МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА 2:

Основні прийоми інтегрування

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 051 «Економіка»,
освітні програми: «Економічна кібернетика», «Міжнародна економіка»,
«Економіка бізнес-підприємства», «Управління персоналом та економіка праці»,
«Бізнес-аналітика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Вища математика 2: Основні прийоми інтегрування: навч. посіб. для студ. спеціальності 051 «Економіка», освітні програми: «Економічна кібернетика», «Міжнародна економіка», «Економіка бізнес-підприємства», «Управління персоналом та економіка праці», «Бізнес-аналітика» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.О. Капустян, І.Д. Фартушний. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 40 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.) за поданням Вченої ради факультету менеджменту та маркетингу (протокол № 8 від 25.03.2019 р.)

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА 2:
Основні прийоми інтегрування

Укладачі: *Капустян Володимир Омелянович*, д-р фіз.-матем. наук, проф.
Фартушний Іван Дмитрович, канд. фіз-матем. наук, доц.

Відповідальний редактор *Капустян В.О., д-р фіз.-матем. наук, проф., зав. кафедрою математичного моделювання економічних систем*

Рецензент *Касьянов П.О., д-р фіз.-матем. наук, проф, завідувач Науково-дослідного відділу системної математики ІПСА*

У навчальному посібнику висвітлені основні прийоми інтегрування в залежності від виду підінтегральної функції. За змістом наведений матеріал відповідає програмі кредитного модуля «Математика для економістів: Вища математика 2» тем: первісна функція, невизначений інтеграл, основні методи інтегрування, інтегрування раціональних функцій, інтегрування ірраціональних та тригонометричних виразів. Викладений теоретичний матеріал підкріплений великою кількістю розібраних прикладів і завданнями для самостійної роботи.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, економістів-практиків, які самостійно вивчають вищу математику.

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Первісна функція

Функція $F(x)$ є первісною функцією функції $f(x)$ в інтервалі (a,b), якщо в кожній точці цього інтервалу існує похідна $F'(x)$ та $F'(x)=f(x)$.

Приклади

1. Функція $F(x)=\sin x$ є первісною функції $f(x)=\cos x$ в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, оскільки

$$(\sin x)'=\cos x.$$

2. $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ є первісною функції $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ в інтервалі $(-1,1)$,

оскільки

$$(\sqrt{1-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$$

Первісну функцію називають також ***невизначеним інтегралом*** і позначають так:

$$F(\mathrm{x})=\int f(x)dx$$

Нехай C — довільна константа. Оскільки $(F(x)+C)'=f(x)$, то $F(x)+C$ теж є невизначеним інтегралом функції $f(x)$. Таким чином,

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, n≠-1

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, a>0, a≠1.

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C'$

ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Нехай в інтервалі (a,b) виконуються тотожності

$$\int f(x)dx = F(x), \ \int \varphi(x)dx = \Phi(x).$$

Тоді справедливі рівності:

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$, x∈(a,b)

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$, x∈(a,b)

3. $\int (cf(x))dx = c\int f(x)dx$, x∈(a,b) для будь-якої константи с, тобто, постійний множник можна виносити за знак інтеграла.

4. $\int (f(x) + \varphi(x))dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$, x∈(a,b), тобто інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів

Приклади.

1. Знайдемо первісну для функції $3x^2 - 2x + 7$.

$$\int(3x^2-2x+7)dx=\int 3x^2dx-\int 2xdx+\int 7dx=3\int x^2dx-2\int xdx+7\int dx=$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{1}{2}x^2+7x+C=x^3+x^2+7x+C.$$

2. Знайдемо первісну для функції $\dfrac{x^2-x^3+1}{x^5}$.

$$\int\frac{x^2-x^3+1}{x^5}dx=\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)dx=$$

$$=\int x^{-3}dx-\int x^{-2}dx+\int x^{-5}dx=\left(\frac{1}{-2}\right)x^{-2}-\left(\frac{1}{-1}\right)x^{-1}+\left(\frac{1}{-4}\right)x^{-4}+C=$$

$$=\frac{-2x^2+4x^3-1}{4x^4}+C.$$

3. Знайдемо первісну для функції $5\sqrt{x}-3\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

$$\int(5\sqrt{x}-3\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}})dx=5\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{\frac{3}{5}}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=5\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}-3\cdot\frac{1}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1}-2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{10}{3}\sqrt{x^3}-\frac{15}{8}\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt{x}+C.$$

4. Знайдемо первісну для функції $x\sqrt[m]{x}$, де m – деяке натуральне число.

$$\int x\sqrt[m]{x}dx=\int x\cdot x^{\frac{1}{m}}dx=\int x^{1+\frac{1}{m}}dx=\frac{m}{2m+1}x^2\sqrt[m]{x}+C.$$

5. Знайдемо первісну для функції $\dfrac{1}{x^2\sqrt[3]{x}}$.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{7}{3}}dx=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+C.$$

6. Знайдемо первісну для функції $\dfrac{2x^2\sqrt[3]{x}-5x+3x^2e^x-4}{x^2}$.

$$\int \frac{2x^2\sqrt[3]{x} - 5x + 3x^2 e^x - 4}{x^2}dx = \int (2x^{\frac{1}{3}} - 5x^{-1} + 3e^x - 4x^{-2})dx =$$

$$\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - 5\ln|x| + 3e^x + \frac{4}{x} + C.$$

ІНТЕГРУВАННЯ ПІДСТАНОВКОЮ

Припустимо, що в інтервалі (a,b) функція f(x) має первісну $F(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) \qquad (1)$$

Припустимо, що x є функцією від аргументу t, тобто $x = \varphi(t)$, нехай $\varphi(t)$ неперервна разом зі своєю першою похідною в інтервалі (α, β), та нехай для всіх точок t з інтервалу (α, β) виконується умова

$$a \le \varphi(t) \le b.$$

За таких припущень складна функція $F(\varphi(t))$ визначена в інтервалі (α, β).

З правила диференціювання складної функції випливає

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Оскільки $F'(t) = f(x)$, то

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Звідси випливає

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \qquad (2)$$

З формул (1) і (2) випливає

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \text{ для } x = \varphi(t)$$

Приклади

1. Знайдемо первісну:

$$\int (a+bx)^n dx,\ n \neq -1,\ b \neq 0.$$

Покладемо $a+bx=t$, тоді $x=\dfrac{t-a}{b}$. Звідси $dx=\dfrac{dt}{b}$, і значить,

$$\int (a+bx)^n dx = \int t^n \frac{dt}{b} = \frac{1}{b}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C = \frac{1}{b}\frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1}+C.$$

2. Знайдемо первісну для функції $\dfrac{1}{a+bx}$.

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx|+C.$$

В цьому прикладі така ж підстановка, як і в попередньому.

3. Знайдемо первісну:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}, a>0.$$

Покладемо $x=\sqrt{a}t, dx=\sqrt{a}dt;$ отже

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \int \frac{\sqrt{a}dt}{\sqrt{a-at^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C,$$

Таким чином,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}+C.$$

4. Знайдемо інтеграл $I=\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx$,

Покладемо $t=x^2+x+1$, тоді $dt=(2x+1)dx$.

Отже,

$$I=\int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C.$$

Повертаючись до змінної x, матимемо:

$I = \ln\left|x^2 + x + 1\right| + C$.

5. Знайдемо інтеграл

$$I = \int (a + bx^2)^n xdx,\ b \neq 0,\ n \neq -1.$$

Покладемо $a + bx^2 = t, 2bxdx = dt.$ Тоді $xdx = \frac{1}{2b}dt$. Тому

$$I = \int t^n \frac{1}{2b}dt = \frac{1}{2b}\frac{t^{n+1}}{n+1} + C,$$

Звідси отримаємо

$$I = \frac{1}{2b}\frac{(a + bx^2)^{n+1}}{n+1} + C.$$

6. Знайдемо інтеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Покладемо $\sqrt{x^2 + a} + x = t$, звідки матимемо

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} + 1\right)dx = dt;$$

Таким чином,

$$\frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}}dx = dt.$$

Отже, знайдемо інтеграл *I*:

$$I = \int \frac{dt}{t} - \ln|t| + C = \ln\left|\sqrt{x^2 + a} + x\right| + C.$$

7. $I = \int \sin^3 x \cos xdx$.

Покладемо: t=sin$x$, dt=cosxdx,

Після підстановки отримаємо:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C,$$

Повертаючись до змінної x, отримаємо відповідь:

$$I = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

8. Знайдемо інтеграл $I = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$.

Покладемо $x^2 + 1 = t, 2xdx = dt$. Отже,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2(3-1)}\frac{1}{t^{3-1}} + C = -\frac{1}{4}\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2} + C.$$

Задачі:

Знайти інтеграли

1. $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$

2. $\int (5x-2)^7 dx$

3. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

5. $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 5}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 5}}$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

8. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}}$

9. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2(1 + \cos^2 x)}} dx$

11. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

12. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$

13. $\int \frac{2dx}{\sqrt{3 - 4x - 4x^2}}$

14. $\int \frac{2dx}{(1 + x^2)^2}$

15. $\int 4x(2x-3)^{10} dx$

16. $\int \frac{2 + x}{1 - \sqrt{x}} dx$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 1}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x + 1}}$

19. $\int \frac{dx}{2\sqrt{2^x - 1}}$

20. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \cdot \frac{dx}{x}$

21. $\int \frac{5\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}} dx$

22. $\int 2\sqrt{1 - x^2} dx$

23. $\int 2\sqrt{4 - x^2} dx$

24. $\int -\frac{2x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

25. $\int -\frac{3x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

26. $\int \frac{3dx}{x^2\sqrt{3 - x^2}}$

27. $\int \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x} dx$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 1}}$

30. $\int \frac{4x + 6}{x^2 - 4x + 3} dx$

ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Припустимо, що $u(x)$ та $v(x)$ —неперервні та диференційовані функції від змінної x в інтервалі (a,b), тоді виконується рівність:

$$(uv)' = u'v + uv',$$

отже $uv' = (uv)' - u'v$.

Інтегруючи обидві частини останньої рівності та враховуючи, що

$$\int (uv)' dx = uv,$$

отримаємо

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx,$$

якщо обидва інтеграли існують.

Використовуючи диференціали функцій u та v, отриману формулу можна записати у вигляді

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ця формула дає можливість обчислення інтегралу $\int u dv$ звести до обчислення інтегралу $\int v du$, який, можливо, легше знайти.

Цей метод знаходження інтегралу називається ***інтегруванням частинами***.

Приклад.

1. Знайдемо інтеграл $I = \int xe^x dx$.

Покладемо: $u = x,\ du = dx,\ dv = e^x dx,\ v = \int e^x dx = e^x$.

Тоді:

$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

2. Знайдемо інтеграл $I = \int \ln x dx$.

Покладемо $u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x},\ dv = dx,\ v = \int dx = x$.

Таким чином,

$I = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

3. Знайдемо інтеграл $I = \int x^n \ln x dx,\quad n \neq -1.$

Покладемо $u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x},\ dv = x^n dx,\ v = \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}.$

Отримаємо

$I = \dfrac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$

4. Знайдемо інтеграл $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Скористаємося підстановкою $\sin x = t$. Тоді $\cos x dx = dt$. Отже

$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \dfrac{\cos x}{\sin x} dx = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C$.

5. Знайдемо інтеграл $\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Скористаємося рівністю $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Покладемо $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ \frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$.

Тоді $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

6. Знайдемо інтеграл $I = \int \arcsin x dx$.

Покладемо: u=arcsin$x$, du=$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, dv=dx, v=x. Тоді

$$I = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Для знаходження останнього інтеграла скористаємося підстановкою t=1-x^2, dt=-2xdx, таким чином, xdx=-$\frac{1}{2}dt$. Отже:

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx, n \neq 0$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Остаточно, шуканий інтеграл дорівнює:

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

7. Знайдемо інтеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$

Покладемо $u = \operatorname{arctg} x,\ du = \frac{dx}{1+x^2}, dv = dx,\ v = x$.Звідси

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2}$$

Для знаходження останнього інтегралу покладемо

$1+x^2 = t,\ 2x dx = dt,\ x dx = \frac{1}{2} dt$.

Отримаємо $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$

Остаточно: $\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$.

ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

При обчисленні наступних інтегралів зручно користатися формулами зведення до аналогічних інтегралів, в яких підінтегральні функції беруться в меншому степені.

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,\ n \neq 0$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx,\ n \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}, n > 1$$

Задачі:

Знайти інтеграли:

1. $\int a^{mx} dx$
2. $\int e^{ax+b} dx$
3. $\int \frac{dx}{a+bx}$
4. $\int (a+bx)^n dx$
5. $\int \frac{x^n}{a+bx^{n-1}} dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} dx$

7. $\int \frac{dx}{36+25x^2}$

8. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+5}dx$

9. $\int \frac{3x^2-6x+1}{x^3-3x^2+x-1}dx$

10. $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx$

11. $\int \sin(3x+2)dx$

12. $\int x\sin(x^2+1)dx$

13. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

14. $\int \frac{(tgx+3tg^2x+5tg^3x)}{\cos^2 x}dx$

15. $\int (\sin^5 x-5\sin^3 x+\sin x)\cos xdx$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}$

17. $\int \sin 5x\cos 3xdx$

18. $\int \cos 5x\sin 3xdx$

19. $\int \sin 5x\sin 3xdx$

20. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

21. $\int x\sqrt{1+x}dx$

22. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x+5\sin^2 x}$

23. $\int \frac{tgxdx}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}$

24. $\int e^{3x}\cos xdx$

25. $\int e^{5x}\sin 3xdx$

26. $\int \frac{1+2\cos x+3\sin x}{\sin 2x}dx$

27. $\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx$

28. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}dx$

29. $\int 2^x\cos 3xdx$

30. $\int \ln(1-x^2)dx$

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Розклад многочленна на множники

З курсу алгебри відомо, що кожен многочлен Q(x) можна представити у вигляді добутку

$$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)...(x-\gamma),$$

де A – коефіцієнт при найбільшому степені змінної x,

$\alpha, \beta, ..., \gamma$ - корені рівняння $Q(x) = 0$.

Множники $(x-\alpha), (x-\beta), ..., (x-\gamma)$ називаються ***елементарними множниками***. Якщо деякі елементарні множники многочленна $Q(x)$ рівні одне одному, то, зібравши їх разом, отримаємо представлення:

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r (x-\beta)^s ...(x-\gamma)^t, \qquad (1)$$

де $r, s, ..., t$ - натуральні числа, причому $r+s+...+t=n$ (n - степінь многочлена $Q(x)$).

Приклади.

1. Многочлен $3x^2+3x-6$ має корені $\alpha=1, \beta=-2$, тому $3x^2+3x-6=3(x-1)(x+2)$.

2. Многочлен x^4-1 має корені $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=i, \delta=-i$, ($i=\sqrt{-1}$), тому $x^4-1=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$.

3. Многочлен x^3-2x^2+x має корені $x=0,\ x=1$, тому $x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$

Якщо елементарний множник $(x-\alpha)$ входить в розклад (1) в степені r, то α називається r***-кратним коренем***.

Як ми бачили, корені $\alpha, \beta, ..., \gamma$ можуть бути комплексними. Слід пам`ятати особливість комплексних коренів, яка встановлюється наступною теоремою:

Якщо число $a+bi$ *є* r*-кратним комплексним коренем многочлена* $Q(x)$*з дійсними коефіцієнтами, то спряжене число* $a-bi$ *теж є* r*-кратним комплексним* коренем *многочлена* $Q(x)$.

Таким чином, якщо розклад (1) многочлена $Q(x)$ з дійсними коефіцієнтами містить множник $(x-(a+bi))^r$, то він містить і множник $(x-(a-bi))^r$. Перемноживши ці два множники, отримаємо

$$(x-(a+bi))^r(x-(a-bi))^r = ((x-a)-bi)^r((x-a)+bi)^r = ((x-a)^2+b^2)^r =$$
$$=(x^2+px+q)^r$$

де $p=-2a,\ q=a^2+b^2$.

Многочлен x^2+px+q має корені $a+bi$ та $a-bi$, отже його не можна представити у вигляді добутку многочленів першого степеня з дійсними коефіцієнтами. $a-bi$. Проробивши аналогічні перетворення з іншими комплексними коренями многочлена $Q(x)$, отримаємо, нарешті, представлення $Q(x)$ у вигляді

$$Q(x)=(x-\alpha)^r(x-\beta)^s...(ax^2+bx+c)^t(dx^2+ex+c)^n$$

В цьому розкладі усі числа $\alpha,\beta,...,a,b,c,d,e,f,...,$ є дійсними числами, а многочлени $ax^2+bx+c,\ dx^2+ex+c$ не можна представити у вигляді добутку многочленів першого степеня з дійсними коефіцієнтами.

Приклади

1. $x^3+1=(x^2-x+1)(x+1)$
2. $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$
3. $x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$
4. $x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$

Задачі:

Розкласти на множники такі многочлени:

1. $x^2 - 5x + 6$
2. $x^8 - 1$
3. $x^3 + 3x^2 - 6x$
4. $x^3(x^2 - 3x + 2)^3(x^3 + 1)^2$
5. $x^6 - 1$
6. $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$
7. $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$
8. $x^6 - 10x^3 + 9$
9. $x^3 - 2x^2 - x + 2$
10. $x^3 + 2x - x - 2$
11. $x^3 - x^2 - x + 1$
12. $x^3 + x^2 - x - 1$
13. $x^3 - 3x^2 - x + 3$
14. $x^3 + 3x^2 - x - 3$
15. $x^3 - x^2 - 4x + 4$
16. $x^3 + x^2 - 4x - 4$
17. $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$
18. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
19. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
20. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
21. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
22. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$
23. $x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
24. $x^3 - 3x^2 - 9x + 27$
25. $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$
26. $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$
27. $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
28. $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
29. $x^4 + x^2 - 2$
30. $x^4 - x^2 - 2$

Розклад раціональної функції на елементарні дроби

Раціональною функцією називається функція $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де P(x), Q(x) – многочлени. Функція $\frac{P(x)}{Q(x)}$ визначена в тих точках, де многочлен $Q(x)$ не перетворюється в 0. Якщо степінь чисельника більше степеня знаменника або дорівнює їй, то, поділивши P(x) на Q(x), отримаємо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $W(x)$ – деякий многочлен, а $R(x)$ – многочлен степеня, меншого, ніж степінь $Q(x)$,

Приклади

1. $\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$.

2. $\frac{x^5+x^3-x^2+x+3}{x^2+2x-1} = x^2 - 1 + \frac{3x+2}{x^3+2x-1}$.

***Теорема**. Якщо степінь чисельника раціональної функції* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *менше степеня її знаменника, то цю функцію можна представити у вигляді*

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + \frac{C}{x-\alpha} + \\
&+ \frac{D}{(x-\beta)} + \frac{E}{(x-\beta)^{s-1}} + \ldots + \frac{E}{x-\beta} + \ldots + \\
&+ \frac{Gx+H}{(ax^2+bx+c)^t} + \frac{Ix+K}{(ax^2+bx+c)^{t-1}} + \ldots + \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)} + \\
&\frac{Nx+P}{(dx^2+ex+f)^n} + \frac{Qx+P}{(dx^2+ex+f)^{n-1}} + \ldots + \frac{Sx+T}{(dx^2+ex+f)}
\end{aligned} \qquad (*)$$

В цьому розкладі *A, B, C, ..., S, T* та *a, b, c, ..., e, f* - константи, $\alpha, \beta, \ldots$- корені рівняння $Q(x) = 0$. Цей розклад називається ***розкладом раціональної функції на елементарні дроби***.

Рівність виконується для всіх дійсних чисел x, за винятком значень $x = \alpha, x = \beta, x = \gamma, ...,$ тобто, за винятком коренів рівняння $Q(x) = 0$.

Кожен множник многочленна $Q(x)$ входить у якості знаменника в розклад (*) в усіх цілих степенях, починаючи від степеня, який він має в розкладі *Q(x)* на елементарні множники і закінчуючи першим степенем. Чисельниками дробів в розкладі (*) є або константи (якщо знаменник є лінійним множником у якомусь степені), або многочлени першого степеня (якщо знаменник є степенем многочленна другого порядку).

Для того щоб визначити числа *A, B, C, …, S, T*, помножимо обидві частини співвідношення (*) на *Q(x)*. Звільнившись таким чином від знаменників, запишемо многочлен, отриманий в правій частині, по степенях x. Оскільки рівність між многочленом $P(x)$ та многочленом, отриманим в правій частині, виконується для всіх значень x, то коефіцієнти, що стоять при однакових степенях x в лівій і в правій частині співвідношення, дорівнюють одне одному. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь першого степеня, з якої визначимо невідомі константи *A, B, C, …, S, T*. Цей метод знаходження розкладу раціональної функції на елементарні дроби називається ***методом невизначених коефіцієнтів***.

Зауваження

Перш ніж розкладати раціональну функцію на елементарні дроби, необхідно перевірити:

1. чи не перевищує степінь чисельника степінь знаменника. Якщо перевищує, чисельник слід поділити на знаменник і окремо записати цілу та дробову частини.
2. чи є чисельник та знаменник взаємно простими.

Приклад 1

Розкласти раціональну функцію $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ на елементарні дроби.

Оскільки $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, то покладемо

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2},$$

Помноживши обидві частини рівняння на x^2-5x+6, отримаємо:

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3).$$

Зібравши подібні доданки, отримаємо:

$$2x-1=(A+B)x-2A-3B.$$

Нагадаємо, що два многочлени є рівними тоді і лише тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях аргументу. Отже:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+3B=1 \end{cases}$$

Звідси A=5, B=-3. Таким чином: $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}$.

Приклад 2

Розкласти раціональну функцію $\dfrac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$ на елементарні дроби.

Покладемо

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Позбавившись знаменників, знайшовши та прирівнявши коефіцієнти при подібних доданках, отримаємо:

$$A+D=0, E+D=0, 2A+B+E+D=3, B+C+E+D=0, A+E+C=1.$$

Розв`язавши цю систему, отримаємо: $A=1, B=1, C=-1, D=-1, E=1$. Отже,

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{(x^2+1)^2}-\frac{x-1}{x^2+1}.$$

Приклад 3

Розкласти раціональну функцію $\dfrac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}$ на елементарні дроби.

Застосуємо тут іншу модифікацію методу невизначених коефіцієнтів, яка дозволить нам швидше знайти шуканий розклад у випадку, ***коли знаменник має лише дійсні прості (однократні) корені***.

Покладемо

$$\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x}$$

Помноживши рівність на $(x-1)(x+2)x$, отримаємо вираз

$$3x^2+3x+12=A(x+2)x+B(x-1)x+C(x+2)(x-1)$$

Покладемо $x=0$ в цьому виразі, отримаємо рівність $12=-2C$.

Покладемо $x=1$, отримаємо рівність $18=3A$.

Покладемо $x=-2$, отримаємо рівність $18=6B$.

Таким чином, $A=6,\ B=3,\ C=-6$, значить,

$$\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}=\frac{6}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{6}{x}.$$

Інтеграли від раціональних функцій

Розклавши раціональну функцію на елементарні дроби, ми зведемо інтеграл від раціональної функції до суми інтегралів виду

1) $\int\frac{Adx}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+C$,

2) $\int\frac{Adx}{(x-\alpha)^r}=-\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}+C$, $r\neq 1$,

3) $\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}dx$ (в цьому випадку многочлен ax^2+bx+c не має дійсних коренів).

Для обчислення інтеграла третього типу зробимо заміну

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}z, dx=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}dz$$

Таким чином, отримаємо

$$\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}dx=\int\frac{Mz+N}{(z^2+1)^r}dz=M\int\frac{zdz}{(z^2+1)^r}+N\int\frac{dz}{(z^2+1)^r}=M\cdot I_1+N\cdot I_2$$

Знайдемо отримані інтеграли:

$$I_1 = \int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} = \left\{ \begin{array}{l} z^2+1=t \\ dz = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{2t^r} = -\frac{1}{2(r-1)t^{r-1}} + C = -\frac{1}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}} + C$$

$$= -\frac{1}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}} + C, (r \neq 1)$$

У випадку, коли $r=1$

$$I_1 = \int \frac{zdz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\ln(z^2+1) + C.$$

Для знаходження інтеграла I_2 при $r>1$застосовуємо формулу зведення

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^r} = \frac{z}{(2r-2)(z^2+1)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-2}\int \frac{dz}{(z^2+1)^{r-1}}, r>1$$

Якщо ж $r=1$, то I_2 - табличний інтеграл:

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = arctgz + C.$$

Приклад.

Знайти інтеграл $\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2}dx$.

Розглянемо знаменник:

$$2x^2-4x+10 = ax^2+bx+c, a=2, b=-4, c=10.$$

Заміна матиме вигляд:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}z, dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}dz,$$

$$x = -\frac{-4}{2\cdot 2} + \frac{\sqrt{4\cdot 2\cdot 10-16}}{2\cdot 2}z = 1+2z,$$

$$dx = \frac{\sqrt{4\cdot 2\cdot 10-16}}{2\cdot 2}dz = 2dz.$$

Таким чином,

$$\int\frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2}dx=\int\frac{10z+8}{8^2(z^2+1)^2}2dz=\frac{5}{16}\int\frac{zdz}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=$$

$$=\frac{5}{16}(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2+1})+\frac{1}{4}(\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}arctgz)+C=-\frac{5}{32}\cdot\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{z}{z^2+1}+$$

$$+\frac{1}{8}arctgz+C$$

Повернемось до змінної x:

$$-\frac{5}{32}\cdot\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{z}{z^2+1}+\frac{1}{8}arctgz+C=\frac{2x-7}{4\left(2x^2-4x+10\right)}+\frac{1}{8}arctg\,\frac{x-1}{2}+C.$$

Задачі:

Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{5x^3+1}{(x+1)(2x+1)}dx$

2. $\int\frac{x^4dx}{(x-1)^2(x+1)^2}$

3. $\frac{x+1}{(x-1)^3}dx$

4. $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)^2}$

5. $\int\frac{dx}{x^2+x+1}$

6. $\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

7. $\int\frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx$

8. $\int\frac{x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$

9. $\int\frac{dx}{81-x^4}$

10. $\int\frac{dx}{x^3+1}$

11. $\int\frac{dx}{x^6-1}$

12. $\int\frac{dx}{x^4+1}$

13. $\int\frac{dx}{x^3-1}$

14. $\int\frac{x^5dx}{(x^2+1)^3}$

15. $\int\frac{x^2dx}{x^6-10x^3+9}$

16. $\int\frac{x^2dx}{1-x^6}$

17. $\int\frac{6x^5dx}{(5-7x^3)^3}$

18. $\int\frac{12x^{15}dx}{(x^4+1)^2}$

$19.\int \frac{dx}{((x-3)(x-2))^2}$ $20.\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^3}$

$21.\int \frac{dx}{((x-2)(x-5))^3}$ $22.\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-3)^2}$

$23.\int \frac{3dx}{(x-1)(x+2)}$ $24.\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)}dx$

$25.\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ $26.\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$

$27.\int \frac{x^2-6}{x^3+2x^2+x}dx$ $28.\int \frac{2dx}{x^5-x^3}$

$29.\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)}dx$ $30.\int \frac{20dx}{(x^2-3x+3)(x^2+2x+2)}$.

ІНТЕГРУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ФУНКЦІЙ

1.Інтегрування найпростіших ірраціональностей

Якщо змінна x присутня під знаком інтеграла у різних дробових степенях, то позначивши через p найменший спільний знаменник усіх показників степеня x, підстановкою $x=z^p$ позбудемося дробових степенів.

Приклад.

Знайти інтеграл

$$I=\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int \frac{dx}{(1+x^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{2}}}$$

Показники степеня x дорівнюють $\frac{1}{3}$ та $\frac{1}{2}$, найменший їх спільний знаменник дорівнює 6. Поклавши $x=z^6, dx=6z^5dz$, отримаємо

$$I=\int \frac{6z^5dz}{(1+z^2)z^3}=6\int \frac{z^2dz}{1+z^2}=6z-6arctgz+C.$$

Отже, повертаючись до змінної x, матимемо

$I = 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + C$.

2.Інтегрування біноміальних інтегралів

Інтеграл вигляду $\int x^m (ax^n + b)^p dx$, де m, n, p раціональні числа, називається ***біноміальним інтегралом***.

Якщо одне з чисел $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ ціле, то вказаний інтеграл можна перетворити на інтеграл від раціональної функції.

Якщо p – ціле число, то інтеграл береться методом, вказаним в пункті «Інтегрування найпростіших ірраціональностей».

Якщо p не є цілим числом, робимо підстановку

$x = z^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$.

Якщо $\frac{m+1}{n}$ - ціле число, тоді $\int x^m (ax^n + b)^p dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1} (az+b)^p dz$.

Робимо підстановку $az + b = t^{\alpha}$ і отримуємо інтеграл від раціональної функції.

Якщо $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле число, тоді $\int x^m (ax^n + b)^p dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}+p-1} (\frac{az+b}{z})^p dz$.

Підстановкою $\frac{az+b}{z} = t^{\alpha}$ отримаємо інтеграл від раціональної функції.

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int x^3 (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$.

В цьому випадку $m = 3, n = 2, p = -\frac{3}{2}$. Оскільки $\frac{m+1}{n} = 2$, то інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції. Покладемо $x^2 = z, xdx = \frac{1}{2} dz$. Отже,

$I = \frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{3}{2}}dz$.

Тепер зробимо заміну $1-z=t^2, dz=-2tdt$.

Тоді $I=-\int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \frac{1}{t}+t+C = \frac{1}{\sqrt{1-z}}+\sqrt{1-z}+C = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+C =$
$= \frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+C$

3.Інтегрування раціональних функцій $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Розглянемо раціональну функцію від *x*, що містить вираз $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Для інтегрування таких функцій застосовуються підстановки Ейлера:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}=t, якщо\, a>0$.

В цьому випадку $ax^2+bx+c=ax^2+2xt\sqrt{a}+t^2$. Значить, $bx+c=2xt\sqrt{a}+t^2$. Отже

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, \quad dx = 2\frac{-t^2\sqrt{a}+bt-c\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{at})^2}dt, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t= = \frac{-t^2\sqrt{a}+bt-c\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}.$$

Таким чином, за допомогою такої підстановки ми виразимо $x, \ \sqrt{ax^2+bx+c}, \ dx$ раціонально через змінну t, отже інтеграл від $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ перейде в інтеграл від раціональної функції змінної t.

2. $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}, \quad c\geq 0$

В цьому випадку
покладемо $ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c$, тоді $ax+b=xt^2+2t\sqrt{c}$

Отже, зробивши підстановку $x=\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$, отримаємо

$$dx = 2\frac{t^2\sqrt{c} - bt + a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}dt, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} = \frac{t^2\sqrt{a} - bt + a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

Таким чином, за допомогою такої підстановки ми виразимо $x,\ \sqrt{ax^2+bx+c},\ dx$ раціонально через змінну t, отже інтеграл від $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ перейде в інтеграл від раціональної функції змінної t.

3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)\left(x-x_2\right)}$.

В цьому випадку покладемо $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)\left(x-x_2\right)} = t(x-x_1)$.

Звідси $a(x-x_1)(x-x_2) = t^2\left(x-x_1\right)^2,\ \ a\left(x-x_2\right) = t^2\left(x-x_1\right)$.

Отже, зробивши підстановку $x = \dfrac{ax_2 - x_1t^2}{a-t^2}$, отримаємо

$$dx = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(a-t^2)^2}dt, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2}.$$

Таким чином, за допомогою такої підстановки ми виразимо $x,\ \sqrt{ax^2+bx+c},\ dx$ раціонально через змінну t, отже інтеграл від $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ перейде в інтеграл від раціональної функції змінної t.

Приклад.

Знайти інтеграл $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$.

В цьому прикладі $a = -1$, отже заміною першого типу ми скористатись не можемо, $c = 4 \geq 0$ - значить, заміна другого типу тут можлива. Покладемо $\sqrt{-x^2-3x+4} = xt + 2$.

Звідси $x = -\dfrac{4t+3}{1+t^2}, \quad dx = 2\dfrac{2t+3t-2}{\left(t^2+1\right)^2}dt, \quad \sqrt{-x^2-3x+4} = -\dfrac{2t^2+3t-2}{t^2+1}$.

Отже $I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}=-\int\frac{2dt}{t^2+1}=-2arctgt+C$.

Повернувшись до змінної x, матимемо

$$I=-2arctg\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}-2}{x}+C.$$

Задачі

Знайти інтеграли

1. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$

2. $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

3. $\int\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}\cdot\frac{dx}{(x+2)(3x+5)}$

4. $\int\frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}dx$

5. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

6. $\int x^3\sqrt{(1-x^2)^3}dx$

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{9+x^2}+3}$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x-5x^2}}$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{-2-5x-3x^2}}$

10. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

11. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

12. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

13. $\int\frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

14. $\int\frac{11x^4-195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}dx$

15. $\int\frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2-8x+5}}$

16. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

17. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

18. $\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x+2}}$

19. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

20. $\int\frac{dx}{(x+5)\sqrt{x^2-1}}$

21. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{8x-x^2}}$

22. $\int \frac{dx}{(x+10)\sqrt{x^2-1}}$

23. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

24. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

25. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

27. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

28. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(3-x)}}$

29. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

30. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

ІНТЕГРАЛИ ВІД ПОКАЗНИКОВИХ ТА ЛОГАРИФМІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Інтеграл вигляду $\int f(a^x)dx$ підстановкою $a^x = t$ зводиться до інтегралу

$$\frac{1}{\ln a}\int \frac{f(t)}{t}dt$$

Приклад.

Обчислити інтеграл $I = \int \sqrt{1-a^x}dx$.

Покладемо $a^x = t$, тоді $I = \frac{1}{\ln a}\int \sqrt{1-t}\,\frac{dt}{t}$. Тепер покладемо $1-t^2 = z^2$

Отримаємо

$$I = -\frac{2}{\ln a}\int \frac{z^2dz}{1-z^2} = \frac{1}{\ln a}\left(2z+\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right|\right)+C.$$

Звідси, повертаючись до змінної *x*: $z = \sqrt{1-t} = \sqrt{1-a^x}$, отримаємо:

$$I=\frac{1}{\ln a}\left(2\sqrt{1-a^x}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-a^x}}{1+\sqrt{1-a^x}}\right|\right)+C$$

2.Інтеграли вигляду $\int P(x)a^x dx$, де $P(x)$ - многочлен, беруться шляхом інтегрування частинами. Поклавши $u=P(x),\ \ du=P'(x)dx,\ \ dv=a^x dx,\ \ v=\frac{a^x}{\ln a}$, отримаємо

$$\int P(x)a^x dx=\frac{P(x)a^x}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}\int P'(x)a^x dx.$$

Так як степінь многочленна $P'(x)$ менше, ніж степінь многочлена $P(x)$, то продовжуючи інтегрувати частинами інтеграл $\int P'(x)a^x dx$, дійдемо врешті-решт до інтеграла $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}$.

Приклад.

Знайти інтеграл $I=\int\left(x^2-2x+3\right)a^x dx$.

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$I=\frac{x^2-2x+3}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}\int(2x-2)a^x dx$$

До останнього інтеграла знову застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int(2x-2)a^x dx=\frac{(2x-2)a^x}{\ln a}-\frac{1}{\ln a}\int 2a^x dx.$$

Таким чином, остаточно отримаємо:

$$I=\left(\frac{x^2-2x+3}{\ln a}-\frac{2x-2}{(\ln a)^2}+\frac{2}{(\ln a)^3}\right)a^2+C.$$

3. Інтеграл $\int P(\ln x)dx$, де P – многочлен, зводиться до інтеграла $\int P(x)a^x dx$ за допомогою заміни $\ln x=t$. Дійсно, в цьому випадку маємо:

$x=e^t,\ dx=e^t dt,$

Отже $\int P(\ln x)dx=\int P(t)e^t dt$.

Приклад.

Знайти інтеграл $I=\int\left(\ln^2 x-2\ln x+3\right)dx$.

Підставивши $\ln x=t$, отримаємо $I=\int\left(t^2-2t+3\right)e^t dt$.

Інтегруючи частинами, як в попередньому прикладі, переконаємося, що $I=\left(t^2-2t+3\right)e^t+C$.

Отже $I=\left(\ln^2 x-4\ln x+7\right)x+C$.

4. Інтеграл $\int x^n\left(\ln x\right)^m dx$ (m –ціле додатне, n - ціле) знаходиться за допомогою підстановки $\ln x=t$, якщо $n=-1$, або за допомогою інтегрування частинами, якщо $n\neq-1$.

А саме: покладемо $u=\left(\ln x\right)^m,\ du=m\left(\ln x\right)^{m-1}\frac{dx}{x},\ dv=x^n dx,\ v=\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Тоді

$$\int x^n\left(\ln x\right)^m dx=\frac{x^{n+1}\left(\ln x\right)^m}{n+1}-\frac{m}{n+1}\int x^n\left(\ln x\right)^{m-1}dx.$$

Продовжуючи аналогічно інтегрувати частинами отриманий інтеграл, врешті-решт дійдемо до інтеграла $\int x^n dx$.

Інтеграли $\int P(x)\left(\ln x\right)^m dx$, де m –ціле додатне, *P(x)* – многочлен, є сумою інтегралів вигляду $\int x^n\left(\ln x\right)^m dx$.

Приклад.

Знайти інтеграл $\int\left(2x-3\right)\left(\ln x\right)^2 dx$.

Інтегруємо частинами, поклавши $u=\left(\ln x\right)^2$, $du=2\ln x\dfrac{dx}{x}$, $dv=\left(2x-3\right)dx$, $v=x^2-3x$.

В результаті матимемо

$$I=\left(x^2-3x\right)\left(\ln x\right)^2-2\int\left(x-3\right)\ln xdx$$

Ще раз інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int\left(x-3\right)\ln xdx=\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{2}x-3\right)dx.$$

Остаточна відповідь: $I=\left(x^2-3x\right)\left(\ln x\right)^2-\left(x^2-6x\right)\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-6x+C$.

Задачі

Знайти інтеграли:

1. $\displaystyle\int\frac{3e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{9e^x+4e^{-x}}$

4. $\displaystyle\int x^4e^xdx$

5. $\displaystyle\int e^x(x^2+x+1)dx$

6. $\displaystyle\int((\ln x)^2-2\ln x)dx$

7. $\displaystyle\int(\ln x)^5dx$

8. $\displaystyle\int x^2(\ln x)^2dx$

9. $\displaystyle\int\frac{dx}{25e^x+36e^{-x}}$

10. $\displaystyle\int\frac{dx}{49e^x+e^{-x}}$

11. $\displaystyle\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

12. $\displaystyle\int 2^{3x-1}dx$

13. $\displaystyle\int 2^{1-5x}dx$

14. $\displaystyle\int\frac{3\cdot 2^{2x}-3}{2\sqrt{2^x}}dx$

15. $\displaystyle\int\frac{2^{3x}+2}{2\sqrt{3^x}}dx$

16. $\displaystyle\int x2^{x^2+1}dx$

17. $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$

18. $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$

19. $\int 2x^3e^{-x^2}dx$

20. $\int 3x^2\ln x dx$

21. $\int (2x+2)^2 e^{2x+3}dx$

22. $\int (\ln x)^2 dx$

23. $\int x(\ln x)^2 dx$

24. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

25. $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt[4]{x}}dx$

26. $\int \frac{x^2}{e^x}dx$

27. $\int \frac{x}{2^x}dx$

28. $\int x^2e^{3x}dx$

29. $\int \frac{3e^x+2}{5e^x}dx$

30. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Якщо $R(u,v)$ - раціональна функція змінних $u,\ v$, то інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки

$$tg\frac{x}{2}=t$$

В цьому випадку

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Оскільки $x=2arctgt,$ то $dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$

Так як $\sin x$ та $\cos x$ виражаються раціонально через змінну t, то інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ за допомогою вказаної підстановки переходить в інтеграл від раціональної функції.

Приклад.

Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$.

Зробивши підстановку $tg\,\frac{x}{2} = t$, отримаємо

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2} - \frac{4(1-t^2)}{1+t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{2}t - 1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\frac{2}{5}}{t - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{2}{5}}{t+2} \right) dt = \frac{1}{5}\ln\left| \frac{t - \frac{1}{2}}{t+2} \right| + C.$$

Таким чином,

$$I = \frac{1}{5}\ln\left| \frac{tg\,\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{tg\,\frac{x}{2} + 2} \right| + C$$

Задачі

Знайти інтеграли:

1. $\int \cos^5 x dx$
2. $\int \cos^6 x dx$
3. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$
4. $\int \sin^6 x dx$
5. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
6. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$
7. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$
8. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$
9. $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$
10. $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$
11. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$
12. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$

13. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

14. $\int \frac{5+3\sin x+7\cos x}{\sin 2x} dx$

15. $\int \sin^5 x dx$

16. $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$

17. $\int \frac{dx}{\sin^4 x dx}$

18. $\int x^3 \cos x dx$

19. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

20. $\int \frac{arctgx}{x^2} dx$

21. $\int \frac{x^2}{1+x^2} arctgx dx$

22. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$

24. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$

27. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

28. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

29. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$

30. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$

ПРИКЛАДИ ФУНКЦІЙ, ЩО НЕ ІНТЕГРУЮТЬСЯ ЕЛЕМЕНТАРНО

Викладені методи дозволяють в деяких випадках виразити невизначений інтеграл даної функції через елементарні функції. Однак, не слід вважати, що таким чином можна виразити невизначений інтеграл кожної функції. Наприклад, можна довести, що інтеграли

$$\int \frac{e^x}{x} dx,\ \int \frac{\sin x}{x} dx,\ \int \frac{\cos x}{x} dx$$

не можна виразити через елементарні функції.

Відомо також, що біноміальні інтеграли не можуть бути виражені через елементарні функції за винятком тих трьох випадків, які ми розглянули раніше.

Приклад

Інтеграл $\int \frac{dx}{\ln x}$ не можна виразити через елементарні функції.

Справді, ввівши нову змінну за допомогою підстановки $x = e^y$, $dx = e^y dy$, отримаємо

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^y}{y} dy$$

Оскільки інтеграл з правої частини рівності не виражається через елементарні функції, то це ж саме можна сказати і про інтеграл $\int \frac{dx}{\ln x}$.

Приклад

Інтеграл $\int \frac{\sin x}{x^2} dx$ за допомогою інтегрування частинами перетворюється таким чином:

$$\int \frac{\sin x}{x^2} dx = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x}{x} dx.$$

В правій частині рівності є інтеграл, який не виражається через елементарні функції, тому і початковий інтеграл не виражається через елементарні функції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика: Навчальний посібник / В.П. Дубовик – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому аналізу / Б.П. Демидович – М. «Астрель», 2003. – 558с.
3. Малугин В.А. Математика для экономистов. Математический анализ / В.А. Малугин – М. «Эксмо», 2006. – 232с.
4. Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навчальний посібник / В.О. Макаренко – К.: Знання, 2008. – 517 с.