

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І. А. Дичка, М. В. Онай, Т. М. Заболотня

**ПРОГРАМНІ МЕТОДИ
ОБРОБЛЕННЯ
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ:
КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 121 «Інженерія програмного
забезпечення», освітньою програмою «Інженерія програмного
забезпечення мультимедійних та інформаційно-пошукових систем»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензент *Романкевич Віталій Олексійович, д-р техн. наук, проф.*

Відповідальний редактор *Онай Микола Володимирович, канд. техн. наук, доц.*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол №08 від 02.06.2023 р.)
за поданням Вченої ради факультету прикладної математики
(протокол №10 від 29.05.2023 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

*Дичка Іван Андрійович, д-р техн. наук, проф.
Онай Микола Володимирович, канд. техн. наук, доц.
Заболотня Тетяна Миколаївна, канд. техн. наук, доц.*

ПРОГРАМНІ МЕТОДИ ОБРОБЛЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ: КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ

Програмні методи оброблення експериментальних даних: комп'ютерний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», освітньої програми «Інженерія програмного забезпечення мультимедійних та інформаційно-пошукових систем» / І. А. Дичка, М.В. Онай, Т.М. Заболотня; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1.31 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 74 с.

Навчальний посібник розроблено для ознайомлення студентів з теоретичними відомостями та практичними прийомами розв'язання математичних задач за допомогою комп'ютерних засобів, а також вимогами до виконання лабораторних робіт, зокрема правилами їх оформлення. Навчальне видання призначене для студентів, які навчаються за спеціальністю 121 Інженерія програмного забезпечення, освітньою програмою «Інженерія програмного забезпечення мультимедійних та інформаційно-пошукових систем» факультету прикладної математики КПІ ім. Ігоря Сікорського.

© І.А. Дичка, М.В. Онай, Т.М. Заболотня 2023

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Загальні вимоги до оформлення звіту з лабораторних робіт.....	5
Лабораторна робота №1. Апроксимація функцій	7
Лабораторна робота №2. Чисельне інтегрування	39
Лабораторна робота №3. Розв'язання задачі Коші.....	57

ВСТУП

Прості математичні задачі малої розмірності, що вивчаються в курсі математичного аналізу, допускають можливість отримання аналітичних розв'язків. В той же час при моделюванні систем та процесів виникають складні математичні задачі великої розмірності, які можуть не мати аналітичних розв'язків та вимагати застосування чисельних методів, що вивчаються в рамках цієї дисципліни. До того ж складні математичні задачі розв'язувати вручну майже неможливо, тому виникає необхідність у застосуванні комп'ютерних засобів у поєднанні з чисельними методами для розв'язання таких задач. Тому сфера застосувань чисельних методів є досить широкою.

У даних методичних вказівках розглядаються основні принципи та практичні прийоми побудови методів та алгоритмів розв'язання математичних задач на комп'ютері. Навчальний посібник складається з трьох розділів, кожен з яких присвячений виконанню певної лабораторної роботи з дисципліни «Програмні методи оброблення експериментальних даних», яка входить до фахового каталогу вибіркових дисциплін навчального плану підготовки бакалаврів за спеціальністю 121 «Інженерія програмного забезпечення».

В кожному розділі надаються короткі теоретичні відомості з певної теми, завдання на лабораторну роботу з цієї теми, вказівки щодо виконання завдання, а також наводяться вимоги до оформлення звіту з виконаної лабораторної роботи та контрольні питання для самоперевірки.

Лабораторні роботи з дисципліни «Програмні методи оброблення експериментальних даних» розраховані на 18 академічних годин аудиторних занять.

Загальні вимоги до оформлення звіту з лабораторних робіт

Лабораторна робота має бути подана в електронному та друкованому вигляді.

Електронна версія зберігається в банку даних кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем ФПМ КПІ ім. Ігоря Сікорського. Файл з копією лабораторної роботи здається на кафедру разом з друкованим примірником безпосередньо під час захисту. Формат файлу *.docx або *.doc, або *.rtf, або *.pdf.

Звіт необхідно друкувати на одному боці аркуша білого паперу формату А4 (210x297 мм).

Основний текст звіту має бути набраний з дотриманням таких вимог:

- шрифт Times New Roman 14 пт;
- відступ першого рядка 12.5 мм ;
- міжрядковий інтервал 1.5;
- вирівнювання по ширині;
- поля: верхнє та нижнє – 20 мм; ліве – 30 мм; праве – 15 мм;
- від краю до верхнього/нижнього колонтитула 12.5 мм.

Текст в таблицях має бути набраний з дотриманням таких вимог (при необхідності дозволяється таблиці розмішувати в альбомному форматі):

- шрифт Times New Roman 12 пт;
- міжрядковий інтервал 1.0;
- інтервал перед 6 пт;
- інтервал після 6 пт.

Всі рисунки повинні мати під рисунковий напис. Підрисунковий напис вирівнюється по центру і починається зі скорочення “Рис.”, потім

ставиться пробіл та порядковий номер рисунку. Після номера рисунка ставиться крапка, пробіл та пишеться назва рисунка.

На всі рисунки розміщені у звіті має бути посилання в тексті звіту. Посилання на рисунок у тексті виконується за його номером, розташованим після скорочення “рис.”.

Нумерацію сторінок виконують арабськими цифрами. Першою сторінкою звіту з лабораторної роботи є оформлений за зразком титульний аркуш, який включають до загальної нумерації, але номер сторінки на ньому не проставляють. На всіх наступних сторінках обов’язково проставляють у правому нижньому куті номер сторінки без крапки в кінці використовуючи шрифт Times New Roman 10 пт.

На кожній сторінці, окрім титульної, в правому верхньому куті має бути надруковано прізвище, ініціали студента та номер групи.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

Мета роботи: опанувати основні методи апроксимації нелінійних функцій.

Теоретичні відомості

В основі багатьох методів математичного аналізу лежить заміна однієї функції $f(x)$ іншою функцією $\varphi(x)$, що є близькою до $f(x)$, але більш простою, що дозволяє досить просто виконувати над нею певні операції. Таку заміну функції будемо називати *апроксимацією* або просто наближенням функції $f(x)$ функцією $\varphi(x)$.

Якщо функція задана таблицею, то під *інтерполяцією* розуміють знаходження проміжних значень таблично-заданої функції строго в середині таблиці, а під *екстраполяцією* – знаходження її наближених значень за межами проміжку заданих точок, тобто вузлових точок.

Нехай в точках x_0, x_1, \dots, x_n таких, що $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$, відомі значення функції $y = f(x)$, тобто на відрізку $[a, b]$ задана таблична (сіткова) функція (табл. 1.1).

Таблиця 1.1. Таблично-задана функція $f(x)$

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

Задача поліноміальної інтерполяції для таблично-заданої функції $f(x)$ формулюється наступним чином: знайти многочлен $P_n(x)$ такий, що виконується сукупність умов інтерполяції

$$P_n(x_i) = y_i \quad \forall i \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1)$$

Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Будемо будувати многочлен n -го степеня $L_n(x)$ у вигляді лінійної комбінації $\sum_{i=0}^n c_i l_i(x)$ многочленів $l_i(x)$ степеня n ($i \in \mathbb{N}_0$). Для того, щоб такий многочлен був інтерполяційним для функції $f(x)$, достатньо зафіксувати в якості коефіцієнтів c_i цієї лінійної комбінації задані таблицею 2.1.1 значення $y_i = f(x_i)$, а від базисних многочленів $l_i(x)$ вимагати виконання умови

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } j \neq i \\ 1, & \text{якщо } j = i \end{cases} \quad \forall j, i \in \mathbb{N}_0 \quad (1.2)$$

На основі цих міркувань отримуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i. \quad (1.3)$$

Інтерполяційна схема Ейткена

Безпосереднє використання многочлена Лагранжа у формі (1.3) є не дуже зручним через його громіздкість, що є причиною великих обчислювальних витрат. Якщо функція задана таблично, то, зазвичай, завчасно невідомо якої степені многочлен потрібно використовувати для інтерполявання даної функції з заданою точністю, а поступове збільшення

точності за рахунок повторних обчислень значень $L_n(x)$ кожного разу збільшуючи показник степеня n при прямому застосуванні формули (1.3) є неприйнятним, через погану перебудовуваність $L_{n-1}(x)$ в $L_n(x)$.

Можливо побудувати рекурентне задання послідовності інтерполяційних многочленів Лагранжа, яке називають *інтерполяційною схемою Ейткена*:

$$f(x) \approx P_{i,i+k}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \left| \begin{array}{cc} x - x_i & P_{i,i+k-1}(x) \\ x - x_{i+k} & P_{i+1,i+k}(x) \end{array} \right|, \quad (1.4)$$

де $k = 1, 2, \dots$; $P_{i,i}(x) = y_i$.

Організація обчислень за формулою (1.4) повинна бути такою, що коли завчасно не відома степінь інтерполяційного многочлена, який слід використати для обчислення $y(\tilde{x})$, та дана таблиця значень функції достатньо велика, то має виконуватись поступове підвищення степеня k інтерполуючих її многочленів за рахунок підключення нових, все більш віддалених від \tilde{x} вузлів.

Скінченно-різницеві інтерполяційні формули

Скінченні різниці є аналогом похідних. Звідси є справедливими багато їх властивостей, які співпадають з властивостями похідних.

На основі цього можна зробити висновок: якщо скінченні різниці n -го порядку деякої функції $y = f(x)$ стали в будь-якій точці x при різних фіксованих кроках h , то ця функція $f(x)$ є многочлен степеня n .

Для функції $y = f(x)$, що задана таблицею своїх значень y_0, y_1, \dots, y_n у вузлах x_0, x_1, \dots, x_n , де $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, $h > 0$ – деяка стала величина, що називається кроком сітки (таблиці), скінченні різниці різних порядків зручно розміщувати в одній спільній таблиці (див. табл. 1.2) з

вузлами та значеннями функції (останні можна інтерпретувати, як скінченні різниці нульового порядку). Цю таблицю називають таблицею скінченних різниць.

Таблиця 1.2. Діагональна таблиця скінченних різниць

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$...
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$...
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		\vdots	
		Δy_4		\vdots		
x_5	y_5		\vdots			
		\vdots				
\vdots	\vdots					

Якщо в інтерполяційному многочлені Лагранжа (1.3) всі доданки однотипні та відіграють однакову роль в утворенні результату, то хотілося б мати таке подання інтерполяційного многочлена, в якому доданки розміщувались в порядку спадання їх значущості. Така структура інтерполяційного многочлена дозволила б більш просто перебудувати його степінь, додаючи або відкидаючи віддалені від початку його запису члени.

На основі цих міркувань отримується *перша інтерполяційна формула Ньютона*:

$$f(x) \approx P_n(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (1.5)$$

Дану формулу доцільніше за все використовувати при значеннях $|q| < 1$, а саме, для *інтерполювання вперед* (при $x \in (x_0, x_1)$), тобто при $q \in (0, 1)$) та *екстраполювання назад* (при $x < x_0$, тобто при $q < 0$).

Можна легко дійти висновку, що за базовий вузол для формули (1.5) є сенс приймати найближчий до заданої фіксованої точки x , якщо за ним є достатня кількість вузлів для побудови необхідних для (1.5) скінченних різниць. Тобто ця формула є неприйнятною для інтерполювання в кінці таблиці.

Для інтерполювання вкінці відрізка використовується *друга інтерполяційна формула Ньютона*:

$$f(x) \approx P_n(x_n + qh) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (1.6)$$

Другу інтерполяційну формулу Ньютона доцільно використовувати при значеннях $|q| < 1$, тобто в околицях вузла x_n для інтерполювання назад (при $q \in (-1, 0)$) та екстраполювання вперед (при $q > 0$).

Таким чином, інтерполяційні формули Ньютона перш за все призначені для інтерполяції на початку або в кінці таблиці. Але здебільшого потрібно виконувати інтерполяцію всередині таблиці, коли відповідна таблиця є досить великою.

Будемо вважати, що вузол x_0 знаходиться в середині таблиці, та нумерація інших вузлів виконується відносно x_0 , з використанням як додатних, так і від'ємних індексів, тобто $x_i = x_0 + ih$, де $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тоді центральна частина таблиці скінченних різниць буде проіндексована так як показано в таблиці 1.3.

Всі скінченні різниці підкреслені в табл. 1.3, тобто скінченні різниці, що знаходяться в одному рядку з x_0 та y_0 та на пів рядка вище або нижче, називаються *центральними різницями*.

Таблиця 1.3. Центральні скінченні різниці

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$...
...	...							
		...						
x_{-3}	y_{-3}		...					
		Δy_{-3}		...				
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$...			
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$...		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$...	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$		
x_0	y_0	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-3}$	$\Delta^6 y_{-3}$...
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$...	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$...		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$...			
		Δy_2		...				
x_3	y_3		...					
		...						
...	...							

Однією з інтерполяційних формул, що оперує центральними скінченними різницями є *перша інтерполяційна формула Гаусса* (для інтерполювання вперед):

$$f(x) \approx \bar{P}(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots \quad (1.7)$$

Аналогічно, можна побудувати *другу інтерполяційну формулу Гаусса* (для інтерполювання назад):

$$f(x) \approx P(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots \quad (1.8)$$

Ми бачимо, що в інтерполяційних формулах Гаусса використовуються або тільки нижні центральні різниці або тільки верхні. Природним було б для більш кращої інтерполяції знайти формулу в якій би враховувались як нижні так і верхні центральні скінченні різниці. Таку формулу можна отримати, як напівсуму першої та другої інтерполяційної формули Гаусса:

$$f(x) \approx P_s(x_0 + qh) = y_0 + q \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-(n+1)^2)}{(2n-1)!} \cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-(n+1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n}. \quad (1.9)$$

Інтерполяційна формула (1.9) називається *інтерполяційною формулою Стірлінга*.

Формула Стірлінга використовується для інтерполювання в середині таблиці при значеннях $|q|$ близьких до нуля, тобто коли значення x є близьким до одного з середніх вузлів, а саме коли $|q| < 0.25$.

Ще однією формулою, яка враховує як нижні центральні різниці так і верхні є *інтерполяційною формулою Бесселя*:

$$\begin{aligned}
 f(x) \approx P_B(x_0 + qh) = & \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\
 & + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q(q-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)(q-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \dots + \\
 & + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2) \dots (q^2 - n^2)(q+n-1)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} + \\
 & + \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right) q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2) \dots (q^2 - n^2)(q+n-1)}{(2n+1)!} \cdot \Delta^{2n+1} y_{-n}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Дана формула також використовується для інтерполювання в середині таблиці при значеннях x близьких до середини між двома вузлами, тобто при значеннях q близьких до 0.5, а саме коли $q \in [0.25; 0.75]$.

Інтерполяційні формули Ньютона для нерівновіддалених вузлів

Для побудови інтерполяційних формул, що мають ті ж переваги перед інтерполяційною формулою Лагранжа, що й скінченнорізницеві формули та застосовуються до нерівновіддалених вузлів замість скінченних різниць використовують розділені різниці або їх ще називають різницевиими відношеннями.

Якщо визначені розділені різниці k -го порядку $f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k})$, то $(k+1)$ -і різниці відношення визначаються через них таким чином:

$$f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k}) = \frac{f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}}. \quad (1.11)$$

По аналогії зі скінченними різницями, аналізуючи таблицю розділених різниць (табл. 1.4) за порядком розділених різниць, які майже співпадають можна робити висновки про необхідну степінь многочлена для інтерполювання даної функції.

Таблиця 1.4. Таблиця розділених різниць

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}; x_{i+4})$...
x_0	$f(x_0)$					
		$f(x_0; x_1)$				
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0; x_1; x_2)$			
		$f(x_1; x_2)$		$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$		
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1; x_2; x_3)$		$f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$	
		$f(x_2; x_3)$		$f(x_1; x_2; x_3; x_4)$...
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2; x_3; x_4)$		$f(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$	
		$f(x_3; x_4)$		$f(x_2; x_3; x_4; x_5)$...
x_4	$f(x_4)$		$f(x_3; x_4; x_5)$		$f(x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$	
		$f(x_4; x_5)$		$f(x_3; x_4; x_5; x_6)$		⋮
x_5	$f(x_5)$		$f(x_4; x_5; x_6)$		⋮	
		$f(x_5; x_6)$		⋮		
x_6	$f(x_6)$		⋮			
		⋮				
⋮	⋮					

На основі міркувань аналогічних до побудови скінченно-різницевих інтерполяційних формул отримуємо першу *інтерполяційну формулу Ньютона для нерівновіддалених вузлів*:

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_n(x) = & f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \\ & + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Так само можна отримати і другу інтерполяційну формулу Ньютона для нерівновіддалених вузлів.

Завдання на лабораторну роботу

Розробити програму мовою програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти виконувати наступне:

1. Будувати дві інтерполяційні формули, що задані за варіантом (*табл. 1.5, табл. 1.8*) для довільного набору вузлових точок (передбачити можливість введення вузлових точок з клавіатури).
2. Для кожної заданої за варіантом функції (*табл. 1.6, табл. 1.7*) будувати задану за варіантом інтерполяційну формулу (*табл. 1.5, табл. 1.8*) та обчислювати її значення в контрольних точках з точністю $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Виконати інтерполяцію заданих за варіантом функцій у будь-якому математичному пакті та знайти їх значення в контрольних точках двома способами:

- шляхом пошуку коефіцієнтів інтерполяційного многочлена використовуючи матрицю Вандермонда;
- за допомогою однієї зі спеціальних функцій.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підґрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми на мові програмування C#).
3. Обрану сітку для аналітично-заданої функції та її значення у вузлових точках.
4. Значення функцій, заданих за варіантом, у контрольних точках:

Функція № _____

x_i	Точне значення функції y_i (для аналітично заданої за варіантом функції)	C#	Математичний пакет (вказати назву)	
		Інтерполяційна формула задана за варіантом (вказати назву)	З використанням матриці Вандермонда	З використанням спеціальної функції (вказати назву)

5. Висновки.

Варианти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	7	14	11
2	3	15	21
3	15	16	2
4	14	17	13
5	16	18	5
6	24	19	12
7	4	20	25
8	23	21	20
9	17	22	6
10	9	23	8
11	18	24	19
12	22	25	1
13	10		

Таблиця 1.5. Варіанти завдань

Варіант №	Функція №	Інтерполяційна формула
1	10	7
	36	2
2	27	1
	15	4
3	19	3
	42	7
4	13	8
	35	5
5	18	1
	50	2
6	20	0
	33	4
7	16	1
	34	6
8	43	3
	21	1
9	45	3
	17	7
10	2	0
	28	2
11	29	4
	11	1
12	23	8
	26	6
13	3	0
	32	2
14	12	0
	37	6
15	22	0
	49	5
16	41	3
	8	7
17	44	6
	14	0
18	1	8
	30	5
19	38	3
	25	7
20	4	4
	47	8
21	6	1
	48	2
22	7	0
	46	5
23	39	8
	24	6
24	40	5
	5	7
25	9	8
	31	4

Таблиця 1.6. Перелік таблично заданих функцій

№	x	Y	Контрольні точки
1	-11.017	-5.694	
	-10.866	-5.454	
	-10.132	-1.263	
	-9.622	3.438	
	-9.197	7.394	
	-8.960	9.334	
	-8.318	12.758	
	-7.169	10.869	-10.239
	-5.753	2.393	-7.800
	-4.801	0.499	-7.789
	-4.035	2.107	-6.943
	-3.221	4.937	-5.080
	1.287	11.221	-1.637
	1.694	16.222	1.101
	2.191	26.691	1.246
	2.573	40.438	2.649
	2.740	48.810	3.606
	2.994	65.540	6.579
	3.183	81.932	7.766
	4.158	267.787	8.668
	5.322	1090.737	
	7.853	20212.857	
	10.580	416416.307	
	10.623	436054.740	
	11.134	762499.282	
	11.558	1209350.605	
12.412	3050130.945		
2	-20.061	127.098	
	-18.460	96.514	
	-18.119	95.938	
	-17.455	98.498	
	-15.386	93.513	
	-13.808	59.084	
	-13.282	48.788	
	-11.270	39.285	-18.935
	-10.951	40.464	-18.803
	-10.280	41.970	-18.643
	-6.300	6.931	-13.345
	-4.606	7.561	-12.055
	-3.902	7.902	-9.187
	-3.656	7.638	-8.333
	-1.280	0.178	-5.474
	-0.228	-0.205	-4.726
	-0.068	-0.066	-2.364
	1.428	0.883	3.217
	11.248	44.985	17.228
	12.692	66.286	19.033
	13.094	68.463	
	15.104	63.612	
	18.180	124.429	
	18.424	129.921	
	19.127	140.341	
	19.942	141.739	
21.238	134.857		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
3	-16.983	-988.970	
	-15.499	-758.238	
	-14.721	-642.322	
	-13.610	-494.333	
	-12.345	-365.457	
	-10.205	-221.545	-15.545
	-9.862	-201.571	-15.391
	-9.787	-197.252	-12.491
	-8.853	-144.525	-12.485
	-2.363	-3.782	-10.506
	-0.696	0.572	-9.502
	0.102	-0.094	-2.526
	1.439	0.820	-1.879
	1.763	1.908	-0.648
	5.428	27.402	0.799
	5.563	29.381	2.686
	6.633	53.025	3.531
	7.057	66.848	6.775
	8.696	139.386	8.474
	9.000	154.701	10.146
	9.446	177.564	
	9.963	204.559	
	10.319	223.691	
	12.886	417.382	
	12.906	419.451	
	4	-8.801	8.737
-7.511		-1.450	
-7.398		-2.152	
-7.327		-2.556	
-6.768		-4.542	
-6.577		-4.701	
-5.438		-1.166	
-4.368		3.889	
-3.638		4.967	-6.264
-3.033		4.015	-1.765
-3.011		3.958	-1.055
-2.814		3.377	-0.642
-1.916		0.356	1.022
-1.421		-0.849	1.841
-1.205		-1.179	2.327
0.638		0.659	2.721
0.910		1.253	3.337
0.967		1.339	3.343
1.166		1.532	4.181
3.010		-1.750	4.322
3.437		-2.345	5.111
3.747		-2.329	7.309
5.362		4.126	8.414
5.702		5.956	
5.983		7.208	
6.252		8.052	
6.633	8.466		
7.223	7.047		
7.389	6.207		
8.522	-2.348		
8.950	-5.309		

Продовження табл. 1.6

№	x	Y	Контрольні точки
5	-8.331	-108.240	
	-8.244	-104.418	
	-6.489	-53.314	
	-5.929	-43.739	
	-5.664	-39.630	
	-4.047	-16.441	
	-3.294	-7.651	
	-2.763	-3.198	-5.168
	-2.482	-1.536	-4.682
	-1.042	0.673	-3.607
	-0.575	0.275	-3.483
	-0.501	0.215	-3.007
	-0.106	0.011	-1.056
	-0.061	0.004	-0.690
	0.341	0.122	-0.155
	0.357	0.134	-0.063
	2.811	5.354	0.941
	2.868	5.492	1.119
	3.214	6.407	2.989
	4.833	17.786	3.000
5.247	24.374	5.847	
5.462	28.585	8.322	
5.468	28.717		
6.243	48.427		
6.964	71.930		
8.498	129.550		
8.686	136.898		
9.006	149.734		
9.076	152.628		
6	-13.648	-853.845	
	-13.009	-745.547	
	-12.595	-678.540	
	-12.292	-630.918	
	-12.101	-601.405	
	-11.504	-513.132	
	-10.837	-422.536	
	-9.512	-277.368	
	-9.395	-267.042	
	-8.964	-232.072	-11.454
	-7.840	-160.742	-10.239
	-7.454	-140.959	-9.529
	-5.591	-62.544	-8.832
	-5.550	-61.094	-7.970
	-5.298	-52.514	-5.455
	-4.840	-38.421	-0.990
	-3.680	-13.453	0.153
	-2.657	-3.901	0.825
	-2.297	-2.515	1.060
	-2.058	-1.943	3.396
0.957	0.843	6.310	
1.220	1.024	7.239	
1.433	1.178		
2.633	3.783		
2.934	5.549		
3.025	6.226		
3.200	7.726		
4.691	34.297		
4.898	40.064		
5.180	48.661		
7.920	165.059		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
7	-14.942	4.629	
	-13.031	4.875	
	-11.994	5.865	
	-11.972	5.883	
	-11.682	6.097	
	-11.484	6.207	
	-9.345	5.251	
	-9.110	5.022	
	-7.849	4.341	
	-6.583	5.063	-12.146
	-6.537	5.108	-11.910
	-5.079	6.333	-11.122
	-0.940	5.138	-10.717
	-0.246	5.962	-6.701
	1.297	8.196	-6.418
	2.235	9.166	-3.593
	2.356	9.276	-2.016
	4.671	14.655	1.553
	4.724	14.934	4.123
	4.786	15.267	4.474
4.941	16.177	5.004	
5.076	17.041	6.625	
5.531	20.525		
5.658	21.667		
6.477	31.015		
6.895	37.316		
7.557	50.017		
8.139	64.796		
8.679	82.681		
8.977	94.730		
8.998	95.640		
8	-12.520	770274.489	
	-12.346	708319.300	
	-11.449	450392.411	
	-11.264	408603.647	
	-10.168	221096.314	
	-8.740	89152.926	
	-6.088	10199.865	-11.245
	-3.850	666.821	-9.976
	-3.188	225.266	-9.544
	-3.025	168.338	-4.614
	-2.451	58.077	-4.426
	-1.878	23.146	0.498
	1.359	17.559	1.197
	2.160	36.446	1.577
	3.335	290.353	3.161
	3.732	554.870	5.417
	3.885	702.109	6.277
	4.549	1785.518	8.526
	5.103	3545.063	9.395
	6.497	15054.053	9.502
7.074	25077.165	10.563	
7.210	28101.220	10.788	
7.283	29853.353	11.624	
7.488	35270.261		
8.782	91780.084		
10.170	221292.740		
12.441	741698.313		
14.075	1554839.076		
14.208	1645386.017		

Продовження табл. 1.6

№	x	Y	Контрольні точки
9	-14.630	-95715.604	
	-14.356	-87100.338	
	-12.839	-49825.856	
	-12.446	-42651.381	
	-12.125	-37434.580	
	-11.006	-23078.380	
	-10.093	-14961.202	
	-9.457	-10797.809	-13.349
	-7.890	-4353.541	-8.241
	-6.879	-2189.230	-7.584
	-6.100	-1200.561	-7.284
	-5.224	-553.074	-6.101
	-2.472	-4.319	-5.380
	-2.043	4.054	-5.170
	-1.895	5.627	-4.676
	-1.894	5.636	-4.145
	-1.295	8.047	0.456
	-0.655	7.702	2.025
	-0.592	7.641	2.349
	1.392	9.438	2.499
	3.540	85.411	2.955
4.614	301.508	5.032	
5.536	746.454	9.719	
5.993	1109.628	9.784	
6.722	1971.170		
7.680	3832.642		
9.424	10624.034		
10.522	18420.574		
10.653	19594.451		
11.108	24153.372		
12.475	43161.597		
10	-3.707	20.690	
	-3.558	21.166	
	-2.468	24.278	
	-1.519	25.090	-2.404
	0.184	24.538	-0.972
	1.317	25.047	-0.184
	2.672	23.839	-0.121
	3.434	21.572	1.958
	3.600	21.030	2.285
	4.047	19.721	3.123
	4.380	19.054	3.234
	4.490	18.921	3.676
	4.932	18.925	4.378
	5.050	19.087	4.599
	5.583	20.688	5.844
	5.854	21.993	5.909
	6.380	25.130	6.362
	6.937	28.534	6.730
	8.564	29.365	9.868
	9.840	18.639	12.086
	12.310	21.367	
12.331	21.618		
12.684	26.002		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
11	-13.008	41.133	
	-12.623	40.662	
	-11.241	51.561	
	-10.772	56.684	
	-9.683	62.938	
	-9.258	62.283	
	-8.425	57.035	-12.169
	-8.189	55.072	-9.528
	-7.828	52.116	-9.314
	-6.545	46.740	-8.325
	-5.916	48.157	-7.992
	-5.057	52.555	-6.598
	-4.721	54.279	-6.257
	-4.092	56.513	-6.164
	-4.067	56.565	-5.814
	-3.794	56.943	-5.119
	-3.511	56.956	-3.895
	-2.029	53.322	-3.009
	-1.526	52.254	-1.872
	-1.480	52.192	0.115
	-1.381	52.079	0.863
-1.173	51.945		
0.207	53.730		
0.214	53.743		
0.248	53.807		
0.389	54.060		
2.649	51.459		
12	-11.898	23.258	
	-11.600	24.472	
	-11.442	24.979	
	-11.328	25.280	
	-11.025	25.813	
	-10.144	25.150	
	-9.935	24.579	
	-9.432	22.775	
	-9.406	22.670	
	-8.482	18.960	
	-7.893	17.209	
	-7.336	16.343	-9.967
	-7.112	16.211	-9.604
	-7.016	16.187	-9.016
	-4.724	16.339	-8.692
	-4.075	14.873	-6.692
	-3.577	13.265	-6.662
	-3.437	12.777	-4.445
	-3.365	12.524	-3.816
	-1.997	9.019	-3.142
	-1.695	8.912	-0.818
-1.644	8.926	-0.000	
-0.617	10.981	0.471	
-0.501	11.387	3.267	
-0.326	12.036	3.312	
0.146	13.904	5.503	
0.276	14.412		
0.431	15.002		
0.470	15.145		
1.534	17.657		
2.353	17.114		
3.232	14.581		
3.430	13.890		
4.842	10.137		
5.605	9.796		
6.022	10.000		
6.181	10.108		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
13	-8.809	7.932	
	-8.769	8.380	
	-8.196	11.151	
	-7.413	7.019	
	-7.096	8.005	
	-6.885	9.779	
	-5.367	7.788	
	-4.861	8.883	
	-4.658	10.469	
	-4.249	12.471	
	-3.423	6.439	-7.442
	-2.784	6.117	-6.452
	-2.496	8.239	-5.213
	-2.244	9.550	-3.075
	-1.869	8.754	-2.222
	-1.523	5.628	-2.027
	-1.365	4.188	-1.625
	-0.978	2.699	-1.215
	-0.890	2.907	-1.039
	-0.539	5.280	-0.449
	0.110	8.165	1.597
	0.190	7.858	3.650
	0.570	5.011	4.282
	1.822	8.412	
	2.204	9.637	
	2.363	9.075	
	2.776	6.169	
3.529	7.388		
4.209	12.465		
4.384	12.180		
4.548	11.283		
4.755	9.694		
4.992	8.059		
14	2.211	3.755	
	2.228	3.745	
	2.306	3.701	
	3.686	4.977	
	4.054	6.513	
	4.200	7.291	
	4.489	9.069	
	5.039	13.085	3.322
	5.637	17.571	4.376
	5.700	18.000	5.630
	6.394	21.538	9.011
	7.350	21.533	11.485
	11.072	30.782	12.175
	11.565	37.868	12.428
	11.787	40.788	13.922
	12.144	44.721	15.205
	12.452	47.097	15.260
	13.182	48.077	19.718
	14.168	40.447	21.245
	14.389	38.106	22.015
	15.763	31.050	
	15.831	31.333	
	16.034	32.618	
	17.760	62.628	
	21.303	52.033	
	22.334	51.658	
	23.865	86.156	

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
15	2.607	3.576	
	3.351	4.095	
	4.432	8.695	
	5.015	12.903	
	6.159	20.628	
	6.888	22.279	
	6.965	22.247	
	7.014	22.207	3.532
	7.577	20.738	3.998
	7.611	20.601	5.437
	8.152	18.031	6.296
	8.486	16.453	7.480
	8.673	15.720	7.700
	8.990	14.911	8.484
	9.062	14.823	8.660
	9.235	14.781	8.663
	9.781	16.458	9.933
	10.303	20.777	10.160
	10.563	23.796	10.477
	10.583	24.048	11.601
	10.935	28.812	
	11.535	37.460	
	11.941	42.617	
	12.007	43.345	
	12.814	48.427	
	13.884	43.319	
	14.726	34.753	
16	2.109	34.498	
	2.510	47.674	
	3.105	84.673	
	3.472	126.054	
	3.801	183.089	
	4.310	332.235	
	4.530	430.991	
	5.762	1844.222	2.736
	5.855	2056.552	4.483
	6.448	4088.466	5.351
	6.755	5815.929	5.913
	6.771	5920.709	7.953
	6.987	7581.716	8.438
	7.261	10361.183	8.901
	7.443	12733.556	9.145
	8.006	24030.026	9.175
	9.166	87712.581	10.065
	9.260	97366.477	11.016
	10.676	462254.684	11.391
	10.748	500019.705	13.073
	11.164	787729.455	
	12.091	2154222.335	
	12.849	4886724.521	
	13.115	6510612.811	
	13.683	11990136.653	
	13.874	14706106.102	
	14.379	25265827.982	

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
17	-4.028	27.796	
	-2.958	28.075	
	-0.713	24.432	
	-0.620	24.483	
	0.078	25.484	
	0.107	25.546	
	1.863	36.780	-2.494
	1.973	38.739	-1.821
	2.935	77.701	-1.781
	3.665	165.218	-1.597
	3.673	166.834	-0.946
	5.166	933.128	1.995
	5.566	1484.031	4.605
	6.074	2670.490	5.096
	8.794	58041.093	6.858
	9.259	97274.709	7.931
	9.432	117787.816	8.197
	10.309	309287.140	9.280
	10.488	376536.216	10.026
	10.915	599972.987	
	11.650	1335726.588	
	12.243	2540680.150	
	13.082	6282048.006	
	13.911	15309358.576	
14.291	23002391.250		
18	-5.377	11.063	
	-5.199	10.696	
	-4.164	11.702	
	-3.768	13.023	
	-2.618	16.440	
	-2.612	16.448	
	-1.089	15.920	-4.075
	-0.049	15.277	-2.166
	0.102	15.444	-1.542
	0.657	16.992	-1.226
	1.785	27.709	-0.456
	2.538	48.872	-0.324
	3.488	128.241	3.533
	5.213	968.618	4.663
	5.402	1210.135	5.057
	6.170	2965.699	5.535
	6.440	4049.704	6.981
	6.519	4435.108	8.516
	6.889	6782.583	9.417
	7.901	21353.516	10.079
	8.144	28056.714	10.204
	10.822	542555.964	11.590
	11.331	945062.349	11.609
	12.757	4427884.826	
12.963	5523941.931		
13.314	8061056.431		
13.676	11895793.517		
13.801	13595838.004		
14.072	18183546.817		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
19	-14.989	28.599	
	-13.791	12.640	
	-13.021	5.627	
	-12.542	4.786	
	-12.002	7.187	
	-11.753	9.254	
	-11.595	10.779	
	-10.826	19.148	
	-10.603	21.381	
	-7.992	18.429	
	-6.047	11.448	-11.915
	-4.110	19.671	-10.211
	-4.106	19.681	-10.159
	-3.683	20.507	-8.875
	-3.391	20.645	-5.828
	-3.251	20.595	-5.243
	-2.668	19.768	-4.305
	-2.179	18.682	-4.123
	-2.063	18.428	-3.361
	-1.524	17.471	-3.303
	-0.070	18.188	-2.755
	0.327	19.021	-1.191
	1.472	21.827	-0.052
	2.379	26.401	3.226
	2.939	33.339	3.661
	3.163	37.801	
	3.716	55.291	
	3.964	67.272	
	4.040	71.614	
	4.338	92.317	
	4.454	102.173	
	5.451	254.080	
	6.756	882.586	
	6.777	900.889	
6.779	902.393		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
20	-9.319	-206.546	
	-9.166	-215.645	
	-8.594	-236.654	
	-8.536	-237.463	
	-8.288	-238.011	
	-7.784	-225.579	
	-7.146	-190.626	
	-6.384	-140.269	
	-6.165	-127.277	
	-5.506	-98.611	
	-5.205	-88.650	-7.665
	-2.021	-45.542	-7.274
	-1.865	-41.825	-6.581
	-1.011	-20.935	-6.494
	-0.607	-11.589	-6.288
	0.762	18.470	-3.923
	2.043	49.288	-1.416
	2.611	61.210	-1.393
	3.861	74.742	-1.166
	5.094	86.898	-0.551
	5.490	97.992	2.536
	6.766	168.031	3.765
	7.501	215.333	6.893
	9.674	185.939	10.139
	9.922	167.380	15.964
	11.210	119.081	
	12.740	302.542	
	13.061	362.367	
13.191	386.040		
13.232	393.205		
15.142	448.805		
15.229	434.680		
15.357	411.636		
15.594	363.198		
16.579	146.413		
21	-4.793	-140.383	
	-4.031	-110.378	
	-3.768	-99.286	
	-3.383	-83.750	
	-2.904	-66.756	
	-2.817	-64.001	
	-2.442	-53.224	
	0.760	16.335	
	0.879	18.861	
	1.752	36.956	-2.836
	1.762	37.174	-2.829
	2.930	67.260	-0.818
	4.705	137.312	-0.812
	5.522	158.385	1.898
	5.675	159.940	1.919
	5.991	160.521	1.945
	6.133	159.687	2.267
	7.069	144.009	5.810
	7.157	142.427	7.281
	8.358	152.025	8.749
	8.851	183.542	9.044
	9.145	210.834	10.354
	9.594	261.688	
	9.825	290.253	
	9.926	302.876	
	10.545	373.699	
	10.604	379.278	
	10.628	381.480	
11.516	418.441		
12.810	302.551		
13.103	262.426		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
22	-5.808	-7.245	
	-4.072	0.062	
	-3.781	1.180	
	-3.645	1.604	
	-3.488	2.010	
	-3.407	2.182	
	-2.141	2.152	
	-1.001	1.089	
	0.327	3.108	
	0.596	3.783	
	1.518	5.523	-3.091
	1.734	5.692	-0.543
	2.330	5.674	-0.422
	2.410	5.631	-0.021
	5.672	16.411	0.770
	5.970	18.630	0.929
	6.746	22.821	1.889
	6.840	23.089	3.678
	6.845	23.102	3.764
	7.456	23.286	10.625
	8.503	18.406	10.683
	8.603	17.782	12.539
	9.988	13.565	14.853
	10.657	17.463	14.953
	12.313	38.231	20.292
	12.515	40.286	20.890
	13.542	43.403	23.016
	13.976	40.716	
14.545	34.622		
15.232	26.445		
17.259	32.462		
17.607	38.931		
18.022	47.243		
18.102	48.817		
18.531	56.535		
22.880	32.598		
23.862	51.997		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
23	-2.987	-16.593	
	-2.966	-16.449	
	-2.259	-12.305	
	-2.132	-11.656	
	-1.808	-10.039	
	-1.614	-9.053	
	-1.597	-8.970	
	-1.575	-8.854	
	-1.251	-7.089	
	-1.108	-6.250	
	-0.793	-4.243	-2.477
	-0.788	-4.209	-1.195
	-0.564	-2.641	-1.014
	-0.427	-1.626	-0.905
	-0.399	-1.410	-0.463
	-0.319	-0.800	-0.449
	-0.024	1.556	0.165
	0.604	6.821	0.533
	0.760	8.109	3.376
	0.902	9.257	3.616
	0.939	9.553	4.374
	1.036	10.320	5.355
	1.249	11.929	5.529
	1.294	12.261	
	1.827	15.796	
	1.951	16.524	
	2.238	18.097	
	2.989	21.863	
	4.064	28.948	
	4.851	37.111	
	5.334	43.209	
	6.011	51.996	
	6.394	56.453	
24	-4.834	176.068	
	-4.577	155.109	
	-4.032	116.562	
	-3.433	88.770	
	-2.905	66.289	
	-2.487	47.133	
	-1.631	20.321	
	-0.635	5.292	
	-0.250	2.297	
	-0.114	1.955	-3.404
	0.903	7.431	-2.953
	1.676	22.427	-2.947
	2.336	44.347	-1.685
	2.464	48.556	-0.805
	2.656	54.695	-0.416
	3.528	90.726	0.592
	3.575	93.467	1.865
	4.049	124.942	3.516
	4.232	137.476	4.508
	4.793	171.571	4.880
	4.902	177.749	6.405
	5.629	230.282	6.797
	5.974	264.946	8.109
	6.414	310.191	8.845
	6.429	311.548	9.650
	6.673	333.599	10.838
	6.805	344.616	
	7.230	380.098	
	7.710	431.980	
	7.946	463.637	
	7.961	465.688	
	9.232	622.091	
	10.410	804.699	
11.086	904.851		
11.515	963.700		

Продовження табл. 1.6

№	x	y	Контрольні точки
25	-0.764	4.178	
	-0.508	2.766	
	-0.504	2.747	
	-0.089	1.683	
	0.108	1.669	
	0.270	1.841	
	0.616	2.884	
	0.790	3.776	
	1.203	6.912	
	1.262	7.477	
	1.322	8.086	0.055
	1.411	9.035	0.565
	2.279	21.939	0.997
	2.476	25.762	1.092
	2.931	35.917	1.198
	3.075	39.512	1.384
	3.333	46.417	1.965
	3.366	47.329	2.567
	3.612	54.545	2.575
	3.889	63.279	3.119
	4.368	80.024	3.255
	4.481	84.300	3.296
	4.777	96.027	3.307
	4.940	102.841	5.044
	5.074	108.634	5.077
	5.240	116.040	6.271
	5.333	120.327	6.477
	5.393	123.123	
	6.156	161.645	
	6.621	187.680	
	7.030	212.150	
	7.414	236.493	
	7.572	246.913	
7.841	265.083		
7.842	265.197		
8.173	288.452		
8.636	322.566		
8.810	335.846		
8.995	350.278		

Таблиця 1.7. Перелік аналітично заданих функцій

№	Функція	Контрольні точки
26	$f(x) = \sqrt{x^3} + \sin x$	2.556 3.594 4.725 4.866 5.199 7.192 7.382 8.735 9.406 9.449 9.714 9.995 11.514 12.213 13.027 13.038 14.015
27	$f(x) = \sqrt{x^3} + \cos 2x$	2.050 2.310 2.464 6.726 6.812 7.665 8.912 11.286 11.877 13.702 13.935 14.263 15.093 15.482 15.674 16.044 17.798
28	$f(x) = \ln x^3 + \cos x + x$	8.420 8.677 10.250 11.213 11.288 11.942 12.288 12.463 12.834 12.913 14.207 16.404 16.639 16.942 18.683 18.795 19.071

Продовження табл. 1.7

№	Функція	Контрольні точки
29	$f(x) = \log_{10} x^4 + \cos 3x + x^2$	9.711 10.031 10.048 10.873 12.080 12.120 12.158 13.418 14.973 19.321 20.525 20.890 22.416 23.730 24.195 26.906 29.050
30	$f(x) = e^{x^2} + x^3 \cos 3x + x$	1.514 1.544 1.571 1.589 1.716 1.733 1.818 1.821 1.885 1.913 1.921 1.937 1.940 1.978 2.040 2.186 2.380
31	$f(x) = e^x + x^2 \cos x + x^2$	-2.338 -0.541 0.143 0.162 0.281 0.501 0.583 1.286 1.623 1.789 1.993 2.081 2.517 3.087 3.162 3.305 3.794

Продовження табл. 1.7

№	Функція	Контрольні точки
32	$f(x) = e^x + x^2 \ln x + x$	4.977 4.979 5.869 6.306 8.452 8.821 9.257 9.832 10.082 10.240 11.620 11.635 11.778 11.808 12.495 13.904 14.234
33	$f(x) = e^x + x \log_{10} x + x$	5.269 5.561 6.462 6.787 9.220 9.421 9.747 9.783 9.808 12.425 12.604 13.512 14.224
34	$f(x) = \cos x + x \log_{10} x^3 + x^2$	4.522 5.469 6.963 7.038 7.408 7.955 8.409 8.414 9.316 9.769 13.064 13.101 14.454

Продовження табл. 1.7

№	Функція	Контрольні точки
35	$f(x) = \sin x + x \log_2 x + x^2$	1.999 2.604 3.862 4.174 4.383 6.263 6.566 8.023 8.453 9.109 9.291 9.405 9.631 10.685 11.276 11.510 13.560
36	$f(x) = x^3 \sin x + \log_{10} x + x$	3.258 3.480 4.534 4.956 5.363 7.112 8.472 8.709 9.049 10.119 10.323 11.326 11.872
37	$f(x) = x^3 \cos x + e^x + x$	1.730 3.072 4.381 5.055 5.931 8.305 8.473 9.222 9.865 11.840 12.756 13.736 13.992
38	$f(x) = x^2 \sin x + xe^x + x$	-2.100 -1.911 -1.672 -1.464 -1.235 -0.988 -0.890 -0.629 -0.448 -0.425 -0.125 -0.067 0.299

Продовження табл. 1.7

№	Функція	Контрольні точки
39	$f(x) = x^2 \cos x + xe^x + \sqrt{x^3}$	1.772 1.905 2.673 2.746 3.110 3.249 3.271 3.451 4.401 4.477 4.714 5.140 5.557 5.562 5.760
40	$f(x) = x \sin x + e^x + x\sqrt{x^4}$	-1.532 -0.692 -0.587 -0.530 0.034 0.200 0.303 0.988 1.070 1.499 1.587 1.647 1.745 1.989 2.148
41	$f(x) = x \sin x + xe^x + x\sqrt{x^3}$	3.563 3.782 4.744 5.445 5.592 5.826 5.907 5.925 6.353 6.499 6.657 6.683 6.917 6.933 7.670
42	$f(x) = x \sin x + x^2 e^x + \log_2 x^3$	3.821 3.828 3.833 4.012 4.080 4.516 4.837 4.841 4.903 5.221 5.494 6.978 7.205

Продовження табл. 1.7

№	Функція	Контрольні точки
43	$f(x) = x \sin x + x^2 e^x + shx$	4.988 5.468 5.891 6.176 6.332 6.631 6.686 6.879 7.185 7.505 7.740 7.870 8.046
44	$f(x) = \sin(x^2) + e^x \ln x + chx$	0.280 1.257 1.409 2.048 2.050 3.439 4.507 4.913 4.986 5.517 5.815 6.330 7.762 7.789 7.885
45	$f(x) = \sin x + \cos x \cdot \ln x + chx$	-1.910 -1.907 -0.757 -0.527 -0.009 1.191 1.469 2.239 3.058 3.133 3.399 4.314 4.350
46	$f(x) = \log_2 x + \sin x \cdot \ln x + ch(\log_{10} x) + x$	-4.166 -3.216 -2.818 -1.643 -1.436 -1.262 -1.118 -0.934 -0.221 0.075 0.445 0.595 0.615 2.619 2.749 3.266 3.900 4.619 5.232

Продовження табл. 1.7

№	Функція	Контрольні точки
47	$f(x) = x \ln x + e^x \cdot \log_{10}(x) + \operatorname{sh} \frac{x}{2} + x$	-3.091 -3.003 -2.637 -2.453 -2.445 -1.936 -1.819 0.091 0.098 0.120 0.575 0.867 0.922 1.085 1.769 1.956 2.219
48	$f(x) = \sqrt{ x } + \log_{10}\left(\frac{x}{5}\right) + e^x \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) + x$	-13.386 -11.300 -11.224 -10.779 -10.370 -9.970 -8.197 -8.137 -7.520 -5.441 -3.688 -3.647 -3.546 -3.115 -0.579 0.920 0.966 2.077 2.745
49	$f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x \ln \frac{x}{3} + \cos \sqrt{ x } + x \cdot \operatorname{sh}(2x)$	-15.588 -11.288 -9.757 -7.703 -7.402 -6.339 -3.509 -3.049 -1.033 1.733 2.492 3.790 6.053 9.435 9.548 10.451 11.066

Продовження табл. 1.7

№	Функція	Контрольні точки
50	$f(x) = \sqrt[5]{x} + e^x \cdot \log_{10} x^2 + \cos x + x \cdot \operatorname{ch}(5\sqrt{ x })$	-13.533 -11.521 -8.718 -7.046 -6.166 -5.797 -4.147 -3.699 -2.883 -1.451 0.115 3.455 3.926 5.877 6.887 7.485 9.133 9.295 10.354

Таблиця 1.8. Перелік інтерполяційних формул

№	Метод
0	Інтерполяційний многочлен Лагранжа
1	Схема Ейткена
2	Перша інтерполяційна формула Ньютона
3	Друга інтерполяційна формула Ньютона
4	Перша інтерполяційна формула Гаусса
5	Друга інтерполяційна формула Гаусса
6	Інтерполяційна формула Стірлінга та інтерполяційна формула Бесселя
7	Перша інтерполяційна формула Ньютона для нерівновіддалених вузлів
8	Друга інтерполяційна формула Ньютона для нерівновіддалених вузлів

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення термінів апроксимація, інтерполяція, екстраполяція.
2. Як будується визначник Вандермонда та яким чином його можна використувати при інтерполяції?
3. В чому полягає ідея побудови інтерполяційного многочлена Лагранжа?
4. Еквівалентом якої інтерполяційної формули є схема Ейткена? Відповідь обґрунтувати.
5. Яка перевага схеми Ейткена порівняно з інтерполяційною формулою Лагранжа?
6. Чи можливо за таблично заданою функцією побудувати кілька різних інтерполяційних многочленів Лагранжа? Відповідь обґрунтувати.
7. Пояснити зміст термінів білінійна, біквадратична та бікубічна інтерполяція?
8. Дайте визначення скінченної різниці довільного порядку.
9. Які основні властивості скінченних різниць?
10. Який взаємозв'язок наявний між скінченними різницями та похідними?
11. Яка особливість скінченних різниць n -го порядку многочлена n -го степеня? Чому вони дорівнюють? Чому дорівнюють скінченні різниці порядку більше n для многочлена n -го степеня?
12. Як обрати оптимальну степінь інтерполяційного многочлена побудувавши таблицю скінченних різниць?
13. Які інтерполяційні формули слід обрати для знаходження значення таблично заданої функції в контрольній точці, яка знаходиться на початку, в середині або в кінці таблиці?

14. Яка перевага скінченно-різницевих інтерполяційних формул над інтерполяційною формулою Лагранжа?
15. Які інтерполяційні формули використовуються тільки для рівновіддалених вузлів? Відповідь обґрунтувати.
16. Дайте визначення центральних скінченних різниць.
17. На основі яких інтерполяційних формул та яким чином отримуються формули Стірлінга та Бесселя?
18. Чи є формули Стірлінга та Бесселя інтерполяційними в класичному розумінні цього терміну?
19. При яких значеннях q використовуються скінченно-різницеві інтерполяційні формули Ньютона, Гаусса, Бесселя та Стірлінга?
20. Які саме скінченні різниці використовуються в першій інтерполяційній формулі Гаусса?
21. Які саме скінченні різниці використовуються в другій інтерполяційній формулі Гаусса?
22. Яку кількість вузлових точок доцільно брати в формулах Стірлінга та Бесселя? Відповідь обґрунтувати.
23. Що спільного між скінченно-різницеvими інтерполяційними многочленами та інтерполяційним многочленом Лагранжа?
24. Дайте визначення розділеної різниці довільного порядку.
25. Яка особливість розділених різниць n -го порядку многочлена n -го степеня?
26. Побудувати другу інтерполяційну формулу Ньютона для нерівновіддалених вузлів.
27. Які інтерполяційні формули використовуються для нерівновіддалених вузлів? Відповідь обґрунтувати.

Рекомендована література

1. William H. Press Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing / William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery // Cambridge University Press, 2002. – 1018 p.
2. Walter Gautschi Numerical Analysis [Електронний ресурс], 2012.
Режим доступу: http://www.ikiu.ac.ir/public-files/profiles/items/090ad_1410599906.pdf
3. McDonough J. M. Computational Numerical Analysis [Електронний ресурс], 2007. Режим доступу: <http://web.engr.uky.edu/~acfd/egr537-lctrs.pdf>

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Мета роботи: опанувати алгоритми та методи обчислення визначених інтегралів за допомогою квадратурних формул.

Теоретичні відомості

Розглянемо задачу чисельного інтегрування для випадку інтеграла Рімана. Нехай потрібно знайти значення I інтеграла

Рімана $\int_a^b f(x)dx$ для деякої заданої на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$.

Відомо, що інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує, якщо $f(x)$ є кусково-неперервною функцією, тобто для функцій, які допускають на проміжку $[a, b]$ скінченну кількість точок розриву першого роду.

Квадратурні формули прямокутників

Зрозуміло, що прості квадратурні формули можна вивести безпосередньо з визначення інтеграла. Зафіксувавши деяке $n \geq 1$, маємо

$$I \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (2.1)$$

Наближену рівність (2.1) будемо називати загальною формулою прямокутників.

Домовимось надалі розглядати рівномірне розбиття відрізка $[a, b]$

на n частин точками x_i з кроком $h = \frac{b-a}{n}$:

$$x_0 = a, \quad x_i = x_{i-1} + h \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad x_n = b. \quad (2.2)$$

При такому розбитті (кількість відрізків дорівнює n) формула (2.1) приймає вигляд

$$I \approx h \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.3)$$

Тепер потрібно зафіксувати точки ξ_i на елементарних відрізках $[x_{i-1}, x_i]$.

Можливо розраховувати на більшу точність отримання значення інтеграла, якщо взяти точку ξ_i посередині між точками x_{i-1} та x_i .

Зафіксуємо $\xi_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = x_{i-1} + \frac{h}{2} = x_i - \frac{h}{2}$. В результаті маємо

квадратурну формулу середніх прямокутників

$$I \approx I^{\Pi} = h \sum_{i=1}^n f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = h \sum_{i=1}^n f\left(x_i - \frac{h}{2}\right). \quad (2.4)$$

Можна показати, що залишковий член формули прямокутників має такий вигляд:

$$r^{\Pi}(h) = \frac{b-a}{24} f''(\xi_{\Pi}) h^2, \quad \xi_{\Pi} \in (a, b). \quad (2.5)$$

Як видно з формули (2.5), при збільшенні кількості n елементарних відрізків, на які розбивається проміжок інтегрування $[a, b]$, похибка чисельного інтегрування за формулою середньої точки (2.4) спадає пропорційно квадрату h .

Сімейство квадратурних формул Ньютона-Котеса

Підстановка в інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ замість функції $f(x)$ її інтерполяційного многочлена Лагранжа того чи іншого степеня n призводить до сімейства квадратурних формул, які називають формулами Ньютона-Котеса.

Якщо система вузлів інтерполявання $\{x_i\}_{i=0}^n$ співпадає з точками розбиття (2.2) відрізка $[a, b]$ з кроком h , то заміна змінної $x = x_0 + qh$ трансформує многочлен Лагранжа таким чином:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \\ &= L_n(x_0 + qh) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{q-i}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким чином, отримуємо

$$I \approx h \int_0^n \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{q-i} dq. \quad (2.7)$$

Ця рівність, переписана у вигляді

$$I \approx (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i, \quad (2.8)$$

і є квадратурна формула Ньютона-Котеса, де

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{q-i} dq \quad (2.9)$$

– коефіцієнти Котеса.

Формули (2.8) – (2.9) визначають сімейство квадратурних формул. Параметром цього сімейства є число n – степінь інтерполяційного многочлена, яким замінюється підінтегральна функція.

Складені квадратурні формули трапецій та Сімпсона

Застосування формул Ньютона-Котеса високих порядків може бути виправданим лише при достатньо високій гладкості підінтегральної функції $f(x)$. Більш вживаними є квадратурні формули, що отримуються шляхом подрібнення проміжку інтегрування на велику кількість дрібних частин, інтегрування на кожній з яких виконується за допомогою однотипних найпростіших формул невисокого порядку. Отримаємо дві такі формули – трапецій та Сімпсона.

Найпростіша формула трапецій з залишковим членом відповідно до інтегрування на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ може бути записана у вигляді точної рівності

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h - \frac{f''(\xi_i)}{12} h^3, \quad (2.10)$$

де ξ_i – деяка, взагалі, невідома точка інтервалу (x_{i-1}, x_i) , а $y_i = f(x_i)$.

Виконавши розбиття (2.2) початкового проміжку інтегрування $[a, b]$ на n частин з кроком $h = \frac{b-a}{n}$ та застосовуючи до кожної з цих частин, на які за властивістю адитивності розкладається вихідний інтеграл, формулу (2.10), будемо мати

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i). \quad (2.11)$$

Звідки випливає, що шукане значення інтеграла можна наближено знайти за формулою

$$I \approx I^T = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right), \quad (2.12)$$

яку надалі будемо називати *формулою трапецій*, а похибку наближеної рівності (2.12) можна характеризувати залишковим членом r^T :

$$r^T = I - I^T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi_T), \quad \xi_T \in (a, b). \quad (2.13)$$

Аналогічно рівності (2.10) на основі найпростішої формули Сімпсона та її залишкового члена запишемо рівність

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i), \quad (2.14)$$

де $\xi_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$.

Звідки отримується формула чисельного інтегрування

$$I \approx I^C = \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m} + 4\mu_1 + 2\mu_2), \quad (2.15)$$

де $\mu_1 = y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}$, $\mu_2 = y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}$, яку будемо називати формулою Сімпсона.

За узагальненою теоремою про середнє значення неперервної функції на відрізку отримаємо залишковий член формули Сімпсона:

$$r^C = I - I^C = -\frac{h^4}{180} \sum_{i=1}^m 2hf^{(4)}(\xi_i) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi_C) \quad (2.16)$$

де $\xi_C \in (a, b)$.

Принцип Рунге практичного оцінювання похибок

Нехай для наближеного обчислення значення I даного інтеграла застосовується деяка квадратурна формула p -го порядку точності I^p з сімейства складених формул Ньютона-Котеса. При умові неперервності p -

ої похідної підінтегральної функції це означає існування такої константи C , що

$$I = I^p(h) + Ch^p. \quad (2.17)$$

При зменшенні вдвічі кроку h чисельного інтегрування за тією ж формулою p -го порядку можна записати таку ж рівність, але з іншою константою C_1 :

$$I = I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C_1\left(\frac{h}{2}\right)^p. \quad (2.18)$$

Вважаючи, що при малому h константи C та C_1 є близькими, з (2.17) та (2.18) маємо

$$I^p(h) + Ch^p = I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C_1\left(\frac{h}{2}\right)^p \approx I^p\left(\frac{h}{2}\right) + C\left(\frac{h}{2}\right)^p$$

і, отже,

$$C \approx C_1 \approx \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{h^p - \left(\frac{h}{2}\right)^p}$$

Підставивши отримане значення C_1 в (2.18), приходимо до виразу

$$I \approx I^p\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}. \quad (2.19)$$

Якщо переписати останню рівність в такому вигляді

$$I - I^p\left(\frac{h}{2}\right) \approx \frac{I^p\left(\frac{h}{2}\right) - I^p(h)}{2^p - 1}, \quad (2.20)$$

то отримуємо можливість контролювати точність чисельного інтегрування завдяки подвійному перерахунку (з кроком h та з кроком $\frac{h}{2}$). В цьому і полягає *принцип Рунге практичного оцінювання похибок*.

На основі вище сказаного можна легко сформулювати наступний алгоритм, який дістав назву *алгоритм прямокутників-трапецій* обчислення інтеграла I з заданою точністю ε :

1. Ініціалізація: $n = 1$, $H = b - a$, $I^T(H) = \frac{H}{2}(f(a) + f(b))$.

2. Обчислюємо: $h = \frac{H}{2}$;

$$x_1 = a + h, \quad x_i = x_{i-1} + h \text{ при } i = 2, 3, \dots, n;$$

$$y_i = f(x_i) \text{ при } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$I^H(H) = H \sum_{i=1}^n y_i.$$

3. Обчислюємо: $I^T(h) = \frac{1}{2}(I^H(H) + I^T(H))$;

$$R^T(h) = \frac{1}{3}(I^T(h) - I^T(H)).$$

4. Порівнюємо $|R^T(h)|$ с ε .

Якщо $|R^T(h)| > \varepsilon$, то $n = 2n$;

$$H = h;$$

$$I^T(H) = I^T(h);$$

перехід до другого пункту алгоритму.

5. Обчислюємо $I^C(h) = I^T(h) + R^T(h)$ та приймаємо $I \approx I^C(h)$.

Для наочності подання результатів, проміжні результати роботи алгоритму подають у вигляді табл. 2.1.

Таблиця 2.1. Результати роботи алгоритму прямокутників-трапецій

n	$I^T(H)$	$I^II(H)$	$I^T(h)$	$R^T(h)$
1				
2				
3				
⋮				
Остаточний результат: $I^C(h) = I^T(h) + R^T(h)$				

Якщо підінтегральна функція має достатньо високу степінь гладкості, то для обчислення інтеграла можна скористатися алгоритмом, який був запропонований математиком Ромбергом. Цей алгоритм базується на зв'язках між складеними квадратурними формулами Ньютона-Котеса парних порядків. Можна показати, що при $p = 4$ (нагадаємо, що $I^4(h) \equiv I^C(h)$) в рівності (2.19)

$$I \approx I^4\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{I^4\left(\frac{h}{2}\right) - I^4(h)}{15}$$

права частина співпадає зі значенням $I^6\left(\frac{h}{2}\right)$, яке може бути обчислене за відповідною (по чотирьом точкам) складеною формулою Ньютона-Котеса.

Таким чином, алгоритм Ромберга визначається наступною сукупністю формул:

$$h_0 = b - a, \quad I^{(0)}(h_0) = I^T(h_0);$$

$$h_i = \frac{h_{i-1}}{2}, \quad I^{(0)}(h_i) = I^T(h_i);$$

$$R^{(k-1)}(h_i) = \frac{I^{(k-1)}(h_i) - I^{(k-1)}(h_{i-1})}{2^{2k} - 1};$$

$$I^{(k)}(h_i) = I^{(k-1)}(h_i) + R^{(k-1)}(h_i),$$

де $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, i$.

Критерієм останови алгоритму Ромберга є $|R^{(k-1)}(h_i)| \leq \varepsilon$. На вихід видається значення $I \approx I^{(k)}(h_i)$.

Проміжні результати роботи алгоритму подають у вигляді табл. 2.2.

Таблиця 2.2. Результати роботи алгоритму Ромберга

i	h_i	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$...
0	h_0	$I^{(0)}(h_0)$			
1	h_1	$I^{(0)}(h_1)$	$I^{(1)}(h_1)$		
2	h_2	$I^{(0)}(h_2)$	$I^{(1)}(h_2)$	$I^{(2)}(h_2)$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Завдання на лабораторну роботу

Розробити програму мовою програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти виконувати наступне:

1. Обчислити визначений інтеграл за допомогою однієї з квадратурних формул та одного з алгоритмів, що використовує різні квадратурні формули (*табл. 2.3, табл. 2.4*):
 - ✓ для випадку однієї квадратурної формули необхідно передбачити введення з клавіатури кількості проміжків на які розбивається проміжок інтегрування;
 - ✓ для випадку алгоритму, який використовує різні квадратурні формули забезпечити можливість введення з клавіатури точності для обчислення інтегралу та виведення на екран проміжних результатів у відповідності до таблиці 2.1 або 2.2.
2. Обчислити заданий за варіантом визначений інтеграл (*табл. 2.3*) з точністю $\varepsilon \leq 10^{-9}$. Для випадку однієї квадратурної формули кількість проміжків на яку необхідно розбити проміжок інтегрування визначити аналітично. Для визначення кількості проміжків на яку необхідно розбити проміжок інтегрування дозволяється використовувати будь-які математичні пакети, але це має бути відображено у звіті.
3. Обчислити, заданий за варіантом, визначений інтеграл (*табл. 2.3*) за допомогою *web*-сайту <http://www.wolframalpha.com/> Наприклад, якщо необхідно обчислити інтеграл $\int_1^{\pi} x \cos x dx$, то вводимо у

відповідну форму на екрані наступний вираз: $\text{integrate } x*\cos x \text{ dx from } x = 1 \text{ to } \pi.$

Вказівки щодо виконання завдання

Обчислити, заданий за варіантом, визначений інтеграл (табл. 2.3) у MatLab 6.0 (або вище), або у MathCAD 12.0 (або вище) за допомогою спеціальних функцій наявних в обраному математичному пакеті. Якщо буде обрано MatLab, то програма має бути написана у вигляді функції з назвою Lab_2_p (де p номер варіанту), яка має один вхідний (прапорець) та один вихідний параметр (якщо прапорець має нульове значення, то вихідний параметр є результатом взяття невизначеного інтеграла, якщо одиничне – визначеного). Написана функція має запускатися з командного рядка *MatLab*.

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підґрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми мовою програмування C#).
3. Значення інтегралів, заданих за варіантом:

C#				<i>MatLab</i> або <i>MathCAD</i>	<i>Wolframalpha</i>
Квадратична формула (вказати назву)		Алгоритм (вказати назву)			
Кількість проміжків	Значення інтеграла	Кількість проміжків	Значення інтеграла		

4. *Screenshot* екрану результату роботи *wolframalpha*.
5. Висновки.

Варианти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	10	14	9
2	11	15	12
3	20	16	3
4	2	17	22
5	18	18	23
6	19	19	4
7	5	20	13
8	1	21	8
9	25	22	7
10	21	23	6
11	24	24	15
12	17	25	14
13	16		

Таблиця 2.3. Варіанти завдань

Варіант №	Інтеграл	Квадратурна формула та алгоритм
1	$\int_5^7 (x \cos x^2 + \ln x^3) dx$	1, 3
2	$\int_3^{10} \left(\frac{\ln x^2}{x} + \cos x + x^3 \right) dx$	2, 3
3	$\int_7^{10} \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$	0, 4
4	$\int_{15}^{73} (x^2 \cos(x+5) + e^{-x}) dx$	1, 4
5	$\int_{13}^{27} (x \sin x^2 + x^3 \ln x^2) dx$	0, 3
6	$\int_3^5 (x \operatorname{ch} x - x^3 + x^2 \ln x) dx$	1, 4
7	$\int_{15}^{17} \frac{2x+3}{2x+2} dx$	2, 3
8	$\int_5^{37} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4+x^2} dx$	0, 3
9	$\int_{0.5}^{1.0} \frac{dx}{\sin x \cos x}$	1, 4
10	$\int_1^3 \frac{dx}{2^x + 3}$	2, 4
11	$\int_3^7 \left(\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} + 4e^x \cos x \right) dx$	1, 3

Продовження табл. 2.3

Варіант №	Інтеграл	Квадратурна формула та алгоритм
12	$\int_{0.1}^{1.0} \left(x^3 \sqrt[5]{5-x^2} \right) dx$	1, 4
13	$\int_1^9 \frac{x^3}{x^8+5} dx$	2, 3
14	$\int_{50}^{78} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$	0, 3
15	$\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$	1, 4
16	$\int_{0.5}^{1.0} \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$	1, 3
17	$\int_{53}^{75} x \operatorname{arctg}(2x+3) dx$	2, 4
18	$\int_{-13}^{-5} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$	1, 4
19	$\int_{-5}^{-1} \left(\operatorname{ch} \sqrt{1-x-x^2} \right) dx$	0, 3
20	$\int_1^8 \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\operatorname{sh} \sqrt{x}} dx$	2, 3
21	$\int_8^{15} x^2 e^{\sqrt{x}} \sin x dx$	0, 3
22	$\int_{-1}^5 \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} dx$	2, 4
23	$\int_4^7 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{1+x^2}} dx$	1, 4

Продовження табл. 2.3

Варіант №	Інтеграл	Квадратурна формула та алгоритм
24	$\int_{13}^{29} \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt{5e^x}}{\sqrt[5]{1 + \operatorname{sh} x}} dx$	0, 4
25	$\int_{13}^{29} \left(x^2 \sqrt{x} - \frac{\operatorname{sh} x}{e^x} \right) dx$	1, 3

Таблиця 2.4. Перелік квадратурних формул та алгоритмів

№	Квадратурна формула / алгоритм
0	Складена квадратурна формула прямокутників
1	Складена квадратурна формула трапецій
2	Складена квадратурна формула Сімпсона
3	Алгоритм прямокутників-трапецій
4	Алгоритм Ромберга

Питання для самоперевірки

1. В яких випадках виникає необхідність у застосуванні формул чисельного інтегрування?
2. В яких випадках виникає необхідність у застосуванні формул чисельного диференціювання?
3. Дати визначення терміна сума Рімана. Зв'язок суми Рімана із задачею обчислення визначеного інтегралу.
4. Виходячи з яких міркувань отримують формулу прямокутників?
5. Які існують різновиди формули прямокутників?
6. Як формулюється узагальнена інтегральна теорема про середнє?
7. Виходячи з яких міркувань отримують сімейство квадратурних формул Ньютона-Котеса?
8. Який геометричний зміст найпростішої квадратурної формули трапецій?
9. Скільки вузлів необхідно для використання найпростішої квадратурної формули Сімпсона?
10. Який геометричний зміст найпростішої квадратурної формули Сімпсона?
11. Залишкові члени найпростіших квадратурних формул трапецій та Сімпсона.
12. В чому полягає відмінність найпростіших квадратурних формул трапецій і Сімпсона від складених?
13. Залишкові члени складених квадратурних формул прямокутників, трапецій та Сімпсона.
14. Чому не бажано використовувати формули Ньютона-Котеса великих порядків?
15. Який зв'язок між квадратурною формулою Сімпсона, трапецій та поправкою Річардсона для кроку інтегрування h ?

16. Принцип Рунге практичного оцінювання похибок інтегрування.
17. Узагальнена поправка Річардсона.
18. Який критерій останова в алгоритмі прямокутників-трапецій?
19. В чому полягає головна ідея алгоритму Ромберга?
20. Якщо зафіксувати $k = 0$ в алгоритмі Ромберга, то яким чином будуть виконуватись обчислення?
21. Який критерій останова в алгоритмі Ромберга?

Рекомендована література

1. William H. Press Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing / William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery // Cambridge University Press, 2002. – 1018 p.
2. Walter Gautschi Numerical Analysis [Електронний ресурс], 2012.
Режим доступу: http://www.ikiu.ac.ir/public-files/profiles/items/090ad_1410599906.pdf
3. McDonough J. M. Computational Numerical Analysis [Електронний ресурс], 2007. Режим доступу: <http://web.engr.uky.edu/~acfd/egr537-lctrs.pdf>

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

Мета роботи: опанувати методи чисельного розв'язку задачі Коші.

Теоретичні відомості

У зв'язку із широким застосуванням задачі Коші в багатьох галузях науки і техніки для її розв'язання розроблено велику кількість як аналітичних (де це можливо), так і наближених чисельних методів.

Надалі будемо розглядати ЗДР першого порядку

$$y' = f(x, y), \quad x \in [x_0, b] \quad (3.1)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0, \quad (3.2)$$

де $f(x, y)$ – деяка задана, в загальному випадку, нелінійна функція двох змінних.

Метод Ейлера

Метод Ейлера в теорії чисельних методів розв'язання ЗДР займає ключову позицію, розглянемо його докладніше.

Обчислення будемо проводити з кроком $h = \frac{b - x_0}{n}$, тобто розрахунковими вузлами будуть слугувати точки $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$) проміжку $[x_0, b]$, а метою буде побудова табл. 6.1.

Таблиця 3.1. Наближені значення y_i розв'язку $y = y(x)$ задачі Коші в точках x_i

x	x_0	x_1	...	$x_n = b$
y	y_0	y_1	...	$y_n \approx y(b)$

Користуючись тим, що в точці x_0 відоме як значення розв'язку $y(x_0) = y_0$ так і значення його похідної $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, можливо записати рівняння дотичної до графіка шуканої функції $y = y(x)$ в точці (x_0, y_0) :

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \quad (3.3)$$

При достатньо малу кроку h ордината

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (3.4)$$

цієї дотичної, отримана підстановкою в праву частину (3.3) значення $x_1 = x_0 + h$ повинна мало відрізнятися від ординати $y(x_1)$ розв'язку задачі Коші (3.1) – (3.2). Отже, точка перетину дотичної (3.3) з прямою $x = x_1$ може бути наближено прийнята за нову початкову точку.

Через цю точку знову проведемо пряму

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

яка вже наближено відтворює поведінку дотичної до $y = y(x)$ в точці $(x_1, y(x_1))$, підставляючи в останній вираз $x = x_2 = x_1 + h$, отримаємо наближене до $y(x_2)$ значення

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

і т.д.

Таким чином отримуємо загальний вигляд *методу Ейлера*

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Геометрично (рис. 6.1) метод Ейлера можна трактувати таким чином: графік розв'язку $y = y(x)$ задачі Коші (3.1) – (3.2) наближено представляється ламаною, що складена з відрізків наближених дотичних, звідки походить інша назва метода (3.5) – *метод ламаних*.

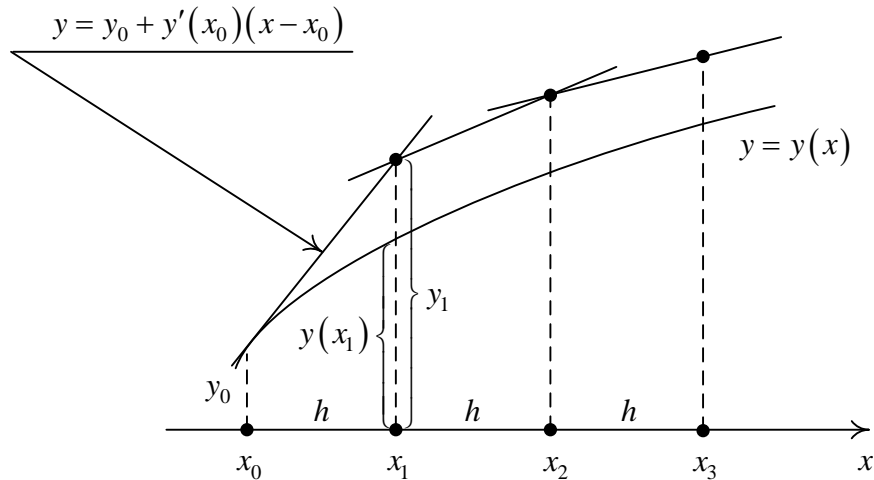


Рис. 3.1. Геометрична інтерпретація метода Ейлера

Модифікації метода Ейлера

Формулу (3.5) методу Ейлера також можна отримати чисельним інтегруванням за допомогою найпростішої формули лівих прямокутників в рівності

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \quad (3.6)$$

припускаючи що на кожному i -му кроці в ролі початкової точки (x_0, y_0) виступає точка (x_i, y_i) .

Якщо в (3.6) використати найпростішу квадратурну формулу правих прямокутників, то отримаємо неявний метод Ейлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Застосування до інтегралу найпростішої квадратурної формули трапецій (2.10) також призводить до неявного методу трапецій

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Певний інтерес представляє спільне застосування явного метода Ейлера та неявного методу трапецій, такий підхід дає метод Хойна:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

та метод Ейлера-Коші з ітераційною обробкою

$$y_{i+1}^0 = y_i + hf(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})], \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Ще однією модифікацією метода Ейлера є метод Мілна:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.11)$$

Запишемо розкладення $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ за формулою Тейлора p -го порядку, приймаючи за базову точку x_i (тобто за степенями $x - x_i$) та покладемо в цьому розкладенні $x = x_{i+1}$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_i) + \dots + \frac{1}{p!}h^p y^{(p)}(x_i) + O(h^{p+1}). \quad (3.12)$$

При $p = 2$ з (3.12) випливає рівність

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + O(h^3). \quad (3.13)$$

Значення першої похідної в точці x_i наближено відоме з умови (3.1) – (3.2):

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) \approx f(x_i, y_i). \quad (3.14)$$

Диференціюючи (3.1), за формулою повної похідної знаходимо:

$$\begin{aligned}
 y''(x_i) &= f'_x(x_i, y(x_i)) + f'_y(x_i, y(x_i))f(x_i, y(x_i)) \approx \\
 &\approx f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i).
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Підставляючи наближені вирази $y(x_i)$, $y'(x_i)$ та $y''(x_i)$ в рівності (3.13), отримуємо наступну формулу для обчислення $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ при $i = 0, 1, \dots, n$:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} (f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)) \right]. \tag{3.16}$$

Метод, що визначається формулою (3.16) будемо називати *удосконаленим методом Ейлера*.

Методи Рунге-Кутта

Недоліком удосконаленого метода Ейлера (3.16) та інших методів більш високих порядків, що засновані на покроковому поданні розв'язку $y(x)$ задачі (3.1) – (3.2) за формулою Тейлора та послідовному диференціюванні рівняння (3.1) для отримання тейлорових коефіцієнтів, є необхідність на кожному кроці обчислювати частинні похідні функції $f(x, y)$.

Ідея побудови явних *методів Рунге-Кутта* p -го порядку полягає в отриманні наближень до значень $f(x_{i+1})$ за формулою виду

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h), \tag{3.17}$$

де $\varphi(x, y, h)$ – деяка функція, що наближує відрізок ряду Тейлора (3.12) до p -го порядку та не містить частинних похідних функції $f(x, y)$.

Для побудови методів Рунге-Кутта порядку, вище першого, функцію $\varphi(x, y, h)$ необхідно взяти багатопараметричною та підбирати її

параметри порівнянням виразу (3.17) з многочленом Тейлора для $y(x)$, що відповідає бажаному порядку степеня.

Розкладемо функцію двох змінних $f(x+ah, y+bhf(x, y))$ в околі точки x за формулою Тейлора, обмежуючись лінійними членами:

$$\begin{aligned} f(x+ah, y+bhf(x, y)) &= \\ &= f(x, y) + f'_x(x, y)ah + f'_y(x, y)bhf(x, y) + O(h^2). \end{aligned}$$

З останньої формули можемо записати

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + h &\left[(c_1 + c_2)f(x_i, y_i) + \right. \\ &\left. + h(c_2af'_x(x_i, y_i) + c_2bf'_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)) \right] + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Порівняння останнього виразу з тейлорівським квадратичним поданням розв'язку $y(x)$ (3.13) з точністю до $O(h^3)$ рівнозначне порівнянню його з виразом y_{i+1} за формулою (3.16), тобто з удосконаленим методом Ейлера, розв'язуючи отриману систему відносно параметрів отримуємо *однопараметричне сімейство методів Рунге-Кутта другого порядку*:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[(1-\beta)f(x_i, y_i) + \beta f\left(x_i + \frac{h}{2\beta}, y_i + \frac{h}{2\beta}f(x_i, y_i)\right) \right]. \quad (3.19)$$

Легко бачити, що будь-який метод з сімейства методів Рунге-Кутта другого порядку (3.19) реалізують за наступною схемою. На кожному кроці, тобто при $i = 0, 1, 2, \dots$, обчислюють значення функції

$$\begin{aligned} k_1^i &= f(x_i, y_i), \\ k_2^i &= f\left(x_i + \frac{h}{2\beta}, y_i + \frac{h}{2\beta}k_1^i\right), \end{aligned}$$

а потім знаходять крокову поправку

$$\Delta y_i = h \left[(1 - \beta) k_1^i + \beta k_2^i \right],$$

додавання якої до результату попереднього кроку дає наближене значення розв'язку $y(x)$ в точці $x_{i+1} = x_i + h$:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Метод такої структури називають двоетапним.

За аналогією з попереднім для сімейства методів Рунге-Кутта p -го порядку використовується запис, що складається з наступної сукупності формул:

$$\begin{cases} k_1^i = f(x_i, y_i), \\ k_m^i = f\left(x_i + a_m h, y_i + h \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj} k_j^i\right), \\ y_{i+1} = y_i + h \sum_{m=1}^p c_m k_m^i, \end{cases} \quad (3.20)$$

де $m = 2, 3, \dots, p$ (для p -етапного метода).

Найбільш вживаним частковим випадком сімейства методів (3.20) є метод Рунге-Кутта четвертого порядку, що відноситься до чотирьохетапних та має вигляд:

$$\begin{cases} k_1^i = f(x_i, y_i), \\ k_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1^i\right), \\ k_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2^i\right), \\ k_4^i = f(x_i + h, y_i + h k_3^i), \\ \Delta y_i = \frac{h}{6} (k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \end{cases} \quad (3.21)$$

Зрозуміло, що виведення надійних і, в той же час, простих та ефективних оцінок похибок, що гарантують отримання таблиці значень розв'язку $y = y(x)$ заданої точності, є справою малоперспективною, особливо для методів високих порядків. Тому головним способом відслідковування точності при реалізації чисельних процесів розв'язання задачі Коші залишається застосування різноманітних напівемпіричних правил, що засновані на принципі Рунге.

Ще одним часто вживаним методом є *метод Кутти-Мерсона* або, інакше, п'ятиетапний метод Рунге-Кутта четвертого порядку.

На i -ому кроці розв'язку задачі (3.1)–(3.2) послідовно обчислюють:

$$k_1^i = f(x_i, y_i),$$

$$k_2^i = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1^i\right),$$

$$k_3^i = f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{6}k_1^i + \frac{h}{6}k_2^i\right),$$

$$k_4^i = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{8}k_1^i + \frac{3h}{8}k_2^i\right),$$

$$k_5^i = f\left(x_i + h, y_i + \frac{h}{2}k_1^i - \frac{3h}{2}k_3^i + 2hk_4^i\right),$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1^i - 3k_3^i + 4k_4^i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1^i + 4k_4^i + k_5^i)$$

Після цього обчислюють величину

$$R = 0.2 \cdot |y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}|$$

та виконують порівняння. Якщо значення R є більше заданого допустимого рівня абсолютних похибок ε , то крок зменшують вдвічі $\left(h = \frac{h}{2}\right)$ та

повертаються до початку другого етапу, тобто заново обчислюють k_2^i , k_3^i і т.д. Якщо $R \leq \varepsilon$, то вважають $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$ з точністю ε .

Існують й інші методи такого типу, окрім модифікації Мерсона метода Рунге-Кутта також часто використовують модифікації Фельберга та Інгланда.

Завдання на лабораторну роботу

1. Розробити програму на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та дозволяти розв'язувати задачу Коші, задану за варіантом, з точністю $\varepsilon \leq 10^{-5}$ за допомогою двох методів заданих за варіантом (табл. 3.2, табл. 3.3).
2. Розв'язати задану за варіантом задачу Коші (табл. 3.2) у будь-якому математичному пакеті чисельним методом Рунге-Кутта другого та третього порядку, методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку, а також знайти розв'язок в аналітичному вигляді, використовуючи спеціальні функції, що наявні в ньому. Якщо буде обрано *MatLab*, то програма має бути написана у вигляді функції з назвою *Lab_3_p* (де *p* номер варіанту). Дана функція повинна мати один вхідний та один вихідний параметр. В залежності від значення вхідного параметра функція має присвоювати вихідному параметру розв'язок, отриманий методом Рунге-Кутта другого та третього порядку, методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку або аналітичний розв'язок. Дана функція має запускатися з командного рядка *MatLab*.
3. Побудувати графіки отриманих розв'язків:
 - ✓ на декартовій площині №1 побудувати графіки чисельного розв'язку, отриманого двома методами за допомогою програми, написаної на C#;
 - ✓ на декартовій площині №2 побудувати графіки чисельного розв'язку, отриманого за допомогою спеціалізованого математичного пакета методом Рунге-Кутта другого та

третього порядку і методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку, а також графік функції, отриманої при аналітичному розв'язанні задачі Коші, причому графіки чисельних розв'язків мають бути побудовані у вигляді точок, які не з'єднані між собою.

- ✓ на декартовій площині №3 побудувати графіки чисельного розв'язку, отриманого методом №1 і №2 у C# та аналітичного розв'язку, який отримано у спеціалізованому математичному пакеті;
- ✓ на декартовій площині №4 побудувати

непарні варіанти	графіки чисельного розв'язку, отриманого методом №1 і №2 у C# та методом Рунге-Кутта другого та третього порядку у спеціалізованому математичному пакеті;
парні варіанти	графіки чисельного розв'язку, отриманого методом №1 і №2 у C# та методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядку у спеціалізованому математичному пакеті;

Вимоги до оформлення звіту

Звіт має включати:

1. Постановку задачі за варіантом.
2. Математичне підґрунття для виконання даної лабораторної роботи (перелік формул, що були використані при розробленні програми на мові програмування C#).
3. Чисельні розв'язки задачі Коші, згідно варіанту (при необхідності таблицю можна розміщувати в альбомному форматі):

<i>C#</i>						<i>Спеціалізований математичний пакет (вказати назву)</i>			
<i>Метод №1 (вказати назву)</i>			<i>Метод №2 (вказати назву)</i>			<i>Метод Рунге-Кутта 2-3 порядку</i>		<i>Метод Рунге-Кутта 4-5 порядку</i>	
<i>x</i>	<i>Y</i>	<i>Крок</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>Крок</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>

4. Аналітичний розв'язок задачі Коші, отриманий одним зі спеціалізованих математичних пакетів.
5. Графіки з п.4 завдання.
6. Висновки.

Варианти завдань

Номер варіанту визначається за наступною таблицею:

№ за списком викладача	Варіант №	№ за списком викладача	Варіант №
1	17	14	19
2	1	15	9
3	16	16	2
4	25	17	11
5	8	18	7
6	15	19	10
7	4	20	5
8	21	21	12
9	20	22	13
10	24	23	14
11	6	24	18
12	23	25	3
13	22		

Таблиця 3.2. Варіанти завдань

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів		Методи
			Інтервал	Кількість точок	
1	$y' = y - \frac{2x}{y}$	$(x_0; y_0) = (0; 1)$	$[x_0; 5.0]$	33	3, 7
2	$y' = y \cdot \cos x + xy$	$(x_0; y_0) = (3; 1)$	$[x_0; 5.0]$	26	5, 6
3	$y' = xy \cdot \cos \frac{x}{3} + 0.25y$	$(x_0; y_0) = (5; 7)$	$[x_0; 8.9]$	31	2, 7
4	$y' = y + x^2$	$(x_0; y_0) = (0; 1)$	$[x_0; 3.0]$	25	1, 7
5	$y' = yx + x$	$(x_0; y_0) = (6; 3)$	$[x_0; 7.0]$	26	4, 7
6	$y' = yx + x^3$	$(x_0; y_0) = (16; 7)$	$[x_0; 16.5]$	17	5, 6
7	$y' = 2^x + y + x$	$(x_0; y_0) = (1; 7)$	$[x_0; 3.0]$	33	3, 7
8	$y' = e^x + y$	$(x_0; y_0) = (3; 1)$	$[x_0; 5.5]$	26	1, 7
9	$y' = \cos x + y$	$(x_0; y_0) = (5; 3)$	$[x_0; 7.0]$	21	0, 6
10	$y' = \frac{y^3 + y}{x}$	$(x_0; y_0) = (2; 1)$	$[x_0; 3.7]$	26	1, 7
11	$y' = \frac{e^x}{y(1 + e^x)}$	$(x_0; y_0) = (0; 1)$	$[x_0; 3.0]$	17	0, 6
12	$y' = \frac{y \cdot \ln y}{\sin x}$	$(x_0; y_0) = (1; 2)$	$[x_0; 2.5]$	26	4, 7
13	$y' = y \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$	$(x_0; y_0) = (0; 0)$	$[x_0; 7.0]$	29	4, 6
14	$y' = \frac{\cos x - y^2}{y}$	$(x_0; y_0) = (1; 1)$	$[x_0; 2.0]$	21	3, 7

Продовження табл. 3.2

Варіант №	Рівняння	Початкова умова	Сітка результатів		Методи
			Інтервал	Кількість точок	
15	$y' = 2y - x^2$	$(x_0; y_0) = (0; 1)$	$[x_0; 2.0]$	26	0, 7
16	$y' = \frac{2-y}{ctgx}$	$(x_0; y_0) = (0; 0)$	$[x_0; 3.0]$	31	5, 6
17	$y' = y \cdot ctgx + \frac{5}{\cos x}$	$(x_0; y_0) = (2; 1)$	$[x_0; 5.0]$	26	3, 7
18	$y' = y \cdot tgx + \frac{x}{\cos x}$	$(x_0; y_0) = (2; 1)$	$[x_0; 9.0]$	21	2, 7
19	$y' = \sin x + \frac{y}{\sin x}$	$(x_0; y_0) = (5; 1)$	$[x_0; 7.0]$	26	1, 6
20	$y' = (y + \sin y) \cdot \cos x$	$(x_0; y_0) = (2; 1)$	$[x_0; 5.0]$	31	2, 7
21	$y' = x \cdot (\log y + \cos y)$	$(x_0; y_0) = (12; 7)$	$[x_0; 15.0]$	26	4, 6
22	$y' = y \cdot \ln x$	$(x_0; y_0) = (13; 9)$	$[x_0; 17.0]$	33	0, 6
23	$y' = x + tg x$	$(x_0; y_0) = (9; 15)$	$[x_0; 11.0]$	17	3, 6
24	$y' = xy \cdot \cos x$	$(x_0; y_0) = (1; 5)$	$[x_0; 7.0]$	33	5, 7
25	$y' = x \cdot \ln y + y$	$(x_0; y_0) = (9; 1)$	$[x_0; 11.0]$	21	1, 7

Таблиця 3.3. Перелік методів

№	Метод
0	Явний метод Ейлера
1	Метод Хойна
2	Метод Мілна другого порядку
3	Метод середньої точки
4	Удосконалений метод Ейлера
5	Метод Ейлера-Коші
6	Метод Рунге-Кутта четвертого порядку
7	Метод Кутта-Мерсона

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення звичайному диференціальному рівнянню.
2. Що називають порядком звичайного диференціального рівняння?
3. Які диференціальні рівняння називають лінійними/нелінійними?
4. Яку задачу називають задачею Коші?
5. Яка формула явного методу Ейлера?
6. Які існують підходи до виводу явного методу Ейлера?
7. Вивести явний метод Ейлера.
8. Геометричний зміст явного методу Ейлера.
9. Який метод називають неявним методом Ейлера? Яким чином його застосовують?
10. Яким чином отримується метод Хойна?
11. Яка відмінність методу Ейлера-Коші від методу Хойна?
12. Яким чином отримується метод Мілна другого порядку? Які особливості цього методу?
13. Виходячи з яких ідей отримується удосконалений метод Ейлера?
14. В чому полягає головна ідея побудови сімейства явних методів Рунге-Кутта?
15. Що означають терміни двоетапний та двокроковий метод?
16. Яким чином можна контролювати точність розв'язання задачі Коші?
17. В чому полягає особливість метода Кутти-Мерсона? Які характеристики має цей метод?

Рекомендована література

1. William H. Press Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing / William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery // Cambridge University Press, 2002. – 1018 p.

2. Walter Gautschi Numerical Analysis [Электронный ресурс], 2012.
Режим доступа: http://www.ikiu.ac.ir/public-files/profiles/items/090ad_1410599906.pdf
3. McDonough J. M. Computational Numerical Analysis [Электронный ресурс], 2007. Режим доступа: <http://web.engr.uky.edu/~acfd/egr537-lctrs.pdf>