . \tag{2.49}$$

Отримані формули дозволяють досить точно визначати значення ЛКТР при формувані складу композиційного матеріалу.

Приклад. Визначити лінійний коефіцієнт теплового розширення односпрямованого вуглепластика. Об'ємний вміст волокон $\psi = 0{,}62$, характеристики складових: волокно – вуглецева нитка, $E_B = 3 \cdot 10^5$МПа, $\alpha_B = 3 \cdot 10^{-6} 1/°K$, $\mu_B = 0{,}28$, матриця – епоксидна смола, $E_M = 4 \cdot 10^3$МПа, $\alpha_M = 60 \cdot 10^{-6} 1/°K$, $\mu_M = 0{,}22$.

Розв'язок. За формулою (2.45):

$$\alpha_1 = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}62 + 0{,}04 \cdot 10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-6}(1 - 0{,}62)}{3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}62 + 0{,}04 \cdot 10^5(1 - 0{,}62)} = 2{,}49 \cdot 10^{-6} 1/°K$$

За формулою (2.42) для окремих складників отримаємо:

$$\alpha_B \psi + \alpha_M(1 - \psi) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}62 + 60 \cdot 10^{-6}(1 - 0{,}62) = 20{,}9 \cdot 10^{-6} 1/°K \tag{2.50}$$

Згідно (2.35) $\text{E}_{\text{B}}\psi + \text{E}_M(1 - \psi) = \text{E}_1 = 1{,}8752 \cdot 10^5$ МПа

$$\psi(1-\psi)(\alpha_M-\alpha_B)(\mathrm{E_B}\mu_M-\mathrm{E}_M\mu_B)=$$
$$=0{,}62\cdot(1-0{,}62)(60\cdot10^{-6}-4\cdot10^{-6})(3\cdot10^5\cdot0{,}22-0{,}04\cdot10^5\cdot0{,}28)=$$
$$=0{,}856$$

Підставляючи отримані значення у (2.49), обчислюємо:

$$\alpha_2=\frac{1}{1{,}8752\cdot10^5}[20{,}9\cdot10^{-6}\cdot1{,}8752\cdot10^5+0{,}856]=25{,}46\cdot10^{-6}$$

Зауважимо, що величина, отримана в (2.50), фактично є наближеним значенням α_2, яке не ураховує впливу додаткових поперечних деформацій (2.49). Його відмінність від отриманого точного значення становить біля 20%.

2.4. Питомі характеристики композиційних матеріалів

Питомими характеристиками композиційних матеріалів називають відношення його механічних характеристик (наприклад межі міцності та модуля пружності) до питомої ваги композиту ρ, яка також може бути обчислена за правилом сумішей (2.31):

$$\rho=\rho_B\psi+\rho_M(1-\psi), \tag{2.51}$$

де ρ_B і ρ_M– питома вага матеріалів волокна і матриці відповідно.

Зважаючи на надане визначення величина питомого модуля пружності (питомої жорсткості) композиту може бути визначена як

$$(E_1)_\rho=\frac{E_1}{\rho}. \tag{2.52}$$

Аналогічно, за величиною межі міцності композиту $(\sigma_\text{м})_K$ (див.п.4.1.1), можуть бути визначена питома межа міцності (питома міцність) композиційного матеріалу.

$$(\sigma_\text{м})_{K\,\rho}=\frac{(\sigma_\text{м})_K}{\rho} \tag{2.53}$$

Очевидно, що чим більшими є числові значення питомих механічних характеристик конструкційного матеріалу, тим більш ефективним є його використання з точки зору сполучення високих показників міцності і жорсткості конструкції з її малою вагою. Це дає змогу використовувати цей показник для порівняння ефективності використання матеріалів.

Приклад. Визначити питому жорсткість односпрямованого вуглепластика вздовж волокон при розтягуванні. Матеріал матриці – епоксидна смола, $\rho_\text{М}=1300$ кг/м^3, щільність вуглеволокна $\rho_B=1700$ кг/м^3, об'ємний вміст волокон $\psi=0{,}62$. Модуль пружності вздовж волокон $E_1=1{,}8752\cdot10^5$ МПа (п.2.3.2).

Розв'язок. Згідно (2.51) щільність вуглепластика:

$$\rho = 1700 \cdot 0{,}62 + 1300 \cdot (1 - 0{,}62) = 1548 \text{ кг/м}^3,$$

Згідно (2.52) питома жорсткість

$$(E_1)_\rho = \frac{1{,}8752 \cdot 10^5}{1548} = 0{,}0012 \cdot 10^5.$$

Для порівняння обчислимо питому жорсткість традиційних конструкційних матеріалів.

Для конструкційної сталі 40 ($\rho = 7800$ кг/м^3, $E = 2{,}05 \cdot 10^5$ МПа):

$$(E)_\rho = \frac{2{,}05 \cdot 10^5}{7800} = 0{,}000263 \cdot 10^5$$

Для титанового сплаву ВТ5 ($\rho = 4950$ кг/м^3, $E = 1{,}07 \cdot 10^5$ МПа):

$$(E)_\rho = \frac{1{,}07 \cdot 10^5}{4950} = 0{,}000216 \cdot 10^5$$

Як видно, питома жорсткість вуглепластика приблизно в 50 разів більша за аналогічну характеристику наведених металевих матеріалів. Зауважимо, що в парі сталь 40 – титановий сплав ВТ5 питома жорсткість майже не відрізняється.

3. ДЕФОРМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Значна частина композиційних матеріалів являє сполучення односпрямовано армованих шарів із різним орієнтуванням армуючих волокон. Це обумовлено тим, що, як було показано в попередньому розділі, окремий шар волокнистого армованого композиту є суттєво анізотропним, при цьому найбільші відмінності фізико-механічних властивостей спостерігаються для характеристик, що відповідають деформуванню в напрямах вздовж і поперек волокон. З'єднання декількох армованих шарів у суцільний пакет, в якому армуючі волокна кожного окремого шару орієнтовані під кутом один до одного, дозволяє певним чином зменшити відмінності властивостей матеріалу у різних напрямах. Визначення фізико-механічних властивостей такого пакету потребує окремого розгляду. Відповідні співвідношення грунтуються на отриманих в попередньому розділі результатах визначення фізико-механічних властивостей окремих шарів та рівняннях, що дозволяють здійснити перетворення величин фізико-механічних характеристик при повороті координатних вісей.

Зазначимо, що матеріал, виготовлений шляхом з'єднання між собою декількох тонких пластин (шарів) називають ще ламінатом (laminate), а окрему пластину (шар) – ламіною (lamina). Ця термінологія поширена і в літературі з механіки композиційних матеріалів.

3.1. Структура шаруватих композиційних матеріалів

Шаруватий композиційний матеріал складається з групи (пакету) окремих односпрямованих армованих шарів, скріплених один з одним (рис.3.1). Кожен шар k в пакеті характеризується товщиною h_k і кутом $\varphi = \varphi^{(k)}$ орієнтації армуючих волокон відносно вісей загальної системи координат xyz. Шари можуть бути утворені як однаковими так і різними композиціями волокна і матриці.

Для опису структури шаруватого композиту використовуються так званий код пакету, який містить набір значень кутів орієнтації волокон шарів, дані про їх кількість, а іноді – про різні матеріали композицій шарів.

Інформація про кожний шар відокремлена від інших шарів похилою рискою. Перший шар – це верхній шар пакету (ламінату).

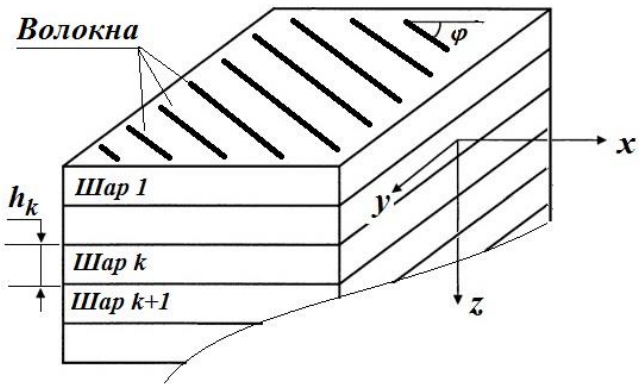


Рис.3.1. Шаруватий композиційний матеріал.

Розглянемо деяки приклади кодів пакетів:

[0 / –45 / 90 / 45 / 0] – пакет з 5 шарів, орієнтованих під різними кутами до загальної вісі x, шари мають однакову товщину та виготовлені з одного матеріалу;

[0 / –60 / 90_2 / 60 / 0] – пакет з 6 шарів однакової товщини, два шари орієнтовані під 90° примикають один до одного, що зазначено індексом «2»;

[0 / 45 / 90]$_s$ – пакет з 6 шарів однакової товщини, розташованих симетрично відносно площини, що проходить через середину пакету (можна записати [0 / 45 / 90 / 90 / 45 / 0]), індекс «*s*» позначає симетрію.

Також в практиці проєктування композитних конструкцій часто використовуються ортогонально орієнтовані матеріали, у яких частина шарів укладена під кутом $\varphi^{(1)} = 0^\circ$, а друга частина під кутом $\varphi^{(2)} = 90^\circ$, та перехресно-армовані матеріали, які складаються із 2*n* шарів, з яких *n* шарів укладені під кутом φ до осі x, а решта під кутом $-\varphi$ до осі x.

3.2. Перетворення пружних характеристик односпрямованого матеріалу при повороті осей системи координат

Нехай композит складається із кількох різно-орієнтованих шарів односпрямованого матеріалу. Як було показано у розділі 2 для опису ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого шару композиційного матеріалу використовується система координат, вісь 1 якої спрямована за напрямом волокон, а вісь 2 – перпендикулярна до напряму волокон. Для розв'язання задач про деформування багатошарового КМ потрібно визначити його фізико-механічні характеристики за величинами відомих характеристик односпрямованих шарів, що входять до нього. Для цього будемо використовувати такі системи координат: загальну *xyz* та локальні $1^{(k)}2^{(k)}3^{(k)}$, де k = 1,2,3…..n – номер односпрямованого шару в пакеті багатошарового матеріалу, n – кількість шарів. Вісь z є перпендикулярною до площин шарів (площини рис.3.1) і збігається з віссю *3* в усіх шарах (рис. 3.2).

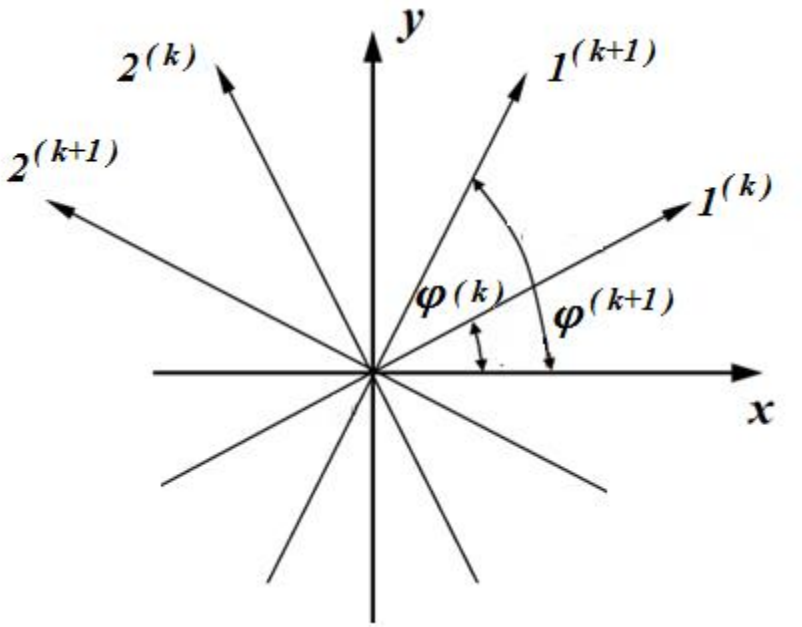


Рис. 3.2 – Орієнтація вісей загальної системи координат пакету і місцевих систем координат шарів в поперечному перерізі шаруватого КМ

Розглянемо перетворення пружних характеристик шару композиційного матеріалу з односпрямованим армуванням при переході від власних осей шару – системи координат $1^{(k)}2^{(k)}3^{(k)}$ – до деякої довільно орієнтованої системи координат *xyz*, обраної для опису фізико-механічних характеристик пакету та розташованої під кутом $\varphi^{(k)}$ до вісей кожного шару *k*. В подальшому в позначенні вісей індекс *k* буде опущений, а отримані співвідношення будуть чинними для будь-якого шару.

Співвідношення між напруженнями і деформаціями в односпрямованому шарі за плоского напруженого стану має вигляд (2.9), де конкретизація компонент матриці жорсткості залежить від виду анізотропії.

Перетворення компонент тензорів напружень і деформацій до нових осей визначаються за відомими формулами тензорного аналізу:

$$\sigma_{i'j'} = \sigma_{ij} l_{i'i} l_{j'j} \quad . \tag{3.1, а}$$

$$\varepsilon_{i'j'} = \varepsilon_{ij} l_{i'i} l_{j'j} \quad . \tag{3.1, б}$$

де $(i', j' = x, y, z;\ i, j = 1,2,3)$.

При повороті осей 1, 2 у пов'язаній з ними площині на кут φ відносно вісей *xy* (рис. 3.2), матриця перетворення координат має вигляд:

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{x1} & t_{x2} & t_{x3} \\ t_{y1} & t_{y2} & t_{y3} \\ t_{z1} & t_{z2} & t_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Для плоского напруженого стану перетворення напружень (3.1, а) запишуться таким чином:

$$\{\sigma_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T_1]\{\sigma\}, \tag{3.3}$$

Застосовуючи співвідношення (3.1,б) для компонент тензорів деформацій, аналогічно отримаємо:

$$\{\bar{\varepsilon}_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [T_1]\{\bar{\varepsilon}\}, \tag{3.4}$$

Тут необхідно урахувати співвідношення між компонентами матриць стовпців деформацій (2.5) та компонентами тензору деформацій $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, тобто:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [\overline{\mathrm{T}}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [\overline{\mathrm{T}}]\{\bar{\varepsilon}\}, \tag{3.5}$$

$$\{\varepsilon_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\overline{\mathrm{T}}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [\overline{\mathrm{T}}]\{\bar{\varepsilon}_{xy}\}, \tag{3.6}$$

де $[\overline{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Звідси, ураховуючи (3.5) і (3.6) у (3.4) отримаємо:

$$[\overline{\mathrm{T}}]^{-1}\{\varepsilon_{xy}\} = [T_1][\overline{\mathrm{T}}]^{-1}\{\varepsilon\}. \tag{3.7}$$

або

$$\{\varepsilon_{xy}\} = [\overline{\mathrm{T}}]\,[T_1]\,[\overline{\mathrm{T}}]^{-1}\{\varepsilon\} = [T_2]\{\varepsilon\} \tag{3.8}$$

де

$$[T_2] = [\overline{\mathrm{T}}]\,[T_1]\,[\overline{\mathrm{T}}]^{-1} = \begin{bmatrix} cos^2\varphi & sin^2\varphi & -sin\,\varphi\,cos\,\varphi \\ sin^2\varphi & cos^2\varphi & sin\,\varphi\,cos\,\varphi \\ 2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi & -2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi & cos^2\varphi - sin^2\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Використовуючи отримані співвідношення можна знайти зв'язок напружень і деформації в шарі у загальній системі координат *xyz* у вигляді, аналогічному запису закону Гука (2.9):

$$[T_1]^{-1}\{\sigma_{xy}\} = [C]\,[T_2]^{-1}\,\{\varepsilon_{xy}\},$$

або

$$\{\sigma_{xy}\} = [T_1][C]\,[T_2]^{-1}\,\{\varepsilon_{xy}\} = [C_\varphi]\{\varepsilon_{xy}\}, \tag{3.10}$$

де $[C_\varphi] = [T_1][C][T_2]^{-1}$,

$$\left[C_{\varphi}\right]=\begin{bmatrix} c_{11}^{\varphi} & c_{12}^{\varphi} & c_{16}^{\varphi} \\ c_{21}^{\varphi} & c_{22}^{\varphi} & c_{26}^{\varphi} \\ c_{16}^{\varphi} & c_{26}^{\varphi} & c_{66}^{\varphi} \end{bmatrix} \qquad (3.11).$$

Компоненти матриці жорсткості (3.11) для односпрямованого шару у загальній системі координат *xyz* мають вигляд:

$$c_{11}^{\varphi}=cos^4\varphi c_{11}^0+sin^4\varphi\, c_{22}^0+2\left(c_{12}^0+2c_{66}^0\right)sin^2\varphi cos^2\varphi,$$

$$c_{12}^{\varphi}=\left(c_{11}^0+c_{22}^0-2c_{12}^0-4c_{66}^0\right)sin^2\varphi cos^2\varphi+c_{12}^0,$$

$$c_{16}^{\varphi}=\left(sin^2\varphi\, c_{22}^0-cos^2\varphi c_{11}^0+\left(a_{12}^0+2c_{66}^0\right)\left(cos^2\varphi-sin^2\varphi\right)\right)sin\varphi cos\varphi,$$

$$c_{22}^{\varphi}=sin^4\varphi\, c_{11}^0+cos^4\varphi\, c_{22}^0+2\left(c_{12}^0+2c_{66}^0\right)sin^2\varphi cos^2\varphi,$$

$$c_{26}^{\varphi}=\left(cos^2\varphi c_{22}^0-sin^2\varphi\, c_{11}^0-\left(c_{12}^0+2c_{66}^0\right)\left(cos^2\varphi-sin^2\varphi\right)\right)sin\varphi cos\varphi,$$

$$c_{66}^{\varphi}=\left(c_{11}^0+c_{22}^0-2c_{12}^0-4c_{66}^0\right)sin^2\varphi cos^2\varphi+c_{66}^0. \qquad (3.12)$$

Для запису закона Гука у формі подання деформацій через величини напружень (2.10) запишемо цей вираз у такому вигляді:

$$\left[T_2\right]^{-1}\left\{\varepsilon_{xy}\right\}=\left[B\right]\left[T_1\right]^{-1}\left\{\sigma_{xy}\right\},$$

або

$$\left\{\varepsilon_{xy}\right\}=\left[B_{\varphi}\right]\left\{\sigma_{xy}\right\}, \qquad (3.13)$$

де $\left[B_{\varphi}\right]=\left[T_2\right]\left[B\right]\left[T_1\right]^{-1}$,

$$\left[B_{\varphi}\right]=\begin{bmatrix} b_{11}^{\varphi} & b_{12}^{\varphi} & b_{16}^{\varphi} \\ b_{21}^{\varphi} & b_{22}^{\varphi} & b_{26}^{\varphi} \\ b_{16}^{\varphi} & b_{26}^{\varphi} & b_{66}^{\varphi} \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

Компоненти матриці піддатливості (3.14) для односпрямованого шару у загальній системі координат *xyz* мають вигляд:

$$b_{11}^{\varphi}=cos^4\varphi b_{11}^0+sin^4\varphi\, b_{22}^0+\left(2b_{12}^0+b_{66}^0\right)sin^2\varphi cos^2\varphi,$$

$$b_{12}^{\varphi}=\left(b_{11}^0+b_{22}^0-2b_{12}^0-b_{66}^0\right)sin^2\varphi cos^2\varphi+b_{12}^0,$$

$$b_{22}^{\varphi}=sin^4\varphi b_{11}^0+cos^4\varphi b_{22}^0+\left(2b_{12}^0+b_{66}^0\right)sin^2\varphi cos^2\varphi,$$

$$b_{16}^{\varphi}=\left(2\,sin^2\varphi b_{22}^0-2\,cos^2\varphi b_{11}^0+\left(2b_{12}^0+b_{66}^0\right)\left(cos^2\varphi-sin^2\varphi\right)\right)sin\varphi cos\varphi,$$

$$b_{26}^{\varphi}=\left(2\,cos^2\varphi b_{22}^0-2\,sin^2\varphi b_{11}^0-\left(2b_{12}^0+b_{66}^0\right)\left(cos^2\varphi-sin^2\varphi\right)\right)sin\varphi cos\varphi,$$

$$b_{66}^{\varphi} = \left(b_{11}^{0} + b_{22}^{0} - 2b_{12}^{0} - b_{66}^{0}\right)4\sin^2\varphi\cos^2\varphi + b_{66}^{0}. \qquad (3.15)$$

Використання цих співвідношень дозволяє визначати компоненти матриць жорсткості матриць підатливості односпрямованого шару композиційного матеріалу при складному напруженому стані при повороті вісей.

3.3. Пружні характеристики багатошарових композитів

У випадку багатошарового композиту фізико-механічні характеристики пакету (або технічні сталі матеріалу) будуть визначатись на основі характеристик жорсткості (піддатливості) односпрямованих шарів, що входять до нього, з урахуванням їх орієнтації відносно загальної системи координат *xyz* (рис.3.2).

3.3.1. Пружні характеристики багатошарових композитів для випадку плоского напруженого стану

Розглянемо елементарний фрагмент пакету багатошарового композиційного матеріалу у вигляді паралелепіпеду, розміри якого за напрямами вісей *x* і *y* дорівнюють одиниці (рис. 3.3). Пакет складається з n шарів товщиною $h^{(k)}$ кожний, а загальна товщина пакету становить

$$H = \sum_{k=1}^{n} h^{(k)}. \qquad (3.16)$$

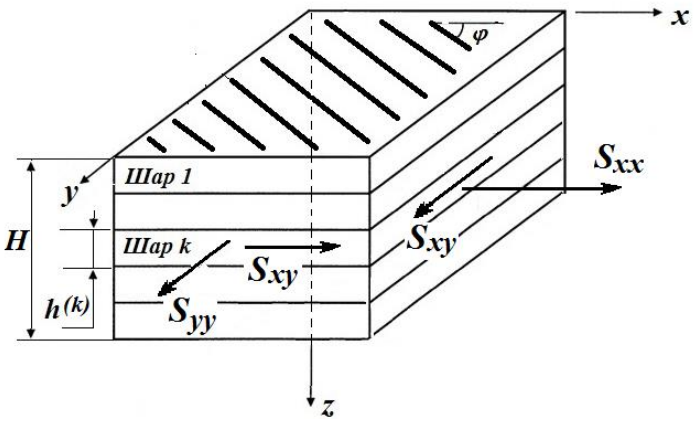


Рис. 3.3 – Внутрішні зусилля на гранях елементарного фрагменту багатошарового КМ

Внутрішні зусилля S_{xx}, S_{yy}, S_{xy} на гранях фрагменту є рівнодіючою зусиль у окремих шарах і визначаються із наступних співвідношень рівноваги:

$$S_{xx}=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{xx}^{(k)}h^{(k)},\quad S_{yy}=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{yy}^{(k)}h^{(k)},\quad S_{xy}=\sum_{k=1}^{n}\tau_{xy}^{(k)}h^{(k)}, \tag{3.17}$$

де $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{yy}^{(k)}$ – нормальні напруження в шарі k у в напрямку вісей x і y відповідно;

$\tau_{xy}^{(k)}$ – дотичне напруження в площині $x0y$.

Якщо розділити праві й ліві частини рівняння (3.17) на сумарну товщину пакета, отримаємо

$$\sigma_{xx}=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{xx}^{(k)}\bar{h}^{(k)},\quad \sigma_{yy}=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{yy}^{(k)}\bar{h}^{(k)},\quad \tau_{xy}=\sum_{k=1}^{n}\tau_{xy}^{(k)}\bar{h}^{(k)}, \tag{3.18}$$

де σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} – середні по товщині пакета напруження:

$$\sigma_{xx}=S_{xx}/H,\quad \sigma_{yy}=S_{yy}/H,\quad \tau_{xy}=S_{xy}/H; \tag{3.19 а}$$

$\bar{h}^{(k)}$ – відносна товщина шару k (k = 1,2,3,…n):

$$\bar{h}^{(k)}=\frac{h^{(k)}}{H} \tag{3.19 б}$$

Підставивши у співвідношення (3.19) закон Гука для шару k (3.10) – (3.12) у вигляді

$$\left\{\sigma_{xy}^{(k)}\right\}=\left[C_{\varphi}^{(k)}\right]\left\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\right\}, \tag{3.20}$$

де

$$\left\{\sigma_{xy}^{(k)}\right\}=\left\{\sigma_{xx}^{(k)},\ \sigma_{yy}^{(k)},\ \tau_{xy}^{(k)}\right\}^{T},$$

$$\left\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\right\}=\left\{\varepsilon_{xx}^{(k)},\ \varepsilon_{yy}^{(k)},\ \gamma_{xy}^{(k)}\right\}^{T},$$

$$\left[C_{\varphi}^{(k)}\right]=\begin{bmatrix} c_{11}^{\varphi(k)} & c_{12}^{\varphi(k)} & c_{16}^{\varphi(k)} \\ c_{21}^{\varphi(k)} & c_{22}^{\varphi(k)} & c_{26}^{\varphi(k)} \\ c_{16}^{\varphi(k)} & c_{26}^{\varphi(k)} & c_{66}^{\varphi(k)} \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

і враховуючи, що пакет деформується як суцільний матеріал, тобто $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{xx}^{(k)}$, $\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{yy}^{(k)}$, $\gamma_{xy}=\gamma_{xy}^{(k)}$, отримаємо рівняння зв'язку середніх напружень із середніми деформаціями пакету багатошарового КМ за плоского напруженого стану:

$$\{\sigma_{xy}\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{16}\\ c_{12} & c_{22} & c_{26}\\ c_{16} & c_{26} & c_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[C]\{\varepsilon_{xy}\} \tag{3.22}$$

де

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^{\varphi(k)}\bar{h}^{(k)}. \tag{3.23}$$

В цій формулі компоненти $c_{ij}^{\varphi(k)}$ для кожного шару визначаються за (3.12).

Для визначення технічних сталих, що характеризують пружне деформування багатошарового композита, розглянемо по черзі його розтяг в напрямку вісей x і y та зсув в площині xy.

При розтягу у напрямі осі x за умов $\sigma_{yy}=0, \tau_{xy}=0$ рівняння (3.22) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}&=c_{11}\varepsilon_{xx}+c_{12}\varepsilon_{xy}+c_{16}\gamma_{xy},\\ 0&=c_{12}\varepsilon_{xx}+c_{22}\varepsilon_{yy}+c_{26}\gamma_{xy},\\ 0&=c_{16}\varepsilon_{xx}+c_{26}\varepsilon_{yy}+c_{66}\gamma_{xy}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Виразимо із двох останніх рівнянь ε_{yy} і γ_{xy} через ε_{xx}:

$$\begin{aligned}c_{22}\varepsilon_{yy}+c_{26}\gamma_{xy}&=-c_{12}\varepsilon_{xx}\\ c_{26}\varepsilon_{yy}+c_{66}\gamma_{xy}&=-c_{16}\varepsilon_{xx}.\end{aligned}, \tag{3.24 а}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно ε_{yy} і γ_{xy} отримаємо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy}&=\frac{-c_{12}\varepsilon_{xx}c_{66}+c_{16}\varepsilon_{xx}c_{26}}{c_{22}c_{66}-c_{26}^2}=\frac{-c_{12}\varepsilon_{xx}c_{66}+c_{16}\varepsilon_{xx}c_{26}}{M_{11}}\\ \gamma_{xy}&=\frac{c_{12}\varepsilon_{xx}c_{26}-c_{16}\varepsilon_{xx}c_{22}}{c_{22}c_{66}-c_{26}^2}=\frac{c_{12}\varepsilon_{xx}c_{26}-c_{16}\varepsilon_{xx}c_{22}}{M_{11}}\end{aligned},$$

де $M_{11} = \begin{vmatrix} c_{22} & c_{26} \\ c_{26} & c_{66} \end{vmatrix}$ – визначник системи рівнянь (3.24 а) та, одночасно, мінор елемента c_{11} матриці $[C]$ у (3.22).

Підставивши ε_{yy} і γ_{xy} у перше рівняння системи (3.24), отримаємо:

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\frac{-c_{12}\varepsilon_{xx}c_{66} + c_{16}\varepsilon_{xx}c_{26}}{M_{11}} + c_{16}\frac{c_{12}\varepsilon_{xx}c_{26} - c_{16}\varepsilon_{xx}c_{22}}{M_{11}} =$$

$$= \left[\, c_{11}M_{11} - c_{12}^2c_{66} + c_{12}c_{16}c_{26} + c_{16}c_{12}c_{26} - c_{16}^2c_{22}\right]\frac{\varepsilon_{xx}}{M_{11}} = E_{xx}\varepsilon_{xx}.$$

Отже

$$E_{xx} = \frac{det[C]}{M_{11}}, \tag{3.25}$$

де

$$det[C] = det\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

– визначник матриці $[C]$.

Розглядаючи рівняння (3.22) для випадку розтягу багатошарового композита у напрямі осі y за умов $\sigma_{xx} = 0, \tau_{xy} = 0$, після отримання і розв'язання системи рівнянь, аналогічної (3.24), відносно ε_{xx} і γ_{xy} і підстановки розв'язку у вираз для σ_{yy} отримаємо:

$$E_{yy} = \frac{det[C]}{M_{22}} = \frac{det[C]}{c_{11}c_{66} - c_{16}^2}, \tag{3.27}$$

Для розгляду чистого зсуву у рівняннях (3.22) потрібно прийняти $\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} = 0$. Виконуючи дії, аналогічні до двох попередніх випадків, отримаємо:

$$G_{xy} = \frac{det[C]}{M_{33}} = \frac{det[C]}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \tag{3.28}$$

Коефіцієнти Пуассона

$$\mu_{xy} = \frac{M_{12}}{M_{11}} = \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{c_{22}c_{66} - c_{26}^2}, \qquad \mu_{yx} = \mu_{xy}\frac{E_{yy}}{E_{xx}}. \tag{3.29}$$

У випадку ортотропного композита, якщо $c_{16} = c_{26} = 0$, отримаємо:

$$E_{xx} = c_{11} - c_{12}^2 / a_{22}\,,\; E_{yy} = c_{22} - c_{12}^2 / c_{11}\,,$$

$$G_{xy} = c_{66}\,, \quad \mu_{xy} = \frac{c_{12}}{c_{22}}, \quad \mu_{xy} = \frac{c_{12}}{c_{11}}. \tag{3.30}$$

Із аналізу рівнянь (3.22) і (3.23) можна зробити висновок, що порядок чергування шарів у пакеті багатошарового матеріалу не має значення з точки зору отримуваних величин компонент матриці жорсткості c_{ij}.

Приклад. Обчислити технічні сталі для тришарового пакету [–60 / 0_2 / 60], який складається з вуглепластика, для якого $E_1 = 1{,}8752 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 0{,}10302 \cdot 10^5$ МПа, $G_{12} = 0{,}03966 \cdot 10^5$ МПа, $\mu_{12} = 0{,}25$ $\mu_{21} = 0{,}0137$ (приклад п.2.3.2).

Розв'язок. Використаємо співвідношення загального вигляду. Для цього спочатку із використанням формул (2.26) обчислимо компоненти c_{ij}^0 матриці жорсткості [C_0] (2.25):

$$c_{11}^0 = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = \frac{1{,}8752 \cdot 10^5}{1 - 0{,}25 \cdot 0{,}0137} = 1{,}8814 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$c_{22}^0 = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = \frac{0{,}10302 \cdot 10^5}{1 - 0{,}25 \cdot 0{,}0137} = 0{,}1033 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$c_{12}^0 = \frac{E_1\mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = c_{11}^0\mu_{21} = 1{,}8814 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0137 = 0{,}025775 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

або

$$c_{12}^0 = \frac{E_2\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = c_{22}^0\mu_{12} = 0{,}1033 \cdot 10^5 \cdot 0{,}25 = 0{,}025775 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$c_{66}^0 = G_{12} = 0{,}03966 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Із використанням цих величин для кожного з шарів, орієнтованих під кутом $\varphi(k)$ за формулами (3.12) обчислимо коефіцієнти матриці жорсткості шару $c_{ij}^{\varphi(k)}$, що ураховує поворот локальних вісей шару відносно вісей *xyz*. Наприклад для компонент $c_{11}^{\varphi(k)}$ і $c_{66}^{\varphi(k)}$ шару 1 при $\varphi = -60^\circ$ отримаємо:

$$c_{11}^{\varphi}\left(\varphi=-60^{\circ}\right)=\left[cos^{4}\left(-60^{\circ}\right)\cdot 1{,}8814+sin^{4}\left(-60^{\circ}\right)\cdot 0{,}1033\quad+\right.$$

$$\left.+2\left(0{,}025775+2\cdot 0{,}03966\right)sin^{2}\left(-60^{\circ}\right)cos^{2}\left(-60^{\circ}\right)\right]\cdot 10^{5}=0{,}2155\cdot 10^{5}\ \text{МПа}$$

$$c_{66}^{\varphi}\left(\varphi=-60^{\circ}\right)=\left[\left(1{,}8814+0{,}1033-2\cdot 0{,}025775-4\cdot 0{,}03966\right)\times\right.$$

$$\left.\times sin^{2}\left(-60^{\circ}\right)cos^{2}\left(-60^{\circ}\right)+0{,}03966\right]\cdot 10^{5}=0{,}37276\cdot 10^{5}\ \text{МПа}$$

Обчислення інших компонент $c_{ij}^{\varphi(k)}$ виконуються аналогічно. В результаті отримаємо наступні матриці жорсткості шарів вигляду (3.21) у вісях *xyz:*

$$\left[C_{-60^{\circ}}^{(1)}\right]=\begin{bmatrix}0{,}21549 & 0{,}35888 & -0{,}19332\\ 0{,}35888 & 1{,}10301 & -0{,}57707\\ -0{,}19332 & -0{,}57707 & 0{,}37276\end{bmatrix}\cdot 10^{5}\ \text{МПа},$$

$$\left[C_{0^{\circ}}^{(2)}\right]=\begin{bmatrix}1{,}8814 & 0{,}02578 & 0\\ 0{,}02578 & 0{,}1033 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}03966\end{bmatrix}\cdot 10^{5}\ \text{МПа},$$

$$\left[C_{60^{\circ}}^{(3)}\right]=\begin{bmatrix}0{,}21549 & 0{,}35888 & 0{,}19332\\ 0{,}35888 & 1{,}10301 & 0{,}57707\\ 0{,}19332 & 0{,}57707 & 0{,}37276\end{bmatrix}\cdot 10^{5}\ \text{МПа}.$$

Очевидно, що для шару 2 при $\varphi=0^{\circ}$ компоненти матриці $\left[C_{\varphi}^{(k)}\right]$ збігаються з компонентами матриці жорсткості в місцевій системі координат шару, а для шарів 1 і 3 з кутами однакової абсолютної величини і різними знаками компоненти $\left(C_{\varphi}^{(k)}\right)_{11}$, $\left(C_{\varphi}^{(k)}\right)_{22}$, $\left(C_{\varphi}^{(k)}\right)_{66}$ збігаються, а $\left(C_{-\varphi}^{(k)}\right)_{12}=\left(C_{\varphi}^{(k)}\right)_{12}$ і $\left(C_{-\varphi}^{(k)}\right)_{16}=\left(C_{\varphi}^{(k)}\right)_{16}$. Цю властивість, яка випливає з формул (3.12), можна використовувати або для зменшення обчислювальних витрат, або для контролю правильності результатів при виконанні обчислень із використанням засобів обчислювальної математики Excel, Matlab та інших, які дозволяють суттєво оптимізувати витрати часу для проведення подібних обчислень.

При заданих товщинах шарів для їх відносних товщин (3.3) отримаємо:

$$\bar{h}^{(1)} = 0{,}25,\ \bar{h}^{(2)} = 0{,}5,\ \bar{h}^{(3)} = 0{,}25.$$

З урахуванням цього обчислимо компоненти матриці жорсткості багатошарового КМ (3.23). Наприклад:

$$c_{11} = \left[0{,}21549 \cdot 0{,}25 + 1{,}8814 \cdot 0{,}5 + 0{,}21549 \cdot 0{,}25\right] \cdot 10^5 = 1{,}04845 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

Після аналогічного обчислення інших компонент отримаємо матрицю жорсткості багатошарового КМ:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1{,}04845 & 0{,}19233 & 0 \\ 0{,}1923 & 0{,}60315 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}20621 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \text{ МПа} \qquad (3.31)$$

Визначник цієї матриці і головні мінори дорівнюють:

$$det[C] = 0{,}12277 \cdot 10^{15},\ M11 = 0{,}12438 \cdot 10^{10},$$

$$M22 = 0{,}21620 \cdot 10^{10},\ M33 = 0{,}59538 \cdot 10^{10}.$$

За формулами (3.25), (3.27) і (3.28) знаходимо:

$$E_{xx} = \frac{0{,}12277 \cdot 10^{15}}{0{,}12438 \cdot 10^{10}} = 0{,}98712 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$E_{yy} = \frac{0{,}12277 \cdot 10^{15}}{0{,}21620 \cdot 10^{10}} = 0{,}56787 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$G_{xy} = \frac{0{,}12277 \cdot 10^{15}}{0{,}59538 \cdot 10^{10}} = 0{,}20621 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Порівнюючи ці результати з власними характеристиками вуглепластика і ураховуючи, що локальні вісі 1 і 2 окремого шару вуглепластика збігаються з вісями *x* і *y* пакету, зауважимо наступне: модуль пружності за розтягу для розглянутого пакету порівняно з окремим шаром вуглепластику у напряму *x* є меншим майже в 2 рази, а у напрямі *y* є більшим в 5,5 разів; відмінність модуля пружності за розтягу в двох взаємно перпендикулярних напрямах зменшилась від $E_1/E_2 = 1{,}8752 \cdot 10^5 / 0{,}10302 \cdot 10^5 \approx 18{,}7$ разів до $E_{xx}/E_{yy} = 0{,}98712 \cdot 10^5 / 0{,}56787 \cdot 10^5 \approx 1{,}74$ рази; модуль пружності за зсуву збільшився приблизно в 5 разів.

Для коефіцієнтів Пуассона згідно (3.29) отримаємо:

$$\mu_{xy} = \frac{M_{12}}{M_{11}} = \frac{(0{,}19233 \cdot 0{,}20621 - 0) \cdot 10^{10}}{0{,}12438 \cdot 10^{10}} = 0{,}3189,$$

$$\mu_{yx} = 0{,}3189 \frac{0{,}56787 \cdot 10^{5}}{0{,}98712 \cdot 10^{5}} = 0{,}1834.$$

Відмінність цих величин порівняно із окремим шаром вуглепластика також суттєво зменшилась (від майже 18 до менше ніж 1,5 разів, що є сумірним з зменшенням відмінностей модуля пружності у повздовжньому напряму).

Таким чином, формування багатошарового композиту дозволяє зменшити відмінність фізико-механічних властивостей в різних напрямах, зберігаючи високі показники питомої жорсткості і питомої міцності матеріалу в цілому.

Зауважимо також, що для даного пакету багатошарового композиту при проведенні обчислень із використанням загальних формул було отримано, що $c_{16} = c_{26} = 0$, тобто такий пакет є ортотропним матеріалом і, після обчислення числових значень компонент матриці жорсткості (3.31) для подальшого обчислення пружних характеристик можна було використати спрощені формули (3.30). Такі спрощення формул для обчислення пружних характеристик можуть бути отримані і для інших широко вживаних у практиці окремих видів структури пакету шарів багатошарового матеріалу.

З цієї точки зору розрізняють наступні види комбінацій шарів, які часто використовуються під час створення конструкцій із композитних матеріалів.

1. Ортогонально–орієнтовані матеріали – композити, які складаються із *n* шарів, частина з яких укладена під кутом $\varphi^{(1)} = 0^{\circ}$, а інші під кутом $\varphi^{(2)} = 90^{\circ}$. При цьому між компонентами матриці жорсткості пакету $[C]$ в (3.22) і компонентами матриці жорсткості шару (2.30) виконуються співвідношення:

$$c_{12} = c_{12}^{0},\ c_{66} = c_{66}^{0},\ c_{16} = c_{26} = 0.$$

Головні осі ортотропії збігаються з головними осями *xyz*;

2. Перехресно–армовані матеріали – композити, які складаються із 2*n* шарів, частина з яких укладені під кутом φ до осі *x*, а інші під кутом $-\varphi$ до

осі *x*. У випадку укладання шарів під кутом $\varphi = \pm 45^{\circ}$ отримаємо ортогонально- армований матеріал, для якого $c_{16} = c_{26} = 0$.

3. Квазіізотропні матеріали – композити із орієнтацією шарів однакової товщини під кутом $\varphi^{(k)} = \dfrac{k\pi}{n}$ $(\mathrm{k} = 1,2,3,...\mathrm{n})$, $\mathrm{n} \geq 3$. Такі матеріали можна вважати ортотропними і тому $c_{16} = c_{26} = 0$. Найпростіші приклади квазіізотропних матеріалів – композити з схемою укладання шарів $[30°, -30°,\ 90°]$ або $[0°, 45°,\ 90°, -45°]$.

Визначимо модуль пружності за одновісного деформування двох типів композитів: перехресно- армованого матеріалу із структурою армування $[\pm\varphi]$ і односпрямованого матеріалу за розтягання під кутом φ до напряму армування.

Розглянемо деформацію зазначених композитних матеріалів у напрямі осі *x*. Модуль пружності E_{xx} визначається згідно (3.25). Перехресно-армований матеріал із структурою армування $[\pm\varphi]$ є ортотропним матеріалом, і коефіцієнти матриці жорсткості $[C]$ відповідно до (3.23) дорівнюють сумі відповідних жорсткостей односпрямованого матеріалу в системі координат *xyz*. Враховуючи властивості тригонометричних функцій $cos(+\varphi) = cos(-\varphi)$, $sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ і рівняння для c_{16}^{φ} і c_{26}^{φ} з (3.12) отримаємо що коефіцієнти узагальненої матриці жорсткості для такого матеріалу $c_{16} = c_{26} = 0$. Таким чином, узагальнена матриця жорсткості перехресно-армованого матеріалу із структурою армування $[\pm\varphi]$ набуде вигляду:

$$[C(\pm\varphi] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \qquad (3.32)$$

У випадку розтягання односпрямованого матеріалу під кутом φ до напряму армування узагальнена матриця жорсткості буде повністю заповнена і матиме вигляд:

$$[C(\varphi)] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{bmatrix}. \qquad (3.33)$$

Відмінності у структурі узагальнених матриць жорсткості (3.32), (3.33) можуть суттєво впливати на кінцеві значення величин технічних сталих КМ.

3.3.2. Пружні характеристики багатошарових композитів (об'ємний напружений стан)

Нехай композит складається із кількох шарів односпрямованого матеріалу по різному орієнтованих один відносно одного. Відповідно до рис. 3.1 маємо загальну систему координат *xyz* для КМ та локальні системи координат $1^{(k)}2^{(k)}3^{(k)}$ (k = 1,2,3…..*n)* для кожного з *n* шарів. Можна побачити, що у глобальних осях *xyz* , які повернені відносно кожного шару, армований шар має анізотропні властивості й одну площину пружної симетрії. Тоді є чинними загальні співвідношення теорії пружності:

$$\left\{\sigma_{xy}^{(k)}\right\}=\left[A_{\varphi}^{(k)}\right]\left\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\right\}, \tag{3.34}$$

де $\left\{\sigma_{xy}^{(k)}\right\}=\left\{\sigma_{x}^{(k)}, \sigma_{e}^{(k)}, \sigma_{z}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}, \tau_{xz}^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}\right\}^{T}$,

$\left\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\right\}=\left\{\varepsilon_{x}^{(k)}, \varepsilon_{e}^{(k)}, \varepsilon_{z}^{(k)}, \gamma_{yz}^{(k)}, \gamma_{xz}^{(k)}, \gamma_{xy}^{(k)}\right\}^{T}$ матриці-стовпці напружень і деформацій шару *k* в напрямку осей *xyz* загальної системи координат;

$$\left[C_{\varphi}^{(k)}\right]=\begin{bmatrix} c_{11}^{\varphi(k)} & c_{12}^{\varphi(k)} & c_{13}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ .. & c_{22}^{\varphi(k)} & c_{23}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & c_{33}^{\varphi(k)} & 0 & 0 & 0 \\ .. & ... & .. & c_{44}^{\varphi(k)} & c_{45}^{\varphi(k)} & 0 \\ .. & сим & .. & .. & c_{55}^{\varphi(k)} & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & c_{66}^{\varphi(k)} \end{bmatrix} - \tag{3.35}$$

матриця жорсткості анізотропного шару *k* в напряму осей *xyz* загальної системи координат.

Подамо рівняння (3.34) у вигляді двох наступних рівнянь:

$$\left\{\sigma_{x}^{(k)}\right\}=\left[C_{x}^{(k)}\right]\left\{\varepsilon_{x}^{(k)}\right\}, \qquad \left\{\sigma_{x3}^{(k)}\right\}=\left[C_{x3}^{(k)}\right]\left\{\varepsilon_{x3}^{(k)}\right\}, \tag{3.36}$$

де $\left\{\sigma_{x}^{(k)}\right\}=\left\{\sigma_{x}^{(k)}, \sigma_{y}^{(k)}, \sigma_{z}^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}\right\}^{T}$, $\left\{\sigma_{x3}^{(k)}\right\}=\left\{\tau_{yz}^{(k)}, \tau_{xz}^{(k)}\right\}^{T}$,

$\left\{\varepsilon_{x}^{(k)}\right\}=\left\{\varepsilon_{x}^{(k)}, \varepsilon_{y}^{(k)}, \varepsilon_{z}^{(k)}, \gamma_{xy}^{(k)}\right\}^{T}$, $\left\{\varepsilon_{x3}^{(k)}\right\}=\left\{\gamma_{yz}^{(k)}, \gamma_{xz}^{(k)}\right\}^{T}$,

$$\left[C_x^{(k)}\right]=\begin{bmatrix} c_{11}^{\varphi(k)} & c_{12}^{\varphi(k)} & c_{13}^{\varphi(k)} & c_{16}^{\varphi(k)} \\ .. & c_{22}^{\varphi(k)} & c_{23}^{\varphi(k)} & c_{26}^{\varphi(k)} \\ .. & .. & c_{33}^{\varphi(k)} & c_{36}^{\varphi(k)} \\ сим. & .. & .. & c_{66}^{\varphi(k)} \end{bmatrix}, \tag{3.37}$$

$$\left[C_{x3}^{(k)}\right]=\begin{bmatrix} c_{44}^{\varphi(k)} & c_{45}^{\varphi(k)} \\ c_{45}^{\varphi(k)}. & c_{55}^{\varphi(k)} \end{bmatrix}. \tag{3.38}$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{\varphi(k)}\overline{h}^{(k)}. \tag{3.39}$$

Для КМ, утвореного з *n* різноорієнтованих шарів односпрямованого матеріалу, зведені пружні характеристики розглянутого пакета знаходять із співвідношень, аналогічних (3.27) – (3.29):

$$\left\{\sigma_x\right\}=\left[C_x\right]\left\{\varepsilon_x\right\}, \qquad \left\{\sigma_{x3}\right\}=\left[C_{x3}\right]\left\{\varepsilon_{x3}\right\}, \tag{3.40}$$

Використані в останньому виразі вектори і матриці мають структуру, ідентичну до (3.36)-(3.39).

Технічні сталі багатошарового композита за умов розтягу можна отримати, розглядаючи його деформування за кожним з характерним напрямів.

При розтягу за напрямом вісі *x,* міркуючи аналогічно до випадку плоскої деформації (формули (3.24)-(3.26)), запишемо першу з систем рівнянь (3.40) за умов $\sigma_{xx}\neq 0, \sigma_{yy}=0,\ \sigma_{zz}=0,\ \tau_{xy}=0$. Друга з систем рівнянь в (3.40) при цьому буде однорідною ($\tau_{xz}=\tau_{zy}=0$). Отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11}\varepsilon_{xx}+c_{12}\varepsilon_{yy}+c_{13}\varepsilon_{zz}+c_{16}\gamma_{xy}, \\ 0 &= c_{12}\varepsilon_{xx}+c_{22}\varepsilon_{yy}+c_{23}\varepsilon_{zz}+c_{26}\gamma_{xy}, \\ 0 &= c_{13}\varepsilon_{xx}+c_{23}\varepsilon_{yy}+c_{33}\varepsilon_{zz}+c_{36}\gamma_{xy}, \\ 0 &= c_{16}\varepsilon_{xx}+c_{26}\varepsilon_{yy}+c_{36}\varepsilon_{zz}+c_{66}\gamma_{xy}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Виразимо із трьох останніх рівнянь ε_{yy}, ε_{zz}, γ_{xy} через ε_{xx}:

$$\begin{aligned} c_{22}\varepsilon_{yy}+c_{23}\varepsilon_{zz}+c_{26}\gamma_{xy} &= -c_{12}\varepsilon_{xx}, \\ c_{23}\varepsilon_{yy}+c_{33}\varepsilon_{zz}+c_{36}\gamma_{xy} &= -c_{13}\varepsilon_{xx}, \\ c_{26}\varepsilon_{yy}+c_{36}\varepsilon_{zz}+c_{66}\gamma_{xy} &= -c_{16}\varepsilon_{xx} \end{aligned} \tag{3.41 а}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно ε_{yy}, ε_{zz}, γ_{xy} отримаємо:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} \frac{det\begin{bmatrix} -c_{12} & c_{23} & c_{26} \\ -c_{13} & c_{33} & c_{36} \\ -c_{16} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} & c_{26} \\ c_{23} & c_{33} & c_{36} \\ c_{26} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix}}, \qquad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} \frac{det\begin{bmatrix} c_{22} & -c_{12} & c_{26} \\ c_{23} & -c_{13} & c_{36} \\ c_{26} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} & c_{26} \\ c_{23} & c_{33} & c_{36} \\ c_{26} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix}},$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xx} \frac{det\begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} & -c_{12} \\ c_{23} & c_{33} & -c_{13} \\ c_{26} & c_{36} & -c_{16} \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} & c_{26} \\ c_{23} & c_{33} & c_{36} \\ c_{26} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix}}.$$

Величина в знаменнику цих виразів – мінор елемента c_{11} узагальненої матриці $\left[C_x\right]$. Підставивши ці вирази у перше з рівнянь (3.41) отримаємо:

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{xx} \frac{det\begin{bmatrix} -c_{12} & c_{23} & c_{26} \\ -c_{13} & c_{33} & c_{36} \\ -c_{16} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix}}{M_{11}} + c_{13}\varepsilon_{xx} \frac{det\begin{bmatrix} c_{22} & -c_{12} & c_{26} \\ c_{23} & -c_{13} & c_{36} \\ c_{26} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix}}{M_{11}} +$$

$$+ c_{16}\varepsilon_{xx} \frac{det\begin{bmatrix} c_{22} & -c_{12} & c_{26} \\ c_{23} & -c_{13} & c_{36} \\ c_{26} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix}}{M_{11}} = det\left[C_{xx}\right] \frac{\varepsilon_{xx}}{M_{11}} = E_{xx}\varepsilon_{xx}$$

Звідки

$$E_{xx} = \frac{det\left[C_{xx}\right]}{\mathrm{M}_{11}}. \qquad (3.42)$$

Аналогічним чином, почергово розглядаючи ненульові значення кожної з компонент напружень у системі рівнянь (3.40) і виконуючи відповідні перетворення, можна знайти значення інших технічних сталих:

$$E_{yy} = \frac{det[C_{xx}]}{\mathrm{M}_{22}}, \qquad E_{zz} = \frac{det[C_{xx}]}{\mathrm{M}_{33}}, \tag{3.43}$$

$$G_{xy} = \frac{det[C_{xx}]}{\mathrm{M}_{44}}, \qquad G_{x3} = c_{55} - \frac{(c_{45})^2}{c_{44}}, \quad G_{y3} = c_{44} - \frac{(c_{45})^2}{c_{55}}, \tag{3.44}$$

де E_{xx}, E_{yy}, E_{zz} – модулі пружності першого роду; G_{xy}, G_{x3}, G_{y3} – модулі зсуву;

$$\mu_{xy} = \frac{M_{12}}{M_{11}}, \quad \mu_{xz} = \frac{M_{13}}{M_{11}}, \quad \nu_{yz} = \frac{M_{23}}{M_{22}}, \tag{3.45}$$

де $\mu_{xy}, \mu_{xz}, \mu_{yz}$ – коефіцієнти Пуассона.

Інші три значення коефіцієнтів Пуассона $\mu_{yx}, \mu_{zx}, \mu_{zy}$ знаходять за допомогою співвідношень

$$\mu_{ij} E_j = \mu_{ji} E_i \quad (i, j = x, y, z). \tag{3.46}$$

Тут перший індекс коефіцієнта Пуассона вказує на напрям дії зусилля, а другий – на напрям поперечної деформації, викликаної цим зусиллям.

4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ КОМПОЗИТІВ

Оцінка міцності деталей машин та елементів конструкцій за відомим напруженим станом є однією з основних інженерних задач. Виникнення граничного напруженого стану пов'язане з досягненням навантаженням значення, за якого відбувається або руйнування матеріалу, або утворюються деформації, що перешкоджають експлуатації конструкції.

Прогнозування граничної міцності композиційного матеріалу за відомими фізико-механічними характеристиками його складових є досить складною задачею, що обумовлено необхідністю одночасного аналізу значної кількості факторів. Крім інформації про міцнісні характеристики матеріалів волокна і матриці є низка факторів, які стосуються взаємодії складових КМ, наявності дефектів на межі їх з'єднання та інших аспектів, які важко піддаються прогнозуванню і кількісному опису.

4.1. Міцність односпрямованого композиту

Міцність односпрямованого композитного матеріалу, а також шаруватого композиту, що складається з односпрямованих шарів із різною орієнтацією армуючих волокон, можна досліджувати за допомогою двох основних підходів: структурного та феноменологічного. Структурний підхід, який базується на мікромеханіці, пов'язує міцнісні характеристики композиту з властивостями його складових компонентів. У цьому підході необхідно побудувати структурну модель матеріалу, визначити напруження та деформації в кожному компоненті, а потім порівняти їх із граничними значеннями. Однак реалізація цього підходу видається занадто складною.

За феноменологічного підходу неоднорідний композит розглядають як суцільне середовище (однорідний анізотропний матеріал), математична модель якого максимально враховує експериментальні дані.

Для опису руйнування односпрямованого композиційного матеріалу скористаємося феноменологічним підходом, що полягає у створенні досить простої математичної моделі, яка максимально враховує результати експериментів. В основу цього підходу покладено гіпотезу,

згідно з якою волокнистий композит вважається однорідним анізотропним матеріалом.

За відсутності інших зовнішніх впливів (хімічних, теплових, радіаційних тощо) руйнування матеріалу зазвичай пов'язують із напруженим станом. При цьому критерій руйнування можна записати у вигляді

$$f(\sigma_{ij}, F) = 0, \tag{4.1}$$

де F - деякі характеристики міцності матеріалу.

Рівняння (4.1) для анізотропного матеріалу відрізняється від аналогічного рівняння для ізотропного матеріалу насамперед тим, що в разі ізотропії F являє собою єдину скалярну константу (наприклад, межа міцності σ_M), а для анізотропного матеріалу F може бути сукупністю багатьох параметрів матеріалу, вид якої визначається конкретним записом критерію руйнування.

Переваги та високі механічні характеристики композитів найповніше реалізуються в орієнтованих матеріалах, армованих паралельними волокнами, тобто в так званих односпрямованих шарах або моношарах, з яких шляхом укладання в різних напрямах утворюються шаруваті композити (рис. 3.1).

4.1.1. Міцність односпрямованого композиту за розтягання вздовж волокон

Розглянемо особливості деформації односпрямованого КМ під дією розтягуючого навантаження, прикладеного паралельно осі волокон.

Зробимо наступні припущення:

- волокна, укладені паралельно осі навантаження, не торкаються один одного;
- всі волокна, ідентичні за формою, розмірами та міцністю, однаково взаємодіють з матрицею,
- міцність зв'язку на межі волокно-матриця достатня для того, щоб забезпечити сумісну деформацію складових аж до руйнування,
- матеріал матриці є більш пластичним і має менший модуль пружності, ніж матеріал волокна.

Для визначення напружень, за яких відбувається руйнування КМ за розтягу вздовж волокон, проаналізуємо діаграми деформування, які схематично представлені на рис. 4.1.

Під час описання процесу деформування односпрямованого КМ використаємо наступні характеристики міцності для кожної діаграми:

$\sigma_{пц}, \varepsilon_{пц}$ – межа пропорційності за розтягання і відповідна їй деформація;

$\sigma_{м}, \varepsilon_{м}$ – межа міцності за розтягання і відповідна їй деформація.

Індекси «В», «М», «К», як і раніше, позначають належність зазначених характеристик до матеріалів волокон, матриці або композиту, як суцільного матеріалу.

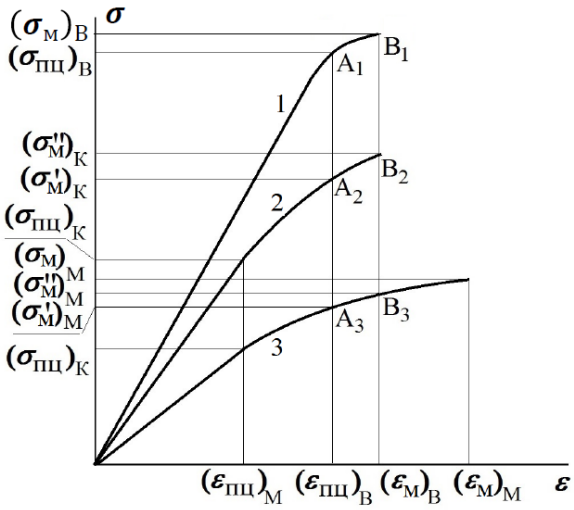


Рис.4.1. Діаграми деформування: 1– матеріал волокна, 2 – композиційний матеріал, 3 – матеріал матриці.

Якщо скористатись припущенням, що міцність зв'язку на межі волокно–матриця достатня для забезпечення сумісного деформування компонентів до руйнування, тобто що $(\varepsilon_M)_B = (\varepsilon_M)_K \le (\varepsilon_M)_K$

$(\varepsilon_M)_B = (\varepsilon_M)_K \le (\varepsilon_M)_K$, то в процесі деформування композиційного матеріалу можна виділити наступні характерні стадії.

На першій стадії за деформацій $(\varepsilon)_M < (\varepsilon)_B < (\varepsilon)_K < (\varepsilon_{ПЦ})_M$, деформування матеріалів матриці, волокон і композиту в цілому відбувається пружно. Ця стадія обмежується напруженнями межі пропорційності для матриці $(\sigma_{ПЦ})_M$ Напруження в композиті на цій стадії складають $(\sigma_{ПЦ})_K$. За перевищення зазначених напружень матеріал матриці переходить в стадію пластичного деформування, волокна продовжують деформуватись пружно, але композит в цілому набуває обмеженого нелінійного деформування. Момент досягнення матеріалом

волокна деформацій і напружень, які відповідають на діаграмі 1 точці A_1 з координатами $\left((\varepsilon_{ПЦ})_B,(\sigma_{ПЦ})_B\right)$, завершує другу стадію і може вважатись моментом втрати несучої здатності композиту. Характерні для цього моменту напруження для волокон, матриці і композиту позначені на діаграмах 2 і 3, як $(\sigma'_M)_K$ та $(\sigma'_M)_M$ – точки A_2 і A_3, відповідно. На третій стадії деформування матеріал матриці і матеріал волокна знаходяться в стані пластичної деформації. На цій стадії відбувається відносно невелике зростання напруження в матеріалі і його складових: від $(\sigma_{ПЦ})_B$ до $(\sigma_M)_B$ у матеріалі волокна (точка B_1) та від $(\sigma'_M)_K$ до $(\sigma_M)_K$ у композиті (точка B_1 на діаграмі 2). Момент, коли напруження у волокнах досягають межі міцності матеріалу волокна $(\sigma_M)_B$, визначає руйнування композиту в цілому. Залежно від властивостей волокна і матриці останні дві стадії можуть бути відсутні. Зокрема, при виготовленні волокон з крихких матеріалів (наприклад скловолокно), в цьому випадку $(\sigma_{ПЦ})_B \approx (\sigma_M)_B$.

Зовнішнє навантаження, яке сприймає КМ, дорівнює сумі навантажень, які розподіляються на матрицю і волокна. Границя міцності КМ найпростіше визначається за правилом сумішей (2.31), коли $(\sigma_м)_к$ можна записати у вигляді лінійної функції від об'ємної частки матеіалу волокон ψ:

$$(\sigma_M)_K = (\sigma_M)_B\psi + (\sigma_M)_M(1-\psi). \tag{4.2}$$

За наявності 3-ї стадії:

$$(\sigma_M)_K = (\sigma_M)_B\psi + (\sigma''_M)_M(1-\psi).$$

За відсутності 3-ї стадії замість $(\sigma''_M)_M$ в рівняння 4.1 підставляють $(\sigma'_M)_M$:

$$(\sigma_M)_K = (\sigma_M)_B\psi + (\sigma'_M)_M(1-\psi).$$

Напруження $(\sigma''_M)_M$ і $(\sigma'_M)_M$ не дорівнюють межі міцності матеріалу матриці, а є величинами напруження в матриці під час розриву волокон. Для визначення $(\sigma''_м)_M$ і $(\sigma'_м)_M$ необхідно опустити перпендикуляри на вісь деформацій з точок B_1 і A_1 на діаграмі деформування волокон до перетину з точками B_3 і A_3 на діаграмі деформування матеріалу матриці.

Різниця між величинами $(\sigma'_м)_M$, $(\sigma''_м)_M$ і $(\sigma_м)_M$ залежить від пластичних властивостей матриці.

У багатьох випадках припущення, прийняті для виведення рівняння (4.1), порушуються. Руйнування волокон може відбуватися не одночасно, а послідовно, через наявність у волокнах дефектів. Більш дефектні волокна руйнуються за менших напружень, а волокна з меншою кількістю дефектів руйнуються за більших напружень. В цілому міцність композиту буде меншою порівняно з розрахованою за правилом сумішей. Те ж саме можна сказати у випадку, коли матриця має недостатній запас пластичності, що призводить до появи тріщин в тілі матриці і до передчасного руйнування КМ в цілому.

Однак, в деяких випадках реальна міцність односпрямованого КМ може виявитися навіть вищою за передбачену правилом сумішей. Наприклад, якщо пластична матриця армована пластичними волокнами, то при розтягуванні КМ зв'язок між волокнами і матрицею ускладнює утворення шийки на волокнах. Через що волокна в КМ деформуються більш рівномірно, ніж за їх розтягу в чистому вигляді (без матриці). Затримка в утворенні шийки зрештою збільшує умовну межу міцності волокон і, як наслідок, композиту в цілому.

Незважаючи на згадані випадки, слід відзначити, що правило сумішей широко вживається на практиці, оскільки зазвичай відхилення розрахункових значень міцності від експериментальних є невеликим.

Часто трапляється так, що відомі не діаграми деформування складових композиту, а лише значення їх меж міцності. В цьому випадку обчислення величини допустимих руйнівних напружень може бути здійснене із використанням наступних міркувань.

Якщо $(\varepsilon)_B < (\varepsilon)_M$, то, як вже було зазначено, руйнування КМ визначається руйнуванням волокон. Припускаючи в першому наближенні, що деформування композиту до руйнування, як і деформування волокон, здійснюється за лінійним законом, можемо записати:

$$(\varepsilon_M)_K = (\varepsilon_M)_B,\ (\varepsilon_M)_K = \frac{(\sigma_M)_K}{E_K} = \frac{(\sigma_M)_K}{E_1},\ (\varepsilon_M)_B = \frac{(\sigma_M)_B}{E_B}, \tag{4.3}$$

$$(\sigma_M)_K = \frac{(\sigma_M)_B}{E_B} E_1 = \frac{(\sigma_M)_B}{E_B}\left[E_B\psi + E_M(1-\psi)\right] \tag{4.4}$$

Після руйнування волокон максимальні напруження, які може витримувати КМ, відповідають напруженням, які витримує матеріал матриці. Їх величина дорівнює $\left(\sigma_M\right)_M (1-\psi)$. Якщо ці напруження більші,

ніж визначені за рівнянням (4.4), то композит може не зруйнуватись за подальшого зростання навантаження. Значення об'ємної частки волокон ψ, для якої є можливим збереження несучої здатності композиту після руйнування волокон називають *мінімальною об'ємної часткою волокон* і позначають $\psi_{\min}$. Для її визначення можна використати умову:

$$(\sigma_M)_M(1-\psi_{\min}) \geq \left(\frac{(\sigma_M)_B}{E_B}\left[E_B\psi_{\min} + E_M(1-\psi_{\min})\right] \right).$$

Звідки:

$$\psi_{\min} \geq \frac{(\sigma_M)_M - \dfrac{(\sigma_M)_B E_M}{E_B}}{(\sigma_M)_M + (\sigma_M)_B - \dfrac{(\sigma_M)_B E_M}{E_B}} \tag{4.5}$$

У випадку, якщо $(\varepsilon)_B > (\varepsilon)_M$, руйнування КМ визначається руйнуванням матриці. Отже, аналогічно до (4.3) і (4.4) будемо мати.

$$(\varepsilon_M)_K = (\varepsilon_M)_M; \quad (\varepsilon_M)_K = \frac{(\sigma_M)_K}{E_K} = \frac{(\sigma_M)_K}{E_1}; \; (\varepsilon_M)_M = \frac{(\sigma_M)_M}{E_M}$$

Звідки:

$$(\sigma_M)_K = \frac{(\sigma_M)_M}{E_M}E_1 = \frac{(\sigma_M)_M}{E_M}\left[E_B\psi + E_M\left(1-\psi\right)\right]. \tag{4.6}$$

Зі збільшенням об'ємної частки волокон ψ композит в цілому може мати менші допустимі напруження на розрив за розтягання, ніж матриця. Величина об'ємної частки волокон, за якої це можливо, носить назву *критичної об'ємної частки волокон* і позначається $\psi_{крит}$. Для її визначення можна використати умову:

$$(\sigma_M)_M > \frac{(\sigma_M)_B}{E_B}\left[E_B\psi_{крит} + E_M\left(1-\psi_{крит}\right)\right]. \tag{4.7}$$

Звідки

$$\psi_{крит} < \frac{(\sigma_B)_M - (\sigma_B)_B\dfrac{E_M}{E_B}}{(\sigma_B)_B - (\sigma_B)_B\dfrac{E_M}{E_B}}. \tag{4.8}$$

Отримані співвідношення дозволяють визначити межу міцності КМ виключно за показниками міцності (діаграмами деформування чи

окремими характеристиками) його складових без проведення експериментальних досліджень.

Приклад.

Визначити межу міцності і питому міцність односпрямованого вуглепластика за розтягання вздовж волокон. Об'ємний вміст волокон $\psi = 0,62$, характеристики складових: волокно – вуглецева нитка, $E_B = 3 \cdot 10^5 МПа,\ (\sigma_M)_B = 3000 МПа$, матриця – епоксидна смола, $E_M = 4 \cdot 10^3 МПа,\ (\sigma_M)_M = 60 МПа$.

Розв'язок. Обчислимо максимальні деформації за руйнування:

$$(\varepsilon_M)_B = \frac{(\sigma_M)_B}{E_B} = \frac{3000}{3 \cdot 10^5} = 0,01, \quad (\varepsilon_M)_M = \frac{(\sigma_M)_M}{E_M} = \frac{60}{4 \cdot 10^3} = 0,015.$$

Так як $(\varepsilon_M)_B < (\varepsilon_M)_M$, то руйнування КМ визначається руйнуванням волокон.

За правилом сумішей (4.2), використовуючи задані величини меж міцності волокна і матриці, отримаємо:

$$(\sigma_M)_K = (\sigma_M)_B \psi + (\sigma_M)_M (1-\psi) = 3000 \cdot 0,62 + 60 \cdot (1-0,62) = 1882,8 МПа$$

За формулою (4.4), будемо мати:

$$(\sigma_M)_K = \frac{(\sigma_M)_B}{E_B}\left[E_B \psi + E_M (1-\psi)\right] =$$

$$= \frac{3000}{3 \cdot 10^5}\left[3 \cdot 10^5 \cdot 0,62 + 4 \cdot 10^3 (1-0,62)\right] = 1875,2 МПа.$$

Відмінність результатів обчислень складає менше 0,5%.

Питому міцність вуглепластика обчислимо за формулою (2.53). Виходячи з отриманих результатів приймемо значення межі міцності КМ за розтягання вздовж волокон $(\sigma_M)_K \approx 1880 МПа$. Тоді, використовуючи отриману в п.2.5 величину питомої ваги вуглепластика $\rho = 1548 кг/м^3$, отримаємо питому міцність:

$$(\sigma_M)_{K\rho} = \frac{(\sigma_M)_K}{\rho} = \frac{1880}{1548} = 1,214.$$

Порівняємо питому міцність вуглепластика з питомою міцністю конструкційних металевих сплавів.

Для конструкційної сталі 40 ($\rho = 7800 кг/м^3$, межа текучості $\sigma_T = 340 МПа$):

$$\left(\sigma_T\right)_\rho = \frac{340}{7800} = 0,0436.$$

Для титанового сплаву ВТ5 ($\rho = 4950 кг/м^3$, $\sigma_T = 720 МПа$):

$$\left(\sigma_T\right)_\rho = \frac{720}{4950} = 0,145.$$

Тобто, питома міцність вуглепластика у 8..30 разів більша за аналогічну характеристику розглянутих металевих сплавів.

4.1.2. Міцність односпрямованого композиту за стискання вздовж волокон

У випадку деформування односпрямованого композиту в умовах стиску втрата міцності відбувається за іншими механізмами руйнування, ніж за розтягу.

Існує три характерних механізми руйнування за стиску: руйнування матриці або з'єднання волокно–матриця від деформацій розтягу; згинання та втрата стійкості волокон під дією зсуву або стиску; руйнування волокон за зсуву.

Руйнування матриці або з'єднання волокно–матриця від деформацій розтягу. За прикладання до матеріалу стискаючого навантаження вздовж волокон $\left(\sigma_1\right)_K$ величина стискаючої деформації в цьому ж напрямку становитиме

$$\left(\varepsilon_1\right)_K = \frac{\left(\sigma_1\right)_K}{E_K} = \frac{\left(\sigma_1\right)_K}{E_1}.$$

Деформації в поперечному напрямку $\left(\varepsilon_2\right)_K$ будуть деформаціями розтягу. Їх величину можна знайти із використанням більшого з коефіцієнтів Пуассона μ_{12} (2.38), (2.39). Руйнування відбувається, якщо поперечна деформація перевищує граничну поперечну деформацію розтягу $\left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_K$. В цьому випадку руйнування шару композиційного матеріалу відбудеться в напрямку, поперечному до дії навантаження. Таким чином умова міцності запишеться у вигляді:

$$\left(\varepsilon_2\right)_K = \mu_{12}\frac{\left(\sigma_1\right)_K}{E_1} \le \left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_K.$$

Відповідно, руйнуюче стискаюче напруження дорівнює:

$$\left(\sigma_{руйн}^{стиск}\right)_K = E_1 \frac{\left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_K}{\mu_{12}}. \qquad (4.9)$$

Значення E_1 і μ_{12} в (4.9) можна визначити за формулами (2.35) та (2.38), відповідно. Визначення величини $\left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_K$ потребує докладного розгляду стану композиційного матеріалу під дією розтягуючого напруження, спрямованого поперек волокон, що розглянуто в наступному параграфі (рис. 4.2., формула (4.18). Тоді, для шару композиту з характерним розміром (діаметром) волокна d та відстанню між центрами волокон s можна записати:

$$\left(\sigma_{руйн}^{стиск}\right)_K = \frac{E_1}{\mu_{12}}\left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_M \left[\frac{E_M}{E_B}\frac{d}{s} + \left(1 - \frac{d}{s}\right)\right]. \qquad (4.10)$$

Для визначення $\left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_K$ в (4.9) можна також використати наступну емпіричну формулу:

$$\left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_K = \left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_M \left(1 - \sqrt[3]{\psi}\right). \qquad (4.11).$$

Згинання та втрата стійкості волокон під дією зсуву або стиску.

Максимальні стискаючі напруження для втрати стійкості волокон дорівнюють:

$$\left(\sigma_{стійк}\right)_K = 2\left[\psi + E_M\left(1-\psi\right)\frac{E_M}{E_B}\right]\sqrt{\frac{\psi E_M E_B}{3\left(1-\psi\right)}}. \qquad (4.12)$$

Максимальні напруження зсуву для втрати стійкості волокон дорівнюють:

$$\left(\tau_{зсув}\right)_K = \frac{G_M}{1-\psi}. \qquad (4.13)$$

Руйнуюче напруження для композиту буде визначатись як мінімальне з отриманих за (4.12) і (4.13). Зауважимо, що в більшості випадків напруження, визначене за формулою (4.13) є більшим і руйнування відбувається саме внаслідок зсуву матеріалу матриці. Руйнування внаслідок стійкості волокон має місце лише в композитах з низькою об’ємною часткою волокон.

Розрив волокон при зсуві. У цьому випадку з правила сумішей (2.31) для однонаправленого композиту отримаємо:

$$\left(\tau_{12\,руйн}\right)_K = \left(\tau_{12\,руйн}\right)_B \psi + \left(\tau_{12\,руйн}\right)_M (1-\psi).$$

де $\tau_{12\,руйн}$ – руйнуючі напруження зсуву для композита та матеріалів волокна і матриці.

Максимальні напруження зсуву в шарі під дією стискаючого вздовж волокон напруження спрямовані під кутом 45° до напряму волокон і дорівнюють половині таких стискаючих напружень. Тому

$$\left(\sigma_{руйн}^{стиск}\right)_K = 2\left(\tau_{12\,руйн}\right)_K = 2\left[\left(\tau_{12\,руйн}\right)_B \psi + \left(\tau_{12\,руйн}\right)_M (1-\psi)\right]. \qquad (4.14)$$

Перелічені моделі для визначення граничного стискаючого навантаження для композиційного матеріалу ґрунтуються на аналізі різних механізмів руйнування. Отримані з їх використанням результати не завжди відповідають експериментальним даним, тому в якості консервативної оцінки можна розглядати мінімальне з значень, отриманих за всіма трьома механізмами. Крім того, іноді не всі використані тут вихідні дані можуть бути в наявності.

Невідповідність або часткова відповідність результатів, отриманих за розглянутими моделями експериментальним результатам пов'язана з низкою факторів, серед яких нерівномірне розташування волокон, викривлення волокон, недостатнє зчеплення волокон з матрицею, а також вихідна анізотропність складових композиційного матеріалу.

4.1.3. Міцність односпрямованого композиту за розтягання (стискання) поперек волокон

Розглянемо шар композиційного матеріалу, який знаходиться під дією розтягуючого навантаження, що спричиняє в ньому напруження $\left(\sigma_2\right)_K$ Нехай в перерізі шару композиту x_1Ox_2 характерний розмір (діаметр) волокна дорівнює d, а відстань між центрами волокон s (рис.4.2).

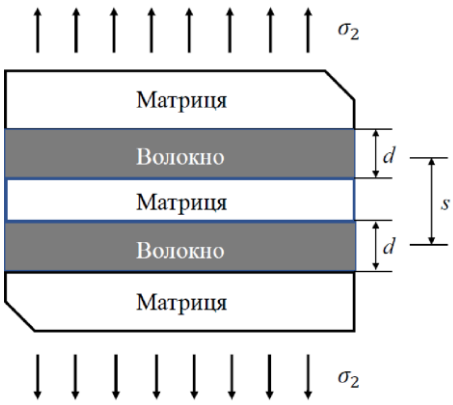


Рис.4.2. Поперечний переріз шару композиту при розтязі поперек волокон

Величина повного видовження матеріалу Δ_K в поперечному напрямку для характерного фрагмента композиту дорівнює сумі видовжень матеріалів волокон Δ_B і матриці Δ_M:

$$\Delta_K = \Delta_B + \Delta_M . \tag{4.15}$$

Ураховуючи взаємозв'язок деформацій і повних переміщень отримаємо

$$(\varepsilon_2)_K s = (\varepsilon_2)_B d + (\varepsilon_2)_M (s - d). \tag{4.16}$$

Звідки

$$(\varepsilon_2)_K = (\varepsilon_2)_B \frac{d}{s} + (\varepsilon_2)_M \left(1 - \frac{d}{s}\right). \tag{4.17}$$

Зважаючи, що при поперечному навантаженні напруження у волокнах і матриці однакові, виконується співвідношення

$$E_B (\varepsilon_2)_B = E_M (\varepsilon_2)_M .$$

Ураховуючи це, з (4.17) для граничної поперечної деформації розтягу композиту у напряму 2, яка визначається руйнуванням матриці отримаємо:

$$(\varepsilon_{2\,руйн})_K = (\varepsilon_{2\,руйн})_M \left[\frac{E_M}{E_B} \frac{d}{s} + (1 - \frac{d}{s}) \right]. \tag{4.18}$$

Тоді руйнуюче напруження дорівнює:

$$(\sigma_{руйн})_K = E_2 (\varepsilon_{2\,руйн})_K . \tag{4.19}$$

Формули (4.18) і (4.19) дозволяють отримати величину руйнуючого напруження як у випадку розтягу так і у випадку стиску. У кожному з цих

випадків $\left(\varepsilon_{2\,руйн}\right)_M$ являтиме собою величину деформації, яка відповідатиме руйнуванню матеріалу матриці.

Отриманий вираз передбачає ідеальне з'єднання волокон і матриці. В іншому випадку показники поперечної міцності композиту будуть меншими.

4.1.4. Міцність односпрямованого композиту за чистого зсуву

Визначення допустимих напружень для шару композиційного матеріалу в умовах зсуву виконується з міркувань, аналогічних до використаних при розгляді розтягу поперек волокон.

Розглянемо шар композиційного матеріалу, показаного на рис. 4.2, з характерним розміром (діаметром) волокна d, і відстанню між центрами волокон s, який знаходиться під дією навантаження, що спричиняє в ньому напруження зсуву $\left(\tau_{12}\right)_K$. Величини переміщень і деформацій зсуву, отримані як суми відповідних величин матеріалів волокон і матриці, визначаються за формулами (4.15) і (4.16), звідки:

$$\left(\gamma_{12}\right)_K = \left(\gamma_{12}\right)_B \frac{d}{s} + \left(\gamma_{12}\right)_M \left(1 - \frac{d}{s}\right). \tag{4.20}$$

Зважаючи, що при зсуві напруження у волокнах і матриці однакові, для деформацій зсуву у волокні і матриці виконується співвідношення

$$G_{12B}\left(\gamma_{12}\right)_B = G_{12M}\left(\gamma_{12}\right)_M .$$

Ураховуючи це, з (4.15) для граничної деформації зсуву композиту $\left(\gamma_{12\,руйн}\right)_K$, яка визначається руйнуванням матриці отримаємо:

$$\left(\gamma_{12\,руйн}\right)_K = \left(\gamma_{12\,руйн}\right)_M \left[\frac{G_{12M}}{G_{12B}}\frac{d}{s} + \left(1-\right)\frac{d}{s}\right]$$

Тоді руйнуюче напруження дорівнює:

$$\left(\tau_{руйн}\right)_K = G_{12}\left(\gamma_{12\,руйн}\right)_K = G_{12}\left(\gamma_{12\,руйн}\right)_M \left[\frac{G_{12M}}{G_{12B}}\frac{d}{s} + \left(1-\right)\frac{d}{s}\right]. \tag{4.21}$$

Так само, як і у випадку розтягу поперек волокон, цей вираз передбачає ідеальне з'єднання волокон і матриці.

4.2. Оцінка міцності односпрямованого композиту за складного напруженого стану

Для оцінювання міцності композиційних матеріалів, що перебувають у складному напруженому стані, найчастіше використовують феноменологічні теорії. Феноменологічні критерії граничного стану описують макромеханічну поведінку КМ в цілому, без урахування мікромеханічних особливостей, які виникають у процесі деформування композиту. Вони не виводяться аналітично, а постулюються на основі узагальнення експериментальних даних.

Для композитів феноменологічний підхід має суттєві переваги, оскільки з'являється можливість використання загальної умови міцності для матеріалів, різних за складом і технологією, але однакових за симетрією властивостей, а також для матеріалів зі значною анізотропією, для яких один і той самий напружений стан може призвести до різних граничних станів, якщо змінюються знаки напружень або їхня орієнтація.

Однак, такий підхід має і недоліки, зокрема, їх узагальнений характер означає, що вони не завжди можуть точно передбачити конкретні режими руйнування або врахувати складні взаємодії в мікроструктурі матеріалу. Крім того застосування феноменологічних критеріїв руйнування потребує визначення сталих граничного стану односпрямованих композитів і повторення всіх експериментів з визначення цих сталих за будь-якої зміни характеристик волокна і матриці, об’ємної частки складових, технології виготовлення КМ і т. ін. Експериментальне визначення необхідного набору характеристик міцності односпрямованого композиту є достатньо складною задачею.

Незважаючи на це, ці критерії широко застосовуються у багатьох інженерних задачах завдяки простоті використання і швидкому оцінюванні поведінки матеріалу за різних умов навантаження. Вибір того чи іншого критерію залежить від природи матеріалу, його складу, ступеня анізотропії, вибраної концепції розрахунку.

Для багатошарових композитів часто застосовується структурно-феноменологічна модель. Феноменологічний підхід використовується для опису поведінки односпрямованого моношару, а структурний - для розгляду багатошарового матеріалу, складеного з різноспрямованих моношарів. Тут потрібна теорія шаруватих середовищ, що дає змогу

здійснювати перехід від напружень і деформацій композиту до напружень і деформацій у будь-якому його шарі.

4.2.1. Призначення механічних теорій міцності

За складного напруженого стану (плоского або об'ємного) немає однозначної відповіді на питання, яке напруження необхідно обрати за граничне для перевірки умови міцності. Експерименти свідчать, що досягнення граничного стану (виникнення пластичних деформацій, поява тріщин, повне руйнування і т.ін.) в одному і тому самому матеріалі може відбуватися за різних значень головних напружень в залежності від співвідношення між ними.

За цих умов найбільш точним методом визначення граничного стану є проведення натурного експерименту. Для інженерних розрахунків, у більшості випадках, цей підхід є неприйнятним через високу вартість, та складність реалізації. Тому, інженери використовують стандартні випробування лабораторних зразків матеріалу і роблять на їх основі узагальнення, шляхом заміни складного напруженого стану еквівалентним йому лінійним. Для цього використовують так звані механічні теорії міцності, згідно з якими припускається переважний вплив певних чинників на граничний стан матеріалу, і розраховуються відповідні еквівалентні напруження.

Вибір визначальних для руйнування чинників називають теорією міцності, а математичний запис умови досягнення згаданими чинниками критичного значення - критерієм (або умовою) міцності.

Основне завдання механічних теорій міцності полягає в прогнозуванні міцності за складного напруженого стану на підставі даних про міцність матеріалу при простих напружених станах.

Граничний напружений стан у будь-якій заданій точці матеріалу однозначно визначається тензором граничних напружень, що виражається через свої компоненти, визначені в заданій системі координат, яка має початок у точці, що розглядається. Приймаючи компоненти тензора граничних напружень за координати точки, можна визначити геометричне місце точок, що характеризує граничну поверхню.

Гранична поверхня руйнування є геометричним місцем точок, координати яких дорівнюють границям міцності, а точки, які лежать на

граничній поверхні текучості, відповідають границям текучості матеріалу за різних напружених станів.

Для ізотропного матеріалу граничний напружений стан у загальному випадку характеризується трьома головними нормальними напруженнями. Гранична поверхня за складного напруженого стану зображується в декартових прямокутних координатах, осі яких мають індекси, що відповідають головним нормальним напруженням (рис. 4.3).

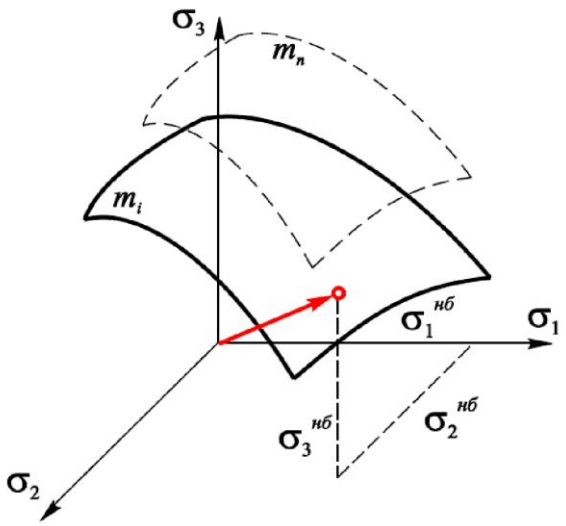


Рис. 4.3. Граничні поверхні: руйнування (штрихова лінія),текучості (суцільна лінія)

На рис. 4.3 граничні напруження позначені як $\sigma_1^{нб}, \sigma_2^{нб}, \sigma_3^{нб}$. В умовах плоского напруженого стану поверхня вироджується у плоску криву, яка в даному випадку називатиметься *кривою руйнування* або *кривою текучості.*

За різних критеріїв міцності граничні поверхні мають різний вигляд, зокрема, вони можуть бути регулярними (гладкими) або сингулярними (мають ребра та кутові точки). Однак, всі вони обов'язково повинні проходити через точки, що відповідають граничним сталим матеріалу, які використовуються у відповідному критерії.

4.2.2. Класичні теорії міцності для ізотропного матеріалу

Для ізотропних матеріалів накопичений великий досвід застосування різноманітних теорій міцності. Серед них найбільшого

розповсюдження набули чотири теорії міцності, які прийнято називати класичними.

Класичні теорії міцності ізотропних матеріалів потребують мінімальної інформації про механічні характеристики матеріалу. В цих теоріях використовують такі характеристики, як межа міцності, межа текучості, граничні пружні деформації і енергія цих деформацій, які отримані з діаграми деформування за одновісного розтягання. Абсолютні величини цих характеристик за стискання приймаються такими ж, як і за розтягання.

Перша класична теорія міцності - теорія найбільших нормальних напружень. Дана теорія міцності була запропонована у 1636 році видатним італійським вченим Галілео Галілеєм. Пізніше її використовували Лейбніц, Ляме, Клебш та Ренкін. Під іменем останнього теорія відома в англо-американській літературі, у вітчизняній її називають першою класичною теорією міцності.

Згідно з цією теорією руйнування матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли найбільше за абсолютною величиною головне напруження досягає граничного значення:

$$\left|\sigma_{\max}\right| = \sigma_p. \tag{4.22}$$

Таким чином, граничний стан тіла, що знаходиться в умовах складного напруженого стану, визначається абсолютною величиною найбільшого головного напруження. Умова міцності за першої класичної теорії має вид:

$$\sigma_{екв}^{I} = \max\left\{\left|\sigma_1\right|, \left|\sigma_2\right|, \left|\sigma_3\right|\right\} \le \left[\sigma_p\right]. \tag{4.23}$$

Гранична поверхня, що відповідає першій теорії міцності, у просторі напружень має вигляд кубу, що утворюється шістьма площинами, які паралельні координатним вісям. Початок координат знаходиться у центрі куба. В умовах плоского напруженого стану крива руйнування має вигляд квадрату, вісі симетрії якого проходять через початок координат і збігаються з координатними осями (рис. 4.4, контур 1).

Друга класична теорія міцності – теорія найбільшої лінійної деформації – запропонована Едмом Маріоттом у 1662 р. і розвинута пізніше Б. Сен-Венаном, з ім’ям якого її звичайно і пов’язують.

Згідно з цією теорією руйнування матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли максимальна головна лінійна

деформація $\varepsilon_{\max}$ досягає граничного значення пружної деформації ε_p, що відповідає межі текучості або міцності за одновісного розтягання, тобто

$$\left|\varepsilon_{\max}\right| = \varepsilon_p, \tag{4.24}$$

де $\varepsilon_p = \dfrac{\sigma_p}{E}$; E – модуль пружності.

Умова міцності за другої класичної теорії виглядає так:

$$\left|\varepsilon_1\right| \le \varepsilon_{p,}\ \left|\varepsilon_2\right| \le \varepsilon_{p,}\ \left|\varepsilon_3\right| \le \varepsilon_p. \tag{4.25}$$

Для запису умови 4.24 у напруженнях використовують узагальнений закон Гука для ізотропного матеріалу, що обмежує клас матеріалів, до яких можна застосовувати дану теорію. Умова міцності за другою класичною теорією міцності у напруженнях записується так

$$\left|\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right| \le \sigma_p, \left|\sigma_2 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right| \le \sigma_p, \left|\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right| \le \sigma_p. \tag{4.26}$$

У просторі напружень друга теорія міцності інтерпретується шістьма площинами, що пересікаються і утворюють поверхню у вигляді косокутного паралелепіпеда, який має вісь симетрії, рівнонахилену до координатних осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В умовах плоского напруженого стану крива руйнування набуває вигляду ромба, вісі симетрії якого нахилені під кутом 45^0 до осей координат (рис. 4.4, контур 2).

Якщо $\left|\varepsilon_1\right| > \left|\varepsilon_2\right| > \left|\varepsilon_3\right|$ і $\left|\sigma_1\right| > \left|\sigma_2\right| > \left|\sigma_3\right|$, то умова міцності в напруженнях відповідає першому рівнянню залежності 4.25:

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \le \left[\sigma_p\right]. \tag{4.27}$$

Третя класична теорія міцності – теорія найбільших дотичних напружень – запропонована Шарлем Кулоном в 1773 році. Пізніше в результаті фундаментальних досліджень Анрі Треска (1864 р.) теорія отримала широке визнання і використовується в розрахунках до цього часу.

Згідно з цією теорією руйнування (або текучість) матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли найбільше дотичне напруження $\tau_{\max}$ досягає значення максимального дотичного напруження, яке відповідає значенню за одновісного розтягання $\tau_p = \dfrac{\sigma_p}{2}$, тобто:

$$\left|\tau_{\max}\right| = \tau_p. \tag{4.28}$$

Умова міцності за третьою теорією визначається нерівностями:

$$|\tau_1| \le \tau_p, |\tau_2| \le \tau_p, |\tau_3| \le \tau_p, \quad (4.29)$$

де τ_1, τ_2, τ_3 – найбільші дотині напруження.

$$\tau_1 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}, \tau_2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2}, \tau_3 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}. \quad (4.30)$$

З врахуванням 4.30 максимальне за абсолютною величиною дотичне напруження визначається з системи нерівностей 4.28:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \le \sigma_p; |\sigma_2 - \sigma_3| \le \sigma_p; |\sigma_1 - \sigma_3| \le \sigma_p; \quad (4.31)$$

Якщо $|\sigma_1| > |\sigma_2| > |\sigma_3|$, то умова міцності за третьою теорією відповідає рівнянню:

$$\sigma_{екв}^{III} = |\sigma_1 - \sigma_3| \le \sigma_p. \quad (4.32)$$

Гранична поверхня, що відповідає третій теорії міцності, утворюється шістьма площинами, які пересікаючись утворюють шестигранну призму, яка має вісь симетрії, рівнонахилену до координатних осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В умовах плоского напруженого стану крива руйнування має вигляд шестикутника, осі симетрії якого проходять через початок координат і нахилені під кутом 45^0 до осей координат (рис. 4.4, контур 3).

Четверта класична теорія міцності – теорія питомої потенціальної енергії формозміни. У 1904 році видатний польський науковець, професор Львівської політехніки Максиміліан Титус Губер сформулював гіпотезу, за якою досягнення граничного стану пов'язується з питомою потенціальною енергією формозміни, накопиченою здеформованим тілом. Цей підхід був пізніше розвинений в працях Річарда фон Мізеса (1913) і Гайнріха Генкі (1924) через що теорія часто зветься теорією Губера-Мізеса-Генкі.

Згідно з цією теорією руйнування (або текучість) матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли питома потенціальна енергія формозміни $u_ф$ досягає граничного значення $u_р$ за одновісного розтягання.

$$|u_ф| = u_{рф}. \quad (4.33)$$

Відповідні вирази для лівої і правої частин рівняння 4.32 мають такий вигляд:

$$u_{ф} = \frac{1+\mu}{6E}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right],\ u_{рф} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_p^2 \quad (4.34)$$

Звідси одержуємо

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-\sigma_2\sigma_3 \le \sigma_p^2. \quad (4.35)$$

На противагу попереднім теоріям, четверта теорія міцності використовує в якості чинника, що відповідає за руйнування матеріалу, величину, відмінну від напружень і деформацій.

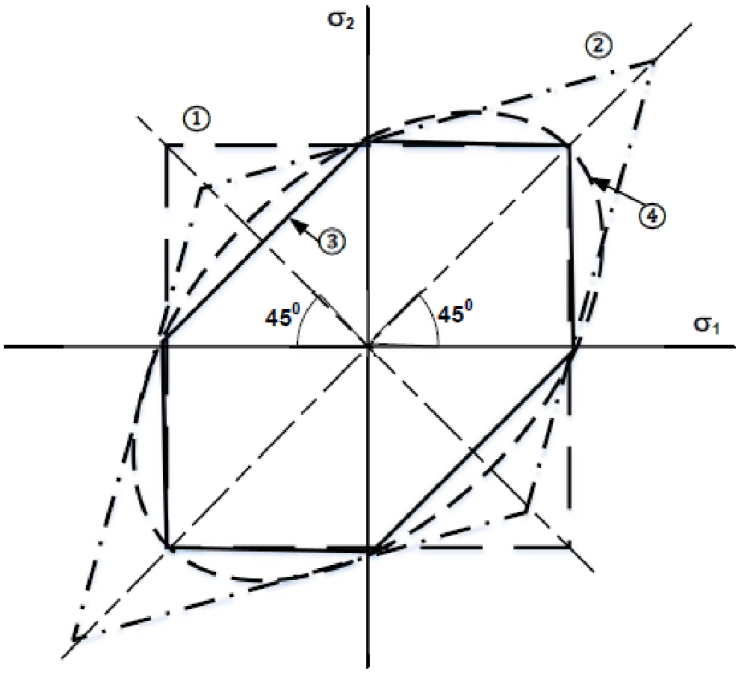


Рис. 4.4. Графічна інтерпретація класичних теорій міцності в умовах плоского напруженого стану (1- критерій найбільшого нормального напруження, 2 - критерій найбільшої лінійної деформації, 3 - критерій найбільшого дотичного напруження, 4 - енергетичний критерій Губера)

Четверта теорія міцності зображується у просторі головних нормальних напружень рівнонахиленим до осей координат циліндром. В умовах плоского напруженого стану крива руйнування зображується еліпсом, осі симетрії якого проходять через початок координат і нахилені під кутом 45^0 до осей координат (рис. 4.4, контур 4).

Вибір тієї чи іншої теорії міцності для практичних розрахунків пов'язаний з аналізом теоретичних і експериментальних даних за різних випадків складного напруженого стану. Зараз для інженерних

розрахунків міцності елементів конструкцій з ізотропних матеріалів, які працюють в умовах складного напруженого стану, найчастіше використовують третю і четверту теорії міцності.

4.2.3. Характеристики міцності односпрямованого композиту за складного напруженого стану

У теоріях міцності ізотропного матеріалу для формулювання умови міцності (руйнування) достатньо знати тільки межу міцності (текучості) за одновісного розтягання. Такий підхід є неприйнятним для анізотропних матеріалів, оскільки граничний стан залежить не тільки від головних напружень, але і від їх орієнтації в матеріалі. Головні напруження і деформації залежать від напряму навантаження та анізотропії матеріалу. Осі головних напружень, головних деформацій і анізотропії матеріалу можуть не збігатися. Межі міцності анізотропного матеріалу за простих напружених станів змінюються в залежності від напряму розтягуючої або стискаючої сили і орієнтації площадок, на яких діють дотичні напруження за чистого зсуву. Оскільки міцність залежить від напряму, то максимальне напруження необов'язково спричиняє руйнування. Тому вважається логічним виражати міцність у довільному напрямі в залежності від характеристик руйнування вздовж головних напрямів анізотропії матеріалу.

Більшість композиційних матеріалів є ортотропними тілами, тобто їх можна вважати суцільними однорідними тілами з трьома взаємно перпендикулярними площинами симетрії. Різниця меж міцності за розтягання (стискання) у напрямі трьох осей симетрії ще не визначають анізотропію характеристик міцності. Наприклад, є анізотропні матеріали, що мають однакові межі міцності за розтягання (стискання) в двох взаємно перпендикулярних напрямах але відрізняються в інших напрямах цієї ж площини.

Анізотропія характеристик міцності за розтягання (стискання) звичайно оцінюється за результатами дослідів, отриманих на зразках, по різному орієнтованих у площині, тобто вирізаних під різними кутами до вісей симетрії матеріала. Такий експериментальний підхід дає можливість оцінити ступінь анізотропії будь-якої механічної характеристики, в тому числі і межі міцності.

За наявності критеріїв міцності анізотропних матеріалів та експериментальних даних щодо меж міцності КМ за простих видів навантаження можна узагальнити відомі методики проєктування конструкцій із металевих сплавів на випадок конструкцій із КМ. Очевидним недоліком такого підходу є неможливість адекватного вибору схеми армування конструкційного елемента, що й привело до розробки методик проєктування структури КМ, заснованих на пошаровому аналізі міцності: визначення кількості шарів арматури, кутів їхнього армування та послідовності укладання за товщиною пакету. Крім того, інтенсивний розвиток виробництва армуючих наповнювачів та зв'язуючих призвів до появи великої кількості різноманітних КМ, що призупинило детальне експериментальне вивчення властивостей композитів. У більшості країн світу прийшли до висновків щодо необхідності уніфікації паспортних даних КМ.

Зокрема, до стандартних фізико-механічних характеристик шаруватих композитів відносять властивості односпрямованого композиту вздовж і поперек волокн і на зсув у площині шару(рис. 4.5). Тобто, міцність односпрямованого шару КМ визначається наступними параметрами:

σ_{1p} – межа міцності на розтяг вздовж волокон;

σ_{1c} – межа міцності на стиск вздовж волокон;

σ_{2p} – межа міцності на розтяг поперек волокн;

σ_{2c} – межа міцності на стиск поперек волокн;

$\tau_{12\,руйн}$ – межа міцності на зсув у площині шару.

Це значною мірою сприяє обґрунтуванню критеріїв міцності та дозволяє конструкторам оцінювати напружено-деформований стан шарів КМ та їхню міцність.

Для кожного анізотропного матеріала, так саме як і для ізотропного, існує гранична поверхня міцності (руйнування, текучості). Рівняння її являє собою розрахункову формулу міцності, вигляд якої залежить від обраного критерію міцності. Однак для анізотропного матеріалу в цьому рівняні має бути врахована залежність меж міцності матеріалу за простих напружених станів від напряму нормальних і дотичних напружень.

Найчастіше граничну поверхню анізотропного матеріалу будують у просторі, осі якого є напрямами осей симетрії матеріала і ліній дії компонент тензора напружень. Для ортотропного матеріалу гранична

поверхня представляється у шестивимірному просторі напружень, що є компонентами тензора напружень і діючих на площадках, перпендикулярних осям симетрії матеріала, - площадках симетрії. Тоді, рівняння граничної поверхні записується у вигляді функціональної залежності між компонентами тензора напружень і характеристиками міцності матеріала, які визначені за напрямами осей симетрії матеріала і у діагональних по відношенню до осей симетрії напрямах.

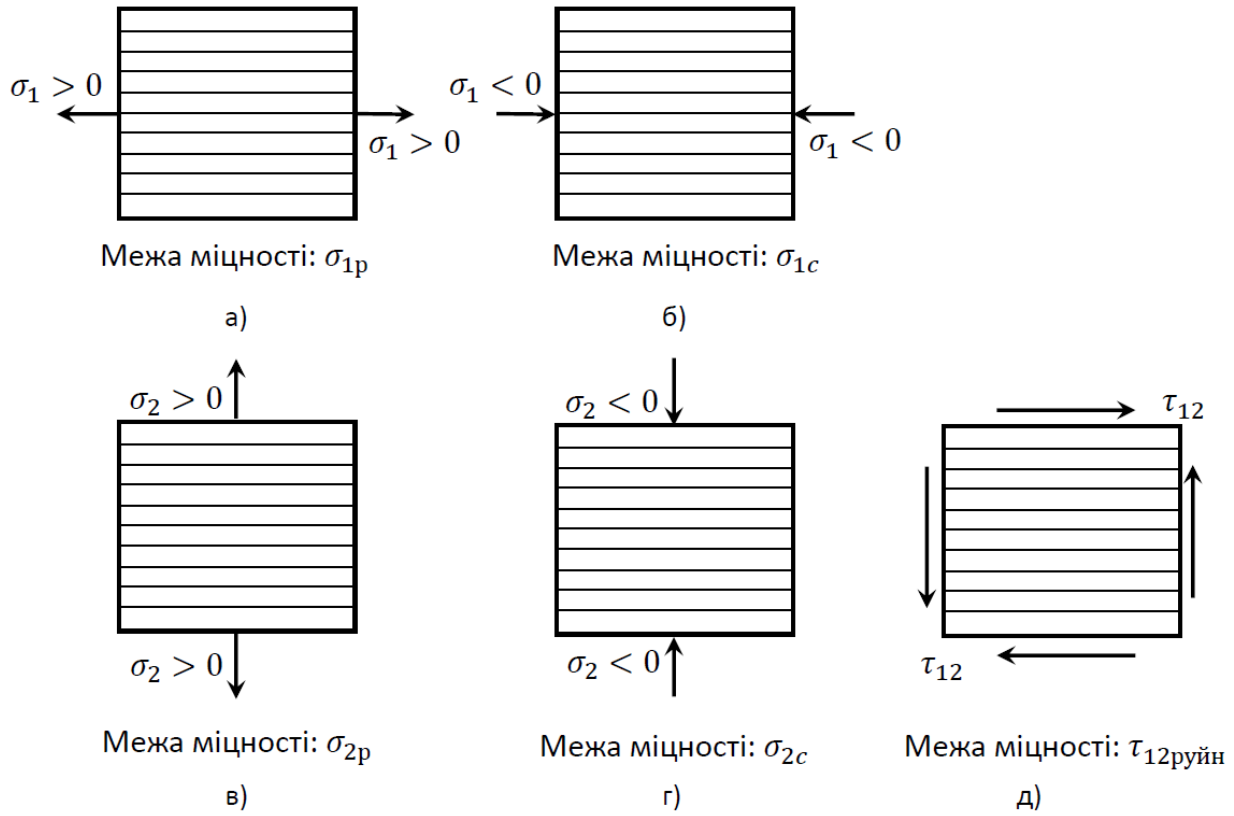


Рис. 4.5. Основні показники міцності односпрямованого моношару КМ: а) σ_{1p} – межа міцності на розтяг вздовж волокон, б) σ_{1c} – межа міцності на стиск вздовж волокон, в) σ_{2p} – межа міцності на розтяг поперек волокн, г) σ_{2c} – межа міцності на стиск поперек волокн, д) $\tau_{12руйн}$ – межа міцності на зсув у площині шару.

Анізотропія характеристик міцності КМ робить розробку механічних теорій міцності надзвичайно складною задачею. Тому, значне поширення отримав підхід, який грунтується на аналітичному описанні поверхні міцності за експериментальними даними, отриманими в умовах складного напруженого стану.

У якості математичної моделі найчастіше обирають поліноміальну модель, використання якої дозволяє обрати апроксимаційну функцію, яка

з достатньою точністю відповідає експериментальним даним, що досягається підвищенням порядку полінома. Однак, навіть незначне підвищення порядку полінома зазвичай призводить до суттєвого ускладнення умови міцності і додаткового визначення ряду характеристик міцності, які використовуються у розрахункових формулах. Фактично цей підхід призводить до відмови від теорії міцності у класичному розумінні.

Як було показано у розділі 2 для опису ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого шару КМ використовується система координат, вісь 1 якої спрямована за напрямом волокон, а вісь 2 – перпендикулярна до волокон. Для вивчення руйнування кутової ламелі (кут орієнтації волокон односпрямованого шару у довільно орієнтованій системі координат $x-y$ відмінний від нуля, $\varphi \neq 0$, рис. 3.2) були розроблені різні теорії. Теорії, як правило, засновані на нормальній міцності і міцності на зсув односпрямованого шару.

На відміну від параметрів жорсткості, ці параметри міцності не можуть бути перетворені безпосередньо для кутової ламелі. Таким чином, теорії руйнування ґрунтуються на знаходженні напружень в локальних осях, а потім на використанні цих п'яти параметрів міцності односпрямованого шару, щоб визначити, чи не вийшла з ладу шар КМ.

4.2.4. Узагальнення класичних теорій міцності для анізотропних матеріалів

Для розрахунку міцності ортотропних симетричних за міцністю композиційних матеріалів у часткових випадках складного напруженого стану іноді використовуютьузагальнення класичних теорій міцності.

Теорія максимальних напружень. Ця теорія пов'язана з теорією максимального нормального напруження Ренкіна і теорією максимального напруження зсуву Трєска, вона подібна до теорій, що застосовуються до ізотропних матеріалів. Напруження, що діють на ортотропний КМ, розкладаються на нормальні та зсувні напруження в локальних осях. Руйнування відбувається, якщо будь-яке з нормальних напружень або напружень зсуву в локальних осях дорівнює або перевищує відповідну межу міцності КМ. Руйнування згідно даного критерію наступає коли не задовольняється будь-яка з наступних умов:

$$-\sigma_{1c} \le \sigma_1 \le \sigma_{1p},\ -\sigma_{2c} \le \sigma_2 \le \sigma_{2p},\ -\sigma_{3c} \le \sigma_3 \le \sigma_{3p},$$
$$|\sigma_4| \le \tau_{23\,руйн},\ |\sigma_5| \le \tau_{31\,руйн},\ |\sigma_6| \le \tau_{12\,руйн}. \tag{4.36}$$

За плоского напруженого стану, характерного для односпрямованого шару КМ, $\sigma_3 = 0,\ \sigma_4 = \tau_{23} = 0,\ \sigma_5 = \tau_{31} = 0.$ За цих умов руйнування відбувається, коли хоча б одна з компонент напруження вздовж однієї з головних осей матеріалу перевищує відповідний параметр міцності за цим напрямом:

$$-\sigma_{1c} \le \sigma_1 \le \sigma_{1p},\ -\sigma_{2c} \le \sigma_2 \le \sigma_{2p},\ |\sigma_6| \le \tau_{12\,руйн}. \tag{4.37}$$

Слід зауважити, що руйнування може статися більш ніж з однієї причини. Всі п'ять параметрів міцності розглядаються як додатні числа, а нормальні напруження є додатними при розтягуванні і від'ємними при стисканні. Кожна складова напруження порівнюється з відповідною міцністю; таким чином, кожна складова напруження не взаємодіє з іншими.

Граничнею поверхнею тут є прямокутний паралелепіпед (рис. 4.6), вихід за межі якого означає вичерпання несучої здатності матеріалу. Прямокутний паралелепіпед – одна з найпростіших геометричних моделей поверхні міцності односпрямованого матеріалу, яка, звичайно, може уточнюватися, наприклад, за результатами експериментів з руйнування матеріалу за різних комбінацій σ_1, σ_2 та τ_{12}. Однак, оскільки для сучасних високоміцних односпрямованих полімерних композитів $\sigma_{2p} \approx (0{,}01...0{,}08)\sigma_{1p}$, ефективність такого уточнення не завжди можна порівняти з необхідними витратами. Теорія максимального напруження може бути застосована для крихких режимів руйнування матеріалу, наприклад, за поперечного або поздовжнього розтягу $(\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0)$.

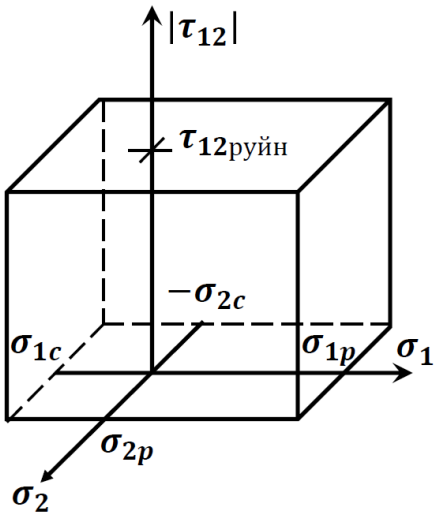


Рис. 4.6. Гранична поверхня за теорією максимальних напружень

У випадку довільної орієнтації односпрямованого шару КМ за розтягу або стиску, коли має місце поворот осей 1-2 у пов'язаній з ними площині на кут φ відносно вісей *x-y* (рис. 4.7), напруження визначаються наступним чином:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2\phi,\ \sigma_2 = \sigma_x \sin^2\phi,\ \tau_{12} = \sigma_x \sin\phi\cos\phi. \qquad (4.38)$$

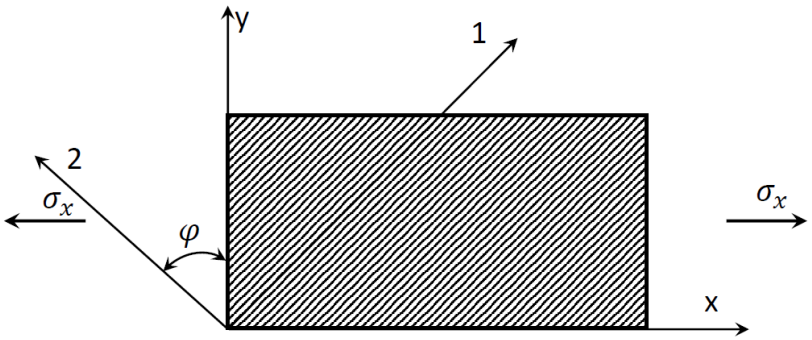


Рис. 4.7. Випадок, коли навантаження не співпадає з орієнтацією волокон у односпрямованому шарі КМ

Тоді, умова міцності має вигляд:

$$-\sigma_{1c} \le \sigma_x \cos^2\phi \le \sigma_{1p},\ \ -\sigma_{2c} \le \sigma_x \sin^2\phi \le \sigma_{2p},\ |\sigma_x \sin\phi\cos\phi| \le \tau_{12\,руйн}. \qquad (4.39)$$

У більш загальному випадку навантаження використовується правило трансформації напружень згідно з формулою (3.3):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & -2\sin\phi\cos\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & 2\sin\phi\cos\phi \\ \sin\phi\cos\phi & -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (4.40)$$

або

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & 2\sin\phi\cos\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & -2\sin\phi\cos\phi \\ -\sin\phi\cos\phi & \sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (4.41)$$

Приклад. Обчислити значення граничних напружень односпрямованого шару КМ в умовах двовісного розтягу (рис. 4.8) за теорією максимальних напружень, якщо $\sigma_1 = 15\sigma_2, \tau_{12} = 0$, матеріал - скловолокнистий епоксидний композит з $E_1 = 38{,}6ГПа$, $E_2 = 8{,}3ГПа$, $G_{12} = 4{,}1ГПа$, $\mu_2 = 0{,}26$. Межі міцності матеріалу: $\sigma_{1p} = 1062МПа$, $\sigma_{2p} = 31МПа$, $\tau_{12руйн} = 72МПа$.

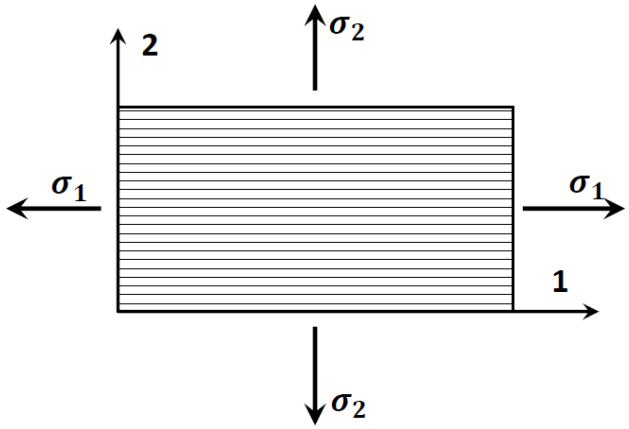


Рис. 4.8 До прикладу

Розв'язок. Згідно з теорією максимальних напружень руйнування відбувається тоді, коли будь-яке з нормальних напружень або напружень зсуву в локальних осях дорівнює або перевищує відповідну межу міцності КМ. Тобто, умова міцності записується наступним чином:

$$15\sigma_2 = \sigma_1 \le \sigma_{1p},\ \sigma_2 \le \sigma_{2p}.$$

Звідси отримуємо, що граничне напруження поперек волокн $\sigma_2 = 31МПа$, а граничне напруження вздовж волокон $\sigma_1 = 15 \cdot 31 = 465МПа$. Граничне напруження для односпрямованого шару КМ визначається найменшим з двох отриманих значень, тобто руйнування відбувається шляхом поперечного розриву.

Приклад. Знайдіть за теорією максимальних напружень максимальне значення величини $S > 0$, якщо до односпрямованого шару з графіто/епоксидного КМ під кутом $\varphi = 30°$ прикладені напруження: $\sigma_x = 3S, \sigma_y = -2S$ і $\tau_{xy} = 2S$ (рис. 4.9). Механічні характеристики матеріалу:

$E_1 = 181 ГПа,\ E_2 = 10,3 ГПа,\ G_{12} = 7,2 ГПа,\ \mu_{12} = 0,28$. Межі міцності матеріалу: $\sigma_{1p} = 1500 МПа,\ \sigma_{1c} = 1500 МПа,\ \sigma_{2p} = 40 МПа,\ \sigma_{2c} = 246 МПа,$ $\tau_{12\,руйн} = 68 МПа.$

Розв'язок. Напруження в локальних осях, згідно з рівнянням (4.41), становлять:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,750 & 0,250 & 0,866 \\ 0,250 & 0,750 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & 0,500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3S \\ -2S \\ 2S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,482 \\ -2,482 \\ -1,165 \end{bmatrix} S.$$

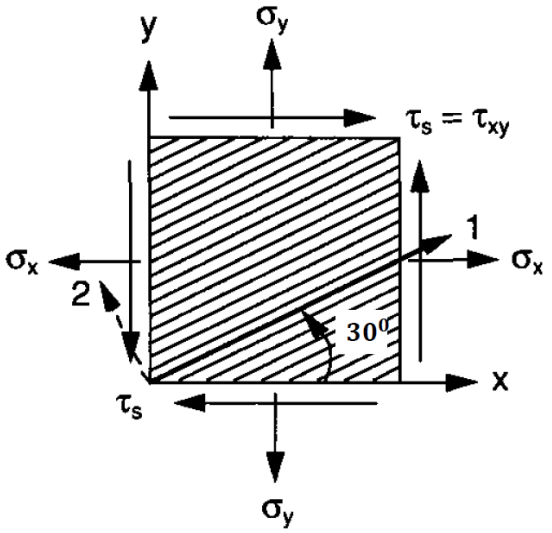


Рис. 4.9 До прикладу

Відповідно до теорії максимальних напружень умови міцності записуються так:

$$-1500 \le 3,482 \cdot S \le 1500,$$
$$-246 \le -2,482 \cdot S \le 40,$$
$$-68 \le -1,165 \cdot S \le 68.$$

Або

$$-430,79 МПа \le S \le 430,79 МПа,$$
$$-16,11 МПа \le S \le 99,11 МПа,$$
$$-58,37 МПа \le S \le 58,37 МПа.$$

Всі отримані нерівності виконуються за $S > 0$ якщо $0 < S < 58,37 МПа$. Крім того, нерівності також вказують на те, що за цих умов навантаження односпрямований шар КМ руйнується за зсуву. Максимальні напруження, які можуть бути прикладені до розглянутого шару односпрямованого КМ, становлять:

$$\sigma_x = 3 \cdot 58,37 = 175,11 МПа,$$
$$\sigma_x = -2 \cdot 58,37 = -116,74 МПа,$$
$$\sigma_x = 2 \cdot 58,37 = 116,74 МПа.$$

Теорія максимальних деформацій. Ця теорія базується на теорії максимальної лінійної деформації Сен-Венана і теорії максимального дотичного напруження Трєска в застосуванні до ізотропних матеріалів. Руйнування в пластині прогнозується, якщо будь-яка лінійна або зсувна деформація в локальних осях пластини дорівнює або перевищує відповідну граничну деформацію односпрямованої пластини:

$$\left.\begin{array}{l} -X_{\varepsilon C} \le \varepsilon_1 \le X_{\varepsilon T} \\ -Y_{\varepsilon C} \le \varepsilon_2 \le Y_{\varepsilon T} \\ -T_{\varepsilon} \le \gamma_{12} \le T_{\varepsilon} \end{array}\right\}, \qquad (4.42)$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - деформації розтягування в напрямах 1 і 2 відповідно, γ_{12} - деформація зсуву у площині ; $X_{\varepsilon T}, Y_{\varepsilon T}$ - граничні деформації розтягу в головних напрямах 1 і 2 відповідно; $X_{\varepsilon C}, Y_{\varepsilon C}$ - граничні деформації стиску в головних напрямах 1 і 2 відповідно; T_{ε} - гранична деформація зсуву у площині 12.

Граничні деформації можна знайти безпосередньо з параметрів граничної міцності та модулів пружності, припускаючи, що залежність «напруження-деформація» є лінійною до руйнування. Теорія максимальних деформацій схожа на теорію максимальних напружень тим, що між різними компонентами деформації не відбувається взаємодії. Однак ці дві теорії руйнування дають різні результати, оскільки локальні деформації в пластині включають вплив коефіцієнта Пуассона.

Приклад. Розв'яжемо попередній приклад з використанням теорії максимальних деформрмацій. Тобто, за теорією максимальних деформацій необхідно знайти максимальне значення величини $S > 0$, якщо до односпрямованого шару з графіто/епоксидного КМ під кутом $\varphi = 30°$ прикладені напруження: $\sigma_x = 3S, \sigma_y = -2S$, і $\tau_{xy} = 2S$ (рис. 4.7). Механічні характеристики матеріалу: $E_1 = 181 ГПа, E_2 = 10,3 ГПа, G_{12} = 7,2 ГПа,$ $\mu_{12} = 0,28$. Межі міцності матеріалу: $\sigma_{1p} = 1500 МПа, \sigma_{1c} = 1500 МПа,$ $\sigma_{2p} = 40 МПа, \sigma_{2c} = 246 МПа, \tau_{12 руйн} = 68 МПа.$

Розв'язок. Деформації в локальних осях становлять:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix},$$

де

$$b_{11} = \frac{1}{E_1} = \frac{1}{181 \cdot 10^9} = 0,5525 \cdot 10^{-11} Па^{-1},$$

$$b_{12} = \frac{\mu_{12}}{E_1} = \frac{0,28}{181 \cdot 10^9} = -0,1547 \cdot 10^{-11} Па^{-1},$$

$$b_{22} = \frac{1}{E_2} = \frac{1}{10,3 \cdot 10^9} = 0,9709 \cdot 10^{-10}\, Па^{-1},$$

$$b_{66} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{7,2 \cdot 10^9} = 0,1389 \cdot 10^{-9}\, Па^{-1},$$

Напруження в локальних осях були визначені раніше (дивись попередній приклад):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,482 \\ -2,482 \\ -1,165 \end{bmatrix} S.$$

Тоді

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5525 \cdot 10^{-11} & -0,1547 \cdot 10^{-11} & 0 \\ -0,1547 \cdot 10^{-11} & 0,9709 \cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0,1389 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,482 \\ -2,482 \\ -1,165 \end{bmatrix} S =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,2308 \cdot 10^{-10} \\ -0,2464 \cdot 10^{-9} \\ -0,1618 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix} S.$$

Припустимо, що залежність між напруженнями і деформаціями залишається лінійною до моменту руйнування; тоді граничні деформації руйнування становлять:

$$X_{\varepsilon T} = \frac{\sigma_{1p}}{E_1} = \frac{1500 \cdot 10^6}{181 \cdot 10^9} = 8,287 \cdot 10^{-3},$$

$$X_{\varepsilon C} = \frac{\sigma_{1c}}{E_1} = \frac{1500 \cdot 10^6}{181 \cdot 10^9} = 8,287 \cdot 10^{-3},$$

$$Y_{\varepsilon T} = \frac{\sigma_{2p}}{E_2} = \frac{40 \cdot 10^6}{10,3 \cdot 10^9} = 3,882 \cdot 10^{-3},$$

$$Y_{\varepsilon C} = \frac{\sigma_{2p}}{E_2} = \frac{246 \cdot 10^6}{10,3 \cdot 10^9} = 2,388 \cdot 10^{-2},$$

$$T_{\varepsilon} = \frac{\tau_{12\,руйн}}{G_{12}} = \frac{68 \cdot 10^6}{7,2 \cdot 10^9} = 9,444 \cdot 10^{-3}.$$

Згідно з теорією максимальних деформацій умови міцності (4.42) записуються так:

$$-8,287\cdot10^{-3}\le 0,2308\cdot10^{-10}\cdot S\le 8,287\cdot10^{-3},$$
$$-2,388\cdot10^{-2}\le -0,2464\cdot10^{-9}\cdot S\le 3,883\cdot10^{-3},$$
$$-9,444\cdot10^{-3}\le -0,1618\cdot10^{-9}\cdot S\le 9,444\cdot10^{-3}.$$

Або

$$-359,06\cdot10^{6}\le S\le 359,06\cdot10^{6},$$
$$-15,76\cdot10^{6}\le S\le 96,92\cdot10^{6},$$
$$-58,37\cdot10^{6}\le S\le 58,37\cdot10^{6}.$$

Пам'ятаючи, що $S>0$, робимо висновок про те, що всі нерівності будуть виконуватися, якщо $0<S<58,37\cdot10^{6}$.

Таким чином, максимальне значення S становить 58,37 МПа. Таке ж максимальне значення $S=58,37 МПа$ було знайдено і за теорією максимальних напружень. Отриманий результат пояснюється тим, що за даних умов навантаження односпрямований шар КМ руйнується за зсуву. Однак, якби вид руйнування був іншим, ніж зсув, то різниця у значеннях граничних напружень мала б місце через вплив коефіцієнта Пуассона, який пов'язує лінійні деформації з нормальними напруженнями в локальних осях.

4.2.5. Тензорно-поліноміальні критерії міцності для анізотропних матеріалів

Загальне формулювання критерію міцності анізотропних тіл. Одним з найбільш загальних формулювань критерію міцності анізотропних тіл для тривимірного випадку має наступний вигляд:

$$\left(F_i\sigma_i\right)^{\alpha}+\left(F_{ij}\sigma_i\sigma_j\right)^{\beta}+\left(F_{ijk}\sigma_i\sigma_j\sigma_k\right)^{\gamma}+\ldots\le 1,\left(i,j,k\ldots=1,2,\ldots,6\right),\quad (4.43)$$

де $F_i,F_{ij},F_{ijk},\ldots$ — матричні позначення тензорів поверхні міцності (тензорів міцності) другого, четвертого, шостого і наступних парних рангів, σ_l – матричні позначення компонент тензора напружень, а показники степені α,β,γ і т. ін. визначаються з умови найкращого описання експериментаьних даних.

Найбільш зручним для застосування є варіант критерію (4.43) в якому показники степені прийняті рівними одинці $\left(\alpha=\beta=\gamma=\ldots=1\right)$:

$$F_i\sigma_i+F_{ij}\sigma_i\sigma_j+F_{ijk}\sigma_i\sigma_j\sigma_k+\ldots\le 1.\quad (4.44)$$

Ця форма запису отримала назву тензорно-поліноміального критерію міцності.

Для плоского напруженого стану, який характерний для моношару КМ, в умові (4.43) залишаються тільки лінійна і квадратична складові, тобто

$$F_i\sigma_i + F_{ij}\sigma_i\sigma_j \le 1\left(i, j = 1,2,4\right). \tag{4.45}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{gathered} F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_4\sigma_4 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{44}\sigma_4^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + \\ +2F_{14}\sigma_1\sigma_4 + 2F_{24}\sigma_2\sigma_4 \le 1. \end{gathered} \tag{4.46}$$

Зауважимо, що у виразі (4.45) $\sigma_1 = \sigma_{11}$; $\sigma_2 = \sigma_{22}$; $\sigma_4 = \sigma_{12}$.

Розглянувши умову (4.46) для часткових випадків плоского напруженого стану, визначають компоненти тензорів поверхні міцності, які записуються через межі міцності за розтягання й стискання вздовж і впоперек волокон та межею міцності при зсуві у площині шару:

$$\begin{gathered} F_i = \left[\frac{1}{\sigma_{1p}} + \frac{1}{\sigma_{1c}}\ \frac{1}{\sigma_{2p}} + \frac{1}{\sigma_{2c}}\ 0\ \frac{1}{\sigma_{12}^{+}} + \frac{1}{\sigma_{12}^{-}} 0\ 0\right]; \\ F_{ij} = \left[-\frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}} F_{12}\, 0\, F_{14}\, 0\ 0 - \frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}\ 0\, F_{24}\ 0\ 0\ \ 0000 - \frac{1}{\sigma_{12}^{+}\sigma_{12}^{-}} 0\ 0\ \textit{сим.}\ 0\ 0\ \ 0\right], \end{gathered} \tag{4.47}$$

де $\sigma_{1p}, \sigma_{1c}, \sigma_{2p}, \sigma_{2c}$ – межі міцності за розтягу і стиску у напрямах 1 і 2, відповідно; σ_{12}^{+}, σ_{12}^{-} – межі міцності за зсуву у двох протилежних напрямах в площині (1,2). Компоненти F_{12}, F_{14}, F_{24} знаходять з експериментів за двовісного напруженого стану.

Формулювання критерію (4.45) для ортотропного матеріалу можна додатково спростити за рахунок спеціальних умов симетрії. Якщо осі координат збігаються з головними осями ортотропії, то умова (4.46) має бути симетричною відносно дотичного напруження $\sigma_4\left(\sigma_{12}\right)$. Тоді

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^{+} = \sigma_{12}^{-};\ F_{14} = F_{24} = 0.$$

Тоді розглянутий поліноміальний критерій зводиться до критерію Цая-Ву:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{44}\sigma_4^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \le 1. \tag{4.48}$$

де $F_1 = \frac{1}{\sigma_{1p}} + \frac{1}{\sigma_{1c}}$, $F_2 = \frac{1}{\sigma_{2p}} + \frac{1}{\sigma_{2c}}$, $F_{11} = -\frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}}$, $F_{22} = -\frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}}$, $F_{44} = \frac{1}{\sigma_{12}^2}$, коефіцієнт F_{12}, який характеризує взаємний вплив напружень σ_{11} і σ_{22} на міцність матеріалу, знаходиться з експериментів за двовісного напруженого стану.

Критерій Цая-Ву в загальному випадку враховує відмінність границь міцності на розтягання і стискання, залежність міцності на зсув від напряму напружень зсуву, має максимально можливу гнучкість, не містить надлишкових параметрів, що дозволяє легко визначити головні осі міцності.

В розгорнутому вигляді критерій записується так:

$$\begin{aligned} &F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_4\sigma_4 + F_5\sigma_5 + F_6\sigma_6 + \\ &+ F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{14}\sigma_1\sigma_4 + 2F_{15}\sigma_1\sigma_5 + 2F_{16}\sigma_1\sigma_6 + \\ &+ F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + 2F_{24}\sigma_2\sigma_4 + 2F_{25}\sigma_2\sigma_5 + 2F_{26}\sigma_2\sigma_6 + \\ &+ F_{33}\sigma_3^2 + 2F_{34}\sigma_3\sigma_4 + 2F_{35}\sigma_3\sigma_5 + 2F_{36}\sigma_3\sigma_6 + \\ &+ F_{44}\sigma_4^2 + 2F_{45}\sigma_4\sigma_5 + 2F_{46}\sigma_4\sigma_6 + \\ &+ F_{55}\sigma_5^2 + 2F_{56}\sigma_5\sigma_6 + \\ &+ F_{66}\sigma_6^2 \le 1. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Компоненти тензорів міцності повинні бути визначені експериментально. Для матеріалу із загальним видом анізотропних властивостей для конкретизації наведеної вище нерівності потрібно відповідно 27 дослідів. Тому критерій застосовується переважно для ортотропних та трансверсально ізотропних матеріалів.

Для ортотропного матеріалу критерій в головних осях ортотропії матеріалу має такий вигляд:

$$\begin{aligned} &F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\sigma_4^2 + +F_{55}\sigma_5^2 + \\ &+F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 \le 1. \end{aligned} \tag{4.50}$$

У даному виразі незв’язані компоненти тензорів міцності позначені як $F_1, F_2, F_3, F_{11}, F_{22}, F_{33}, F_{44}, F_{55}, F_{66}$. Значення цих компонентів однозначно визначаються з одновісних дослідів на розтягання та стискання та дослідів на чистий зсув. Пов'язані (змішані) компоненти тензора міцності позначені як F_{12}, F_{13}, F_{23}. Основною проблемою практичного використання критерію Цая-Ву є труднощі експериментального визначення змішаних компонентів тензора міцності. Для їхнього знаходження потрібно

проведення двовісних дослідів або використання зразків складної форми, що потребує суттєвих зусиль. Величина F_{ij} сильно залежить від розсіювання експериментальних даних, що помітно впливає на вигляд поверхні міцності.

Існує ряд модифікацій критерію Цая-Ву, в яких змішані коефіцієнти F_{ij} визначаються через інші коефіцієнти. Зокрема, в умові (4.48) змішаний коефіцієнт F_{12} можна визначити з наступних формул:

за критерієм Хоффмана (Hoffman)

$$F_{12} = -\frac{F_{11}}{2}, \tag{4.51}$$

за критерієм Ханкінсона (Hankinson)

$$F_{12} = \frac{F_{11} + F_{22} - F_{44}}{2}, \tag{4.52}$$

за критерієм Коуіна (Cowin)

$$F_{12} = \sqrt{F_{11}F_{22}} - \frac{F_{44}}{2}, \tag{4.53}$$

Цай і Хан (Tsai, Hahn) [76] запропонували загальний розв'язок цієї проблеми. Виходячи з умови стійкості критерію руйнування матеріалу було рекомендовано змішані компоненти тензора міцності F_{ij} визначати з виразу:

$$F_{ij} = c\sqrt{\left(F_{ii}F_{jj}\right)}, \text{ де } |c| \le 1. \tag{4.54}$$

При цьому для визначення F_{ij} немає необхідності проводити двовісні досліди, що значно спрощує використання критерію у випадку його застосування. Зазначений підхід при $c = -\frac{1}{2}$ останнім часом знайшов широке застосування у практиці розрахунків руйнування композитів. У випадку ізотропних матеріалів цей критерій збігається з критерієм Мізеса. Тому варіант критерію з $c = -\frac{1}{2}$ зветься узагальненим критерієм Мізеса.

Узагальнений критерій Мізеса. Компоненти тензорів міцності для варіанту критерію за умовою (4.49) з $c = -\frac{1}{2}$ можуть бути визначені наступним чином

$$F_1=\frac{1}{\sigma_{1p}}+\frac{1}{\sigma_{1c}};\ F_2=\frac{1}{\sigma_{2p}}+\frac{1}{\sigma_{2c}};F_3=\frac{1}{\sigma_{3p}}+\frac{1}{\sigma_{3c}};\ F_{11}=-\frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}};\ F_{22}=-\frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}};$$

$$F_{33}=-\frac{1}{\sigma_{3p}\sigma_{3c}};\ F_{44}=\frac{1}{\sigma_{12}^2};\ F_{55}=\frac{1}{\sigma_{23}^2};F_{66}=\frac{1}{\sigma_{31}^2};\ F_{13}=-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{1p}\sigma_{1c}\sigma_{3p}\sigma_{3c}};$$

$$F_{12}=-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{1p}\sigma_{1c}\sigma_{2p}\sigma_{2c}};\ F_{23}=-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{2p}\sigma_{2c}\sigma_{3p}\sigma_{3c}}.$$

Для конкретизації узагальненого критерію Мізеса необхідно визначити 12 коефіцієнтів з 9 дослідів (розтяг та стиск у трьох головних напрямках ортотропії – 6 дослідів, зсув у трьох головних площинах – 3 досліди).

Для трансверсально ізотропного матеріалу з площиною ізотропії 23 отримаємо рівняння

$$\begin{gathered}F_1\sigma_1+F_2\left(\sigma_2+\sigma_3\right)+F_{11}\sigma_1^2+F_{22}\left(\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)+2\left(F_{22}-F_{23}\right)\sigma_4^2+\\+F_{66}\left(\sigma_5^2+\sigma_6^2\right)+2F_{12}\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3\right)+2F_{23}\sigma_2\sigma_3\le 1.\end{gathered}\tag{4.55}$$

Відповідні 7 компонентів тензорів міцності в нерівності визначаються так:

$$F_1=\frac{1}{\sigma_{1p}}+\frac{1}{\sigma_{1c}};\ F_2=\frac{1}{\sigma_{2p}}+\frac{1}{\sigma_{2c}};\ F_{11}=-\frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}};\ F_{22}=-\frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}};F_{66}=\frac{1}{\sigma_{12}^2};$$

$$F_{12}=-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{1p}\sigma_{1c}\sigma_{2p}\sigma_{2c}};\ F_{23}=-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{2p}\sigma_{2c}\sigma_{3p}\sigma_{3c}}.$$

Для їх конкретизації необхідно провести 5 дослідів на розтяг-стиск у напрямку 1 і 2 і чистий зсув у площині 12.

Дослідження свідчать, що узагальнений критерій Мізеса добре корелює з експериментальними даними для матеріалів з високим ступенем анізотропії.

Можна показати, що ряд відомих критеріїв міцності є частковими випадками поліноміального критерію міцності (4.44).

Критерій Цая-Хілла (модифікований критерій Хілла). Даний критерій може бути представлений так:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_i}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{Y_i}\right)^2+\left(\frac{\sigma_3}{Z_i}\right)^2-\left(\frac{1}{X_i^2}+\frac{1}{Y_i^2}-\frac{1}{Z_i^2}\right)\sigma_1\sigma_2-\left(\frac{1}{Z_i^2}+\frac{1}{X_i^2}-\frac{1}{Y_i^2}\right)\sigma_1\sigma_3-$$
$$-\left(\frac{1}{Y_i^2}+\frac{1}{Z_i^2}-\frac{1}{X_i^2}\right)\sigma_2\sigma_3+\left(\frac{\sigma_4}{R}\right)^2+\left(\frac{\sigma_5}{S}\right)^2+\left(\frac{\sigma_6}{T}\right)^2\le 1. \quad (4.56)$$

В даному критерії компоненти напружень не зустрічаються в першій степені, F_1, F_2, F_3 дорівнюють нулю. Величини X_i, Y_i, Z_i набувають значень X_T, Y_T, Z_T або X_C, Y_C, Z_C в залежності від знаку нормальних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ відповідно.

Компоненти тензорів міцності для даного критерію такі:

$$F_i=0,\ \ F_{11}=\frac{1}{X_i^2},\ F_{22}=\frac{1}{Y_i^2},\ F_{33}=\frac{1}{Z_i^2},\ F_{44}=\frac{1}{R^2},\ \ F_{55}=\frac{1}{S^2},\ F_{66}=\frac{1}{T^2},$$
$$F_{12}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X_i^2}+\frac{1}{Y_i^2}-\frac{1}{Z_i^2}\right),\ \ F_{13}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z_i^2}+\frac{1}{X_i^2}-\frac{1}{Y_i^2}\right),\ \ F_{23}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y_i^2}+\frac{1}{Z_i^2}-\frac{1}{X_i^2}\right).$$

Для трансверсально-ізотропного матеріалу з площиною ізотропії 23, отримаємо:

$$F_i=0,\ \ F_{11}=\frac{1}{X_i^2},\ F_{22}=F_{33}=\frac{1}{Y_i^2},\ F_{66}=\frac{1}{T^2}, F_{12}=F_{13}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X_i^2}\right),$$
$$F_{23}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{Y_i^2}-\frac{1}{X_i^2}\right).$$

Критерій максимальних напружень може бути виражений у формі тензорно-поліноміального критерію так:

$$\left(\sigma_1-\sigma_{1p}\right)\left(\sigma_1+\sigma_{1c}\right)\left(\sigma_2-\sigma_{2p}\right)\left(\sigma_2+\sigma_{2c}\right)\left(\sigma_3-\sigma_{3p}\right)\left(\sigma_3+\sigma_{3c}\right)\times$$
$$\times\left(\sigma_4-\sigma_{23}\right)\left(\sigma_4+\sigma_{23}\right)\left(\sigma_5-\sigma_{31}\right)\left(\sigma_5+\sigma_{31}\right)\left(\sigma_6-\sigma_{12}\right)\left(\sigma_6+\sigma_{12}\right)\le 0. \quad (4.57)$$

Нехтуючи членами вище другого порядку, отримують наближений критерій максимальних напружень у квадратичній формі, для якого ненульові компоненти міцності тензорів дорівнюють:

$$F_1 = \frac{1}{\sigma_{1p}} - \frac{1}{\sigma_{1c}},\ F_2 = \frac{1}{\sigma_{2p}} - \frac{1}{\sigma_{2c}},\ F_3 = \frac{1}{\sigma_{3p}} - \frac{1}{\sigma_{3c}},\ F_{11} = \frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}},\ F_{22} = \frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}},$$

$$F_{33} = \frac{1}{\sigma_{3p}\sigma_{3c}},\ F_{44} = \frac{1}{\sigma_{23}{}^2},\ F_{55} = \frac{1}{\sigma_{31}{}^2},\ F_{66} = \frac{1}{\sigma_{12}{}^2},\ F_{12} = -\frac{F_1F_2}{2},\ F_{13} = -\frac{F_1F_3}{2},$$

$$F_{23} = -\frac{F_2^2}{2}$$

Інші міцністні константи дорівнюють нулю.

Для трансверсально ізотропного матеріалу з площиною ізотропії 23 маємо

$$F_1 = \frac{1}{\sigma_{1p}} - \frac{1}{\sigma_{1c}},\ F_2 = F_3 = \frac{1}{\sigma_{2p}} - \frac{1}{\sigma_{2c}},\ F_{11} = \frac{1}{\sigma_{1p}\sigma_{1c}},\ F_{22} = F_{33} = \frac{1}{\sigma_{2p}\sigma_{2c}},$$

$$F_{55} = F_{66} = \frac{1}{\sigma_{12}{}^2},\ F_{12} = F_{13} = -\frac{F_1F_2}{2},\ F_{23} = -\frac{F_2^2}{2}.$$

Критерій максимальних деформацій можна також записати у тензорно-поліноміальному вигляді:

$$\begin{gathered}(\varepsilon_1 - X_{\varepsilon T})(\varepsilon_1 + X_{\varepsilon C})(\varepsilon_2 - Y_{\varepsilon T})(\varepsilon_2 + Y_{\varepsilon C})(\varepsilon_3 - Z_{\varepsilon T})(\varepsilon_3 + Z_{\varepsilon C})\times \\ \times(\varepsilon_4 - R_\varepsilon)(\varepsilon_4 + R_\varepsilon)(\varepsilon_5 - S)(\varepsilon_5 + S)(\varepsilon_6 - T)(\varepsilon_6 + T) \le 0,\end{gathered} \tag{4.58}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - деформації розтягування в напрямках *1, 2, 3* відповідно, $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ деформації зсуву в площинах *23, 13* і *12* відповідно, $X_{\varepsilon T}, Y_{\varepsilon T}, Z_{\varepsilon T}$ - граничні деформації розтягу в головних напрямках *1, 2* і *3* відповідно; $X_{\varepsilon C}, Y_{\varepsilon C}, Z_{\varepsilon C}$.- граничні деформації стиску в головних напрямках *1, 2* і *3* відповідно; R, S, T - граничні зсувні деформації в площинах *23, 13* і *12* відповідно.

Використовуючи матрицю піддатливості та співвідношення теорії пружності анізотропного тіла, а також нехтуючи членами вище другого порядку, рівняння може бути приблизно виражене у квадратичній формі, для якої ненульові компоненти тензорів міцності мають наступний вигляд:

$$F_1 = F_1^A + \frac{b_{12}}{b_{22}} F_2^A + \frac{b_{13}}{b_{33}} F_3^A, \qquad F_2 = \frac{b_{12}}{b_{11}} F_1^A + F_2^A + \frac{b_{23}}{b_{33}} F_3^A,$$

$$F_3 = \frac{b_{13}}{b_{11}} F_1^A + \frac{b_{23}}{b_{22}} F_2^A + F_3^A,$$

$$F_{22} = \frac{1}{X_T X_C} + \left(\frac{b_{12}}{b_{22}}\right)^2 \frac{1}{Y_T Y_C} + \left(\frac{b_{13}}{b_{33}}\right)^2 \frac{1}{Z_T Z_C} - \frac{b_{13}}{b_{33}} F_1^A F_3^A - \frac{b_{12}}{b_{22}} F_1^A F_2^A - -\frac{b_{12} b_{13}}{b_{22} b_{23}} F_2^A F_3^A,$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_T Y_C} + \left(\frac{b_{12}}{b_{11}}\right)^2 \frac{1}{X_T X_C} + \left(\frac{b_{23}}{b_{33}}\right)^2 \frac{1}{Z_T Z_C} - \frac{b_{12}}{b_{11}} F_1^A F_2^A - \frac{b_{23}}{b_{33}} F_2^A F_3^A - -\frac{b_{12} b_{23}}{b_{11} b_{33}} F_1^A F_3^A,$$

$$F_{33} = \frac{1}{Z_T Z_C} + \left(\frac{b_{13}}{b_{11}}\right)^2 \frac{1}{X_T X_C} + \left(\frac{b_{23}}{b_{22}}\right)^2 \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{b_{13}}{b_{11}} F_1^A F_3^A - \frac{b_{23}}{b_{22}} F_2^A F_3^A - -\frac{b_{13} b_{23}}{b_{11} b_{22}} F_1^A F_2^A,$$

$$F_{44} = \frac{1}{R^2}, \qquad F_{55} = \frac{1}{S^2}, \qquad F_{66} = \frac{1}{T^2},$$

$$F_{12} = \frac{b_{12}}{b_{11}} \frac{1}{X_T X_C} + \frac{b_{12}}{b_{22}} \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{b_{13} b_{23}}{b_{33}^2} \frac{1}{Z_T Z_C} - \frac{1}{2}\left(\frac{b_{12}^2}{b_{11} b_{22}} + 1\right) F_1^A F_2^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{b_{13} b_{12}}{b_{11} b_{33}} + \frac{b_{23}}{b_{33}}\right) F_1^A F_3^A - \frac{1}{2}\left(\frac{b_{12} b_{23}}{b_{22} b_{33}} + \frac{b_{13}}{b_{33}}\right) F_2^A F_3^A,$$

$$F_{13} = \frac{b_{13}}{b_{11}} \frac{1}{X_T X_C} + \frac{b_{13}}{b_{33}} \frac{1}{Z_T Z_C} + \frac{b_{12} b_{23}}{b_{22}^2} \frac{1}{Y_T Y_C} - \frac{1}{2}\left(\frac{b_{13}^2}{b_{11} b_{33}} + 1\right) F_1^A F_2^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{b_{12} b_{13}}{b_{11} b_{22}} + \frac{b_{23}}{b_{22}}\right) F_1^A F_2^A - \frac{1}{2}\left(\frac{b_{13} b_{23}}{b_{22} b_{33}} + \frac{b_{12}}{b_{22}}\right) F_2^A F_3^A,$$

$$F_{23} = \frac{b_{23}}{b_{22}} \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{b_{23}}{b_{33}} \frac{1}{Z_T Z_C} + \frac{b_{12} b_{13}}{b_{11}^2} \frac{1}{X_T X_C} - \frac{1}{2}\left(\frac{b_{23}^2}{b_{22} b_{33}} + 1\right) F_1^A F_2^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{b_{12} b_{23}}{b_{11} b_{22}} + \frac{b_{13}}{b_{11}}\right) F_1^A F_2^A - \frac{1}{2}\left(\frac{b_{23} b_{13}}{b_{11} b_{33}} + \frac{b_{12}}{b_{11}}\right) F_2^A F_3^A.$$

В наведених рівняннях b_{ij} – компоненти матриці піддатливості.

Аналіз застосування різних феноменологічних критеріїв міцності для моделювання руйнування багатошарових композитів показав, що той

чи інший критерій може бути найбільш точним в одних випадках і давати великі похибки в інших.

В сучасних програмних комплексах, таких як SolidWorks, ANSYS, Abaqus та Patran/Nastran для моделювання конструкцій з композиційних матеріалів пропонується широкій вибір критеріїв руйнування. Так, в SolidWorks застосовують критерій максимального напруження, критерій руйнування Цая-Хілла та критерий Цая-Ву. В ANSYS для передбачення міцності використовуються критерії максимальних напружень і деформацій, Цая-Ву, Цая-Хілла, Хашина, критерій Langley Research Center (LaRC), критерії Кунце та Пака (Puck) при 2-D та 3-D моделюванні. Технології ANSYS дозволяють моделювати явища на рівні мікромеханіки композитів, пов'язані з руйнуванням на межі розділу між волокном та сполучником, використовуючи спеціальні моделі та характеристики когезійної зони. Для оцінки руйнування композиційних конструкцій програмне забезпечення Abaqus використовує критерій Пака, критерій Цая-Ву, критерій Хашина. У MSC.Patran/Nastran ініціювання пошкодження може бути визначено за критеріями максимальних напружень і деформацій, критеріями Цая-Хілла, Хоффмана, Цая-Ву, Хашина та Пака.

5. ВИПРОБУВАННЯ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Проєктування і аналіз конструкцій з композиційних матеріалів значною мірою ґрунтуються на експериментальних даних, отриманих шляхом різноманітних випробувань. Механічні випробування композиційних матеріалів вирішують низку важливих задач, спрямованих на вивчення поведінки матеріалів під навантаженням та визначення їх механічних властивостей. Основними задачами таких випробувань є:

1. Визначення характеристик компонентів (волокон і матриці), необхідних для використання в аналізі властивостей КМ. Знаючи ці характеристики, можна передбачити поведінку окремих шарів і, отже, всього композиту та конструкції з композиційного матеріалу.
2. Визначення характеристик окремих шарів з одним рядом волокон, які являють собою елементи структури композиту. Ці характеристики потрібні для подальшого аналізу КМ у рамках теорії багатошарових середовищ.
3. Визначення основних механічних характеристик КМ (модуль пружності вздовж і поперек напряму армуючих волокон, міцність на розтяг, стиск, зсув, згин; в'язкість руйнування та ударна в'язкість тощо).
4. Визначення характеристик руйнування КМ, включно з аналізом механізмів руйнування, за яких матеріал починає руйнуватися або утворюються мікротріщини.
5. Оцінювання впливу складових композиту та технологічних процесів виготовлення на його механічні властивості. Визначення оптимальних комбінацій армуючих волокон, матриць та технологічних умов для досягнення найкращих характеристик.
6. Моделювання реальних умов експлуатації. Випробування КМ при різних температурах, вологості, швидкостях деформування та інших параметрах, що можуть мати місце в реальних умовах. Визначення поведінки матеріалу в умовах комбінованого навантаження (розтяг + стиск, згин + кручення тощо). Вивчення впливу часу експлуатації на зміну механічних властивостей КМ.
7. Перевірка відповідності механічних властивостей КМ вимогам технічної документації, зокрема, з метою сертифікації.

8. Оцінювання суцільності та пошкодженості структури КМ за допомогою неруйнівних методів.

Усі ці задачі допомагають не лише зрозуміти поведінку композиційного матеріалу за різних умов навантажування, але й забезпечити його надійність та безпеку під час експлуатації у різних сферах, від авіації до будівництва.

5.1. Випробування композиційних матеріалів з полімерною матрицею на розтяг

Область застосування методу

Цей метод поширюється на полімерні композиційні матеріали, армовані безперервними високомодульними вуглецевими, борними, органічними та іншими волокнами, структура яких симетрична щодо їх серединної площині, і встановлює метод випробування цих матеріалів на розтяг за нормальної (200˚С), підвищеної (до 1800˚С) і зниженої (-600˚С) температурах.

Сутність методу

Метод полягає в короткочасному випробуванні зразків з композиційного матеріалу на розтяг з постійною швидкістю деформування, при якому визначають:

- межу міцності при розтягуванні $\sigma_м$ - відношення максимального навантаження P_{max}, що передує руйнуванню зразка, до початкової площі його поперечного перерізу, МПа;
- межу пропорційності $\sigma_{пц}$ - відношення навантаження, за якого відбувається відхилення від лінійної залежності між напруженням і деформацією, до площі початкового поперечного перерізу зразка, МПа;
- відносне видовження δ при руйнуванні - відношення приросту довжини мірної бази в момент руйнування до початкової довжині мірної бази, %;
- модуль пружності Е - відношення напруження до відповідної відносної деформації при навантаженні матеріалу в межах початкової лінійної ділянки діаграми деформування, МПа;
- коефіцієнт Пуассона ν - відношення поперечного відносного скорочення до поздовжнього відносного видовження зразка

при розтягуванні в межах початкової лінійної ділянки діаграми деформування.

Детальні вимоги до випробувань композиційних матеріалів на розтяг описані в стандартах ASTM D 3039 — «Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials», ДСТУ EN ISO 527-4:2018 Пластмаси. Визначення властивостей під час розтягування. Частина 4. Умови випробування для ізотропних та ортотропних, армованих волокном пластмасових композитів та ДСТУ EN ISO 527-5:2018 Пластмаси. Визначення властивостей під час розтягування. Частина 5. Умови випробування односпрямованих волокнистих пластмасових композитів, які регламентують процедури та параметри проведення випробувань, включно з підготовкою зразків, умовами випробувань, вимогами до обладнання та оцінкою результатів. Зауважимо, що чинні державні стандарти України, які гармонізовані зі стандартами Євросоюзу наведені у Додатку А.

Вимоги до зразків

Для випробувань односпрямованих композиційних матеріалів застосовують зразки у вигляді смуги прямокутного перерізу з закріпленими на кінцях накладками (рис. 5.1.1). При визначенні модулів пружності і коефіцієнта Пуассона цих матеріалів можуть також використовуватися зразки-смужки без накладок (рис. 5.1.2).

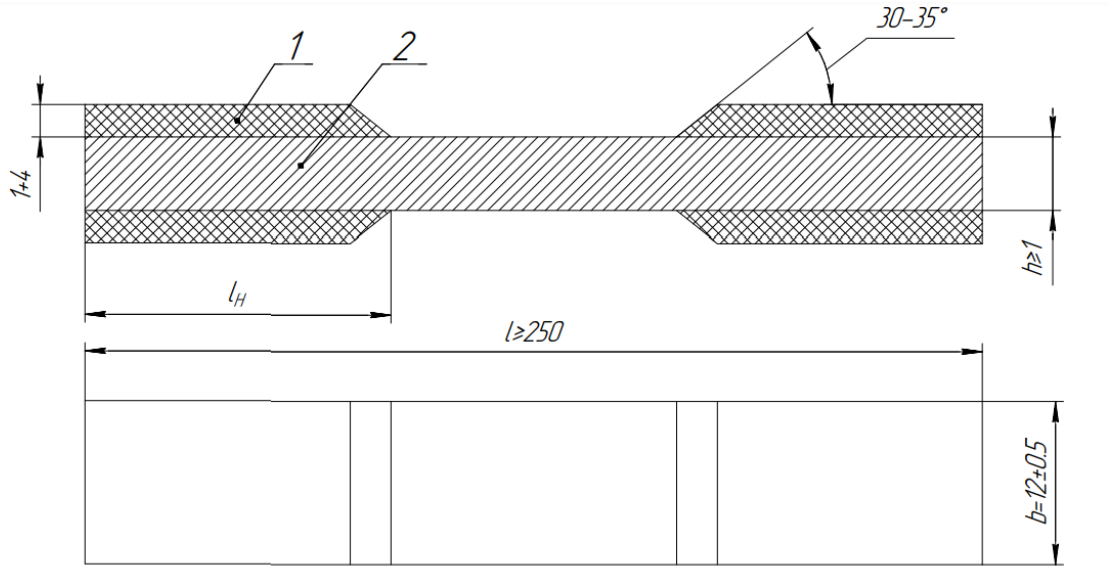


Рис. 5.1.1. Схема наклеювання накладок для вимірювання характеристик міцності: 1 - накладка; 2 - зразок з односпрямованого композиційного матеріалу

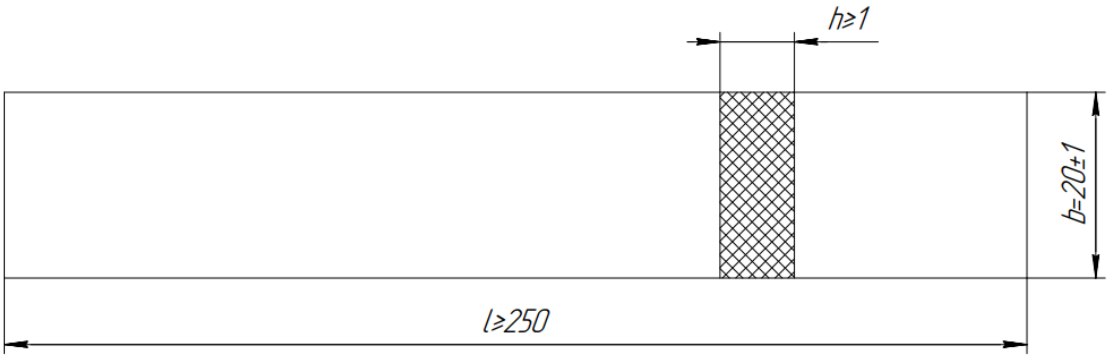


Рис. 5.1.2. Зразок для вимірювання модулів пружності і коефіцієнта Пуассона

Для випробувань композиційних матеріалів з неодноспрямованим армуванням застосовують зразки у вигляді лопатки, форма і розміри яких наведені на рис. 5.1.3.

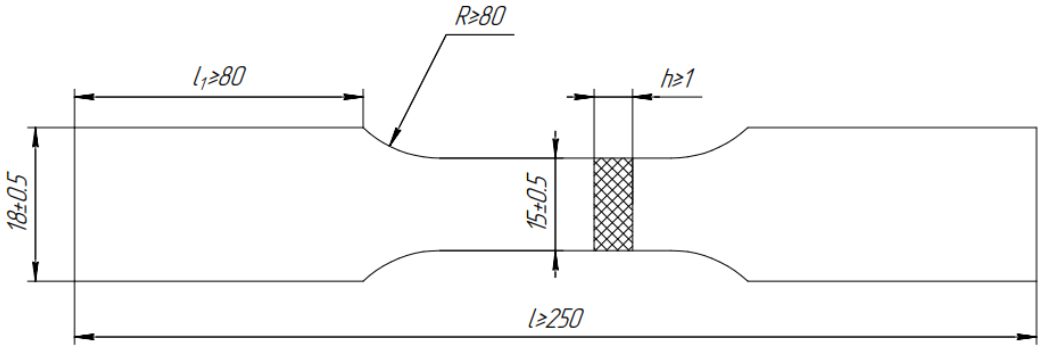


Рис. 5.1.3. Зразок для випробування на розтяг композиційного матеріалу з неодноспрямованим армуванням

Відхилення зразків від номінальних розмірів по ширині і товщині робочої зони не повинно перевищувати 0,05 мм. Розташування арматури повинно бути симетричним відносно серединної площини зразка, що проходить через його вісь, і паралельним площині укладання арматури.

Умови виготовлення зразків, механічна обробка, місце і напрям їх вирізки з плит передбачаються в нормативно-технічній документації на композиційні матеріали. Зразки повинні мати гладку рівну поверхню без здуття, відколів, нерівностей, надрізів, подряпин, тріщин або інших дефектів, що видимі неозброєним оком.

Накладки для зразків виготовляють з ортогонально армованих склопластиків або інших матеріалів, модуль пружності яких в напрямах, перпендикулярних до осі зразка, не перевищує модуль пружності в цих же напрямах матеріалу зразка, а відносне видовження при руйнуванні накладок не повинно бути меншим за відносне видовження випробуваного матеріалу. Напрям укладання волокон на прилеглій до зразка поверхні накладок повинен збігатися з напрямом укладання волокна зразка.

Рекомендована довжина накладок для односпрямованих високоміцних композитів становить 90 ... 100 мм.

Накладки при багаторазовому використанні кріпляться до зразка за допомогою шліфувальної тканинної шкурки, на поверхню полотна якої приклеюють накладки, як показано на рис. 5.1.4. Рекомендується використовувати клей БФ-2 або інші аналогічні за механічними властивостями.

У разі одноразового використання накладок їх приклеюють безпосередньо до зразка, як показано на рис. 5.1.1. Для приклеювання накладок використовують клей. Зсувна міцність клею повинна становити не менше 40 МПа. Технологія приклеювання накладок повинна бути вказана в нормативно-технічній документації на матеріал зразка.

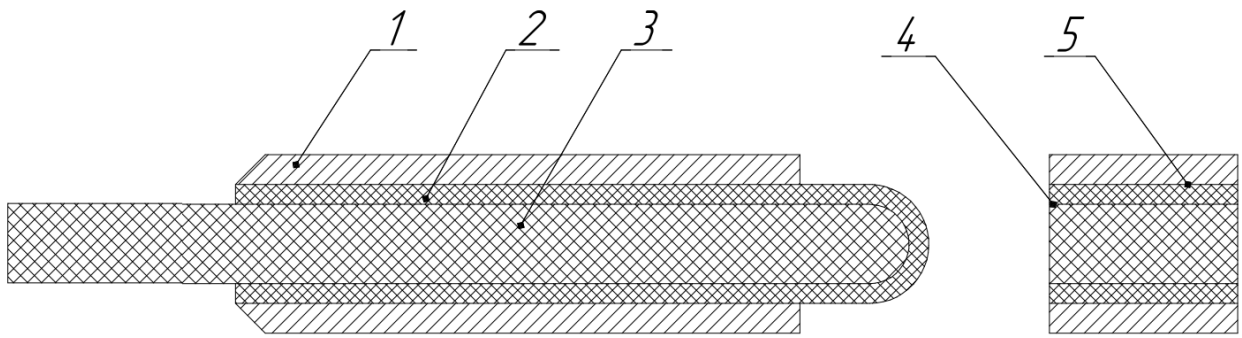


Рис. 5.4. Схема закріплення накладок за допомогою шліфувальної шкурки: 1 - накладка; 2 - шліфувальна шкурка; 3 - зразок; 4 - абразивний шар; 5 - шар клею

Кількість зразків, що необхідна для визначення однієї з характеристик за заданим напрямом КМ однієї партії, має бути не менше п'яти. Якщо руйнування зразка під час випробування відбувається не від

нормальних напружень або поза робочої зони, то зразок замінюється і випробування повторюється.

Вимоги до апаратури

Випробування проводять на розривних і універсальних випробувальних машинах, що забезпечують розтягування зразка із заданою постійною швидкістю переміщення активного затискувача і вимірювання навантаження з похибкою не більше 1% від вимірюваної величини.

Затискувачі випробувальної машини повинні забезпечувати надійне кріплення та точне центрування зразка (поздовжня вісь зразка повинна співпадати з напрямом дії навантаження, що розтягує). Для надійного кріплення зразка при випробуванні високомодульних, високоміцних композиційних матеріалів рекомендується застосовувати затискувачі з насічками на робочих поверхнях під кутом ± 45 ° з кроком 1 ... 2 мм на довжині 100 ... 105 мм.

Для перевірки співвісності прикладання навантаження необхідно встановити і випробувати один контрольний зразок, як мінімум, з трьома наклеєними тензорезисторами (рис. 5.1.5): 1 і 2 - паралельно осі зразка на одній його стороні, 3 - по осі зразка з протилежного боку. Різниця показань тензорезисторов на лінійній ділянці діаграми розтягування не повинна перевищувати

$$\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_3 - \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2}{2}}{\boldsymbol{\varepsilon}_3} \le 0.02\,, \quad \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\boldsymbol{\varepsilon}_1} \le 0.02\,.$$

Для реєстрації деформацій мають використовуватися прилади, що забезпечують вимір деформацій з похибкою не більше 1% граничного значення вимірюваної величини. Можуть бути використані механічні тензометри, тензоперетворювачи опору або інші прилади, прикріплення яких не створює додаткових напружень або деформацій і не впливає на характеристики, що визначаються.

Прилади для вимірювання геометричних розмірів зразка мають забезпечувати вимірювання з похибкою не більше ± 0,05 мм, якщо вимірювані розміри менше 10 мм, та ± 0,1 мм, якщо вимірювані розміри не менше 10 мм.

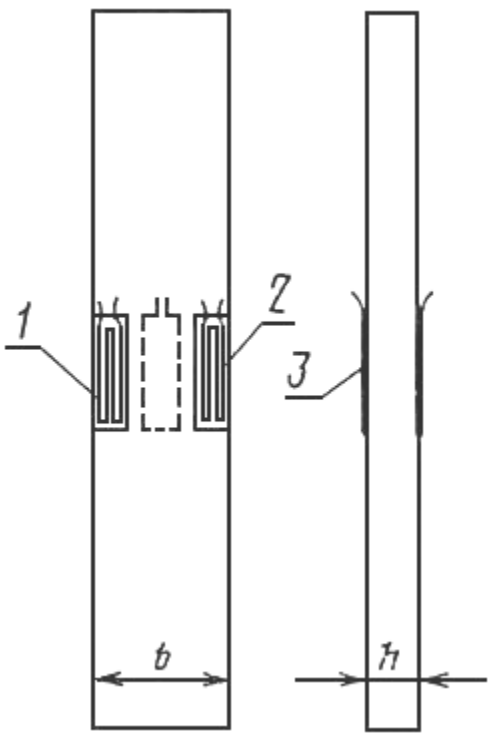


Рис. 5.1.5. Схема наклейки тензорезисторів на поверхні контрольного зразка

Підготовка до випробування

Кондиціювання зразків проводять відповідно до технічних умов або стандартів на матеріал. Якщо в цій документації не вказані умови кондиціонування, то перед випробуванням зразки кондиціонують при одній зі стандартних атмосфер. При відсутності в нормативно-технічної документації на матеріал спеціальних вказівок, час від закінчення виготовлення композиційного матеріалу до випробування повинна становити не менше 16 год., включаючи кондиціювання.

Перед випробуванням вимірюють товщину і ширину робочої частини зразка в трьох місцях: по краях і в середині. Середнє значення товщини і ширини зразка записують в протокол випробувань і по ним, з точністю до трьох значущих цифр, визначають площу поперечного перерізу зразка.

Випробування при нормальній температурі проводять в приміщенні або закритому об'ємі при температурі і відносній вологості навколишнього повітря або іншого середовища, зазначеного в технічних умовах на випробовуваний матеріал.

Випробування при підвищених і знижених температурах проводять в термокамерах для випробувальних машин. Температуру випробувань і

допустимі її коливання визначають відповідно до технічних умов або стандартів на матеріал.

При проведенні випробувань в умовах підвищених і знижених температур час, необхідний для повного прогріву або охолодження зразка до його випробування, має задаватися нормативною документацією на випробовуваний матеріал. Якщо таких вказівок немає, то час витримки зразка при заданій температурі встановлюють не менше 20 хв на 1 мм його товщини.

Зразок в затискувачах випробувальної машини встановлюють так, щоб їх поздовжні осі збіглися з прямою, що з'єднує точки кріплення затискувачів у випробувальній машині.

Запис діаграми деформування при розтягу

Діаграма деформування відображає залежність напруження σ від відносної деформації ε у випробуваннях на розтяг. Метод запису діаграми деформування на розтяг базується на вимірюванні деформації робочої частини зразка і відповідних зусиль під час навантажування аж до руйнування.

Для вимірювання деформацій використовують механічні тензометри, тензорезистори або інші прилади. Тензорезистори наклеюють в середині зразка в подовжньому і поперечному напрямках з двох його сторін за 16 ... 24 год. до установки в випробувальну машину. Як записуюче устаткування застосовують вимірювачі статичних деформацій, що мають чутливість не нижче 5 ... 10 відносних одиниць деформації.

Для запису діаграми деформування використовують автоматичні схеми запису навантаження-деформація, а при її відсутності для одночасного відліку показань навантаження і деформацій застосовують лічильник часу (переривник запису).

Задають швидкість переміщення активного захоплення машини V_L (рекомендована швидкість переміщення рухомого захвату 5 ... 20 мм / хв).

Для визначення межі пропорційності, межі міцності за розтягу і відносного видовження при руйнуванні зразок рівномірно навантажують із заданою швидкістю аж до його руйнування.

За зареєстрованими показниками навантаження розраховують напруження

$$\sigma_{\mathrm{i}} = \frac{F_{\mathrm{i}}}{bh}$$

і відповідні цим напруженням відносні деформації

$$\varepsilon_{11} = K \cdot \alpha$$

де K - тарувальний коефіцієнт використовуваного приладу;

α - показання приладу.

За результатами обчислень σ і ε для кожного зразка будують діаграму σ - ε. Масштаб діаграми повинен забезпечити достатню точність визначення шуканих величин. Якщо крива σ - ε не проходить через початок координат, то його слід перенести в точку перетину кривої з віссю абсцис.

Обробка результатів. У разі одноразового використання накладок їх приклеюють безпосередньо до зразка, як показано на рис. 5.1.4. Для приклеювання накладок використовують клей. Зсувна міцність клею повинна становити не менше 40 МПа. Технологія приклеювання накладок повинна бути вказана в нормативно-технічної документації на матеріал зразка.

Межа міцності при розтягу, $\sigma_м$ (МПа) визначають за формулою

$$\sigma_м = \frac{F_{\max}}{bh}$$

де F_{max} - максимальне навантаження, що передує руйнуванню зразка, Н;

b - ширина зразка, мм;

h - товщина зразка, мм;

Межа пропорційності за розтягу $\sigma_{пц}$ (МПа) визначають за формулою

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{bh},$$

де $F_{пц}$ - навантаження, що відповідає межі пропорційності, Н.

Відносне видовження при руйнуванні δ (%), визначають за формулою

$$\Delta l = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%,$$

де Δl - абсолютне видовження розрахункової довжини зразка при руйнуванні, мм;

l - початкова розрахункова довжина зразка, мм.

Визначення модуля пружності

Метод визначення модуля пружності заснований на вимірюванні деформації ε при триразовому навантаженні - розвантаженні зразка в заздалегідь обраному діапазоні навантажень в межах початкової лінійної ділянки діаграми.

Для визначення модуля пружності і коефіцієнта Пуассона зразок рівномірно із заданою швидкістю навантажують в межах початкової лінійної ділянки діаграми деформування. Зразок навантажують і записують зміну поздовжньої деформації зразка $\Delta\varepsilon_1$ або $\Delta\varepsilon_{11}$ в залежності від навантаження.

Модуль пружності E визначають відношенням напруження σ до відповідної відносної деформації ε.

Для вимірювання деформацій використовують тензорезистори, механічні тензометри і інші прилади, що відповідають вимогам, зазначеним вище. Тензорезистори наклеюють в середині зразка з двох його сторін у поздовжньому напряму. Як записуюче устаткування застосовують вимірювачі статичних деформацій з чутливістю не нижче 10^{-5} відносних одиниць деформації. Зразок встановлюють у випробувальній машині і закріплюють на його робочій частині вимірювачі деформацій (тензодатчики наклеюють за 16 ... 24 години до випробувань).

Підключають до вимірювачів деформацій реєструючу апаратуру і навантажують зразок силою, що становить 10% ... 20% від статичної міцності матеріалу. Потім зменшують навантаження до 2% ... 5% і приймають цей стан за вихідний.

Зразок піддають при заданій швидкості триразовому навантаженню - розвантаженню до необхідного рівня (15% ... 40% F_{max}) і при кожному навантаженні фіксують показання деформацій за двох рівнів навантаження: початкового, рівного 2% ... 5% від величини руйнівного навантаження F_{max}, і максимального.

Модуль пружності за розтягу E (МПа) визначають за формулою

$$E = \frac{\Delta F}{bh}\frac{l}{\Delta l} = \frac{\Delta F}{bh}\frac{1}{\Delta\varepsilon_{11}},$$

де ΔF - приріст навантаження, Н;

$$\frac{\Delta l}{l} = \Delta\varepsilon_{11},$$

$\Delta\varepsilon_{11}$ - зміна відносної поздовжньої деформації зразка при зміні навантаження на ΔF;

Δl - приріст розрахункової довжини зразка при зміні навантаження на ΔF, мм.

За результат приймають середньоарифметичне значення всіх навантажень.

Визначення коефіцієнта Пуассона

Коефіцієнт Пуассона ν визначають відношенням поперечного відносного скорочення до поздовжнього відносного видовження за розтягу зразка в межах початкової лінійної ділянки діаграми. Метод визначення коефіцієнта Пуассона базується на вимірюванні відносних поздовжніх і поперечних деформацій зразка в процесі безперервного або ступінчастого статичного навантаження під час його розтягу.

Для визначення коефіцієнта Пуассона зразок навантажують і записують приріст поздовжньої $\Delta\varepsilon_{11}$ і поперечної $\Delta\varepsilon_1$ деформацій зразка в заданій площині. Для вимірювання деформацій використовують тензорезистори, у яких коефіцієнт поперечної тензочутливості або дуже малий, або дорівнює нулю, електротензометри або механічні тензометри. Тензорезистори наклеюють в середині зразка з двох його сторін в поздовжньому 1 і поперечному 2 напрямах (рис. 5.1.6).

Як записуюче устаткування під час вимірювання деформацій застосовують відповідні прилади з чутливістю не нижче 10 ... 5 відносних одиниць деформацій. На робочій частині зразка закріплюють вимірювачі деформацій (тензорезістори наклеюють за 16 ... 24 годин до випробування) і встановлюють його на випробувальній машині.

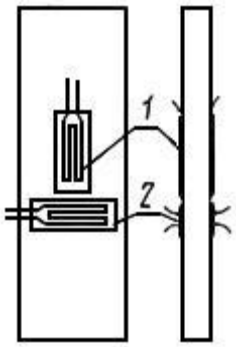


Рис. 5.1.6. Схема наклейки тензорезисторів в поздовжньому і поперечному напрямах

Під'єднують до вимірювачів деформацій реєструючу апаратуру і навантажують зразок силою, що становить 10% ... 20% статичної межі міцності матеріалу. Потім зменшують навантаження до 2% ... 5% і приймають цей стан за вихідний.

Зразок піддають триразовому безперервному або ступінчастому навантажуванню - розвантажуванню за заданої швидкості до необхідного рівня (15 ... 40% F_{max}) і за кожного навантажування реєструють значення поздовжніх і поперечних відносних деформацій для двох рівнів - початкового і кінцевого.

За ступінчастого навантажування значення відносних деформацій реєструють не менше ніж на чотирьох ступінях, величина кожної з яких становить 5% ... 10% від руйнівного зусилля.

Коефіцієнт Пуассона (ν) визначають за формулою

$$\nu = \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta\varepsilon_{11}},$$

де $\Delta\varepsilon_1$ - зміна поперечної відносної деформації зразка при зміні навантаження на ΔF, виміряна по ширині або товщині зразка.

5.2. Випробування композиційних матеріалів з полімерною матрицею на стиск

Область застосування методу

Цей метод поширюється на КМ, армовані безперервними високомодульними вуглецевими, борними, органічними та іншими волокнами, структура яких симетрична щодо їх серединної площини, і встановлює метод випробування на стиск при нормальній (20^0C), підвищеній (до 350^0C) до мінус 80^0C) температурах.

Сутність методу

Сутність методу полягає у випробуванні зразків полімерного композиту (ПК) на стиск із постійною швидкістю деформування.

Для отримання результатів випробувань зразок у вигляді смужки (вузької пластини) прямокутного перерізу встановлюють у спеціально сконструйованому пристосуванні, яке поміщають між захватами випробувальної машини, і прикладають навантаження, що стискає. При цьому записують діаграму деформування «напруження - поздовжня деформація».

При визначенні коефіцієнта Пуассона одночасно з діаграмою «напруження – поздовжня деформація» записують діаграму «напруження – поперечна деформація». Деформацію зразка контролюють датчиком деформації.

Межу міцності при стисканні матеріалу визначають за максимальним навантаженням, що витримується зразком перед руйнуванням. Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона при стисканні визначають на початковій лінійній ділянці відповідних діаграм деформування.

Детальні вимоги до методики випробувань на стиск викладені в стандарті ASTM D 3410 — «Standard Test Method for Compressive Properties of Polymer Matrix Composite Materials with Unsupported Gage Section by Shear Loading». Цей стандарт визначає процедуру, обладнання, розміри зразків, способи їх закріплення та умови випробувань. Аналогічний стандарт Євросоюзу – ISO 604 «Plastics – Determination of Compressive Properties».

Вимоги до зразків

Зразки виготовляють шляхом формування в окремих прес-формах або вирізають із однорідних по товщині плоских панелей або інших напівфабрикатів. Вирізку зразків проводять у двох напрямках основних осей ортотропії випробуваного матеріалу. Спосіб та режим виготовлення зразків повинні відповідати вимогам нормативного документа чи технічної документації на композитні матеріали. Технологія виготовлення зразків має збігатися з технологією виготовлення виробу.

Зразки мають бути з гладкою зовнішню поверхню без здуття, сколів, тріщин, розшарування, вм'ятин, натіків зв’язника та інших дефектів, помітних неозброєним оком. Шорсткість торцевих поверхонь (за параметром Ra) зразка повинна бути не більше 0.63 мкм. Зміна ширини за довжиною зразка має бути не більше 1%, товщини – не більше 2%.

Для визначення межі міцності при стисканні полімерного композиту (ПК) застосовують зразки у вигляді смуги прямокутного поперечного перерізу (рис. 5.2.1) шириною (10 ± 0.5) мм для односпрямованих зразків у напрямку армування та шириною (15 ± 0.5) мм - для односпрямованих зразків у напрямку, перпендикулярному до армування із закріпленими по кінцях накладками, а також зразків із укладанням арматури, відмінною від односпрямованої.

Для визначення модуля пружності та коефіцієнта Пуассона при стисканні КМ застосовують зразки у вигляді паралелепіпеда з

прямокутною основою шириною від 10 до 25 мм та товщиною не менше 1 мм. Ширина, що рекомендується (20 ± 0,5) мм (рис. 5.2.2).

При визначенні модуля пружності та коефіцієнта Пуассона матеріалів з модулем пружності E більше 20 ГПа та товщиною b більше 1.5 мм при навантаженні, що не перевищує 50 % руйнівної, довжину робочої частини зразка приймають рівною 60 мм.

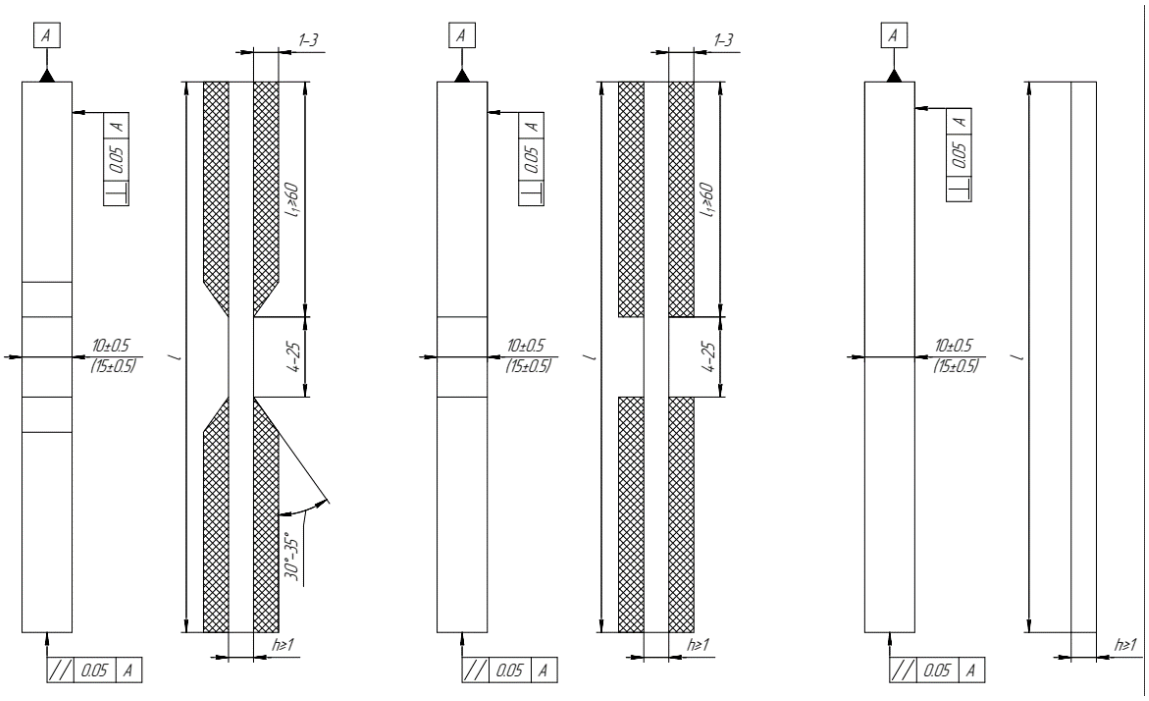


Рис. 5.2.1. Зразки ПК визначення межі міцності при стисканні

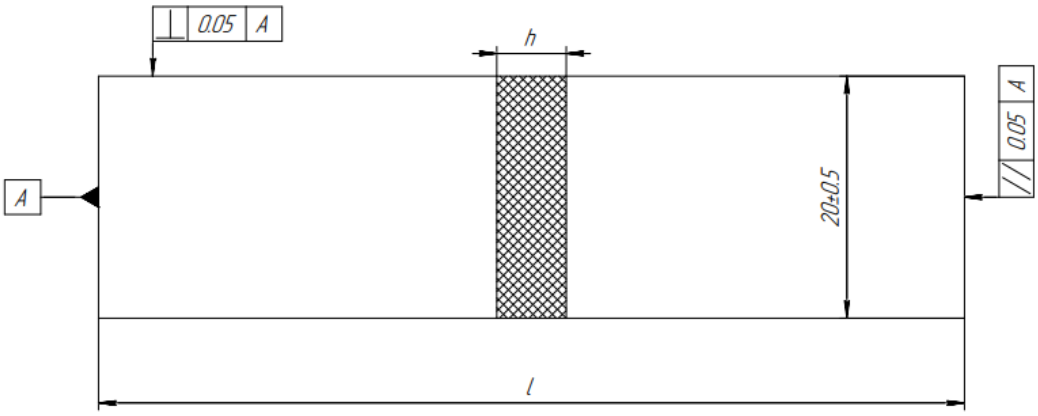


Рис. 5.2.2. Зразки ПК для визначення модуля пружності та коефіцієнта Пуассона при стисканні

При навантаженні, близькому до руйнівного, та інших значеннях модуля пружності E і товщини зразка h, довжину робочої частини зразка, що забезпечує його стійкість, визначають за формулою:

$$l_{\max} \le 0,907 \frac{h}{\mu} \sqrt{E^c \left(\frac{1}{\sigma_{кр}^c} - \frac{1,2}{G_{XZ}} \right)},$$

де h – товщина зразка, мм;

μ – коефіцієнт наведеної довжини (для шарнірних опор μ = 1);

E^c – модуль пружності матеріалу зразка у напрямі прикладання навантаження, МПа;

$\sigma_{кр}{}^c$ – критичне напруження при стисканні, МПа, прийняте для односпрямованих композитних матеріалів рівним $\sigma_м{}^c$;

для композитних матеріалів із неодноспрямованою структурою

$\sigma_{кр}{}^c = 0,5 \cdot \sigma_м{}^c$;

$\sigma_м{}^c$ – передбачувана межа міцності при стисканні, що приймається рівною межі міцності при розтягуванні, МПа;

G_{XZ} – модуль міжшарового зсуву матеріалу зразка, МПа.

Значення l_{max} при товщині зразка h = 1 мм та μ = 1 в залежності від E^c, G_{XZ} та $\sigma_{кр}^c$ наведені в табл. 5.1.

За відсутності значень G_{XZ} та E^C допускається використовувати формулу $l_{\max} \le 3h$, якщо немає прямих вказівок у нормативному документі чи технічній документації на матеріал зразка.

Накладки для зразків виготовляють з ортогонально армованих (або односпрямованих) матеріалів, модулі пружності яких у напрямках, перпендикулярних до осі зразка, не перевищують модулі пружності у відповідних напрямках матеріалу зразка. Відносне подовження при руйнуванні матеріалу накладок у всіх напрямках має бути більшим або рівним відповідній характеристиці матеріалу зразка. Для виготовлення накладок слід використовувати матеріали на основі тканин із вуглецевого волокна або скловолокна.

Накладки приклеюють безпосередньо до зразка, як показано на рис. 5.2.1, за допомогою клею, зсувна міцність якого має становити щонайменше 40 МПа.

Таблиця 5.1. Значення максимальної довжини зразка в залежності від модуля пружності, модуля зсуву та критичного напруження

G_{XZ}, МПа	$\sigma_{кр}^{c}$ МПа	Значення $l_{\max}$ для $h=1мм$ при $E^{c}\cdot 10^{-3}МПа$, що дорівнює, мм								
		5	10	15	20	25	30	35	40	45
1000	100	6.2	8.5	9.5	12.1	13.5	14.8	16.0	17.1	18.2
	200	4.0	5.6	6.8	7.9	8.8	9.7	10.5	11.2	12.0
	300	2.9	4.2	5.1	5.9	6.6	7.3	7.9	8.3	8.8
	400	2.3	3.3	4.0	4.6	5.2	5.6	6.1	6.5	6.9
	500	1.8	2.5	3.2	3.6	4.1	4.5	4.8	5.2	5.5
5000	100	6.2	9.0	10.9	12.7	14.2	15.6	16.8	18.0	19.0
	200	4.5	6.3	7.7	8.8	10.0	10.9	11.8	12.4	13.3
	300	3.5	5.0	6.2	7.2	8.0	8.7	9.3	10.1	10.8
	400	3.3	4.5	5.4	6.2	7.0	7.6	8.2	8.8	9.5
	500	2.6	3.8	4.6	5.3	6.0	6.5	7.1	7.6	8.1

Примітка: при $h \neq 1$ мм значення l_{max} отримують множенням значень, зведених в цій таблиці, на h.

Кількість зразків, необхідних для визначення однієї з характеристик у заданому напрямку КМ однієї партії, має бути не меншою за п'ять.

Вимоги до апаратури

Випробувальна машина, що забезпечує стиснення зразка із заданою постійною швидкістю переміщення активного затискувача та вимірювання навантаження з похибкою не більше ± 1 % від вимірюваної величини.

Випробувальна машина має бути забезпечена двома плоско-паралельними площинками (плитами) товщиною не менше 20 мм і забезпечувати їх зближення із заданою швидкістю. Одна з площинок випробувальної машини повинна мати кульову опору, що сама встановлює своє положення.

Для визначення межі міцності при стисканні випробування проводять у спеціальному пристосуванні, що забезпечує додаток навантаження по торцевих і бокових поверхнях зразка.

Шорсткість майданчиків (за параметром Ra), що передають навантаження на торцеві поверхні зразка, повинна бути не більше

0,63 мкм та їх робочі поверхні повинні бути загартовані до твердості HRC від 45 до 50 (у разі випробування боропластиків - до HRC 70).

Площинки, що передають зусилля на зразок по бічних поверхнях, повинні мати насічку завдовжки не менше 40 мм під кутом ± 45° з кроком 1 мм.

Конструкції пристроїв для випробування зразків КМ на стиск наведені на рис. 5.2.3 та 5.2.4.

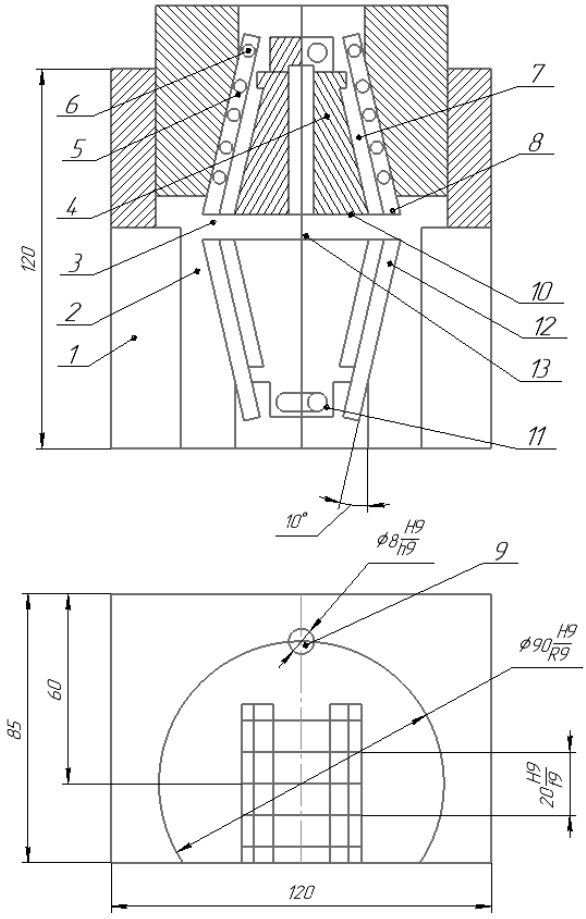


Рис. 5.2.3. Засіб для випробувань зразків КМ на стиск: 1 – корпус; 2 – затискувач; 3, 4 – клин; 5 – опора; 6 – роли; 7 – напрямляюча; 8 – стяжка; 9 – стержень; 10 – вкладиш; штифт; 13 - зразок

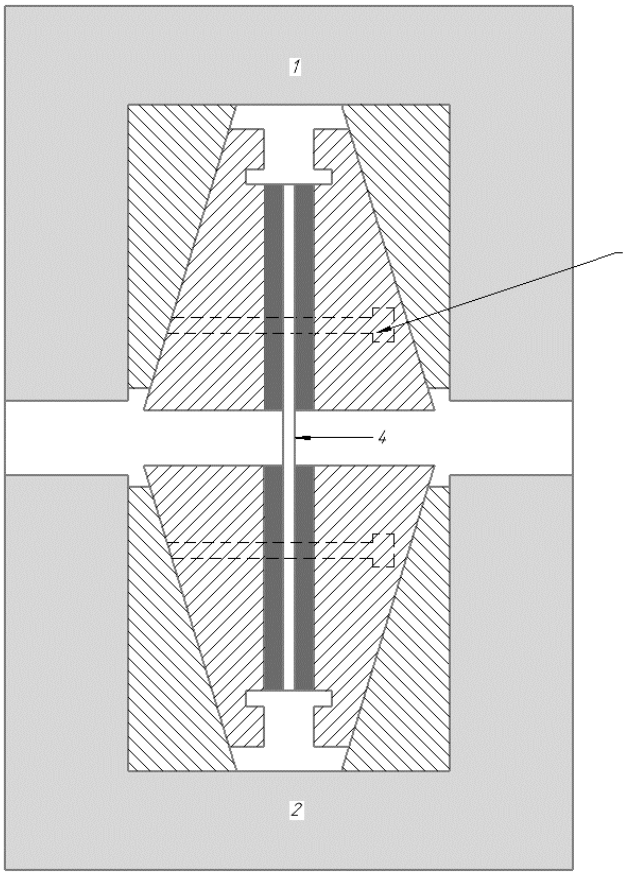


Рис. 5.2.4. Схема засобу для випробувань зразків КМ на стиск: 1- верхній блок; 2 – нижній блок; 3 – затискні гвинти; 4 - зразок

Для вимірюванні деформації слід використовувати прилади, що забезпечують вимірювання деформації з максимальною відносною похибкою не більше 1% від значення вимірюваної величини.

Засоби вимірювання геометричних розмірів зразка повинні забезпечувати вимірювання з похибкою не більше 1% від вимірюваної величини.

Випробування під дією підвищених і знижених температурах проводять на випробувальних машинах, обладнаних термо-кріокамерами, що забезпечують рівномірний прогрів (охолодження) зразка до заданої температури та підтримка останньої протягом усього часу випробування з точністю ± 3 % від температури випробування.

Вимірювання температури проводять за допомогою термопари, яка кріпиться на зразку.

Підготовка до випробування

Перед випробуванням зразки кондиціонують при стандартній атмосфері при температурі (23 ± 2) 0С, відносній вологості (50 ± 5) % і тиску від 86 до 106 кПа не менше 88 годин. Час від закінчення виготовлення формованих зразків або композитного матеріалу, з якого їх вирізають, до випробування зразків, включаючи кондиціювання, має становити не менше 16 год.

Вимірюють товщину та ширину робочої частини зразка у трьох місцях: по краях та в середині. Ділянки розміром менше ніж 10 мм вимірюють з точністю до 0.01 мм, розміром 10 мм і більше – з точністю до 0,05 мм. За результатами вимірювань товщини та ширини зразків визначають середньоарифметичне значення товщини та ширини зразка і записують у протокол випробувань.

Проведення випробувань

Випробування проводять при одному з режимів: температура навколишнього повітря (20 ± 2) 0С, відносна вологість повітря (50 ± 5) % або температура навколишнього повітря (23 ± 3) 0С і відносна вологість повітря (50 ± 10) %.

Зразок встановлюють у випробувальну машину таким чином, щоб поздовжня вісь зразка збіглася з напрямком дії навантаження, а торцеві поверхні були паралельні опорним поверхням.

Встановлюють пристрої для вимірювання деформацій симетрично з двох сторін зразка. Для визначення модуля пружності під дією стискаючого зусилля, встановлюють пристрої для запису поздовжньої деформації. Для визначення коефіцієнта Пуассона - одночасно встановлюють пристрої в поздовжньому та поперечному напрямах (рис. 5.2.5).

При випробуваннях під дією підвищених температурах на зразок в межах робочої зони встановлюють термопари.

Встановлюють задану швидкість V_i переміщення активного захвату машини (рекомендована швидкість від 0.1 до 15 мм/хв) таким чином, щоб руйнування відбулося протягом від 1 до 10 хв після прикладання навантаження.

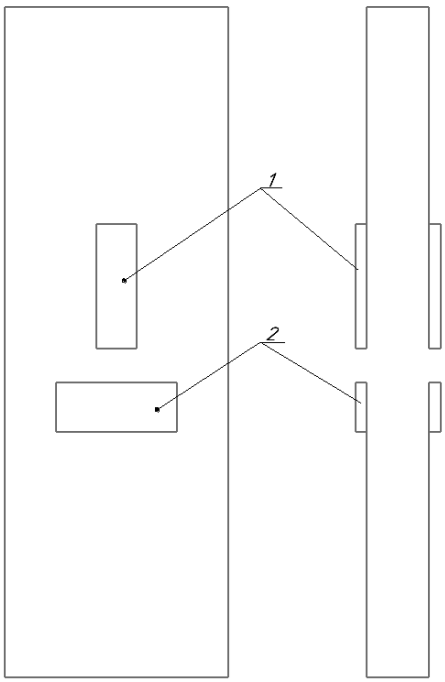


Рис. 5.2.5. Схема розміщення екстензометрів на зразку для визначення коефіцієнта Пуассона при стисканні: 1 - у поздовжньому напрямку; 2 - у поперечному напрямку

При визначенні границі міцності під час стискання зразок рівномірно навантажують із заданою швидкістю переміщення активного захвату із записом діаграм деформування та реєструють найбільше навантаження $F^c_{\max}$, яке витримав зразок.

Для визначення модуля пружності зразок навантажують рівномірно із заданою постійною швидкістю переміщення активного захвату в межах початкової лінійної ділянки діаграми деформування та записують зміну поздовжньої деформації зразка $\Delta\varepsilon^c_1$ від зміни навантаження F^c.

Для визначення коефіцієнта Пуассона записують збільшення поздовжньої $\Delta\varepsilon^c_1$ і поперечної $\Delta\varepsilon^c_{11}$ деформацій зразка в заданій площині.

Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона рекомендується визначати в діапазоні, що відповідає поздовжній деформації від 0.1 % до 0.3 %. Ця область може бути збільшена, але повинна лежати в межах початкової лінійної ділянки діаграми деформування (до точки переходу).

Обробка результатів

При визначенні характеристик КМ при стисканні для контролю стійкості зразка одночасно записують діаграми деформування для обох сторін зразка. Відмінність нахилів записаних діаграм виявляє згинання зразка. Результати випробувань враховують, якщо відсоток вигину B_y становить дещо більше 10 %. Відсоток вигину визначають за величиною поздовжньої деформації 0,2 % за формулою:

$$By = \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon_1} - \boldsymbol{\varepsilon_2}}{\boldsymbol{\varepsilon_1} + \boldsymbol{\varepsilon_2}} \right) \cdot 100\%,$$

де ε_1 – деформація, зафіксована з лівого боку зразка;

ε_2 – деформація, зафіксована з правого боку зразка.

Після закінчення випробувань оцінюють тип, область і місце розташування руйнування кожного зразка.

Границя міцності при стиску визначають за формулою:

$$\sigma^c{}_м = \frac{P^c_{\max}}{bh},$$

де P^c_{max} – найбільше навантаження, що передує руйнуванню зразка (рис. 5.2.6), Н.

bh – площа поперечного перерізу зразка, мм^2.

Деформація при стисканні % визначають за формулою:

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}}{2},$$

де $\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$ – деформації під час стиску в *i*-й точці діаграми за показаннями датчиків 1 та 2 відповідно.

Модуль пружності при стиску E^c, ГПа, визначають за формулою

$$E^c = \frac{\Delta F^c}{bh} \frac{1}{\Delta \varepsilon_1^c}$$

де ΔF^c – приріст навантаження Н, що відповідає приросту деформації $\Delta \varepsilon_1^c$

Коефіцієнт Пуассона ν^c визначають за формулою

$$\nu^c = \Delta\varepsilon_{II} / \Delta\varepsilon_I$$

де $\Delta\varepsilon_I$ - зміни поперечної та поздовжньої відносних деформації при зміні навантаження на ΔF.

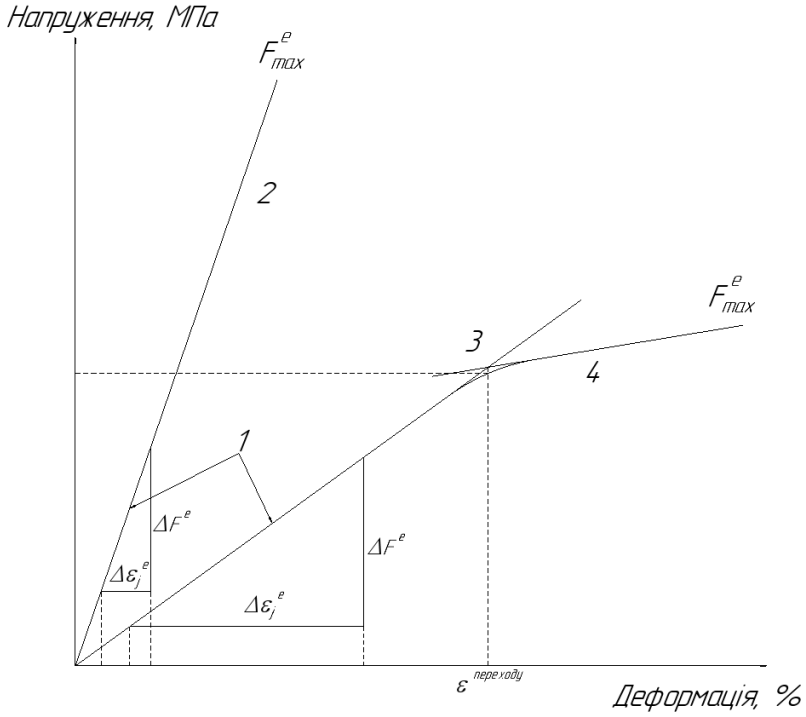


Рис. 5.2.6. Типова діаграма деформування:

1 - діапазон визначення модуля пружності та коефіцієнта Пуассона;
2 – лінійна діаграма деформування; 3 – точка переходу;
4 - діаграма деформування з двома лінійними ділянками

5.3. Випробування на зсув

Визначення характеристик КМ при зсуві зразків з V-подібним вирізом

Область застосування методу

Цей метод застосовують для випробувань КМ, армованих безперервними або дискретними волокнами, і встановлює метод визначення характеристик при зсуві при випробуванні зразків з V-подібним надрізом.

Випробування КМ на зсув призначене для отримання даних про властивості матеріалу під впливом зусилля на зсув з метою проєктування,

складання специфікацій на матеріали, проведення науково-дослідних робіт та контролю якості.

Стійкість матеріалу до зсуву оцінюють як у межах одного шару, так і між шарами, залежно від орієнтації системи координат матеріалу щодо осі навантаження.

До факторів, що впливають на опір, входять:

- матеріали матриці та наповнювача;
- методи виготовлення матеріалу та укладання шарів;
- схеми армування;
- підготовка зразка;
- умови випробувань;
- швидкість навантаження;
- час витримки за певної температури;
- вміст порожнин;
- об'ємна частка армувального матеріалу.

Сутність методу

Метод випробувань полягає в розтягуванні зразка КМ з V-подібними надрізами, закріпленого у двох захватах так, що робоча зона зразка між вершинами надрізів розташовується паралельно осі навантаження, що забезпечує створення у зразку напруження і деформацій зсуву.

В анізотропних матеріалах вимірювання властивостей можна проводити в будь-якій з шести можливих площин зсуву (1-2 або 2-1, 1-3 або 3-1, 2-3 або 3-2) (рис. 5.3.1).

Для кожного зразка можливий вимір лише в одній площині зсуву. При випробуваннях в умовах нормальної, зниженої та підвищеної температури визначають:

- межу текучості при зсуві $\tau_{ту}$, МПа - напруження зсуву матеріалу, визначене в точці перетину графіка напруження зсуву від деформації зсуву з лінією, паралельною лінійній ділянці і зміщеною з початку координат на задану величину деформації;
- межу міцності при зсуві $\tau_{м}$, МПа - напруження при зсуві, що витримується матеріалом в момент руйнування під дією тільки навантаження, що зсуває.
- модуль пружності (модуль зсуву),
- граничну деформацію зсуву.

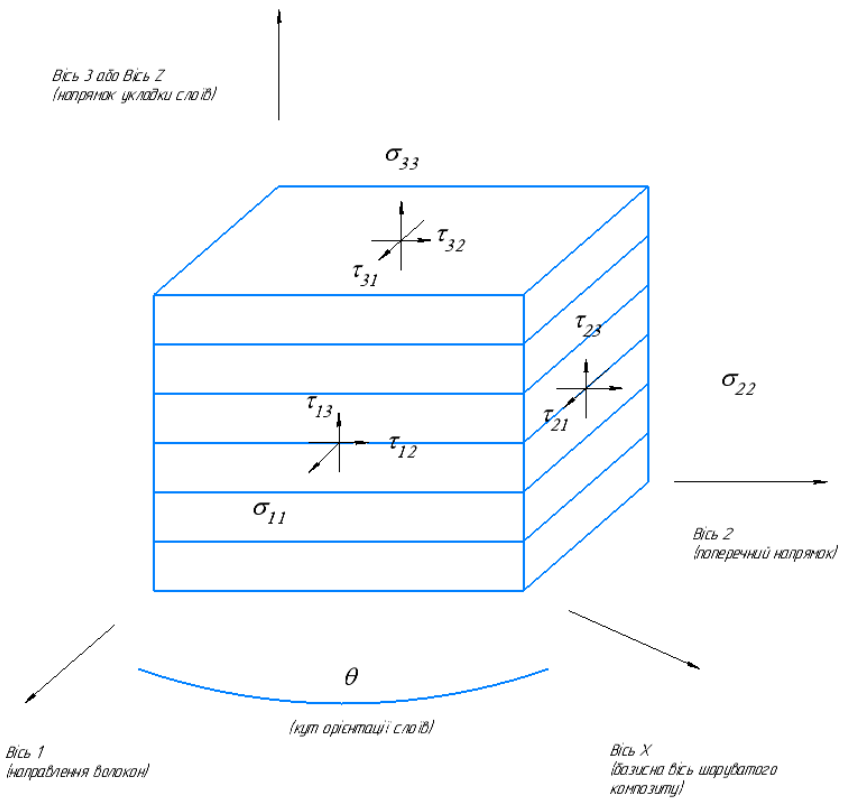


Рис. 5.3.1. Система координат

Детальні вимоги до випробувань на зсув композиційних матеріалів розписані в стандарті ASTM D7078 — «Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by V-Notched Rail Shear Method». Цей стандарт регламентує процедуру підготовки зразків, типи обладнання, методи вимірювання та умови проведення випробувань, що забезпечують точне визначення властивостей на зсув у композитах. З цією метою також може бути використаний стандарт ASTM D5379/D5379M – 19 «Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V-Notched Beam Method».

Вимоги до зразків

Зразок являє собою плоский прямокутник з симетричними V-подібними надрізами посередині. Форма, розміри та допуски зразка показані на рис. 5.3.2 (мал. 4). Товщина зразка становить від 2 до 5 мм.

Для позначення напрямів введена Декартова система координат матеріалу в осях 1, 2 та 3 (рис. 5.3.1). Напрям вздовж осі 1 відповідає напрямку укладання волокон [0]п, при цьому кут орієнтації шарів визначається кутом 0 і дорівнює 0°. Напрям уздовж осі 2 відповідає

напряму укладання волокон [90]s з кутом орієнтації шарів 0, рівним 90°. Напрям вздовж осі 3 (осі Z) відповідає напряму укладання шарів КМ.

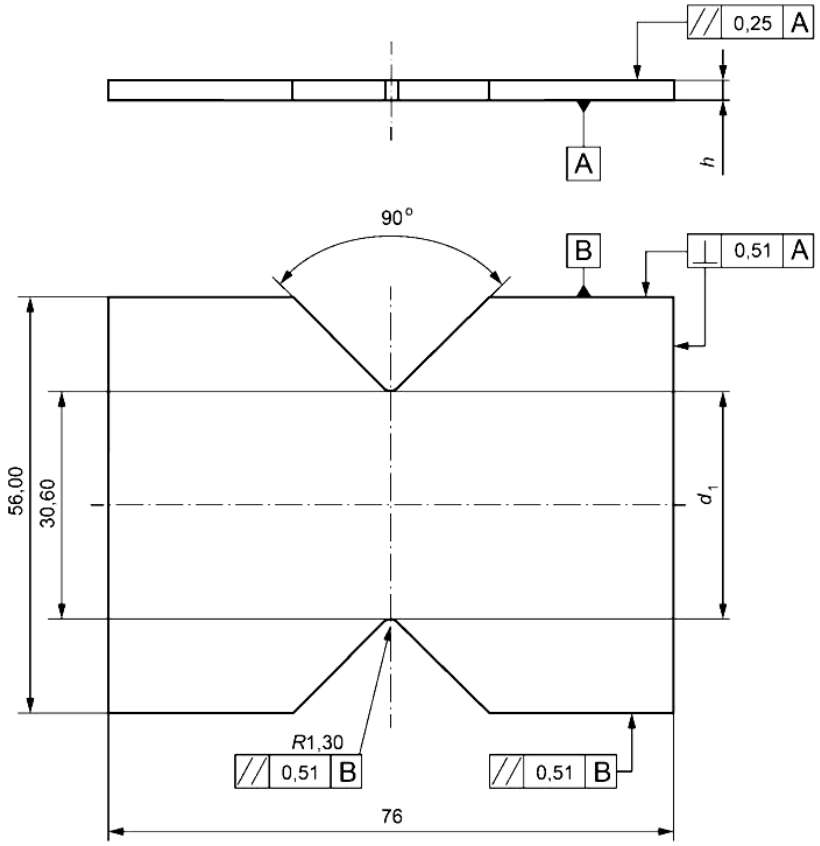
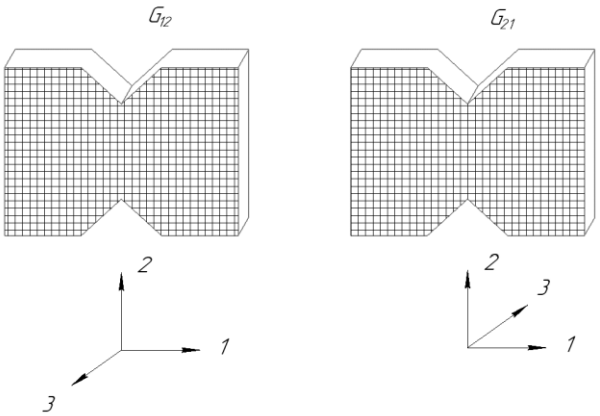


Рис. 5.3.2. Креслення зразка з V-подібними надрізами для випробування на зсув

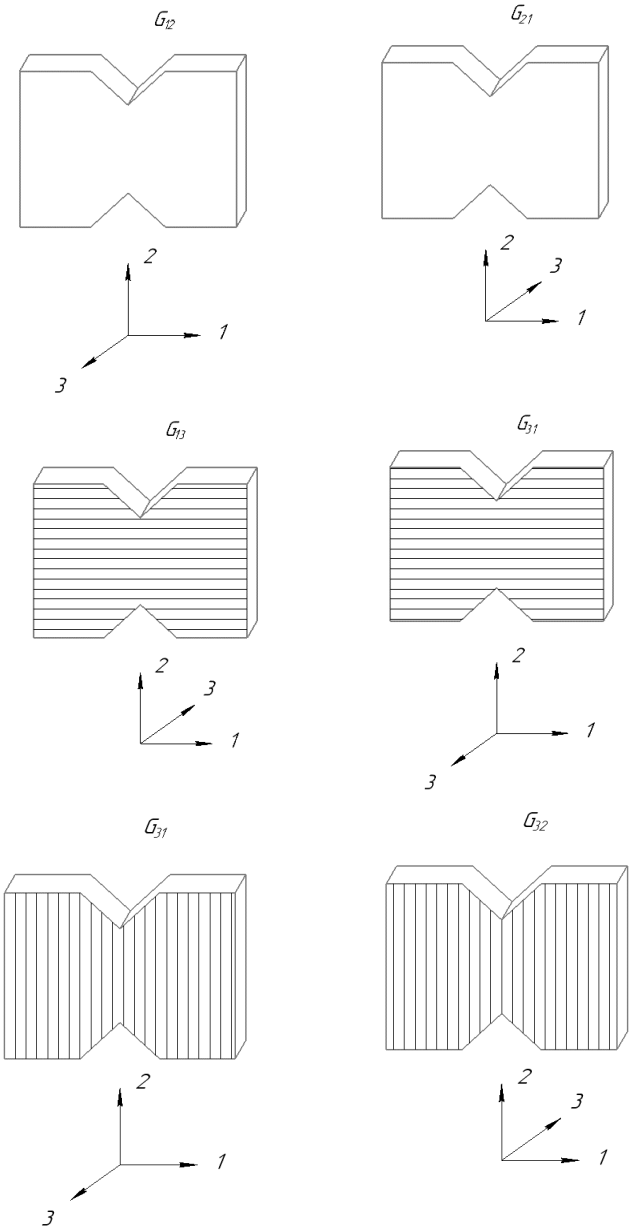
Випробування на зсув виконують у будь-якій із шести площин можливого зсуву в матеріалі, показаних на рис. 5.3.1. Орієнтацію площин зсуву враховують при виготовленні та обробці зразків згідно з рис. 5.3.3.

У цьому методі випробувань для розрахунку модуля пружності при зсуві приймається припущення про рівномірний розподіл напружень і деформацій зсуву в зоні зразка між кінцями надрізів.

Зразки повинні мати гладку рівну поверхню без здуття, сколів, нерівностей, надрізів, подряпин, тріщин або інших видимих неозброєним оком дефектів. Під час обробки надрізів не допускається розшарування матеріалу.



а)



б)

Рис. 5.3.3. Орієнтація площин в матеріалі: а - багатошарові матеріали, б - односпрямовані багатошарові матеріали

Вимоги до апаратури

Випробування проводять на випробувальній машині, що забезпечує лінійне переміщення активного захвату із заданою постійною швидкістю та вимірювання навантаження з похибкою не більше ±1 % вимірюваної величини.

Випробувальна машина повинна бути обладнана пристосуванням із двома захватами, схематично представленими на рис. 5.3.4.

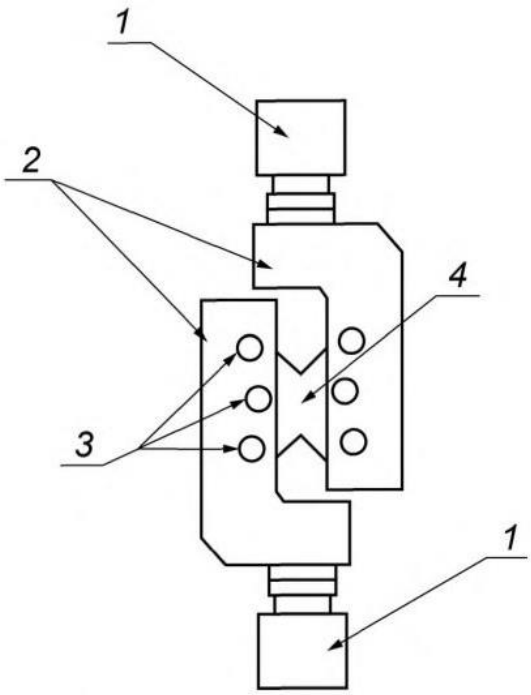


Рис. 5.3.4. Зібраний устрій для випробувань на зсув зразка з V-подібними надрізами:
1 – перехідник до випробувальної машини; 2 – затискувачі; 3 – затискні болти; 4 - зразок

Кожна половина пристрою складається із захоплення і двох губок з покриттям, що володіє високим коефіцієнтом тертя на поверхні. На рис. 5.3.4 показано пристрій для випадку розтягу. Затискувачі мають забезпечувати надійне кріплення зразків. Не допускається руйнування зразків у захватах.

Випробування під дією підвищених і знижених температурах проводять з використанням термо-кріокамери, яка має забезпечувати підтримку заданої температури в межах ±1°С та заданого рівня відносної вологості в межах ±3%.

Підготовка до випробування

Перед випробуванням зразки кондиціонують в стандартній атмосфері при температурі (23±2) 0С, відносній вологості (50 ± 5) % і тиску від 86 до 106 кПа не менше 88 годин. Час від закінчення виготовлення до випробування зразків, включаючи кондиціювання, має становити не менше 16 год.

Перед випробуванням вимірюють ширину зразка між V-подібними надрізами d_1 і округляють її до найближчого значення, кратного 25 мкм, і товщину зразка в перерізі між V-подібними надрізами h.

Розраховують площу поперечного перерізу *F*, мм^2, за формулою:

$$F = d_1 \cdot h.$$

Встановлюють датчики деформації так, щоб їх елементи були спрямовані під кутом + 45° та - 45° до осі прикладання навантаження та відцентровані між надрізами.

Проведення випробувань

Зразок встановлюють у пристрій для затискування так, щоб V-подібні надрізи розташовувалися вздовж лінії прикладання сили. Для цього зразок вільно поміщають в дві половини пристрою та затягують гвинти.

Встановлюють пристрій, закріпивши дві його половини у верхніх та нижніх захват випробувальної машини.

Два захвати переміщують один відносно одного за допомогою випробувальної машини із записом діаграми деформування. Швидкість переміщення активного захвату машини задають в межах від 1 до 10 мм/хв (рекомендована швидкість – 2 мм/хв).

Відносне зміщення двох захватів створює у зразку напруження зсуву. V- подібні надрізи впливають на розподіл напружень зсуву в середній частині зразка, що створює більш рівномірний розподіл, ніж у зразку без надрізів. Оскільки надрізи зменшують ширину зразка, середнє напруження зсуву збільшується в порівняння зі зразком без надрізів.

Вимірювання деформації зсуву в матеріалі здійснюється за допомогою двох датчиків деформації, встановлених під кутом ±45° до осі навантаження в середині зразка і вздовж осі навантаження.

Навантажують зразок із заданою швидкістю до руйнування, реєструючи дані. Якщо зразок має бути зруйнований, реєструють максимальне зусилля, зусилля у момент руйнування, а також деформацію зсуву в момент руйнування або максимально близьку до руйнування.

Якщо остаточного руйнування немає у межах 5 % фактичної деформації зсуву, збір даних при цьому припиняють.

При випробуванні в умовах підвищених або знижених температур час, час витримки зразка при заданій температурі встановлюють не менше 20 хв на 1 мм його товщини.

Обробка результатів

Розрахунок межі міцності при зсуві $\tau_м$ та напруження при інших навантаженнях $\tau_{ту}$ МПа, визначають за формулами

$$\tau_м = \frac{P_{\max}}{F},$$

$$\tau_i = \frac{P_i}{F},$$

де $P_{\max}$ – зусилля при руйнуванні зразка, Н;

P_i – зусилля на межі текучості або в інших точках діаграми зсуву, Н;

F – площа поперечного перерізу, мм^2.

Результат округляють результат до трьох значущих цифр.

При необхідності розрахунку модуля пружності при зсуві обчислюють відносну деформацію зсуву в *i*-й точці даних γ_i за показаннями вимірювань датчиків деформацій при + 45° і - 45° в кожній необхідній точці за формулою

$$\gamma_i = |\varepsilon_{+45}| + |\varepsilon_{-45}|,$$

де ε_{+45} – відносна деформація зсуву плюс 45 ° в *i*-й точці даних, %;

ε_{-45} – відносна деформація зсуву мінус 45 ° в *i*-й точці даних, %.

Розрахунок модуля пружності при зсуві методом хорди проводять за формулою:

$$G = \Delta\tau \Big/ \Delta\gamma = \frac{\tau_{i2} - \tau_{i1}}{\gamma_{i2} - \gamma_{i1}},$$

де $\Delta\tau$ – різниця між двома напруженнями на лінійній ділянці діаграми деформування, МПа;

$\Delta\gamma$ – різниця між двома деформаціями в тих же точках (до 04% деформації зсуву), відносних одиниць;

τ_{i1}, γ_{i1} – напруження і деформація в точці 1 діаграми деформування;

τ_{i2}, γ_{i2} – напруження і деформація в точці 2 діаграми деформування.

Цей метод застосовують її в діапазоні (0.4 ± 0,02 %) відносної деформації зсуву, починаючи з найменшої початкової точки в діапазоні

від 0.15 % до 0.25% включно. За відсутності даних у точках початку діапазону відносної деформації зсуву використовують найближчі точки даних, які є. Отримане значення модуля пружності при зсуві округляють до трьох цифр. Графічний приклад визначення модуля пружності при зсуві методом хорди показаний рис. 5.3.5.

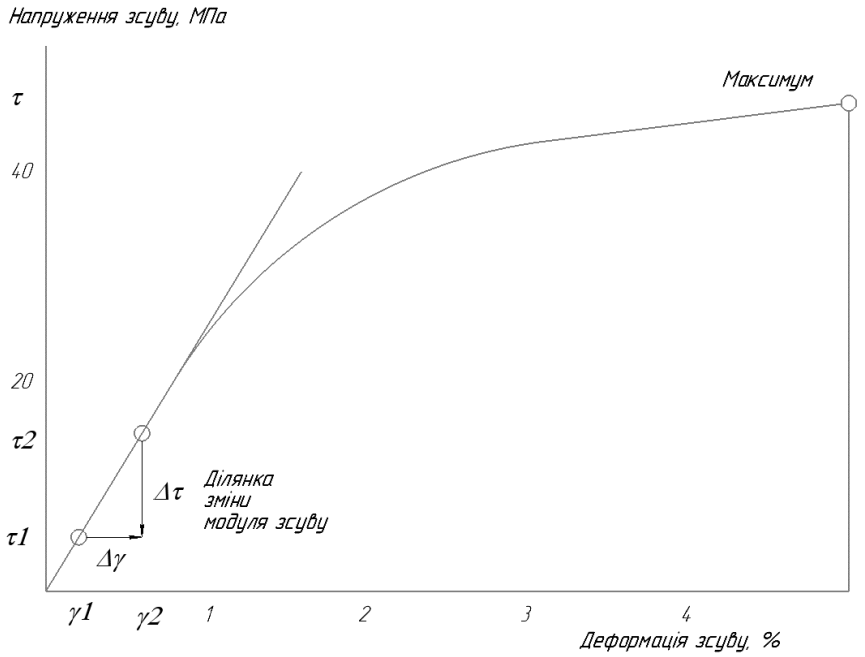


Рис. 5.3.5. Визначення модуля пружності при зсуві

Для визначення границі текучості при зсуві необхідно змістити лінійну ділянку діаграми деформування вздовж осі відносної деформації від вихідної точки на задану величину відносної деформації та продовжити цю лінію до перетину з діаграмою деформування. Напруження при зсуві, що відповідає точці перетину відповідає границі текучості при зсуві.

Після закінчення випробувань визначають тип, зону та місце руйнування зразка (рис. 5.3.6). Всі дані заносять в протокол випробувань.

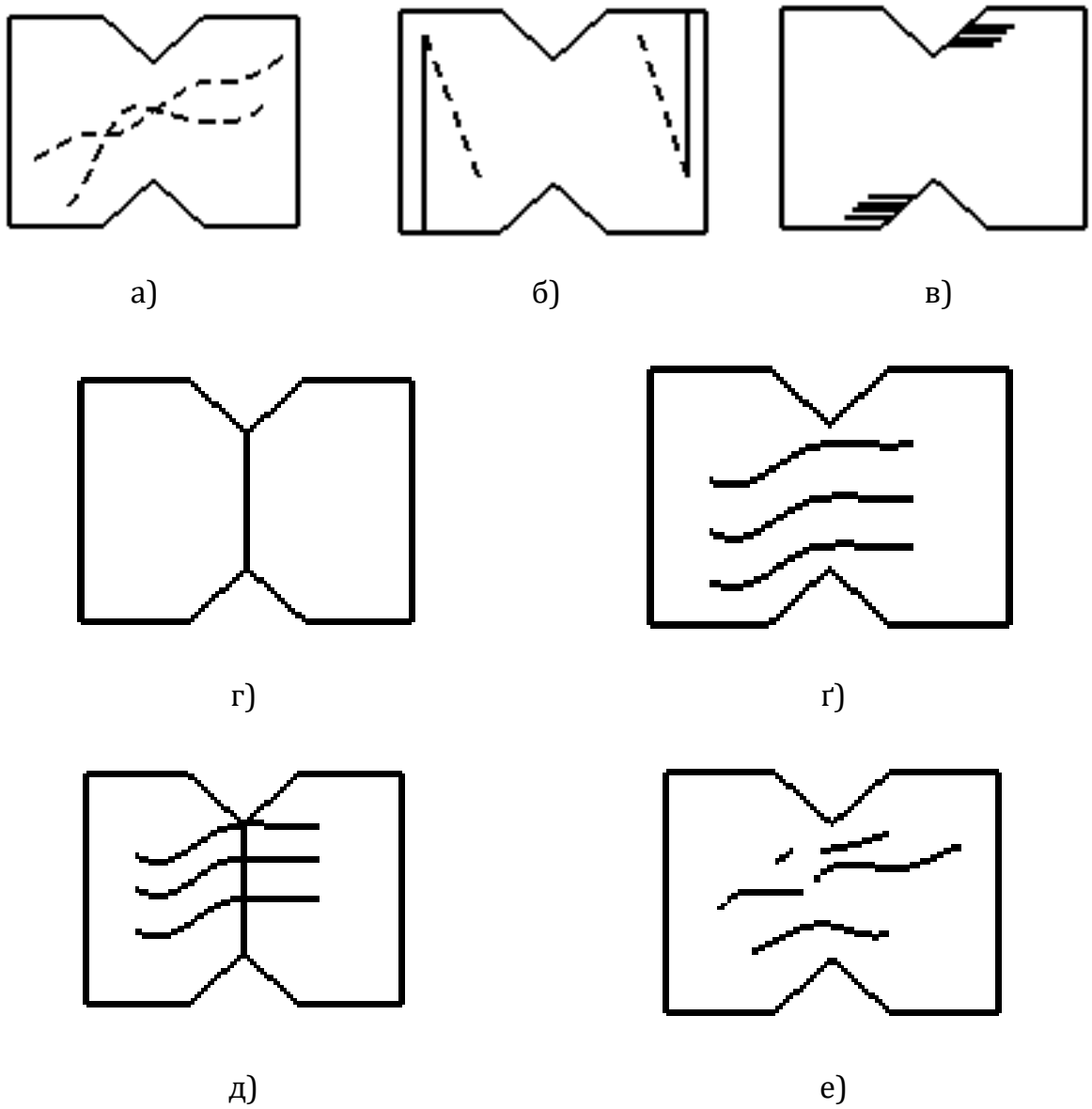


Рис. 5.3.6. Характери руйнування при випробуваннях на зсув зразків з V-подібними вирізами: а-в - некоректні типи руйнування, г-е - некоректні типи руйнування

Посилання

1. *Нові матеріали та композити : навчальний посібник* /. Ю. А. Бурєнніков, І. О. Сивак, С. І. Сухоруков – Вінниця : ВНТУ,. 2013. – 161 с.
2. *Верещака С. М. Механіка композиційних матеріалів*: навчальний посібник / С. М. Верещака. – Суми : Сумський державний університет,. 2013. – 160 с.
3. *Композиційні матеріали : *Електронний ресурс+ : навч. наоч. посіб.* / О. М. Долгов ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка» . – Дніпро : НТУ « Дніпровська політехніка » , 2024. – 126 с.
4. *Писаренко Г. С. Опір матеріалів* / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка,. Є. С. Уманський. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
5. *Механика композитов:* В 12 т. / под общ. ред. А.Н. Гузя. – Киев: А.С.К., 1999.
6. *Kaw, Autar K.* Mechanics of composite materials / Autar K. Kaw. – 2nd ed. (Mechanical engineering ; v. 29) – Taylor & Francis Group, LLC, 2006. – 457 p.
7. *Лепихин П.П., Ромащенко В.А.* Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщение 3. Феноменологические критерии прочности // Проблемы прочности, 2013. – №3. – С. 24–41.
8. *ASTM Standard D 3039*, Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, 2008.
9. *ASTM Standard D 3410*, Standard Test Method for Compressive Properties of Polymer Matrix Composite Materials with Unsupported Gage Section by Shear Loading, American Society for Testing and Materials, ASTM International, 2016.
10. *ASTM Standard D 7078*, Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by V-Notched Rail Shear Method, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, 2005.

ДОДАТКИ

Додаток А

Перелік чинних Державних стандартів України з випробувань композиційних матеріалів

1. ДСТУ EN ISO 527-1:2017 Пластмаси. Визначення властивостей під час розтягування. Частина 1. Загальні принципи
2. ДСТУ EN ISO 527-2:2018 Пластмаси. Визначення властивостей під час розтягування. Частина 2. Умови випробування для пластмас, виготовлених методом формування та екструзії
3. ДСТУ EN ISO 527-3:2017 Пластмаси. Визначення властивостей під час розтягування. Частина 3. Умови випробування для плівок і листів
4. ДСТУ EN ISO 527-4:2018 Пластмаси. Визначення властивостей під час розтягування. Частина 4. Умови випробування для ізотропних та ортотропних, армованих волокном пластмасових композитів
5. ДСТУ EN ISO 527-5:2018 Пластмаси. Визначення властивостей під час розтягування. Частина 5. Умови випробування односпрямованих волокнистих пластмасових композитів

Додаток Б

Публікації кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів КПІ ім. Ігоря Сікорського з досліджень композиційних матеріалів

1. Bobyr M., Huang T. A Review of Delamination Damage of Composite Materials // Joum. Composites Science, №7 (468), 2023, pp 2-20. https://doi.org/10.3390/jcs7110468 Q2
2. Лаврухін, Є., і М. Бобир. «Моделі та критерії руйнування композиційних матеріалів на стадії зародження макротріщин». *Mechanics and Advanced Technologies*, т. 8, вип. 3(102), Вересень 2024, doi:10.20535/2521-1943.2024.8.3(102).309734.
3. Рубашевський, В., і С. Шукаєв. «Міцність і пружність PLA + графіт композитів: експериментальний і теоретичний аналіз». *Mechanics and Advanced Technologies*, т. 7, вип. 2 (98), Вересень 2023, с. 145-54, doi:10.20535/2521-1943.2023.7.2.286738.
4. Крищук, М., Є. Овчаренко, і Г. Ус. «Визначення пружних характеристик пакету моношарів тонкостінних пластин з композитних волокнистих матеріалів». *Mechanics and Advanced Technologies*, т. 7, вип. 2 (98), Вересень 2023, с. 155-9, doi:10.20535/2521-1943.2023.7.2.287711.
5. Бобир, М. «Критерій граничного стану композиційних матеріалів». *Mechanics and Advanced Technologies*, т. 6, вип. 3, Грудень 2022, с. 229-36, doi:10.20535/2521-1943.2022.6.3.264783.
6. Shukaev S., Rubashevskyi V. Effect of constructive parameters on tensile strength of 3D-printed PLA-graphite composite // ACTA TECHNICA NAPOCENSIS-Series: APPLIED MATHEMATICS, MECHANICS, and ENGINEERING. – Vol.65. – 2022. – P.239-244.
7. *Kryshchuk, M., Shukayev, S., Rubashevskyi, V.* (2021). Modeling of Mechanical Properties of Composite Materials Under Different Types of Loads. In: Altenbach, H., Amabili, M., Mikhlin, Y.V. (eds) Nonlinear Mechanics of Complex Structures. Advanced Structured Materials, vol 157. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_3
8. Бобир , М., . Д. К. Фам, і О. Тимошенко. «Пошкоджуваність армованого композиційного матеріалу з врахуванням схеми укладки». *Mechanics*

and Advanced Technologies, т. 5, вип. 3, Грудень 2021, с. 332-8, doi:10.20535/2521-1943.2021.5.3.250175.

9. Рудаков, К. М., Ю. Дифучин, і Т. Бахтоваршоєв. «Концентрація напружень біля отвору, що контактує з жорстким циліндром, в композитній пластині, з урахуванням бічних зазорів». *Mechanics and Advanced Technologies*, т. 5, вип. 2, Листопад 2021, с. 183-92, doi:10.20535/2521-1943.2021.5.2.243744.
10. Рудаков, К. М., С.Бабєнко, Т.Щербань. «Визначення коефіцієнта концентрації напружень у послабленому отвором перерізі композитній пластини, при контакті отвору з циліндром». Mechanics and Advanced Technologies, вип. 2(89), Вересень 2020, doi:10.20535/2521-1943.2020.89.204546.
11. Рудаков, К. М., Ю. Дифучин,. «Експрес-оцінка коефіцієнта концентрації напружень біля навантаженого болтом круглого отвору в пластині із шаруватого полімерного композиційного матеріалу. Вплив схеми армування». *Mechanics and Advanced Technologies*, вип. 1(88), Квітень 2020, с. 7-18, doi:10.20535/2521-1943.2020.88.200290.
12. Maslyey, V., і K. Rudakov. «До визначення модулів пружності пластини з односпрямованим армуванням високомодульним вуглецевим волокном». *Mechanics and Advanced Technologies*, вип. 3(87), Грудень 2019, с. 7-15, doi:10.20535/2521-1943.2019.87.189220.
13. Rubashevskyi, V., і S. Shukayev. «Оцінювання граничного стану вуглепластику AS4/3501-6 carbon/Epoxy зі схемою армування [90°/±45°/0°]s в умовах плоского та лінійного напруженого стану». *Mechanics and Advanced Technologies*, вип. 2(86), Листопад 2019, с. 7-13, doi:10.20535/2521-1943.2019.86.176173.
14. Rudakov, K., і Y. Dyfuchyn. «К расчету односрезного болтового соединения на разрывное разрушение ослабленного отверстием сечения композитной пластины». *Mechanics and Advanced Technologies*, вип. 2(86), Грудень 2019, с. 23-33, doi:10.20535/2521-1943.2019.86.177924.
15. Rudakov, K., Y. Dyfuchyn, і S. Babienko. «Коефіцієнт концентрації напружень у контактуючого з болтом навантаженого отвору в моношарі ортотропного композиційного матеріалу». *Mechanics and Advanced Technologies*, вип. 1(85), Квітень 2019, с. 41-48, doi:10.20535/2521-1943.2019.85.155702.

16. Kryshchuk, M., V. Maslyey, і A. Mashtabe. «Аналіз терморозміростабільності композитної сотопанелі для умов термічного навантаження космічного апарату». *Mechanics and Advanced Technologies*, вип. 1(85), Квітень 2019, с. 57-62, doi:10.20535/2521-1943.2019.85.156494.
17. Kucher N.K., Zarazovskii M.N., Danil'chuk E.L. Deformation and strength of laminated carbon-fiber-reinforced plastics under a static thermomechanical loading. *Mechanics of Composite Materials* 48, 669-680 (2013).
18. Kucher N.K., Zemtsov M.P., Zarazovskii M.N. Deformation behavior and strength of unidirectional carbon fiber laminates. *Mechanics of Composite Materials* , 42, 407-418 (2006).
19. Kucher N.K., Zemtsov M.P., Zarazovskii M.N. Deformation of laminated epoxy composites reinforced with high-strength fibers. *Strength of materials,* 38, 27-38 (2006).