

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**РЯДИ.
ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ 2-ГО КУРСУ ТЕХНІЧНИХ ФАКУЛЬТЕТІВ

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
«ПОЛІТЕХНІКА»
2003

Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: Зб. завдань до типової розрахункової роботи для студ. 2-го курсу технічних факультетів / Уклад.: С.В. Горленко, Л.Б. Федорова, В.О. Гайдей. — К.: Видавництво «ІВЦ „Політехніка”», 2003. — 36 с.

*Гриф надано Методичною
радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 1 від 19.09.2002 р.)*

Навчальне видання

РЯДИ.
ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Збірник завдань
до типової розрахункової роботи
для студентів 2-го курсу технічних факультетів

Укладачі: *Горленко* Святослав Васильович
Федорова Лідія Борисівна
Гайдей Віктор Олександрович
Відповідальний
редактор *В.В. Булдигін*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Рецензент *В.Г. Лозовик*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Темплан 2002 р., поз. II/85

Редактор *С.І. Крамаренко*

Підп. до друку 02.2003. Формат 60×84 ¹/₁₆. Папір. офс. Спосіб друку — ризографія.
Ум. друк. арк. 2,09. Обл.-вид. арк. 3,48. Зам. № 3-6. Наклад 100 пр.

Інформаційно-видавничий центр „Видавництво «Політехніка»” НТУУ «КПІ»
Свідоцтво про держреєстрацію ДК № 211 від 09.10.2000
03056, Київ-56, просп. Перемоги, 37

Вступ

Натепер накопичено багаторічний досвід використання типових індивідуальних розрахункових робіт для організації і контролю самостійної роботи студентів. Результатом цього є створена нова зручна форма типового варіанта.

Цей збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань середнього рівня складності, а кожний варіант — задачі до таких розділів: «Числові та функціональні ряди», «Ряд та інтеграл Фур'є», «Теорія функцій комплексної змінної», «Операційне числення». Крім того, запропоновано кілька варіантів завдань, підготовчих до розв'язання основних задач (рівень А) та задач, що поглиблюють вивчення відповідних розділів (рівень В). Їх уміщено в кінці збірника. Частина задач узятو зі збірників завдань з вищої математики [5, 9]. Крім того, укладачі рекомендують використовувати збірники задач [1—4, 6—8].

Список рекомендованої літератури

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985. — 446 с.
2. *Вища математика: Збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.* — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.
3. *Гудименко Ф.С.* Збірник задач з вищої математики. — К.: КДУ, 1967. — 352 с.
4. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: МГУ, 1999. — 624 с.
5. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике — М.: Высш. шк., 1994. — 206 с.
6. *Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др.* — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.
7. *Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 3 ч. / В. А. Болгов, А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин и др.* — М.: Наука, 1986. — Ч. 2. — 368 с.
8. *Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин.* — СПб.: Наука, 1994. — 496 с.
9. *Чудесенко В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. — М.: Высш. шк., 1999. — 200 с.

Варіант 1

1. Дослідити на збіжність ряд:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \sqrt{n}}{n \sqrt{n}}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$;
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$;
 7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n (n+1)}$;
 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \sqrt{n}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{2^n (2n+3)}$.

2. Знайти суму ряду:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$;
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1}$.

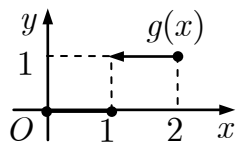
3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

- 1) $\sin^3 x, x_0 = 0$;
 2) $\frac{9}{20 - x - x^2}, x_0 = 0$; 3) $\frac{1}{x}, x_0 = -2$;
 4) $y(x) : y' = xy + e^y, y(0) = 0$ (до x^3).

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n^2}$; 2) $\int_0^{0.1} e^{-6x^2} dx$.

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:



- 1) $f(x) = g(x), T = 2$;
 2) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$
 3) $f(x) = x^2 + 1, x \in (0; \pi)$ за косинусами;
 4) $f(x) = x^2 + 1, x \in (0; \pi)$ за синусами.

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-2|t|}, t \in R$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

- 1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)$; 3) $(-1 + i\sqrt{3})^{-3i}$.

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1, |z+1| > 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Re} z dz$, де L :

- 1) $|z| = 2, 0 \leq \arg z \leq \pi$; 2) $[0; 1] \cup [1; 1+i]$.

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

- 1) $\frac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}, z_0 = 0$;
 2) $\frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 1+2i$; 3) $z \cos \frac{1}{z-2}, z_0 = 2$.

12. Визначити тип особливих точок функції:

- 1) $\frac{e^{9z} - 1}{\sin z - z + \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0$; 2) $e^{1/z} \sin \frac{1}{z}$.

13. Обчислити інтеграл:

- 1) $\oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$; 2) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz$;
 3) $\oint_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} dz$; 4) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sqrt{3} \sin t}$;
 5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$; 6) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2 + 4)^2} dx$.

14. Знайти зображення оригіналу:

- 1) $t^2 \sin 2t$; 2) $\frac{e^{-2t} \cos t}{t}$; 3) $\begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ t, & t > 2. \end{cases}$

15. Розв'язати задачу Коші:

- 1) $y' + 2y = \eta(t) + \eta(t-3), y(0) = 1$;
 2) $y'' + y = 6e^{-t}, y(0) = 3, y'(0) = 1$;
 3) $y'' - y = \operatorname{th} t, y(0) = y'(0) = 0$;

- 4) $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 2.$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

Варіант 2

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 3n^2}{100n^2 + n + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2 + (-1)^n}{n^3};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n + 1)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{2n + 1}\right)^n; \quad 8) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n + 1}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 1)^n}{2^n \sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{n^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n - 2}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n - 1)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$2) \frac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{x + 3}, x_0 = -2;$$

$$4) y(x) : y' = x^2 y^2 + 1, y(0) = 1 \text{ (до } x^3).$$

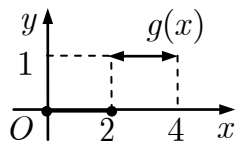
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}; \quad 2) \int_0^{0.1} \sin(100x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 + 2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 + 2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos t, |t| \leq \pi; f(t) = 0, |t| > \pi$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right); \quad 3) \operatorname{Arcsin} 4.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| \geq 1, |z| < 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + 1, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z}^2 dz$, де L :

$$1) z = x + ix^2, 0 \rightarrow 1 + i; \quad 2) [0; 1] \cup [1; 1 + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{z - 4}{z^4 + z^3 - 2z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z + 1}{z(z - 1)}, z_0 = 2 - 3i; \quad 3) \sin \frac{z}{z - 1}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z^3 e^{7/z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{\cos z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)}; \quad 2) \oint_{|z|=1/2} \frac{2-z^2}{4z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + \frac{9}{2}z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{9z}{4}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 + \sqrt{15} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \sin x}{(x^2+9)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \cos 3t; \quad 2) \frac{e^{-2t} \sin t}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + 4y = 2(\eta(t) + \eta(t - 1)), y(0) = 0;$$

$$2) y'' - y' = t^2, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' - y' = \frac{1}{1 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 2.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x - \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 3

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^n; & \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi n}{2} \right)}{n(n+1)^2}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+5}{n^2+4}; & \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}; \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}; & \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(2n+1)}{(2n+3)}; \\ 7) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}; & \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{(6n+5)}; \\ 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\sqrt[n]{n}}; & \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}. \end{aligned}$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}; & \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{10^n}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n}; & \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+3}. \end{aligned}$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

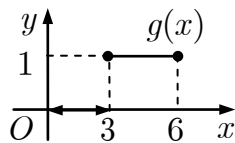
$$\begin{aligned} 1) \ln(1-x-6x^2), x_0=0; \\ 2) \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}}, x_0=0; \quad 3) e^x, x_0=1; \\ 4) y(x) : y' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2} \text{ (до } x^3). \end{aligned}$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{8n^3}; \quad 2) \int_0^1 \cos x^2 dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

1) $f(x) = g(x), T = 6;$



$$\begin{aligned} 2) f(x) &= \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x+2, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} \\ 3) f(x) &= x^2 + 3, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами;} \\ 4) f(x) &= x^2 + 3, x \in (0; \pi) \text{ за синусами.} \end{aligned}$$

6. Зобразити функцію

$f(t) = \sin t, t \in [0; \pi]; f(t) = 0, t \notin [0; \pi]$
інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\text{Ln } 6$; 3) $\text{Arcsin}(-2)$.

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq 2, \text{Re } z > 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\text{Im } f(z) = e^x(y \cos y + x \sin y), f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z} dz$, де L :

1) $z = x + i \sin x, 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} + i;$

2) $[0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + i].$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

1) $\frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}, z_0=0;$

2) $\frac{z+1}{z(z-1)}, z_0=-3-2i;$ 3) $ze^{z/(z-5)}, z_0=5.$

12. Визначити тип особливих точок функції:

1) $\frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0=0;$ 2) $\text{tg}^2 z.$

13. Обчислити інтеграл:

1) $\oint_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)};$ 2) $\oint_{|z|=3} \frac{e^{1/z} + 1}{z} dz;$

3) $\oint_{|z|=1/2} \frac{\text{sh } 2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{3}} dz;$ 4) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 2\sqrt{6} \sin t};$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx;$ 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$

14. Знайти зображення оригіналу:

1) $(t+1) \sin 2t;$ 2) $\frac{\text{sh } t}{t} e^{-2t};$ 3) $\begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ t^3, & t > 6. \end{cases}$

15. Розв'язати задачу Коші:

1) $2y' + y = \eta(t) - \eta(t-2), y(0) = 2;$

2) $y'' + y' = t^2 + 2t, y(0) = 0, y'(0) = -2;$

3) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}, y(0) = y'(0) = 0;$

4) $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0.$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_0^x \text{ch}(x-t)y(t)dt = x.$$

Варіант 4

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{3}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n; \quad 6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(4n-7)}{(3n-5)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln \ln n)^2 n \ln n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt[3]{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+2}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) 2x \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - x, x_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{2x+5}, x_0 = 3;$$

$$3) \ln(1-x-6x^2), x_0 = 0;$$

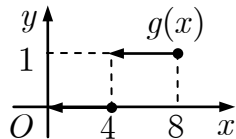
$$4) y(x) : y' = x^3 + y^3, y(0) = \frac{1}{2} \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}; \quad 2) \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 8;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 + 4, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 + 4, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$f(t) = 2, t \in [-2; -1]; f(t) = 0, t \notin [-2; -1]$ інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{i}; \quad 2) \operatorname{sh} \left(2 + \frac{\pi i}{4} \right); \quad 3) \operatorname{Arctg} \left(\frac{-2\sqrt{3} + 3i}{3} \right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \geq 1, |z+i| < 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \operatorname{Re} \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = \cos^3 t + \sin^3 t, t \in [0; \frac{\pi}{2}]; \quad 2) [1; 0] \cup [0; i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{2z-16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -2 + i;$$

$$3) z \sin \frac{\pi z}{z-a}, z_0 = a.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6} z^3}, z_0 = 0; \quad 2) ze^{1/z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=1} \frac{2 + \sin z}{z(z+2i)} dz; \quad 2) \oint_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1 - \cos z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} 3z - 1 - \frac{9}{2} z^2}{z^4 \sin \frac{9z}{8}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 + \sqrt{35} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+10)}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t-1) \cos 2t; \quad 2) \frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-3t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + y = \eta(t) + \eta(t-2), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' - y = \cos 3t, y(0) = 1, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x + 2y + 1, \\ y' = 4x - y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

Варіант 5

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n-\ln n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(5n+2)}{(3n+4)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^3}{n^4 - n^2 + 1}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{2n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (5n+4)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\operatorname{sh} 2x}{x} - 2, x_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{(x-3)^2}, x_0 = 1;$$

$$3) \ln(x^2 + 4x + 3), x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = x + y^2, y(0) = -1 \text{ (до } x^3).$$

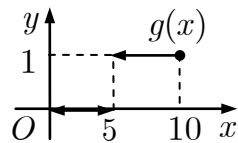
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}; \quad 2) \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 10;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{2} + 1, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 + 5, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 + 5, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-t}, t \geq 0; f(t) = -e^t, t < 0$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{1}; \quad 2) \operatorname{ch} \left(2 + \frac{\pi i}{2} \right); \quad 3) \operatorname{Arcsin} 3i.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| < 1, |z-i| \leq 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = (e^x + e^{-x}) \cos y, f(0) = 2$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Im} \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = 3 \cos t + i2 \sin t, t \in [0; \frac{\pi}{2}];$$

$$2) \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1, 3 \rightarrow 2i.$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -2+i; \quad 3) z \cos \frac{\pi z}{z-a}, z_0 = a.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=1/2} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 4iz} dz; \quad 2) \oint_{|z-3|=1/2} \frac{e^z - 1}{\sin z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1/3} \frac{1-2z+4z^3}{2z^2} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{7+4\sqrt{3} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^4+5x^2+6} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t); \quad 2) \frac{\operatorname{ch} t}{t} e^{-2t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ 2t^4, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + 3y = 2\eta(t) - \eta(t-1), y(0) = 3;$$

$$2) y'' + y' + y = 7e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 4;$$

$$3) y'' - y = \operatorname{th}^2 t, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{t-x} y(t) dt.$$

Варіант 6

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg\left(\frac{1+(-1)^n}{2}n\right)}{n^3+2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n n^3; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(n\sqrt{5}+2)}{2n+1};$$

$$7) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n^2}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{15^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right); \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (5n+3)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{7}{12+x-x^2}, x_0=0; \quad 2) \sin \frac{\pi x}{4}, x_0=2;$$

$$3) \ln(x^2+2x+2), x_0=-1;$$

$$4) y(x): y' = x + x^2 + y^2, y(0) = 1 \text{ (до } x^3).$$

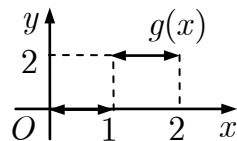
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}; \quad 2) \int_0^1 \ln\left(1+\frac{x}{5}\right) \frac{dx}{x}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = (x-\pi)^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = (x-\pi)^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2 \sin 3t, |t| \leq 2\pi; \quad f(t) = 0, |t| > 2\pi$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}; \quad 2) \operatorname{Ln}(1+i); \quad 3) \operatorname{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leq 2, |z-i| > 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, f(1) = 1+i.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \bar{z} dz$, де L :

$$1) y = 1 - 2x, i \rightarrow \frac{1}{2}; \quad 2) [0; 1] \cup [1; 1+i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}, z_0=0;$$

$$2) \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0=2-i; \quad 3) \sin \frac{5z}{z-2i}, z_0=2i.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{ch} 5z-1}{e^z-1-z}, z_0=0; \quad 2) \frac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=2/5} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z \operatorname{sh} 2\pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4 \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+9)^{-2} dx}{x^2+4}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \operatorname{sh} 2t; \quad 2) \frac{\cos 2t - \cos 3t}{t} e^{4t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ 3t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + y = \eta(t) + \eta(t-2), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + y' - 2y = -2(t+1), y(0) = y'(0) = 1;$$

$$3) y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 2.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^3(x-1) = \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 7

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{10^3 n+3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{5}{n}}{n!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(n\sqrt{3}+1)}{(n\sqrt{2}+1)};$$

$$7) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n\sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n-3^n}{15^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (8n+5)x^{n+2}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}, x_0=0;$$

$$2) \sin^2 x, x_0=\frac{\pi}{4}; \quad 3) \ln(5x+3), x_0=\frac{2}{5};$$

$$4) y(x): y' = 2\cos x - xy^2, y(0) = 1 \text{ (до } x^3\text{)}.$$

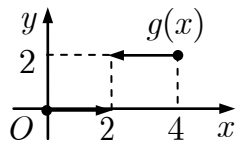
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}; \quad 2) \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3-x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = -(x-\pi)^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = -(x-\pi)^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2 - |t|, |t| \leq 2; f(t) = 0, |t| > 2$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-1}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{3} + i\right); \quad 3) \operatorname{Arccos} 2i.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1-i| \leq 1, \operatorname{Im} z > 1, \operatorname{Re} z \geq 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = e^{-y} \sin x + y, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z} - i) dz$, де L :

$$1) y = 3x - 3, 1 \rightarrow -3i; \quad 2) [0; i] \cup [i; i+1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}, z_0=0;$$

$$2) \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0=-1+2i;$$

$$3) \sin \frac{3z-i}{3z+i}, z_0=-\frac{i}{3}.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z \sin \frac{6}{z^2}, z_0=0; \quad 2) \frac{(z+\pi) \sin \frac{\pi}{2} z}{z \sin^2 z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z dz}{\sin z}; \quad 2) \oint_{|z|=1/5} \frac{e^{8z} \operatorname{ch} 4z}{z \sin 4\pi z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3) \cos 2x}{x^4+3x^2+2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \sin 2t \operatorname{sh} 3t; \quad 2) \frac{1-\cos t}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ 2t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 2y' = \eta(t) - \eta(t-2), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' - 9y = \sin t - \cos t, y(0) = -3, y'(0) = 2;$$

$$3) y'' - y' = \frac{e^t}{1+e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -5x - 3y + 2, \end{cases} x(0) = 2, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt.$$

Варіант 8

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt[4]{2n+3}}; \quad 8) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n n}; \quad 10) \frac{(x+5)^n}{n \sqrt[3]{n+1}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1};$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (8n+5)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \ln(1+x-6x^2), x_0 = 0;$$

$$2) \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}, x_0 = 3; \quad 3) \sin^2 x, x_0 = -1;$$

$$4) y(x) : y' = e^x - y^2, y(0) = 0 \text{ (до } x^3).$$

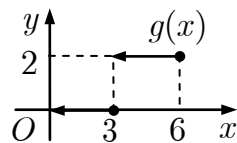
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{4^n}; \quad 2) \int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} x-2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos t, t \in [0; \pi]; f(t) = 0, t \notin [0; \pi]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-i}; \quad 2) \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right); \quad 3) \operatorname{Arcsin} 2i.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1+i| \geq 1, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z \leq -1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = e^x \cos y, f(0) = 1 + i$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{dz}{z}$, де L :

$$1) z = x + i(x-1), 1 \rightarrow 2+i; \quad 2) [1; 2] \cup [2; 2+i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = -2-3i; \quad 3) z \cos \frac{3z}{z-1}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^z - 1}{\sin z - z + \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; \quad 2) z^2 \sin \frac{3}{z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3/2|=2} \frac{2z(z-1)}{\sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=3} \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,1} \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 3\sqrt{7} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 - 2) \cos \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 4)^{-2} dx}{x^2 + 9}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \sin 2t \operatorname{sh} t; \quad 2) \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} e^{-t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 3y' = \eta(t-1), y(0) = 0, y'(0) = 4;$$

$$2) y'' + 2y' = 2 + e^t, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$3) y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t+1}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 2.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \sin 2(x-t)y(t) dt.$$

Варіант 9

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n + 2} \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(2n)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n^2 + n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} 5^{nx} \operatorname{arctg} \frac{7^{-nx} x}{x-1}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (7n + 5)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) (x-1) \sin 5x, x_0 = 0;$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{4+x}}, x_0 = -3; \quad 3) \ln(3x-4), x_0 = 2;$$

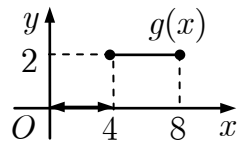
$$4) y(x) : y' = x + y + y^2, y(0) = 1 \text{ (до } x^3).$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}; \quad 2) \int_0^{0.2} \sin(25x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 8;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4x - 3, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 - 2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 - 2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t-1) - \operatorname{sgn}(t-2), t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-16}; \quad 2) \operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i); \quad 3) \operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - i| \leq 2, \operatorname{Re} z \geq 3, \operatorname{Im} z < 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z}^2 - z) dz$, де L :

$$1) z = x + ix, 0 \rightarrow 1 + i; \quad 2) [0; 1] \cup [1; 1 + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z + 3}{z^2 - 1}, z_0 = 2 + i; \quad 3) z \sin \frac{z}{z-1}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) z \cos \frac{1}{z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=0.5} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} 2z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{9 - 4\sqrt{5} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x) \sin x}{x^4 + 9x^2 + 20} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 3)^2}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \operatorname{ch} 2t \cos 4t; \quad 2) \frac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 4t}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + 3y = \eta(t) - 2\eta(t-1) + 2\eta(t-2),$$

$$y(0) = 1;$$

$$2) 2y'' - y' = \sin 3t, y(0) = 2, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \cos x + \int_0^x y(t) dt.$$

Варіант 10

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right); \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(2n)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{\sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2 - 5n)4^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{16^n (2n+1)};$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (7n+5)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x}, x_0 = 0;$$

$$2) \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad 3) \frac{x+7}{x^2 + 5x + 4}, x_0 = 1;$$

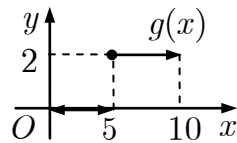
$$4) y(x) : y' = x^2 + y^2, y(0) = 1 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!!}; \quad 2) \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 10;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 5 - x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 - 3, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 - 3, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \operatorname{sgn} t, |t| \leq 3; f(t) = 0, |t| > 3$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{3}i}{32}}; \quad 2) \operatorname{sh} \left(1 + \frac{\pi i}{2}\right); \quad 3) (-1 - i)^{4i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| \geq 1, 0 \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z < 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \operatorname{Im} e^z dz$, де L :

$$1) y = x, 0 \rightarrow 1 + i; \quad 2) [0; i] \cup [i; 1 + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{5z - 100}{z^4 + 5z^3 - 50z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z + 3}{z^2 - 1}, z_0 = 3 - i;$$

$$3) (z - 3) \cos \pi \frac{z - 3}{z}, z_0 = 0.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{e^z + 1}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/3} \frac{1-2z^2}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,05} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 17} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 3)^{-2}}{x^2 + 2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \operatorname{ch} t; \quad 2) \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} e^{-3t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ t^5, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' - y = -2\eta(t) - \frac{1}{2}\eta(t-5), y(0) = 0;$$

$$2) y'' + 2y' = \sin \frac{t}{2}, y(0) = -2, y'(0) = 4;$$

$$3) y'' - 2y' = \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^2 = \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 11

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right); \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arccos \frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2 + 2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n^2}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{n(n+1)};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^4 \sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^{n+2}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{6}{8+2x-x^2}, x_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{x-1}}, x_0 = 2;$$

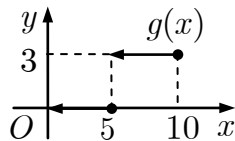
$$3) \sin^2 2x, x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = x^2 y^2 + \sin x, y(0) = \frac{1}{2} \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}; \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:



$$1) f(x) = g(x), T = 10;$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3x-1, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x^2 - 4, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x^2 - 4, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \sin t, |t| \leq \frac{\pi}{2}; \quad f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{2}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{8}; \quad 2) \operatorname{ch}(1 - \pi i); \quad 3) \operatorname{Arcsin} i.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| < 2, 0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y} \cos x, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Re} z dz$, де L :

$$1) z = 3 \cos t + i2 \sin t, 3 \rightarrow 2i; \quad 2) [1; 0] \cup [0; -i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{11z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = -2 + 3i;$$

$$3) z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}, z_0 = 0.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^{5z} - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \operatorname{ctg} \pi z.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z + 2}{z^2(z-\pi)} dz; \quad 2) \oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{6z - \sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 1)^{-2}}{x^2 + 9} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \cos 3t; \quad 2) \frac{1 - e^{3t}}{t} e^{-3t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ t^5, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + y = \eta(t) + 2\eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), y(0) = 0;$$

$$2) y'' + y = \operatorname{sh} t, y(0) = 2, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' - y = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 5.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x - 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 12

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1); & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5}; \\
 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}; & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^3}; \\
 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}; & 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{-1}(n+1)}{(2n-1)}; \\
 7) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}; & 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+5)}{3^n}; \\
 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt[5]{n+1}}; & 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}.
 \end{array}$$

2. Знайти суму ряду:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 84n - 13}; & 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}; \\
 3) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2 - n}; & 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-n+1)x^n.
 \end{array}$$

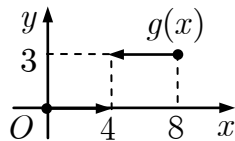
3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$\begin{array}{l}
 1) -\ln(x^2 + 4x + 5), x_0 = -2; \\
 2) e^{-2x^2}, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}, x_0 = 0; \\
 4) y(x) : y' = 2y^2 + ye^x, y(0) = \frac{1}{3} \text{ (до } x^3).
 \end{array}$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$\begin{array}{ll}
 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{9} \right)^n; & 2) \int_0^{0,2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.
 \end{array}$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:



$$\begin{array}{l}
 1) f(x) = g(x), T = 8; \\
 2) f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases} \\
 3) f(x) = x^2 - 5, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами}; \\
 4) f(x) = x^2 - 5, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.
 \end{array}$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{8i}; \quad 2) \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i); \quad 3) \operatorname{Arctg}(i - 1).$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = y - 2xy, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z}^2 dz$, де L :

$$1) z = t + it^2, 0 \rightarrow 1 + i; \quad 2) [0; 1] \cup [1; 1 + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{6z - 144}{z^4 + 6z^3 - 72z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z + 3}{z^2 - 1}, z_0 = -2 - 2i;$$

$$3) z \cos \frac{z}{z + 2i}, z_0 = -2i.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{\sin \pi z}{(z - 1)^3}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1/2|=1} \frac{e^z + 1}{z(z-1)} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{4z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2\sqrt{2} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \sin 5t; \quad 2) \frac{e^t - t - 1}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ t^2, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' - 2y' + y = \eta(t) - \eta(t - 1),$$

$$y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + y' = \frac{1}{1 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x, \end{cases} \quad x(0) = 3, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\sin x = \int_0^x \cos(x - t) y(t) dt.$$

Варіант 13

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n+1}{n+2}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{-1}(3n+1)}{(2n-3)^2};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3n-1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \ln(1-x-12x^2), x_0 = 0;$$

$$2) \sin x, x_0 = 1; \quad 3) \frac{x^2}{x-1}, x_0 = 0;$$

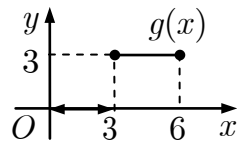
$$4) y(x) : y' = e^{3x} + 2xy^2, y(0) = 1 \text{ (до } x^3).$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n}; \quad 2) \int_0^{0,4} \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) \frac{dx}{x}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x(x-\pi), x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x(x-\pi), x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos at, |t| \leq \frac{\pi}{a}; \quad f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{a}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{16}; \quad 2) \operatorname{Ln}(-1+i); \quad 3) \operatorname{Arctg} \left(\frac{3+4i}{5} \right).$$

8. Зобразити на комплексній площині область: $\{z \mid |z-i| \leq 2, 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$.

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 + 2x, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \operatorname{Re} \sin z dz$, де L :

$$1) z = \frac{\pi}{2} + it, \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} + i; \quad 2) [0; i] \cup [i; \frac{\pi}{2} + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{13z - 338}{2z^3 + 12z^2 - 169z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = 2 + i; \quad 3) \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z^4 \cos \frac{5}{z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{\sin z^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=1} \frac{e^{zi} + 2}{\sin 3zi} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 1}{z^6} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=6} \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{6}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 2\sqrt{3} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t-1) \sin 3t; \quad 2) \int_0^t \frac{\sin 2\tau}{\tau} d\tau; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ 2t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + 2y = 3\eta(t) - \eta(t-2), y(0) = 3;$$

$$2) y'' - 3y' + 2y = e^t, y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{3t}}{\operatorname{ch}^2 2t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -x - 2y + 1, \\ y' = -\frac{3}{2}x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t) dt.$$

Варіант 14

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+1} - n); 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3(2+\sin \frac{\pi n}{2});$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{n+3}{n^2+5}}{\sqrt[3]{n}+2}; 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!};$$

$$5) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}; 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2}; 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n/\cos x}}; 10) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2+35n-6}; 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+8^n}{24^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}; 4) \sum_{n=0}^{\infty} (5n+4)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) (3+e^{-x})^2, x_0=0;$$

$$2) \ln(5x+3), x_0=1; 3) \frac{1}{2x+4}, x_0=1;$$

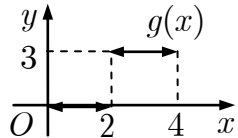
$$4) y(x): y' = x + e^y, y(0) = 0 \text{ (до } x^3).$$

4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{7}\right)^n; 2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 5x+1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = x(\pi-x), x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = x(\pi-x), x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t, |t| \leq \pi; f(t) = 0, |t| > \pi$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{-1-\sqrt{3}i}{32}}; 2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2i\right); 3) \operatorname{Arctg}(i+1).$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z+i| > 1, -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < 0 \right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{dz}{z}$, де L :

$$1) z = \cos t + i \sin t, t \rightarrow -1; 2) [i; 0] \cup [0; -1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}, z_0=0;$$

$$2) \frac{z}{z^2+1}, z_0=1-2i; 3) \sin \frac{z+i}{z-i}, z_0=i.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos 3z-1}{\sin z-z+\frac{1}{6}z^3}, z_0=0; 2) \frac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2} dz; 2) \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 4z-8z^2-1}{z^4 \sin \frac{8z}{3}} dz; 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-\sqrt{21} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx; 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2+2x+2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t+2) \sin 3t; 2) \frac{e^{-4t} \cos 2t}{t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + y = 2\eta(t-2) - \eta(t-1), y(0) = 0;$$

$$2) 2y'' + 3y' + y = 3e^t, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' - 4y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}, y(0) = 0 = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 2.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\operatorname{sh} x = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 15

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{25n^2+10n}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin \frac{2+(-1)^n}{6} \pi;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n+3}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n (n+1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1} \right)^{2n+1}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(2n)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n \sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n n (x-1)^{2n}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+3n-20}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (7n+4)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\sin x}{x} - 1, x_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x_0 = 2;$$

$$3) \ln(5x+3), x_0 = 1;$$

$$4) y(x) : y' = y \cos x + 2 \cos y, y(0) = 0 \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

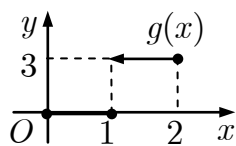
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}; \quad 2) \int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1 - 4x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 2x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 2x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 3, t \in [0; 2]; f(t) = 0, t \notin [0; 2]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функцій:

$$1) \sqrt[3]{-8}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5i\right); \quad 3) (-1 - i\sqrt{3})^{-3i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| < 1, |\arg z| \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\text{Im } f(z) = 3x^2y - y^3 - y, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L |e^z| dz$, де L :

$$1) y = 1 - x, i \rightarrow 1; \quad 2) [i; 0] \cup [0; 1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{15z - 450}{2z^3 + 15z^2 - 225z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = -3 + i; \quad 3) \sin \frac{z}{z - 3}, z_0 = 3.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\text{sh } 2z - 2z}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{\text{sh}^2 \pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{6 - 4\sqrt{2} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(\text{ch } t + \text{sh } t); \quad 2) \frac{e^{-3t} \sin 2t}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' - 3y' + 2y = \eta(t-2) - \eta(t-3),$$

$$y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' - 2y' - 3y = 2t, y(0) = y'(0) = 1;$$

$$3) y'' - y = \frac{1}{\text{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = \frac{5}{2}x - y + 2, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 16

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3 + 1}{n^2 + n + 2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{n/2}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(n+1)}{2n+3};$$

$$7) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n) \ln n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^3 \sqrt{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right) x^{2n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-n-2)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{7}{12 - x - x^2}, x_0 = 0;$$

$$2) \ln(5x + 3), x_0 = 1; \quad 3) \sin^3 x, x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = x^2 + 2y^2, y(0) = \frac{1}{5} \text{ (до } x^3 \text{)}.$$

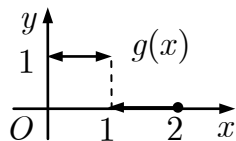
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n!}; \quad 2) \int_0^{0,4} \sin \left(\frac{5x}{2} \right)^2 dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 3x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2 - t, t \in [0; 2]; f(t) = 0, t \notin [0; 2]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-8i}; 2) \operatorname{sh} \left(3 + \frac{\pi i}{6} \right); 3) \operatorname{Arcsin}(i^2 + i - 1).$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2, -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 2xy + y, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \arg e^z dz$, де L :

$$1) y = 2x + 2, -1 \rightarrow 2i; 2) [-1; 0] \cup [0; 2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{8z - 256}{z^4 + 8z^3 - 128z^2}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{z}{z^2 + 1}, z_0 = -3 - 2i; 3) z \exp \left(\frac{1}{z-2} \right), z_0 = 2.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; 2) \frac{e^z - 1}{\sin \pi z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z + 2}{z^2 - 4\pi^2} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{z \operatorname{sh} 4z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{8 - 2\sqrt{15} \sin t};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 6} dx; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \cos 4t; 2) \frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-3t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ 3t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 4y' + 4y = 2(\eta(t) - \eta(t-1)),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$2) y'' + 4y = \sin 2t, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + y' = \frac{e^t}{1 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 17

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin \frac{\pi n}{2}}{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}; \quad 6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \left(\frac{3}{2}\right)^n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2+n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{3^n \sqrt{2n+1}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 4^n}{15^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) x^{n-1}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) x^2 \sqrt{4-3x}, x_0 = 0;$$

$$2) \frac{1}{x}, x_0 = -2; \quad 3) \cos^3 2x, x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = x^2 + xy + y^2, y(0) = \frac{1}{2}.$$

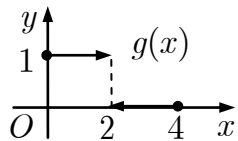
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n)!}; \quad 2) \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 4 - 2x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 4x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 4x^2 + 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-t}, |t| \leq 2; f(t) = 0, |t| > 2$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-\frac{1}{16}}; \quad 2) \operatorname{ch} \left(1 + \frac{\pi i}{3} \right); \quad 3) \operatorname{Arctg} \left(\frac{3i - 2\sqrt{3}}{7} \right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \operatorname{arg}(z+i) > \frac{\pi}{4} \right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z} - i) dz$, де L :

$$1) z = t + 2it, 0 \rightarrow 1 + 2i; \quad 2) [0; 2i] \cup [2i; 1 + 2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{z+2}{-2z^3 + z^2 + z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z+8}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2 + 2i; \quad 3) e^{z/(z-3)}, z_0 = 3.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^{z^2}}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \operatorname{th} z.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z}{4z^2 + \pi z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{e^{7z} - \operatorname{ch} 5z}{z \sin 2iz} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3} \sin t - 2};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \sin 2t \operatorname{sh} 3t; \quad 2) \frac{\operatorname{ch} t}{t} e^{-2t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' - 7y' + 10y = \eta(t-1) - \eta(t-2),$$

$$y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) 2y'' + 5y' = 29 \cos t, y(0) = -1, y'(0) = 0;$$

$$3) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{(t+1)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 y(t) dt.$$

Варіант 18

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n + 1}{n^5}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}{3^n + 2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3 + 1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln(3n-1)}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^2 + 1}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 (x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{10^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

1) $\ln(1 + 2x - 8x^2), x_0 = 0;$

2) $\frac{x^3}{2+x}, x_0 = 0;$ 3) $\frac{1}{x+3}, x_0 = -2;$

4) $y(x) : y' = e^{\sin x} + x, y(0) = 0$ (âi x^3).

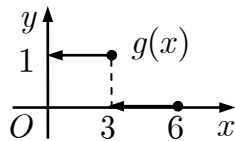
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!n!}; \quad 2) \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

1) $f(x) = g(x), T = 6;$



$$2) f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

3) $f(x) = 2x^2 - 1, x \in (0; \pi)$ за косинусами;

4) $f(x) = 2x^2 - 1, x \in (0; \pi)$ за синусами.

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 5, t \in [1; 3]; f(t) = 0, t \notin [1; 3]$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

1) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}; 2) \operatorname{Ln}(-1 - i); 3) \operatorname{Arccos}(2 + 2i).$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-1| \leq 2, \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z < 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y), f(0) = 0.$

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z}^2 dz$, де L :

1) $z = 2 \cos t + i \sin t, 2 \rightarrow i;$

2) $[2; 2+i] \cup [2+i; i].$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

1) $\frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}, z_0 = 0;$

2) $\frac{4z+8}{(z-1)(z+3)}, z_0 = 1-3i;$ 3) $\sin \frac{2z}{z-4}, z_0 = 4.$

12. Визначити тип особливих точок функції:

1) $ze^{4/z^2}, z_0 = 0;$ 2) $\frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}.$

13. Обчислити інтеграл:

1) $\oint_{|z+3/2|=1} \frac{\cos^2 z + 3}{2z^2 + \pi z} dz;$ 2) $\oint_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz;$

3) $\oint_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{ch} 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz;$ 4) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{15 \sin t - 4}};$

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+3)dx}{(x^2-10x+29)^2};$ 6) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+16)(x^2+9)}.$

14. Знайти зображення оригіналу:

1) $t \sin 2t;$ 2) $\frac{\cos 2t - \cos 3t}{t} e^{4t};$ 3) $\begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ t^3, & t > 6. \end{cases}$

15. Розв'язати задачу Коші:

1) $4y' + 2y = \eta(t) - \eta(t-1), y(0) = 2;$

2) $y'' + y' + y = t^2 + t, y(0) = 1, y'(0) = -3;$

3) $2y'' - y' = \frac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}, y(0) = y'(0) = 0;$

4) $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$$

Варіант 19

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n/3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos \frac{\pi n}{2})\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}};$$

$$3) \sum_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n};$$

$$5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{\ln^n n}; \quad 6) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2n^2}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)x^{n+2}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) 2x \sin^2 \frac{x}{2} - x, x_0 = 0;$$

$$2) e^x, x_0 = 1; \quad 3) \ln(1 - 4x^2), x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = xy - y^2, y(0) = \frac{1}{5} \text{ (âî } x^3).$$

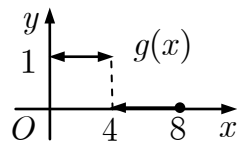
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n!}; \quad 2) \int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 8;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 6x - 5, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 3x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 3 - 3|t|, |t| \leq 1; f(t) = 0, |t| > 1$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{\frac{1}{8}}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3i\right); \quad 3) \operatorname{Arccos}(-5).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - i| < 2, \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z > 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 2xy + 2x, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = 4 \cos t + i \sin t, 4 \rightarrow i; \quad 2) [4; 0] \cup [0; i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{3z + 18}{-2z^3 + 3z^2 + 9z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z + 8}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -3 - i;$$

$$3) \sin \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{e^{1/z}}{(e^z - 1)(1 - z)^3}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z - 3}{z^2 + 2\pi z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/2} \frac{z^4 - 3z^2 + 5}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} iz}; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6} \sin t - 5};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 6x^2 + 5)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(e^{-t} + \operatorname{ch} t); \quad 2) \frac{1 - \cos t}{t} e^t; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ 2t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + 2y = 2\eta(t) - \eta(t-1), y(0) = 3;$$

$$2) y'' + 4y = 8 \sin 2t, y(0) = 3, y'(0) = -1;$$

$$3) y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

Варіант 20

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right); \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^3 \sqrt[n]{n}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) (x-1) \operatorname{sh} x, x_0 = 0;$$

$$2) \frac{1}{2x+5}, x_0 = 3; \quad 3) \frac{5x-5}{x^2-x-6}, x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = 2x + y^2 + e^x, y(0) = 1.$$

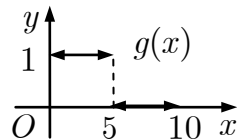
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n n!}; \quad 2) \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 10;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 4x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 4x^2 - 1, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 4, |t| \leq 1; f(t) = 0, |t| > 1$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{\frac{i}{8}}; \quad 2) \cos\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right); \quad 3) \operatorname{Arcsin} \frac{2}{i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Re} z \geq 1, \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = 1 - e^x \sin y, f(0) = 1 + i$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z} + 1) dz$, де L :

$$1) z = t - \sin t, 0 \rightarrow \pi; \quad 2) [0; \pi] \cup [\pi; \pi + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{2z + 16}{8z^3 + 2z^3 - z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z + 8}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2 + i;$$

$$3) \exp\left(\frac{4z - 2z^2}{(z-1)^2}\right), z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{z^2} + z \sin \frac{1}{z^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right)} dz; \quad 2) \oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2 \operatorname{sh} 5z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35 \sin t - 6}};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t^2 - t) \cos t; \quad 2) \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} e^{-t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ t^5, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 2y' = \eta(t-2), y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$2) y'' - y' - 6y = 2, y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$3) y'' - y' = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + x + \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt.$$

Варіант 21

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{n^{100} + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt[4]{n^3}(\sqrt[3]{n}-1)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(n+1)}{(n+5)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n n^2}; \quad 10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+2) \ln(n+2)}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (5n+4)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{5}{6+x-x^2}, x_0 = 0;$$

$$2) \cos \frac{2x^3}{3}, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{(x-3)^2}, x_0 = 1;$$

$$4) y(x) : y' = x \sin x - y^2, y(0) = 1 \text{ (â } x^3).$$

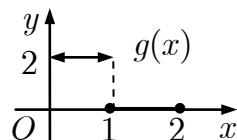
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}; \quad 2) \int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 1 - 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 1 - 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos 2t, |t| \leq \frac{\pi}{2}; f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{2}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{1}{16}}; \quad 2) \operatorname{Ln}(1-i); \quad 3) (-\sqrt{3} + i)^{-6i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, -1 < \operatorname{Im} z \leq 1, 0 < \operatorname{Re} z \leq 2\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = (e^x - e^{-x}) \sin y, f(0) = 2$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (z + \bar{z}) dz$, де L :

$$1) z = t + i(2-t), 2i \rightarrow 2; 2) [0; 2i] \cup [2i; 2+2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{5z + 50}{-2z^3 + 5z^2 + 25z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z - 8}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -1 - 2i;$$

$$3) z e^{\pi/(z-a)^2}, z_0 = a.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^{7z} - 1}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{z^2(z^2 - 4)^{-2}}{\cos(z-2)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=\pi/2} \frac{z^2 + z + 3}{(\pi + z) \sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3} \sin t - 7};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 9)^2} dx; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2 + 4} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \sin 5t; 2) \frac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 4t}{t} e^{-2t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 3y = \eta(t) - \eta(t-4), y(0) = y'(0);$$

$$2) y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$3) y'' + 2y' + y = \frac{te^{-t}}{t+1}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \operatorname{sh} x + \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

Варіант 22

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n} \sin \frac{1}{n+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^8 + n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+7)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{\ln(n+1)};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n^2}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-2n+1)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) x \sqrt[3]{27 - 2x}, x_0 = 0;$$

$$2) \frac{2}{1 - 3x^2}, x_0 = 0; \quad 3) \sin \frac{\pi x}{4}, x_0 = 2;$$

$$4) y(x) : y' = 2x^2 - xy, y(0) = 1 \text{ (âî } x^3).$$

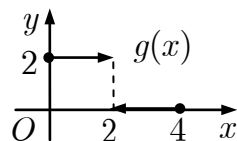
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n (n+1)}; \quad 2) \int_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 6x - 2, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 2 - 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 2 - 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 6 - 2|t|, |t| \leq 3; f(t) = 0, |t| > 3$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}; \quad 2) \operatorname{sh} \left(1 - \frac{\pi i}{3} \right); \quad 3) (1 - i\sqrt{3})^{3i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| > 1, -1 \leq \operatorname{Im} z < 0, 0 \leq \operatorname{Re} z < 3\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Im} f(z) = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L |z| dz$, де L :

$$1) z = 2 \cos t + 2i \sin t, 2 \rightarrow -2i;$$

$$2) [2; 0] \cup [0; -2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{3z + 36}{18z^2 + 3z^3 - z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z - 8}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 3 + i;$$

$$3) z e^{\pi z / (z - \pi)}, z_0 = \pi.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin 6z - 6z}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6} z^3}, z_0 = 0; \quad 2) z^3 \sin \frac{2}{z}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{(z - \pi) \sin 2z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/2} \frac{2 + z^3 - 5z^4}{z^5} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 \sin t + 5};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^5}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t+1) \sin 5t; \quad 2) \frac{1 - e^{3t}}{t} e^{-3t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + 4y = \eta(t) + 4\eta(t-1), y(0) = 0;$$

$$2) y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$3) y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 1 + 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 23

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \ln \frac{n}{n+2}; \quad 2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^{-2/3} n}{n^2 \ln^{1/3} n + 1};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2 - 1}\right) - 1 \right); \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! 4^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n+1}{4^n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3 + 1) \ln n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{5n(n+1)};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^{n+1}};$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-2n-1)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \ln(1+x-12x^2), x_0 = 0;$$

$$2) \frac{1}{5x+3}, x_0 = \frac{2}{5}; \quad 3) e^{3x^2}, x_0 = 0;$$

$$4) y(x) : y' = x - y^2, y(0) = \frac{1}{2} \text{ (â } x^3 \text{)}.$$

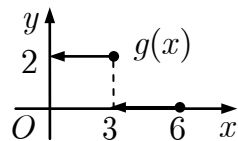
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n (2n+1)}; \quad 2) \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 9x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 2 + 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 2 + 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \operatorname{sgn} t - \operatorname{sgn}(t-3), t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \quad 2) \operatorname{ch}\left(2 - \frac{\pi i}{6}\right); \quad 3) \operatorname{Arccos} \frac{1-i}{1+i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z+i| < 1, -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y} \cos x + x, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L \operatorname{Im} z^2 dz$, де L :

$$1) z = t + i(1-t), i \rightarrow 1; \quad 2) [i; 0] \cup [0; 1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{7z+98}{-2z^3+7z^2+49z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z-8}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 2-2i;$$

$$3) z \sin \pi \frac{z+2}{z}, z_0 = 0.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z \sin \frac{3}{z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{z^4 - 1}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{ze^{1/z} - z - 1}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2 \frac{z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 \sin t + 5};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 12x^2 + 20)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \sin t \operatorname{sh} 5t; \quad 2) \frac{e^t - t - 1}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) 2y' + 3y = \eta(t) - 2\eta(t-3), y(0) = 0;$$

$$2) y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}, y(0) = 2, y'(0) = 6;$$

$$3) y'' - y = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^x + 2 \int_0^x \cos(x-t)y(t) dt.$$

Варіант 24

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right); \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \arctg \sqrt{n^2 - 1}}{\pi \sqrt{n^2 - n}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}; \quad 6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3) \ln^2 n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{(2n+1)^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{x^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 21n - 10}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n + \frac{(-1)^n}{n}\right) x^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-2n+2) x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x, x_0 = 0;$$

$$2) \ln(3x+8), x_0 = -2; \quad 3) \frac{x-3}{x^2+5x+6}, x_0 = 0;$$

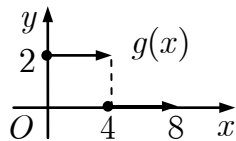
$$4) y(x) : y' = xe^x + 2y^2, y(0) = 0 \text{ (â } x^3).$$

4. Обчислити з точністю $\epsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{n^4}; \quad 2) \int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 8;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 3, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 3, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3 - 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 3 - 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-3|t|}, t \in \mathbb{R}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \quad 2) 1^{2i}; \quad 3) \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \leq 1, -\frac{\pi}{2} < \arg(z - i) < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\text{Im } f(z) = e^{-y} \sin x, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (\bar{z} + i) dz$, де L :

$$1) z = t + i(4 - 2t), 4i \rightarrow 2; \quad 2) [4i; 0] \cup [0; 2].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{4z + 64}{32z^2 + 4z^3 - z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{4z - 8}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -2 - i;$$

$$3) z \cos \pi \frac{z+3}{z-1}, z_0 = 1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\cos 5z - 1}{\text{ch } z - 1 - \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{\sin \pi z}{(z^3 - 1)^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=2} \frac{z^2 + \sin z + 2}{z^2 + \pi z} dz \quad 2) \oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=1} \frac{\text{ch } 2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7} \sin t + 8};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 8x + 17)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t \text{ ch } 2t \cos t; \quad 2) \int_0^t \frac{\sin 3\tau}{\tau} d\tau; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y' + y = \eta(t-2) - 2\eta(t-3), y(0) = 0;$$

$$2) y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t, \\ y(0) = -2, y'(0) = 3;$$

$$3) y'' + y' = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^2 + x = \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 25

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{1+n^2} - 2n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n+1}}{n \left(3 + \sin \frac{n\pi}{4} \right)}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n (n+1)!}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{3} - 1 \right) \ln^2 \frac{n}{2}}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n} + 1}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 + n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-2n-2)x^{n+1}$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, x_0 = 0;$$

$$2) \operatorname{ch} 2x^3, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{\sqrt{x+4}}, x_0 = -3;$$

$$4) y(x) : y' = xy + x^2 + y^2, y(0) = 1 \text{ (â } x^3 \text{)}.$$

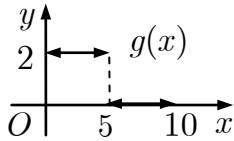
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)^n}; \quad 2) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 10;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 10x - 3, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3 + 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 3 + 2x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \cos 3t, |t| \leq \frac{\pi}{3}; f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{3}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-128 + 128\sqrt{3}i}; 2) \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2i\right); 3) \operatorname{Arctg}(i + 2).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z > -1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L (z^2 - |z|^2) dz$, де L :

$$1) z = \cos t + 2i \sin t, 1 \rightarrow -1; 2) [1; -1].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{9z + 162}{81z + 9z^2 - 2z^3}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = -1 - 3i; 3) z^2 \sin \frac{z+3}{z}, z_0 = 0.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{sh} 4z - 4z}{e^z - 1 - z}, z_0 = 0; 2) \frac{\sin^3 z}{z(1 - \cos z)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi) dz}{(z-\pi) \sin 3z}; 2) \oint_{|z|=1/2} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,4} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 2\pi z} dz; 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5} \sin t + 9};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 10}{(x^2 + 4)^2} dx; 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t^2 \sin 4t; 2) \frac{e^{-3t} \cos 2t}{t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ t^5, & t > 10. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 4y = \eta(t) - \eta(t - 2\pi), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t} \cos 3t,$$

$$y(0) = 5, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{1+t^2}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x^2 e^x = \int_0^x e^{2(x-t)} y(t) dt.$$

Варіант 26

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sqrt{n^3+1}-n)}{\sqrt{n^5+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \frac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+3}}{(2n^2+1)^{n/3}}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5) \ln n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^4}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2-5n-6}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n-4^n}{20^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (6n+5)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{5}{6-x-x^2}, x_0=0; \quad 2) \frac{1}{\sqrt{x-1}}, x_0=2;$$

$$3) \ln(1+2x^2), x_0=0;$$

$$4) y(x) : y' = xy + e^x, y(0) = 0 \text{ (â } x^3).$$

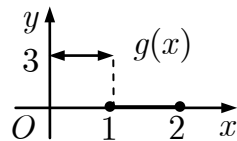
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^n}; \quad 2) \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 2;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{4}, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 4 - x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 4 - x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2, |t| \leq 2; f(t) = 0, |t| > 2$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{27}; \quad 2) \cos\left(\frac{\pi}{6} - i\right); \quad 3) (1 + i\sqrt{3})^{-3i}.$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} \leq 2, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + x, f(1) = 2.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L \bar{z} dz$, де L :

$$1) |z - i| = 1; \quad 2) [0; i] \cup [i; 1 + i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}, z_0=0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2+4}, z_0=-3+2i; \quad 3) z \sin \frac{z^2-2z}{(z-1)^2}, z_0=1.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\operatorname{ch} 3z - 1}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}, z_0=0; \quad 2) z \sin \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z(z+\frac{\pi}{3})} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7 \sin t + 4}};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+1) \cos x}{x^4+5x^2+4} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t^2-3) \operatorname{sh} t; \quad 2) \frac{\operatorname{ch} t}{t} e^{-2t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ 2t, & t > 2. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + y = \eta(t) + 3\eta(t-2), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + 3y' - 10y = 47 \cos 3t - \sin 3t,$$

$$y(0) = 3, y'(0) = -1;$$

$$3) y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 2, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x \cos x = \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

Варіант 27

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \operatorname{tg} \frac{3}{n+2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+2}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} n(e^{1/n} - 1)^2; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3) \ln n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+5)(x+2)^{2n}}{(2n+9)^5}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{n+1}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (6n+5)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \sqrt[4]{16-5x}, x_0 = 0;$$

$$2) \sin^2 2x, x_0 = 0; \quad 3) \frac{1}{x^2 - 4x + 3}, x_0 = -2;$$

$$4) y(x) : y' = ye^x, y(0) = 1 \text{ (âi } x^3).$$

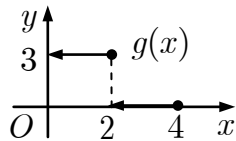
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{5n^3 + 1}; \quad 2) \int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625 + x^4}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 4;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x}{5} - 2, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3 - 4x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 3 - 4x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = \sin|t|, |t| \leq \frac{\pi}{2}; f(t) = 0, |t| > \frac{\pi}{2}$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{\frac{1}{256}}; \quad 2) i^{3i}; \quad 3) \operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z > 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \operatorname{Re} \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = t + i \sin t, 0 \rightarrow \pi; \quad 2) [0; \pi].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{11z + 242}{2z^3 - 11z^2 - 121z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = 2 + 3i; \quad 3) z \cos \frac{1}{z-3}, z_0 = 3.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{e^{z^4} - 1}{\cos z - 1 + \frac{1}{2}z^2}, z_0 = 0; \quad 2) e^{1/z} \frac{\sin 3z^2}{z(z^3 + 1)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2 + \pi)^2}{i \sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - z^4 + 3z^6}{2z^3} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0.5} \frac{e^{5z} - \operatorname{ch} 6z}{z \sin \pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} \sin t + 3};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 18x^3 + 45)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1) \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t-2) \sin 4t; \quad 2) \frac{1 - \cos 2t}{t} e^{-t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 4, \\ t^2, & t > 4. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 3y' = \eta(t-2), y(0) = 4, y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + y' - 2y = e^{-t}, y(0) = -1, y'(0) = 0;$$

$$3) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t) dt.$$

Варіант 28

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{n^5 + 3n^2 + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2 + (-1)^n)}{\ln(1 + n)};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2 + 5}}{(n-1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{5n^2 \ln(n-2)};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+7)^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^3}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n (x+4)^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 56n - 33}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg}^n x}{n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) \frac{7}{12 - x - x^2}, x_0 = 0;$$

$$2) e^{-2x^2}, x_0 = 0; \quad 3) \sin 2x, x_0 = 2;$$

$$4) y(x) : y' = 2 \cos x + xy, y(0) = 0 \text{ (â } x^3 \text{)}.$$

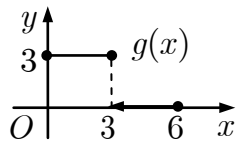
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4(n+3)}; \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 6;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 3 + 4x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 3 + 4x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 4 - 2|t|, |t| \leq 2; f(t) = 0, |t| > 2$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[4]{-128 - 128\sqrt{3}i}; 2) \operatorname{sh}(2 - \pi i); 3) \operatorname{Arctg} \left(\frac{3\sqrt{3} + 8i}{7} \right).$$

8. Зобразити множину точок

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1, \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \arg(z-1) > \frac{\pi}{4} \right\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = -2xy - 2y, f(0) = i$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L z \bar{z} dz$, де L :

$$1) z = t + 2it, 0 \rightarrow 1 + 2i; 2) [0; 1] \cup [1; 1 + 2i].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{6z + 144}{72z^2 + 6z^3 - z^4}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = 3 + 2i; 3) z \sin \pi \frac{z-1}{z-2}, z_0 = 2.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) \frac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z - \frac{1}{6}z^3}, z_0 = 0; 2) \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=0,2} \frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2} \sin t + 3};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx; \quad 6) \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) t(e^{-t} + \operatorname{sh} t); 2) \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} e^{-t}; 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 6, \\ 3t^3, & t > 6. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 4y = 2\eta(t-2) - \eta(t-1),$$

$$y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3), y(0) = y'(0) = 2;$$

$$3) y'' - 4y = \operatorname{th}^2 2t, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt.$$

Варіант 29

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\ln^2 n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-1)^n}{\sqrt{n(2+n^2)}};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}; \quad 6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{\left(\frac{3}{2}n^2 + 2\right) \ln \frac{n}{2}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2+1}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{n+1}}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1}.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

$$1) (2 - e^x)^2, x_0 = 0;$$

$$2) 2^{-x^2}, x_0 = 0; \quad 3) \ln(5x + 3), x_0 = 1;$$

$$4) y(x) : y' = x^2 + e^y, y(0) = 0 \text{ (âî } x^3).$$

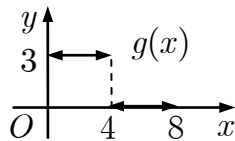
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{(n^3 + 1)^2}; \quad 2) \int_0^{0,5} e^{-3x^2/25} dx.$$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

$$1) f(x) = g(x), T = 8;$$



$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3 - 8x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$3) f(x) = 4 - 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ за косинусами};$$

$$4) f(x) = 4 - 3x^2, x \in (0; \pi) \text{ за синусами}.$$

6. Зобразити функцію

$$f(t) = e^{-5t}, t \geq 0; f(t) = 0, t < 0$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

$$1) \sqrt[3]{\frac{i}{27}}; \quad 2) (-i)^{5i}; \quad 3) \operatorname{Arccos}(-3i).$$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 1, \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Im} f(z) = 2xy - 2y, f(0) = 1$.

10. Обчислити інтеграл $\int_L (2\bar{z} + 3) dz$, де L :

$$1) z = t + i \cos t, i \rightarrow \frac{\pi}{2}; \quad 2) [i; 0] \cup [0; \frac{\pi}{2}].$$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

$$1) \frac{13z + 388}{2z^3 - 13z^2 - 169z}, z_0 = 0;$$

$$2) \frac{2z}{z^2 - 4}, z_0 = -1 + 3i;$$

$$3) z \cos \frac{z}{z - 5}, z_0 = 5.$$

12. Визначити тип особливих точок функції:

$$1) z \cos \frac{2}{z^3}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{\sin 3z}{z(1 - \cos z)}.$$

13. Обчислити інтеграл:

$$1) \oint_{|z-\pi i|=2} \frac{\cos^2 z}{z \sin z} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz;$$

$$3) \oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^2 \operatorname{sh} \frac{z}{3}} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3} \sin t + 4};$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + x) \sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$$

14. Знайти зображення оригіналу:

$$1) (t - 4) \sin 3t; \quad 2) \frac{1 - e^{4t}}{t} e^{-4t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 8, \\ 3t^4, & t > 8. \end{cases}$$

15. Розв'язати задачу Коші:

$$1) y'' + 9y = \eta(t - 3), y(0) = y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + y = 2 \cos t, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$3) y'' + 2y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, y(0) = y'(0) = 0;$$

$$4) \begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x + 1, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 0.$$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x - t) e^{x-t} y(t) dt.$$

Варіант 30

1. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} (3n+2) \sin \frac{1}{n+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2 \sin^2 n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 \sqrt[3]{n} + 5}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!};$$

$$5) \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1} \right)^{3n}; \quad 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1) \ln n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right); \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{2^n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$$

2. Знайти суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n};$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n.$$

3. Розвинути в ряд Тейлора функцію:

1) $(x-1) \operatorname{ch} x, x_0 = 0;$

2) $\frac{1}{x+5}, x_0 = 2; \quad 3) 3x^3, x_0 = 0;$

4) $y(x) : y' = x^2 + y, y(0) = 1$ (âî x^3).

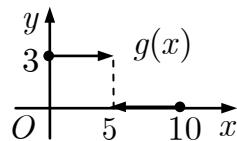
4. Обчислити з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^4}; \quad 2) \int_0^1 \sin x^3 dx.$

5. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ та

знайти її амплітудний частотний спектр:

1) $f(x) = g(x), T = 10;$



2) $f(x) = \begin{cases} 7x-1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$

3) $f(x) = 4 + 3x^2, x \in (0; \pi)$ за косинусами;

4) $f(x) = 4 + 3x^2, x \in (0; \pi)$ за синусами.

6. Зобразити функцію

$$f(t) = 2 \operatorname{sgn} t, |t| \leq 3; f(t) = 0, |t| > 3$$

інтегралом Фур'є і знайти її амплітудний та фазовий частотні спектри.

7. Знайти всі значення функції:

1) $\sqrt[4]{256}; \quad 2) (-1)^{4i}; \quad 3) \operatorname{Arcsin} 4.$

8. Зобразити множину точок

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2-i| \geq 1, 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z \leq 3\}.$$

9. Відновити аналітичну функцію $f(z)$, якщо $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 - x, f(0) = 0.$

10. Обчислити інтеграл $\int_L (z^2 - |z|^2) dz$, де L :

1) $z = t + 2it, 0 \rightarrow 1 + 2i; \quad 2) [0; 1] \cup [1; 1 + 2i].$

11. Знайти всі лоранівські розвинення функції:

1) $\frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}, z_0 = 0;$

2) $\frac{2z}{z^2-4}, z_0 = 2 + 2i; \quad 3) ze^{z/(z-4)}, z_0 = 4.$

12. Визначити тип особливих точок функції:

1) $\frac{\cos \frac{1}{2} z^4}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2} z^2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2+1)}.$

13. Обчислити інтеграл:

1) $\oint_{|z-3/2|=2} \frac{z^3 + \sin 2z}{(z-\pi) \sin \frac{z}{2}} dz; \quad 2) \oint_{|z|=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz;$

3) $\oint_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz; \quad 4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{21} \sin t + 5};$

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x) \cos x}{x^4+13x^2+36} dx.$

14. Знайти зображення оригіналу:

1) $t(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t); \quad 2) \frac{e^t - t - 1}{t}; \quad 3) \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ 5t^5, & t > 10. \end{cases}$

15. Розв'язати задачу Коші:

1) $y'' + 2y' = \eta(t-1), y(0) = y'(0) = 1;$

2) $y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t,$

$y(0) = -1, y'(0) = -2;$

3) $y'' + y' = \frac{1}{(1+e^t)^2}, y(0) = y'(0) = 0;$

4) $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0.$

16. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = x + 2 \int_0^x [(x-t) - \sin(x-t)] y(t) dt.$$

Задачі рівня А

А 1. Довести розбіжність ряду, використовуючи необхідну умову збіжності:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,01};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 4}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$$

А 2. Дослідити збіжність ряду, використовуючи ознаку порівняння:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3(-1)^{n+1}}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{4^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n^3}\right); \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arctg \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

А 3. Дослідити збіжність ряду, використовуючи ознаку Д'Аламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{4^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}.$$

А 4. Дослідити збіжність ряду, використовуючи радикальну ознаку Коші:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

А 5. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}.$$

А 6. Знайти області збіжності та абсолютної збіжності ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (5-x^2)^n; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n(n+1)};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n.$$

А 7. Знайти суму ряду та вказати область збіжності ряду до своєї суми:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)x^n; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

А 8. Знайти всі значення функцій:

$$1) e^{2+\pi i}; \quad 2) \sin 3i; \quad 3) \operatorname{Ln}(3-4i).$$

А 9. Знайти всі лоранівські розвинення функції в околі точки z_0 :

$$1) \frac{1}{z-2}, z_0 = 0; \quad 2) \frac{1}{(z-2)(z-3)}, z_0 = 0;$$

$$3) \frac{z}{(z+1)^2}, z_0 = -1; \quad 4) \frac{1}{(z-2)(z-3)}, z_0 = 2;$$

$$5) \frac{e^z}{z^3}, z_0 = 0; \quad 6) \frac{1-\cos z}{z^2}, z_0 = 0.$$

А 10. Знайти нулі функції і визначити їх порядки:

$$1) f(z) = z^4 + 4z^2; \quad 2) f(z) = z^2 \sin z;$$

$$3) f(z) = \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}; \quad 4) f(z) = \cos z^3.$$

А 11. Визначити характер особливої точки z_0 для функції:

$$1) \frac{1}{(z-\sin z)^2}; \quad 2) \frac{1}{e^z - z - 1}; \quad 3) \frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}.$$

А 12. Знайти особливі точки і визначити їх характер:

$$1) e^{1/(z-3i)}; \quad 2) \frac{z^2}{\cos z - 1 - z^2/2}; \quad 3) \frac{\operatorname{sh} 2z}{z}.$$

А 13. Знайти лишки в особливих точках функцій:

$$1) \frac{1}{(z-1)^2}; \quad 2) z^3 e^{1/z};$$

$$3) \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}; \quad 4) \frac{\sin 2z}{(z-i)^3}.$$

А 14. Знайти оригінал:

$$1) F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}; \quad 2) F(p) = \frac{p}{(p+3)^2};$$

$$3) F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

А 15. Знайти зображення оригіналу:

$$1) \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau; \quad 2) \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau; \quad 3) t^2 \eta(t-1).$$

Задачі рівня В

В1. Знайти всі значення α , за яких ряд збігається:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^{\alpha}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\alpha} \left(1 + \sqrt{\arctg 1/n}\right)}{\sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$$

В2. Дослідити на збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdots (4n-3)}{1 \cdot 6 \cdots (5n-4)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n n!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n (\ln \ln n)^{\gamma}}$$

В3. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{(-1)^n/n^p} - 1\right);$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi \sqrt{n^2+n});$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^q+1} - \sqrt[4]{n^q}) \arctg \frac{(-1)^n}{n}$$

В4. Довести справедливості рівності:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

В5. Довести рівномірну збіжність ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-11}, x \in [0; 1];$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-12}}, x \in [0; 1].$$

В7. Розвинути функцію $f(x)$ у степеневий ряд із центром у точці $x_0 = 0$ та x_1 . Вказати радіус збіжності ряду:

$$1) f(x) = \arcsin x; \quad 2) f(x) = \int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt;$$

$$3) f(x) = \int_0^x \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} dt; \quad 4) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}};$$

$$5) f(x) = e^{x-1}, x_1 = 4; \quad 6) f(x) = 2^x e^{x-1}, x_1 = 1.$$

В8. Знайти 4 перші ненульові члени розвинування функції $f(x)$ у ряд Тейлора з центром у точці x_0 :

$$1) f(x) = \frac{e^x}{x-1}; \quad 2) f(x) = \frac{\sin x}{1-x^2};$$

$$3) f(x) = \sin(\sin x); \quad 4) f(x) = \ln(1+e^x);$$

$$5) f(x) = 2^{\cos^2 x}; \quad 6) f(x) = \ln(x^2 - x - 1).$$

В9. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$:

$$1) f(x) = \sin^2 x, x \in \mathbb{R};$$

$$2) f(x) = \cos^3 x, x \in \mathbb{R};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x \leq -1, \\ 1, & -1 \leq x < 0, \\ 3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3-x, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$4) f(x) = 2^x, x \in (-\pi; \pi);$$

$$5) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

В10. Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі функцію $f(x)$:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -1, & \pi < x \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$2) f(x) = e^x, -\pi < x < \pi, f(\pi) = \operatorname{ch} \pi.$$

В11. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$:

$$1) f(x) = 4x - 1, x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]; f(x) = 0, x > \frac{1}{4};$$

$$2) f(x) = 1, x \in [0; a]; f(a) = \frac{1}{2}; f(x) = 0, x > a;$$

$$3) f(x) = \sin x, x \in [0; \pi]; 0, x > \pi;$$

$$4) f(x) = 5^{-x}.$$

В12. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$:

$$1) f(x) = 2x - 3, x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]; f(x) = 0, x > \frac{3}{2};$$

$$2) f(x) = \cos x, x \in [0; \pi]; f(x) = 0, x > \pi;$$

$$3) f(x) = \sin x, x \in [0; \pi]; f(x) = 0, x > \pi;$$

$$4) f(x) = 2^{-x}.$$

В13. Обчислити інтеграл:

$$1) \int_L z \operatorname{Re} z^2 dz, L: |z| = 1 \quad (-\pi \leq \arg z \leq 0);$$

$$2) \oint_{|z|=2} z \bar{z} dz; \quad 3) \int_1^i z e^z dz;$$

$$4) \int_1^i \frac{\ln z}{z} dz; \quad 5) \int_0^{1+i} \cos 2z dz.$$

Формули

$$z = x + iy = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

$$\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y, \arg z = \varphi, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & z \in \text{I} \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & z \in \text{II, III} \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & z \in \text{IV} \end{cases} \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, x = 0, y < 0 \end{matrix}$$

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = \overline{0, n-1}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$e^{z+2\pi ki} = e^z, e^{2\pi i} = 1, e^{\pi i} = -1$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ki; \ln z = \ln |z| + i \arg z$$

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} (a \neq 0) \mid z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz} \mid \operatorname{Arctg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz + 1}{iz - 1}$$

Cauchy–Riemann : $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mid \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \mid \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, (|z| < 1) \mid \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \mid \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, c_{-1} = \operatorname{Res} f(z)$$

$$z_0 (m - \text{pole}) : \operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) = -2\pi i \operatorname{Res} f(z) (z_k \neq \infty)$$

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) (\operatorname{Im} z_k > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} (f(z) e^{itz}) (\operatorname{Im} z_k > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos tx dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin tx dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx$$

$f(t) \rightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ (Laplace)	$F(p) \rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$ (Mellin)
1. $\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \rightarrow \sum_{k=1}^n C_k F_k(p)$	1. $\sum_{k=1}^n C_k F_k(p) \rightarrow \sum_{k=1}^n C_k f_k(t)$
2. $e^{\alpha t} f(t) \rightarrow F(p - \alpha)$	2. $e^{-pa} F(p) \rightarrow f(t - a)$
3. $f(\lambda t) \rightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \lambda > 0$	3. $F(\alpha p) \rightarrow \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$
4. $f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0)$	4. $(-1)^n F^{(n)}(p) \rightarrow t^n f(t)$
5. $\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}$	5. $\int_p^{+\infty} F(s) ds \rightarrow \frac{f(t)}{t}$
6. $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \rightarrow F_1(p) F_2(p)$	6. $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(s) F_2(p - s) ds \rightarrow f_1(t) f_2(t)$

$$7. f(t) = f(t \pm T) \rightarrow \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$$

$$8. p F_1(p) F_2(p) \rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau$$

$f(t)$	$F(p)$
$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$

$$1(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$t^\mu \rightarrow \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}}, \mu > -1$$

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}} \rightarrow f(t) = \eta(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} (e^{pt} F(p))$$