МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Методичні вказівки

до типової розрахункової роботи

з математичного аналізу

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Рекомендовано Вченою радою
фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Укладачі: В. В. Дрозд,

В. А. Жук,

Т. В. Маловічко

Електронне навчальне видання

Київ
НТУУ «КПІ»
2013

Методичні вказівки до типової розрахункової роботи з математичного аналізу «Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» [Електронне видання] / Уклад.: В.В. Дрозд, В.А. Жук, Т.В. Маловічко – 213 с.

Гриф надано вченою радою ФМФ
(Протокол № 4 від 18 червня 2013 р.)

Методичні вказівки до типової розрахункової роботи з математичного аналізу «Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної»

Укладачі: Дрозд В’ячеслав Володимирович
Жук Віктор Андрійович
Маловічко Тетяна Володимирівна

Відповідальний редактор: О.В. Іванов, д. ф.-м. н., проф.

Рецензент: Б.І. Дзира, к. ф.-м. н, доц. каф. диф. рівнянь

1. МНОЖИНИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Основні поняття

Поняття множини є одним з найбільш важливих первісних, не означуваних понять математики. Для раціонального аналізу навколишнього світу його уявляють складеним із окремих «об'єктів». Виділення цих об'єктів та зібрань є природнім способом організації математичного мислення.

Під множиною A ми розуміємо довільне зібрання визначених же різних об'єктів, що розглядаються як єдине ціле. Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Поняття елемента теж є первісним.

Той факт, що об'єкт x є елементом множини A, позначається символом $x \in A$ (читається «x належить A»). Якщо x не є елементом A, це позначається $x \notin A$ (читається «x не належить A»). Множина, що не має елементів, називається порожньою і позначається символом $\varnothing$.

Таким чином, множина A вважається заданою, якщо про кожний «об'єкт», що розглядається, можна сказати, що він або належить множині A, або ні.

Отже, кожна множина характеризується певною ознакою, згідно якої довільний елемент належить чи не належить даній множині.

Приклади множин:

1. Множина S всіх символів цієї сторінки.
2. Множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел (позначається $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$).
3. Множина $\mathbb{Z}$ цілих чисел (позначається $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$).
4. Множина $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Звичайно в конкретних міркуваннях елементи всіх множин, що розглядаються в даній математичній теорії, вибирають із деякої широкої множини Ω (своєї для кожного випадку), яка називається універсальною множиною, або універсумом.

Щоб задати множину, потрібно вказати, які елементи їй належать. Це можна зробити двома способами:

1. Прямим перечисленням елементів множини.

Якщо множина A складається з елементів $a, b, \ldots, c$, це позначається як $A = \{a, b, \ldots, c\}$.

2. Характеристичною властивістю (ознакою) елементів множини.

Якщо А — множина всіх елементів x універсуму, що мають дану властивість $P(x)$, це позначається:

$$A = \{x \in \Omega \mid P(x)\}, \text{ або } A = \{x \mid P(x)\}, \text{ чи } A = \{x : P(x)\}.$$

Приклади множин:

1. Множина M парних цілих чисел запишеться як

$$M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Множина $\mathbb{Q}$ раціональних чисел:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Дві множини A і B називаються рівними, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки. Рівність множин A і B позначається як $A = B$.

З означення рівності випливає, що рівні множини складаються з одних і тих же елементів, причому порядок розміщення елементів множин неістотний, наприклад, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Дії над множинами

1. Включення.

Множина A називається підмножиною множини B, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B. Символічно:

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B.$$

Це позначають як $A \subset B$ або $B \supset A.$ Порожня множина $\varnothing$ вважається підмножиною будь-якої множини:

$$\varnothing \subset A, \quad A \subset \Omega.$$

Зауважимо, що множини рівні тоді і тільки тоді, коли $A \subset B$ і $B \subset A.$

Операції над множинами можна символічно задати геометричними фігурами на площині.

Зображення включення $A \subset B$.

2. Об'єднання.

Об'єднанням множин A і B називається множина, що складається з тих елементів, які належать принаймні одній із множин A або B (позначають $A \cup B$), тобто

$$A \cup B = \left\{ x \in \Omega \,|\, \left(x \in A \right) \textit{чи} \left(x \in B \right) \right\}.$$

Зображення об'єднання $A \cup B$.

Властивості операції об'єднання:

1. $A \cup B = B \cup A$ (комутативність),

2. $\left(A \cup B \right) \cup C = A \cup \left(B \cup C \right)$ (асоціативність),

3. $A \cup \varnothing = A$,

де A, B, C — довільні множини з універсуму Ω.

3. Перетин.

Перетином множин A і B називається множина, що складається із спільних елементів множин A і B (позначають $A \cap B$), тобто

$$A \cap B = \left\{ x \in \Omega \,|\, \left(x \in A \right) i \left(x \in B \right) \right\}.$$

Зображення перетину $A \cap B$.

Властивості операції перетину:

1. $A \cap B = B \cap A$ (комутативність),

2. $\left(A \cap B \right) \cap C = A \cap \left(B \cap C \right)$ (асоціативність),

3. $A \cap \varnothing = \varnothing$,

де A, B, C — довільні множини з універсуму Ω.

Операції об'єднання та перетину пов'язані між собою двома дистрибутивними законами:

1. $\left(A \cup B \right) \cap C = \left(A \cap C \right) \cup \left(B \cap C \right)$,

2. $\left(A \cap B \right) \cup C = \left(A \cup C \right) \cap \left(B \cup C \right)$,

де A, B, C — довільні множини з універсуму Ω.

4. Різниця.

Різницею множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів множини A, що не належать множині B (позначають $A \setminus B$), тобто

$$A \setminus B = \left\{ x \in \Omega \,|\, \left(x \in A \right) i \left(x \notin B \right) \right\}.$$

Зображення різниці $A \setminus B$.

5. Доповнення.

Доповненням до множини A називається множина $\Omega \setminus A$ (позначають $\overline{A}$), тобто

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

Зображення доповнення $\overline{A}$.

Властивості операції доповнення:

1) $\overline{\varnothing} = \Omega$,

2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$,

3) $A \cup \overline{A} = \Omega$,

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (перший закон двоїстості),

5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (другий закон двоїстості).

6. Симетрична різниця.

Симетричною різницею множин A і B називається множина

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Зображення симетричної різниці $A \vartriangle B$.

Властивості симетричної різниці:

1) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$ (комутативність),

2) $A \vartriangle A = \varnothing$,

3) $A \vartriangle \varnothing = A$.

7. Прямий добуток.

Впорядкованою парою елементів a і b називається множина

$$(a,b)=\{a,\{a,b\}\}.$$

Елемент a називається першим елементом пари, а елемент b — другим. Впорядковані пари (a,b) і (c,d) рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні елементи $a=c$ і $b=d$:

$$(a,b)=(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a=c\, i\, b=d.$$

Зауважимо, що при $a \neq b$ маємо, що

$$(a,b)\neq(b,a).$$

Прямим добутком множин A і B називається множина відповідних пар, в яких перший елемент належить множині A, а другий — множині B (позначають $A\times B$), тобто

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,(a\in A)\, i\,(b\in B)\}.$$

Приклади прямого добутку:

1. Нехай

$$A=\{1,2,3\},\ B=\{0,1\}.$$

Тоді

$$A\times B=\{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}.$$

2. Нехай $A=B=\mathbb{R}$. Тоді прямий добуток $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ є множиною всіх впорядкованих пар дійсних чисел і позначається $\mathbb{R}^2$. Отже $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$. Відомо, що вибравши систему координат на площині, можна кожну точку площини задати впорядкованою парою чисел. Метод координат застосував у XVII ст. французький математик і філософ Рене Декарт, тому прямий добуток іноді називають декартовим.

Зауважимо, що для прямого добутку, взагалі кажучи,

$$A\times B\neq B\times A.$$

За аналогією з впорядкованою парою можна ввести поняття впорядкованої трійки (a, b, c) елементів множин $a\in A, b\in B, c\in C.$

За означенням впорядкована трійка

$$(a, b, c)=((a, b), c).$$

Дві впорядковані трійки (a, b, c) і (a_1, b_1, c_1) рівні тоді і тільки тоді, коли

$$a=a_1, \quad b=b_1, \quad c=c_1.$$

Множина всіх впорядкованих трійок елементів множин A, B, C називається прямим (декартовим) добутком цих множин і позначається $A\times B\times C$. Тобто

$$A\times B\times C=\{(a,b,c)\,|\,(a\in A)\, i\, (b\in B)\, i\, (c\in C)\}.$$

Зауважимо, що взагалі кажучи,

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C).$$

Відношення та функції

Нехай A, B — дві непорожні множини із універсальної множини Ω.

Відношенням між елементами множин A і B називається будь-яка підмножина ρ множини $A\times B$. Якщо впорядкована пара (x, y) є елементом ρ (тобто $(x, y)\in\rho$), то кажуть, що x та y знаходяться у відношенні ρ, і часто позначають це $x\rho y$. Якщо $A=B$, то відношення $\rho\subset A\times A$ називається відношенням на A.

Приклад. Відношення "$<$":

$$m\rho n\Leftrightarrow m<n$$

є відношенням на множині натуральних чисел.

Нехай $\rho \subset A \times B$ — відношення між елементами множин A і B.

Областю визначення відношення ρ називається множина перших елементів пар, що входять в дане відношення

$$\mathrm{dom}\,\rho = \{x \mid \exists y \ (x, y) \in \rho\}.$$

Областю значень відношення ρ називається множина других елементів пар, що входять в дане відношення

$$\mathrm{im}\,\rho = \{y \mid \exists x \ (x, y) \in \rho\}.$$

Приклад. Для відношення $\rho = "<"$ на множині натуральних чисел $\mathrm{dom}\,\rho = \mathbb{N}$, оскільки для довільного натурального числа n можна вказати більше натуральне число, наприклад $n < n+1$. А $\mathrm{im}\,\rho = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, оскільки для довільного натурального числа n, за винятком 1, можна вказати менше натуральне число.

Відношення f між елементами множин A і B називається функцією з A в B, якщо $\mathrm{dom}\, f = A$, $\mathrm{im}\, f \subset B$, а для кожного першого елемента пари відношення існує єдиний другий елемент. Тобто для всіх $x \in \mathrm{dom}\, f$ і $y_1, y_2 \in \mathrm{im}\, f$ з $(x, y_1) \in f$ та $(x, y_2) \in f$ випливає, що $y_1 = y_2$.

Функція f із A в B позначається символом $f : A \to B$. При цьому замість $(x, y) \in f$ пишемо $y = f(x)$ і називаємо y значенням функції f при значенні аргументу x.

Функцію $f : A \to B$ також називають відображенням множини A в множину B і значення $y = f(x)$ називають образом елемента x при відображенні f. При цьому пишуть $x \mapsto y$.

Якщо $f: A \to B$ функція з A в B, то множину $\operatorname{dom} f = A$ називають областю визначення функції f і позначають $D(f) = A$, а множину $\operatorname{im} f \subset B$ називають областю значень функції f і позначають $E(f) \subset B$.

В елементарній математиці функцією $f: A \to B$ називають закон відповідності між елементами множин A і B, що ставить у відповідність кожному елементу множини A рівно один елемент множини B.

Дві функції $f: A \to B$ та $f_1: A_1 \to B_1$ називаються рівними, якщо $A = A_1$, $B = B_1$ і для всіх $x \in A$ $f(x) = f_1(x)$.

Індикатори множин

Нехай Ω — універсальна множина. Для довільної множини $A \subset \Omega$ визначимо функцію $I_A(x): \Omega \to \mathbb{R}$ правилом:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Функція $I_A(x)$ називається індикатором множини A. Зауважимо, що

$$I_\varnothing(x) \equiv 0, \quad I_\Omega(x) \equiv 1.$$

Для індикаторів множин справедливі наступні властивості:

1. $\forall x \in \Omega \quad I_A(x) = I_B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$
2. $\forall x \in \Omega \quad I_A(x) \le I_B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B.$
3. $\forall x \in \Omega \quad I_A^2(x) = I_A(x).$
4. $\forall x \in \Omega \quad I_{A \cap B}(x) = I_A(x) I_B(x).$
5. $\forall x \in \Omega \quad I_{A \cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x) I_B(x).$

6. $\forall x \in \Omega \quad I_{\overline{A}}(x) = 1 - I_A(x).$

7. $\forall x \in \Omega \quad I_{A \setminus B}(x) = I_A(x)\big(1 - I_B(x)\big).$

8. $\forall x \in \Omega \quad I_{A \triangle B}(x) = \big|I_A(x) - I_B(x)\big|.$

9. $\forall x, y \in \Omega \quad I_{A \times B}(x) = I_A(x) I_B(y).$

Властивості 1-8 використовуються для доведення різноманітних тотожностей між множинами.

Приклад 1. Множина А складається з елементів $a = 4n + 2$, де $n \in \mathbb{N}$, множина B — із елементів $b = 3n,\ n \in \mathbb{N}$. Знайти $A \cap B$.

Розв’язання. Нехай $a = b$ — спільний елемент множин A і B. Тоді справедлива рівність

$$4n + 2 = 3n, \text{ де } n, m \in \mathbb{N}.$$

Звідки маємо

$$3n + n + 2 = 3m,$$

$$n + 2 = 3(m - n),$$

отже $n + 2$ має ділитися на 3 без остачі. Позначивши різницю $m - n$ через к, маємо

$$n + 2 = 3k,$$

$$n = 3k - 2.$$

Звідки

$$a = 4n + 2 = 4(3k - 2) + 2 = 12k - 6 = 6(2k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже

$$A\cap B=\{6,18,30,\ldots,6(2k-1),\ldots\}=\{12k-6\mid k\in\mathbb{N}\}.\quad\square$$

Приклад 2. Довести рівність $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (перший закон двоїстості).

Розв'язання.

I спосіб. Доведемо, що кожний елемент лівої частини рівності є елементом правої. Для довільного $x\in\overline{A\cup B}$ маємо

$$x\in\overline{A\cup B}\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow(x\notin A)\,i\,(x\notin B)\Rightarrow\left(x\in\overline{A}\right)i\left(x\in\overline{B}\right)\Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}.$$

Отже $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

З іншого боку, для довільного $y\in\overline{A}\cap\overline{B}$ маємо

$$y\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow\left(y\in\overline{A}\right)i\left(y\in\overline{B}\right)\Rightarrow(y\notin A)\,i\,(y\notin B)\Rightarrow y\notin(A\cup B)\Rightarrow y\in\overline{A\cup B}.$$

Отже $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$.

З отриманих двох включень випливає, що $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.\quad\square$

II спосіб. Доведемо рівність методом індикаторів. Для цього встановимо тотожність індикаторів лівої та правої частин. Маємо

$$I_{\overline{A\cup B}}(x)=1-I_{A\cup B}(x)=1-I_A(x)-I_B(x)+I_A(x)I_B(x),$$

$$I_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x)=I_{\overline{A}}(x)\cdot I_{\overline{B}}(x)=\left(1-I_A(x)\right)\left(1-I_B(x)\right)=1-I_A(x)-I_B(x)+I_A(x)I_B(x).$$

Праві частини рівностей однакові, отож

$$\forall x\in\Omega\quad I_{\overline{A\cup B}}(x)=I_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x),$$

тобто $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.\quad\square$

Приклад 3. Довести рівність множин

$$A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C).$$

Розв’язання.

І спосіб. Обчислимо індикатори лівої та правої частин рівності (аргументи x для скорочення записів не пишемо):

$$I_{A\backslash(B\backslash C)} = I_A\left(1 - I_{B\backslash C}\right) = I_A\left(1 - I_B\left(1 - I_C\right)\right) = I_A - I_A I_B + I_A I_B I_C.$$

$$I_{(A\backslash B)\cup(A\cap C)} = I_{A\backslash B} + I_{A\cap C} - I_{(A\backslash B)\cap(A\cap C)} = I_A\left(1 - I_B\right) + I_A I_C - I_A\left(1 - I_B\right) I_A I_C =$$

$$= I_A - I_A I_B + I_A I_C - I_A^2 I_C + I_A^2 I_B I_C = I_A - I_A I_B + I_A I_B I_C$$

в силу рівності $I_A^2 = I_A$.

Праві частини двох останніх рівностей однакові, отже

$$I_{A\backslash(B\backslash C)} \equiv I_{(A\backslash B)\cup(A\cap C)},$$

тобто $A \setminus \left(B \setminus C\right) = \left(A \setminus B\right) \cup \left(A \cap C\right)$. □

ІІ спосіб. Скористаємось відомими фактами алгебри множин. Маємо $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, отже

$A \setminus \left(B \setminus C\right) = A \cap \overline{\left(B \setminus C\right)} = A \cap \overline{B \cap \overline{C}} =$ (другий закон двоїстості) $=$

$= A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}\right) = A \cap \left(\overline{B} \cup C\right) =$ (дистрибутивний закон) $=$

$= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap C\right) = \left(A \setminus B\right) \cup \left(A \cap C\right)$. □

Завдання 1

Задати наступні множини через їх елементи:

1. $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad x^4 - 3x^3 + 5x^2 = 0\right\}$.

2. $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{N},\quad x^4 - 3x^3 - 4x^2 \le 0\right\}$.

3. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad \left(x^5-x^2\right)\sin 2\pi x=0,\quad -\pi<x<\pi\right\}.$

4. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad x^4-6x^3+5x^2\le 0\right\}.$

5. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad \sin\pi\sqrt{x}\cdot\left(x^2-3x+2\right)=0,\quad 0<x<4\pi\right\}.$

6. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad x^5\sin 3x=0\right\}.$

7. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad x+\dfrac{1}{x}\le 2,\quad x\ne 0\right\}.$

8. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad \dfrac{1}{27}<3^x\le 81\right\}.$

9. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad (x-2)^2\cos\dfrac{\pi x}{2}=0\right\}.$

10. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad \operatorname{tg}2x=1,\quad 0<x<2\pi\right\}.$

11. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad 2^{|x-1|}<7\right\}.$

12. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad 3^{|x+1|}<10\right\}.$

13. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad \operatorname{tg}2x=-1,\quad 0<x<2\pi\right\}.$

14. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad 2^{|x+1|+|x-1|}<3\right\}.$

15. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad (x-1)^3\cos\dfrac{\pi x}{6}=0\right\}.$

16. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad 2\le\log_2|x|\le 3\right\}.$

17. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad \log_3\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\le 1,\quad x\ne -1\right\}.$

18. $A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad |\sin 2\pi x|=1,\quad 0<x<2\pi\}.$

19. $A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad |\cos 5\pi x|=1,\quad -2\pi<x<2\pi\}.$

20. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad (x-2)^5\cos\dfrac{3\pi x}{2}=0\right\}.$

21. $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad 2^{|x|+|x-1|}<3\}.$

22. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad \log_2\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\le 2\right\}.$

23. $A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad \sin\pi\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^4-3x^3+2x^2\right)=0,\quad |x|<100\}.$

24. $A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{tg}|2x|=1,\quad -2\pi<x<2\pi\}.$

25. $A=\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad (x-3)^3\sin 4\pi x=0,\quad 0<x<2\pi\}.$

Знайти перетин множин $A\cap B$:

26. $A=\{x \mid x=4n+1, n\in\mathbb{N}\},\quad B=\{x \mid x=3n, n\in\mathbb{N}\}.$

27. $A=\{x \mid x=4n-1, n\in\mathbb{N}\},\quad B=\{x \mid x=3n, n\in\mathbb{N}\}.$

28. $A=\{x \mid x=4n, n\in\mathbb{N}\},\quad B=\{x \mid x=3n+1, n\in\mathbb{N}\}.$

29. $A=\{x \mid x=4n, n\in\mathbb{N}\},\quad B=\{x \mid x=3n-1, n\in\mathbb{N}\}.$

30. $A=\{x \mid x=4n+1, n\in\mathbb{N}\},\quad B=\{x \mid x=3n+1, n\in\mathbb{N}\}.$

Завдання 2

Довести рівності між множинами двома способами: методом двох включень та методом індикаторів:

1. $A\cup(A\cap B)=A=A\cap(A\cup B).$

2. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

3. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

5. $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$.

6. $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

7. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

8. $A\vartriangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

9. $A\vartriangle(B\vartriangle C)=(A\vartriangle B)\vartriangle C$.

10. $A\cap(B\vartriangle C)=(A\cap B)\vartriangle(A\cap C)$.

11. $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$.

12. $\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n},\quad n\in\mathbb{N}$.

13. $\overline{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\ldots\cup\overline{A_n},\quad n\in\mathbb{N}$.

14. $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{C}\right)$.

15. $\left(A\setminus\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\setminus B\right)=\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)$.

16. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

17. $(A\setminus B)\cup B=A \quad\Leftrightarrow\quad B\subset A$.

18. $A\cup B\subset C \quad\Leftrightarrow\quad A\subset C\ i\ B\subset C$.

19. $C\subset A\cap B \quad\Leftrightarrow\quad C\subset A\ i\ C\subset B$.

20. $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \subset \overline{A}.$

21. $A \cap B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A \subset \overline{B} \quad \Leftrightarrow \quad B \subset \overline{A}.$

22. $A \vartriangle (A \vartriangle B) = B.$

23. $A_1 \times B_1 \subset A \times B \quad \Leftrightarrow \quad A_1 \subset A,\ B_1 \subset B.$

24. $A \times B = C \times D \quad \Leftrightarrow \quad A = C,\ B = D.$

25. $(A \times B) \cap (A_1 \times B) = (A \cap A_1) \times B.$

26. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$

27. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$

28. $(A \times B) \subset (C \times D) \quad \Leftrightarrow \quad A \subset C,\ B \subset D \quad (A, B, C, D \neq \varnothing).$

29. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$

30. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$

2. МАТЕМАТИЧНА ІНДУКЦІЯ

Принцип математичної індукції:

Нехай M — така множина, що

1. $1 \in M$;
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \in M) \Rightarrow (n+1 \in M)$.

Тоді $\mathbb{N} \subset M$.

Цей принцип є аксіомою натуральних чисел, а також основою методу математичної індукції.

Метод математичної індукції:

1. Перевіряємо, що деяке твердження справджується для початкового номеру n_0 (база індукції).
2. Припускаємо, що це твердження вірне або для деякого номера n, або для всіх натуральних чисел, починаючи з n_0, які не перевищують n (припущення індукції).
3. Аналізуючи припущення індукції, доводимо, що наше твердження вірне й для наступного номера $n+1$ (індукційний крок).
4. Робимо висновок, що дане твердження вірне для всіх натуральних чисел, починаючи з n_0.

Приклад 1. Методом математичної індукції довести, що для всіх натуральних чисел має місце рівність

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Доведення.

1. Рівність вірна при $n=1$. Дійсно,

$$1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2+1).$$

2. Припустимо, що рівність виконується для деякого натурального n.

3. Доведемо рівність для $n+1$, тобто

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Дійсно,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right] = \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+7n+6\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Згідно з принципом математичної індукції рівність виконується для всіх натуральних чисел. □

Приклад 2. Довести методом математичної індукції, що число $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ ділиться на 19 для будь-якого $n\in\mathbb{N}$.

Доведення.

1. Твердження вірне при $n=1$. Дійсно,

$$5\cdot 2^{3\cdot 1-2}+3^{3\cdot 1-1} = 5\cdot 2+9 = 19.$$

2. Припустимо, що твердження виконується для деякого натурального n.

3. Доведемо твердження для $n+1$, тобто перевіримо, що вираз $5\cdot 2^{3(n+1)-2}+3^{3(n+1)-1}$ ділиться на 19. Дійсно,

$$5\cdot 2^{3(n+1)-2}+3^{3(n+1)-1}=5\cdot 2^{3n+1}+3^{3n+2}=8\left(5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}\right)+3^{3n+2}-8\cdot 3^{3n-1}=$$

$$=8\left(5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}\right)+19\cdot 3^{3n-1}$$

Перший доданок ділиться на 19 за припущенням, другий доданок теж ділиться на 19. Отже твердження має місце для $n+1$.

За принципом математичної індукції твердження виконується для всіх натуральних чисел. □

Приклад 3 (нерівність Бернуллі). Довести, що при $\alpha>-1$ та довільному $n\in\mathbb{N}$

$$(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha.$$

Доведення.

1. Нерівність справджується при $n=1$. Дійсно,

$$(1+\alpha)^1=1+\alpha.$$

2. Припустимо, що нерівність виконується для деякого натурального n.

3. Доведемо нерівність для $n+1$, тобто

$$(1+\alpha)^{n+1}\geq 1+(n+1)\alpha.$$

$$(1+\alpha)^{n+1}=(1+\alpha)(1+\alpha)^n\geq(1+\alpha)(1+n\alpha)=1+\alpha+n\alpha+n\alpha^2=$$

$$=1+(1+n)\alpha+n\alpha^2\geq 1+(1+n)\alpha.$$

Таким чином, нерівність доведена для всіх натуральних чисел. □

Завдання 1

Довести методом математичної індукції рівності:

1. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, \quad n\in\mathbb{N}.$

2. $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n\cdot(3n-1)=n^2\cdot(n+1), \quad n\in\mathbb{N}.$

3. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n\cdot(4n^2-1), \quad n\in\mathbb{N}.$

4. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n=\dfrac{1}{3}(n^3-n+6), \quad n\geq 2.$

5. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n\in\mathbb{N}.$

6. $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1, \quad n\in\mathbb{N}.$

7. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$

8. $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$

9. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(3k-1)\cdot(3k+2)}=\dfrac{n}{2(3n+2)}, \quad n\in\mathbb{N}.$

10. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(3k+1)\cdot(3k+4)}=\dfrac{n}{4(3n+4)}, \quad n\in\mathbb{N}.$

11. $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2, \quad n\in\mathbb{N}.$

12. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}, \quad n\in\mathbb{N}.$

13. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2}, \quad n\in\mathbb{N}.$

14. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1,\quad n\in\mathbb{N}.$

15. $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n\cdot(3n+1)=n\cdot(n+1)^2,\quad n\in\mathbb{N}.$

16. $\dfrac{1}{2\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 12}+\ldots+\dfrac{1}{(5n-3)\cdot(5n+2)}=\dfrac{n}{10n+4},\quad n\in\mathbb{N}.$

17. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},\quad n\in\mathbb{N}.$

18. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}=1-\dfrac{1}{(n+1)^2},\quad n\in\mathbb{N}.$

19. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2},\quad n\in\mathbb{N}.$

20. $1+3+6+10+\ldots+\dfrac{(n-1)n}{2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6},\quad n\in\mathbb{N}.$

21. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n},\quad n\in\mathbb{N}.$

22. $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!},\quad n\in\mathbb{N}.$

23. $1\cdot 3+2\cdot 5+\ldots+n\cdot(2n+1)=\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{3},\quad n\in\mathbb{N}.$

24. $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n,\quad n\in\mathbb{N}.$

25. $4\cdot 2+7\cdot 2^3+\ldots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}=n\cdot 2^{2n+1},\quad n\in\mathbb{N}.$

26. $1+6+\ldots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3),\quad n\in\mathbb{N}.$

27. $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n},\quad n\in\mathbb{N}.$

28. $\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+1)}{n+2},\quad n\in\mathbb{N}.$

29. $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2},\quad n\in\mathbb{N}.$

30. $\frac{1\cdot 2^1}{3!}+\frac{2\cdot 2^2}{4!}+\ldots+\frac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!},\quad n\in\mathbb{N}.$

Завдання 2

Довести методом математичної індукції, що для всіх натуральних n

1. n^5-5n^3+4n ділиться на 15.

2. 5^n+2^{n+1} ділиться на 3.

3. $2^{4n+1}-2$ ділиться на 30.

4. $2n^3+3n^2+7n$ ділиться на 6.

5. n^5-n ділиться на 5.

6. n^3+35n ділиться на 6.

7. $7^{2n}-1$ ділиться на 24.

8. n^3+5n ділиться на 6.

9. 13^n+5 ділиться на 6.

10. 15^n+6 ділиться на 7.

11. 9^n+3 ділиться на 4.

12. 7^n+3n-1 ділиться на 9.

13. $5^n+2\cdot 3^n+5$ ділиться на 4.

14. $5^n - 3^n + 2n$ ділиться на 4.

15. $7^n + 5$ ділиться на 6.

16. $3 \cdot 3^n + 2n^2 - 3$ ділиться на 8.

17. $7^n + 12n + 17$ ділиться на 18.

18. $2^{2n+1} + 1$ ділиться на 3.

19. $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9.

20. $10^{n+2} + 18n + 8$ ділиться на 27.

21. $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ ділиться на 11.

22. $n^3 + 11n$ ділиться на 6.

23. $7^n - 6n + 8$ ділиться на 9.

24. $6^n + 20n + 24$ ділиться на 25.

25. $3^{2n+2} - 8n - 9$ ділиться на 16.

26. $8^n + 7n - 1$ ділиться на 7.

27. $7^n - 4^n$ ділиться на 3.

28. $n^3 + 2 \cdot 3^n - n$ ділиться на 6.

29. $7^n - 3 \cdot 5^n + 8$ ділиться на 6.

30. $5^n - 4^n + 4 \cdot 3^n - 1$ ділиться на 4.

Завдання 3

Довести методом математичної індукції нерівності:

1. $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! \geq \left((n+1)!\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

2. $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

3. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n \geq 2.$

4. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

6. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geq 2.$

7. $(2n)! < 2^{2n} (n!)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$

8. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

9. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

10. $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$

11. $3^n > 2^n + 3n, \quad n \geq 3.$

12. $\sum_{k=n+1}^{3n+1} \frac{1}{k} > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$

13. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

14. $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

15. $4^n > 3^n + 2^n, \quad n \geq 2.$

16. $n! > 2^n, \quad n \geq 4.$

17. $3^n + 4^n \leq 5^n, \quad n \geq 2.$

18. $1 + (n+1) \cdot 2^n > 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

19. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

20. $3^n - 2^n \geq n, \quad n \in \mathbb{N}.$

21. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right), \quad n \geq 2.$

22. $n^{n+1} > (n+1)^n, \quad n \geq 3.$

23. $(1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$

24. $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$

25. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^n+1} < 1 - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

26. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}, \quad n \geq 2.$

27. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}, \quad n \geq 2.$

28. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} > n, \quad n \geq 2.$

29. $\sum\limits_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{2k+1} < \frac{n}{2}, \quad n \geq 2.$

30. $5^n + 12^n \leq 13^n, \quad n \geq 2.$

3. БІНОМ НЬЮТОНА

Факторіалом натурального числа n називається добуток

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

За означенням приймають, що $0! = 1$.

Теорема 1. Кількість усіх k-елементних підмножин множини з n елементів (кількість комбінацій з n елементів по k), яка позначається C_n^k, дорівнює

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Теорема 2 (біном Ньютона). Для будь-яких дійсних чисел a і b та для довільного натурального числа n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Зауважимо, що також

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}.$$

Числа C_n^k називаються біноміальними коефіцієнтами.

Властивості біноміальних коефіцієнтів:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Друга властивість дозволяє записати біноміальні коефіцієнти у вигляді так званого трикутника Паскаля, де в n-ому рядку стоять коефіцієнти розкладу $(a+b)^n$. Кожний коефіцієнт за винятком крайніх, які рівні одиниці, дорівнює сумі коефіцієнтів над ним з попереднього рядка.

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

Приклад 1. Розв’язати рівняння

$$C_{x+1}^{x-1} + C_x^{x-2} = 9x + 10.$$

Розв’язання.

$$\frac{(x+1)!}{(x-1)!2!} + \frac{x!}{(x-2)!2!} = 9x + 10,$$

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 9x + 10,$$

$$x^2 + x + x^2 - x = 18x + 20,$$

$$2x^2 - 18x - 20 = 0,$$

$$x^2 - 9x - 10 = 0.$$

Останнє рівняння має два розв’язки, а саме $x = -1$ та $x = 10$. Проте розв’язок $x = -1$ є стороннім.

Відповідь: $x = 10$. □

Приклад 2. Довести, що

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Доведення.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n. \qquad \square$$

Приклад 3. Довести, що

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

Доведення.

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = \sum_{k=0}^{n} k\,C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} n\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} = n\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i = n2^{n-1}. \qquad \square$$

Завдання 1

1. Розв’язати рівняння

$$C_{x+2}^4 = x^2 - 1.$$

2. Знайти член розкладу

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^{10},$$

що не містить x.

3. Знайти член розкладу

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{8},$$

що не містить x.

4. Розв’язати рівняння

$$\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}.$$

5. Знайти члени розкладу

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^5,$$

які є цілими числами.

6. Знайти члени розкладу

$$\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt{2}\right)^8,$$

які є цілими числами.

7. Довести, що $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \dfrac{n-1}{2}$ та $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \dfrac{n-1}{2}$.

8. Скільки раціональних членів містить розклад

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{100}?$$

9. Знайти число n, якщо відомо, що в розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^5 та x^{12} рівні.

10. Довести, що

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

11. Довести, що

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} k C_n^k = 0.$$

12.Розв’язати рівняння

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$$

13.Розв’язати рівняння

$$C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1).$$

14.Довести, що при довільному натуральному k сума

$$C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$$

є точним квадратом.

15.Розв’язати рівняння

$$5C_x^3 = C_{x+2}^4.$$

16.Розв’язати рівняння

$$C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1).$$

17.Довести, що

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}, \quad n \geq 2.$$

18.Розв’язати рівняння

$$C_x^3 - C_x^2 = x - 1.$$

19.Знайти кількість раціональних членів в розкладі

$$\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20},$$

не виписуючи ірраціональних членів.

20.Розв'язати рівняння

$$C_x^4 + \frac{1}{3} C_x^2 = C_x^3.$$

21.Розв'язати рівняння

$$6C_x^4 = C_x^2 \cdot C_{x-1}^3.$$

22.Довести, що

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\left(n-k\right) C_n^k = n\left(n-1\right) 2^{n-2}, \quad n \ge 2.$$

23.Розв'язати рівняння

$$7C_{x+1}^3 \cdot C_x^2 = 8C_{x+1}^2 \cdot C_x^3.$$

24.Довести, що

$$n\left(C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1}\right) = C_{2n}^{n+1}.$$

25.Знайти член розкладу

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n,$$

який містить x у першому степені, якщо сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 512.

26.Довести, що

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

27.Довести, що

$$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}.$$

28.Довести, що

$$C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}.$$

29.Обчислити

$$\frac{C_{21}^4}{C_9^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3}.$$

30.Обчислити

$$\frac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}.$$

4. ТОЧНІ ВЕРХНЯ І НИЖНЯ МЕЖІ ЧИСЛОВИХ МНОЖИН

Розглянемо числову множину $X \in \mathbb{R}$. Якщо існує $a \in \mathbb{R}$ таке, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ має місце нерівність $x \le a$, то множина X називається обмеженою зверху, а число a — верхньою межею множини X. Аналогічно, якщо $b \in \mathbb{R}$ таке, що для будь-якого $x \in X$ має місце нерівність $x \ge b$, то множина X називається обмеженою знизу, а число b — нижня межа множини X.

Число $A \in \mathbb{R}$, яке є найменшим серед усіх верхніх меж множини X, називається точною верхньою межею множини X: $A = \sup X$. Число $B \in \mathbb{R}$, яке є найбільшим серед усіх нижніх меж множини X, називається точною нижньою межею множини X: $B = \inf X$.

Теорема (Про існування точних меж) Непорожня обмежена зверху(знизу) множина дійсних чисел має точну верхню (нижню) межу.

Теорема (Критерій існування точних меж) Число $A = \sup X$ тоді і тільки тоді, коли:

1) A є верхня межа X, тобто $\forall x \in X: \quad x \le A$;

2) для довільного числа $a < A$ існує $x' \in X$ таке, що $x' > a$.

Для того, щоб число $B = \inf X$ необхідно і достатньо, щоб:

1) B є нижня межа X, тобто $\forall x \in X: \quad x \ge B$;

2) для довільного числа $b > B$ існує $x' \in X$ таке, що $x' < b$.

Приклад 1. Знайти точні межі множини

$$X = \left\{ x_n : \ x_n = n^2 + \frac{4}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Зауважимо, що для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність

$$x_{n+1}-x_n=(n+1)^2+\frac{4}{(n+1)^2}-n^2-\frac{4}{n^2}=(2n+1)\frac{(n+1)^2n^2-4}{(n+1)^2n^2}\geq 0.$$

Тобто

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n<x_{n+1}.$$

З іншої сторони, для

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n=n^2+\frac{4}{n^2}>n^2>n.$$

Таким чином, множина X обмежена знизу числом $x_1=5,$ яке співпадає з $\inf X=5$ і необмежена зверху, тобто $\sup X=+\infty.$

Приклад 2. Знайти точні межі множини

$$X=\left\{x_n:\ x_n=1+2^{(-1)^n n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Для всіх парних значень $n=2k$ справджуються оцінки

$$x_{2k}=1+2^{2k}>2^{2k}>2k.$$

Таким чином, можна стверджувати, що множина X необмежена зверху, отже $\sup X=+\infty.$

Для всіх непарних значень $n=2k-1$ виконується нерівність

$$x_{2k}=1+\frac{1}{2^{2k-1}}>1.$$

Покажемо, що $\inf X=1.$ Згідно з критерієм існування точної нижньої межі, для цього досить показати, що

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n\in\mathbb{N}\quad x_n<1+\varepsilon.$$

Дійсно, замість x_n можна взяти довільний елемент множини з непарним номером $n=2k-1$ такий, що $x_n<1+\varepsilon$ і $\varepsilon>\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{2k-1}}$. Знайдемо k.

$$\log_2\varepsilon>-\log_2 2^{2k-1}\Rightarrow-\log_2\varepsilon<\log_2 2^{2k-1}\Rightarrow 2k-1>-\log_2\varepsilon\Rightarrow k>\frac{1+\log_2\varepsilon}{2}.$$

Таким чином, $\inf X=\inf x_n=1$.

Завдання 1

Знайти точні межі множини $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1. $x_n=(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$.
2. $x_n=n^2-9n-100$.
3. $x_n=n+\dfrac{100}{n}$.
4. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.
5. $x_n=(-1)^n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$.
6. $x_n=1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$.
7. $x_n=1+2\cdot(-1)^{n-1}+3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
8. $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$.
9. $x_n=\dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{\pi n}{4}$.
10. $x_n=n^{(-1)^n}$.
11. $x_n=\dfrac{n-1}{n+2}\cos^2\dfrac{\pi n}{2}$.

12. $x_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{2}{n}\right).$

13. $x_n = (-1)^{n-1} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right).$

14. $x_n = n^2 - 2n + 3.$

15. $x_n = \dfrac{n}{n+1} \sin \dfrac{\pi n}{2}.$

16. $x_n = \dfrac{n}{n+1} \cos \pi n.$

17. $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}.$

18. $x_n = n + \dfrac{25}{n}.$

19. $x_n = (n!)^{(-1)^n}.$

20. $x_{mn} = \dfrac{mn}{4m^2 + n^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$

21. $x_n = 3 - \dfrac{1}{n} \sin^2 \dfrac{\pi n}{3}.$

22. $x_n = \dfrac{3+n}{2n} \sin \dfrac{\pi n}{2}.$

23. $x_n = \dfrac{5-n}{n} \cos \dfrac{\pi n}{2}.$

24. $x_{mn} = \dfrac{m}{|m| + n}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$

25. $x_n = \dfrac{n+2}{2n+1} \sin \dfrac{\pi n}{3}.$

26. $x_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

27. $x_n = \frac{n+1}{n+2}\sin\frac{\pi n}{2}.$

28. $x_n = \frac{8m}{n} + \frac{n}{2m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$

29. $x_n = \frac{n}{3n+5}\operatorname{sgn}(\sin n).$

30. $x_n = \frac{n}{2n+3}\operatorname{sgn}(\sin n).$

5. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Відображення множини натуральних чисел у множину дійсних чисел називається числовою послідовністю, тобто $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, при цьому пишуть $f(n)=x_n$. Вживають також позначення: $\{x_1,x_2,\ldots\}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_n:n\geq 1\}$.

Число x_n називають членом послідовності, а n — номером цього члена. Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо множина $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ обмежена. Тобто $\exists M>0$ таке, що

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |x_n|\leq M .$$

Послідовність x_n необмежена, якщо множина $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ необмежена, або

$$\forall M>0 \quad \exists n\in\mathbb{N} \quad |x_n|>M.$$

<u>Означення</u> (границі послідовності за Коші)

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad \forall n>n_0 \quad |x_n-a|<\varepsilon.$$

При цьому записують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ або $x_n\to a$ при $n\to\infty$.

З геометричної точки зору це означає, що довільний ε-окіл точки a

$$B(\varepsilon,a)=\{x:|x-a|<\varepsilon\}$$

містить безліч членів послідовності, а зовні цього околу лежить хіба що скінченне число членів послідовності.

Послідовність, яка має скінченну границю називається збіжною, і розбіжною в протилежному випадку.

<u>Означення</u> (фундаментальної послідовності).

Послідовність $\{x_n\}$ називається фундаментальною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| x_n - x_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Теорема. (Критерій Коші збіжності послідовності).

Для того, щоб послідовність була збіжною необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Зауваження. При розв'язанні наступних задач часто буде використовуватися поняття цілої частини числа x, що позначається $[x] = E(x)$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x.

Приклад1. Користуючись означенням границі послідовності за Коші довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^n}{3^n - 2} = 5.$

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо модуль різниці між n-им членом послідовності і числом $a = 5$:

$$\left| \frac{5\cdot 3^n}{3^n - 2} - 5 \right| = \frac{10}{3^n - 2}.$$

Згідно з означенням границі послідовності ми повинні вказати номер n_0 (залежний від ε) такий, що $\forall n > n_0$ виконується нерівність

$$\frac{10}{3^n - 2} < \varepsilon \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{10}{\varepsilon} + 2\right) < n.$$

Для того, щоб вказати номер n_0 досить взяти цілу частину числа $\log_3\left(\dfrac{10}{\varepsilon} + 2\right)$, тобто $n_0 = \left[\log_3\left(\dfrac{10}{\varepsilon} + 2\right)\right]$. Дійсно, якщо $n > n_0$, то

$$n \geq \left[\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon} + 2\right)\right] + 1 > \log_3\left(\frac{10}{\varepsilon} + 2\right).$$

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0 = \left[\log_3 \left(\frac{10}{\varepsilon} + 2 \right) \right]$ такий, що для всіх номерів $n > n_0$ виконується нерівність $\left| \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 5 \right| < \varepsilon.$

Приклад 2. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності $\{x_n\}$, де $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2}.$

Згідно з критерієм Коші збіжності послідовності досить показати, що послідовність є фундаментальною. Оцінимо $\left| x_n - x_{n+p} \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{k^2}.$

Оскільки

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

то

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) < \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Таким чином для довільних $n, p \in \mathbb{N}$ маємо $\left| x_n - x_{n+p} \right| < \frac{1}{n}.$

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і за n_0 виберемо цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}$, тобто $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$. Тоді для всіх

$$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

маємо $\frac{1}{n} < \varepsilon.$ Отже для довільного $n > n_0$ і довільного $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|x_n - x_{n+p}| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Приклад 3. Користуючись критерієм Коші довести, що послідовність $\{x_n\}$, де $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ є розбіжною.

Доведемо, що послідовність не є фундаментальною.

Розглянемо

$$|x_n - x_{n+p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} \geq \frac{p}{\sqrt{n+p}}.$$

Кожен з доданків оцінено найменшим за величиною останнім доданком.

Покладемо $n = p \in \mathbb{N}$, тоді

$$|x_n - x_{2n}| \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Остання оцінка показує, що при $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ яке б не було $n_0 \in \mathbb{N}$, для всіх $n > n_0$ і виконується нерівність $|x_n - x_{2n}| \geq \varepsilon,$ тобто послідовність не є фундаментальною, а отже є розбіжною.

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою (НМ), якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою (НВ), якщо

$$\forall M > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad |x_n| > M.$$

При цьому записують

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

При розв'язуванні задач використовуються наступні властивості НМ, НВ, а також збіжних послідовностей:

1. Алгебраїчна сума скінченного числа НМ послідовностей є НМ послідовність
2. Добутком НМ послідовності на обмежену послідовність є НМ послідовність
3. Якщо $\{x_n\}$ — НВ (НМ) послідовність, а також $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ є НМ(НВ) послідовністю. Зокрема, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ тощо.
4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b;$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$

   c) якщо $b \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Наведемо також три теореми.

Теорема 1 (про проміжну послідовність). Якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

і, починаючи з певного номера, виконується нерівність $x_n \le z_n \le y_n$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Теорема (Штольца). Якщо послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняють умовам:

1) $y_n < y_{n+1}, \quad n \ge 1;$
2) $y_n \to \infty, n \to \infty;$
3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ (значення a може дорівнювати ∞).

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a.$

Теорема (друга важлива границя).

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

де e — це деяке число, яке наближено дорівнює

$$e \approx 2,718281828459045\ldots$$

Приклад 5 . Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}.$$

Послідовність $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена, а оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = 0,$ то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}=0.$$

Приклад 6. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, де

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Запишемо оцінку

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}}=1.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,$$

то згідно з теоремою про проміжну послідовність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1.$

Приклад 7. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Застосуємо теорему Штольца, зауваживши, що $\left\{y_n=n^{m+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно зростає для $m\in\mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty.$ При цьому

$$x_n-x_{n-1}=\left(1^m+2^m+\ldots+n^m\right)-\left(1^m+2^m+\ldots+(n-1)^m\right)=n^m$$

і

$$y_n - y_{n-1} = n^{m+1} - (n-1)^{m+1} =$$
$$= \left(n-(n-1)\right)\cdot\left(n^m + n^{m-1}(n-1) + \ldots + (n-1)^m\right) =$$
$$= n^m\left(1 + \frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right).$$

За теоремою Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{m+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Приклад 8. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}, \text{ де } \alpha > 0, \ a > 1.$$

Оскільки α-фіксоване, то існує натуральне число k таке, що $k-1 \le \alpha < k$. Розглянемо послідовність $a^{\frac{n}{k}}$ і застосуємо для неї нерівність Бернуллі.

$$a^{\frac{n}{k}} = \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n = (1+x)^n \ge 1 + nx,$$

де $x = \sqrt[k]{a} - 1 > 0$. Звідси $a^n > (nx)^k$. Тоді

$$\frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^{k-1}}{a^n} < \frac{n^{k-1}}{n^k x^k} = \frac{1}{n\cdot x^k}.$$

Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Розв’яжемо нерівність $\frac{1}{n\cdot x^k} < \varepsilon$ відносно n. Одержимо $n > \frac{1}{\varepsilon\cdot x^k}$. Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon \cdot x^k} \right] \quad \forall n > n_0 \quad \frac{n^\alpha}{a^n} < \varepsilon.$$

За означенням границі послідовності це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Приклад 9. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}, \text{ де } a > 1.$$

Для фіксованого $a > 1$ існує натуральне число k таке, що $k \le a < k + 1$. Тоді

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n}, \text{ де } n > k.$$

Звідси одержуємо, що

$$\frac{a^n}{n!} < \frac{a^k}{k!} \cdot \left(\frac{a}{k+1} \right)^{n-k}.$$

Оскільки $\dfrac{a}{k+1} < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{k+1} \right)^{n-k} = 0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

Приклад 10. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $\dfrac{\ln n}{n} < \varepsilon$ еквівалентна нерівності $\dfrac{n}{\left(e^{\varepsilon}\right)^{n}} < 1,$ що виконується для досить великих номерів n, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\left(e^{\varepsilon}\right)^{n}} = 0,$ як показано в прикладі 8.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0.$

Приклад 11. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$

Розглянемо n чисел:

$$a_1 = a_2 = \sqrt{n}, \quad a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 1.$$

Запишемо для них нерівність Коші

$$\sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \le \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + 1 + \ldots + 1}{n}.$$

Звідси одержимо, що

$$0 < \sqrt[n]{n} \le \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} \le \frac{2\sqrt{n} + n}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

За теоремою про проміжну послідовність одержимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Завдання 1

Користуючись означенням границі послідовності за Коші довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

1. $x_n = \dfrac{3n^2 - 2}{2n^2 - 3}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$

2. $x_n = \dfrac{5n + 4}{2n + 3}, \quad a = \dfrac{5}{2}.$

3. $x_n = \dfrac{4n^2 - 1}{2n^2 + 1}, \quad a = 2.$

4. $x_n = \dfrac{2n - 5}{3n + 1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

5. $x_n = \dfrac{7n^3 - 1}{3n^3 + 1}, \quad a = \dfrac{7}{3}.$

6. $x_n = \dfrac{9 - n^3}{2n^3 + 1}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

7. $x_n = \dfrac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2}, \quad a = \dfrac{4}{3}.$

8. $x_n = \dfrac{4n^2 - 3}{2n^2 + 1}, \quad a = 2.$

9. $x_n = \dfrac{1 - 2n^2}{4n^2 + 2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

10. $x_n = \dfrac{3n^3 - 1}{2n^3 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$

11. $x_n = \dfrac{n^2 + 1}{1 - 2n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

12. $x_n = \dfrac{2n^3 + 1}{3n^3 - 5}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

13. $x_n = \dfrac{1 - 2n^2}{n^2 + 3}, \quad a = -2.$

14. $x_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2}, \quad a = -3.$

15. $x_n = \dfrac{n^2}{3n^2-1}, \quad a = \dfrac{1}{3}.$

16. $x_n = \dfrac{3n^3}{n^3-1}, \quad a = 3.$

17. $x_n = \dfrac{4+2n^2}{1-3n^2}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$

18. $x_n = \dfrac{5n^3+15}{6-2n^3}, \quad a = -\dfrac{5}{2}.$

19. $x_n = \dfrac{3-n^2}{1+2n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

20. $x_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$

21. $x_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2+1}, \quad a = \dfrac{3}{5}.$

22. $x_n = \dfrac{4n^3-3}{n^3+1}, \quad a = 4.$

23. $x_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

24. $x_n = \dfrac{5n^2+1}{10n^2-3}, \quad a = \dfrac{1}{2}.$

25. $x_n = \dfrac{2-2n^3}{3+4n^3}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

26. $x_n = \dfrac{3-4n^2}{2-3n^2}, \quad a = \dfrac{4}{3}.$

27. $x_n = \dfrac{1+3n^2}{6-2n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{2}.$

28. $x_n = \dfrac{2n^3+3}{3n^3+5}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

29. $x_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \dfrac{3}{4}.$

30. $x_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5}.$

Завдання 2

Користуючись критерієм Коші збіжності послідовності, довести збіжність наступних послідовностей $\{x_n\}$, або користуючись запереченням критерію Коші збіжності послідовності, довести розбіжність послідовності $\{x_n\}$.

1. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}.$

2. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k!)}{k(k+1)}.$

3. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{2^k}.$

4. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k}{2^k}.$

5. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}.$

6. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k q^k$, де $|q| < 1,\ |a_k| \le c.$

7. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

8. $x_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$.

9. $x_n = 0,2^{(-1)^n n}$.

10. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

11. $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

12. $x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}$.

13. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

14. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

15. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k(k+2)}$.

16. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{k(k+3)}$.

17. $x_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

18. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

19. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

20. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}$.

21. $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k$, де $|q| > 1$, $|a_k| > M$.

22. $e^{(-1)^n n}$.

23. $x_n = \sum_{k=2n}^{3n} \frac{1}{k}$.

24. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

25. $x_n = \frac{n\cos(\pi n) - 1}{2n}$.

26. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{arctg} k$.

27. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \arccos \frac{1}{k^2}$.

28. $x_n = \sin n$.

29. $x_n = \cos n$.

30. $x_n = \operatorname{tg} n$.

Завдання 3

Знайти границю:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)!-n(n+1)!}{(n+3)!}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{\sqrt{4n^4+3}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n.\right)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+4+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}-n\right)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\cdot(n-1)}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\left(2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-n}\right)}{1+3+\ldots+(2n-1)}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^n}}.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n+1}}.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+(2n-1)+2n}{\sqrt{n^2+3}}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+\ldots+(2n-1)}.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n)!+(3n-1)!}{(3n-1)!\cdot(3n-2)}.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{1+2+\ldots+n}-\dfrac{2}{3}\right).$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\ldots+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}\right).$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+5+\ldots+2n+(2n+3)}{n(n+3)}.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n-n^2+3}.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+\ldots+(5n-3)}.$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{16}+\ldots+\dfrac{1+2^n}{4^n}\right)$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+(2n-1)}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+5+\ldots+(4n-3)}{n+1}-\dfrac{4n+1}{2}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{\sqrt[3]{n^6+2n^4+2}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n)!-(2n+1)!}{n(2n-1)!+(2n)!}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!-(n+2)!}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{10}+\dfrac{29}{100}+\ldots+\dfrac{2^n+5^n}{10^n}\right)$.

Завдання 4

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[8]{9x^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt{9+n^2}}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}-\sqrt{n-2}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{\left(n+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt{5-n+n^2}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt{81n^8-1}}{\left(n+4\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-5}}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+4}-\sqrt{n-6}}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{\left(n-7\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-n+1}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{\left(n-\sqrt[3]{n}\right)\sqrt{11+n^2}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$.

Завдання 5

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2-4\right)}-\sqrt{n^4-9}\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-\sqrt{n\left(n^2-5\right)}}{\sqrt{n}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n\left(n^4-1\right)}-\sqrt{n^5-8}\right)$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n\left(n^5+9\right)}-\sqrt{\left(n^4-1\right)\left(n^2+5\right)}}{n}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\left(n^3+1\right)\left(n^2+3\right)}-\sqrt{n\left(n^4+2\right)}}{2\sqrt{n}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{\left(n^2-1\right)\left(n^2-2\right)}\right)$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\left(n^5+1\right)\left(n^2-1\right)}-n\sqrt{n\left(n^4+1\right)}}{n}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\left(n^4+1\right)\left(n^2-1\right)}-n\sqrt{n^6-1}}{n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt[3]{n^2\left(n^6+4\right)}-\sqrt[3]{n^8-1}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n+1)}\right)$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)$.

Завдання 6

Знайти границю:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5+\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}}\right)^{2n+1}$.

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+2n^3}{2n^3-1}\right)^{3n^3+1}$.

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+1}{5n^2-3}\right)^{3n^2}$.

4. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-2n}{3-2n}\right)^{5n-3}$.

5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n-2}\right)^{2n+1}$.

6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{3n^2+1}$.

7. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}+3}\right)^{\sqrt{n}+1}$.

8. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5+3n^2}\right)^{2n^2}$.

9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-n\sqrt{n}}{2-n\sqrt{n}}\right)^{n^2+5}$.

10. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-n^3}{3-n^3}\right)^{n^2-1}$.

11. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3-1}{5n^3+2}\right)^{3n^2+1}$.

12. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-n^2}{5-n^2}\right)^{2n^2-3}$.

13. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n-1}$.

14. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7-3n}{2-3n}\right)^{2n+1}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\sqrt{n}+3}{5+n\sqrt{n}}\right)^{n^2+1}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1}\right)^{2\sqrt{n}+3}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-2n}{3-2n}\right)^{\sqrt{n}+100}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2+n}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-2n}{5-2n}\right)^{7n}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+7}\right)^{2\sqrt{n}+1}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n\sqrt{n}}{2-n\sqrt{n}}\right)^{2n+7}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{3n^2+2}\right)^{5n^2}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2+2n+7}\right)^{8n+1}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[3]{n}+3}{\sqrt[3]{n}+5}\right)^{\sqrt{2n}+1}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^5+3n}{n^5+n^2+7}\right)^{3n^2+2}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+8}{n+1}\right)^{3n+\sqrt{n}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2\sqrt{n}+1}{3n^2\sqrt{n}+n}\right)^{n\sqrt{n}+3n}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+5n}{2n^3+10}\right)^{7n^2+1}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4-n^2}{n^4+n^2}\right)^{3n^2+n}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+3n^3}{3n^3+1}\right)^{5n^3+n}$.

Завдання 7

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+3^n}{2^n-a^n}$, де $0<a<2$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^n+7^n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+7^n}{5^n+2\cdot a^n}$, де $5<a<7$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+2^n}{a^n-3^n}$, де $a>3$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n-1}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2n}+3^{2n}}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+100}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!+(n+1)!}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+n^2}.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2^n+3^n}.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n+5}.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n^3}.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+n^3}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!+5}.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n^2]{n^2+1}.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+2^n}{3\cdot a^n+5^n}$, де $2<a<5$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2(n+2)!+(n+1)!}.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)!}}{3n^4}.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2n^2+1}.$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + 3^n}{a^n - 5^n}$, де $3 < a < 5$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 10}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n \cdot 7^n + 3^n + 1}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{6^n + 7^n + 8^n}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{5^n + n^2 + 6^n}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n^4}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 + \ln n}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n! + 3^n}$.

6. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Дійсне число a називається граничною точкою множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in A \setminus \{a\} \quad |y - a| < \varepsilon.$$

Кажуть, що $+\infty$ є граничною точкою множини A, якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists y \in A \quad y > C.$$

Кажуть, що $-\infty$ є граничною точкою множини A, якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists y \in A \quad y < C.$$

Нехай $\forall \varepsilon > 0$, а $x \in \mathbb{R}$. Інтервал $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ називається ε-околом точки x і позначається $U(x, \varepsilon)$. Множина

$$\dot{U}(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$$

називається проколеним ε-околом точки x.

Надалі будемо припускати, що точка a є граничною точкою області визначення D_f функції f.

Означення (Коші). Число $A \in \mathbb{R}$ називають границею функції f в точці a, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \dot{U}(a, \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означення (Гейне). Число $A \in \mathbb{R}$ називають границею функції f в точці a, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, що задовольняє умовам

1. $\forall n \geq 1 \quad x_n \in D_f, \quad x_n \neq a,$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a,$

виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ або $f(x)\to A,\ x\to a.$

Ці означення рівносильні. Означенням границі функції за Гейне зручно користуватись у тому випадку, коли потрібно довести, що функція не має границі в точці. Для цього досить довести, що існують дві послідовності $\{x_n'\}$ та $\{x_n''\}$, які задовольняють умовам означення, але відповідні послідовності значень функції $\{f(x_n')\}$ та $\{f(x_n'')\}$ не мають однакових границь.

Кажуть, що

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

якщо

$$\forall C\in\mathbb{R}\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in D_f\cap\dot{U}(a,\delta)\quad f(x)>C,$$

та

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

якщо

$$\forall C\in\mathbb{R}\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in D_f\cap\dot{U}(a,\delta)\quad f(x)<C.$$

Число $A\in\mathbb{R}$ називають границею функції f при $x\to+\infty$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists C\in\mathbb{R}\quad \forall x\in D_f\cap(C;+\infty)\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A.$

Число $A\in\mathbb{R}$ називають границею функції f при $x\to-\infty$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists C\in\mathbb{R}\quad \forall x\in D_f\cap(-\infty;C)\quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$

Всі властивості границь послідовностей легко переносяться на границі функцій в точці.

Запишемо дві важливі границі, які часто використовують при обчисленні інших границь функцій:

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$ — перша визначна (важлива) границя;

II. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ — друга визначна (важлива) границя.

Введемо поняття односторонніх границь.

Число $A\in\mathbb{R}$ називають границею справа функції f в точці a, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\quad \forall x\in D_f\cap(a,a+\delta)\quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a+0).$

Число $A\in\mathbb{R}$ називають границею зліва функції f в точці a, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\quad \forall x\in D_f\cap(a-\delta;a)\quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} f(x)=f(a-0).$

Для того, щоб $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=A.$$

Функція f називається нескінченно малою (НМ) при $x\to a$ (або в точці a), якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=0.$$

Функція f називається нескінченно великою (НВ) при $x \to a$ (або в точці a), якщо

$$\forall C > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \dot{U}(a, \delta) \quad |f(x)| > C.$$

Властивості нескінченно малих функцій:

1. Сума скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.
2. Добуток скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.
3. Добуток нескінченно малої функції та обмеженої функції є нескінченно малою.
4. Якщо функція f є нескінченно малою при $x \to a$, але відмінна від нуля в околі точки a, то $\frac{1}{f}$ є нескінченно великою в цій точці.

Для того, щоб $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб мало місце представлення

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.

Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$, то при

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$ вони називаються нескінченно малими одного порядку малості при $x \to a$;
2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ вони називаються еквівалентними нескінченно малими при $x \to a$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку малості при $x\to a$ ніж $\beta(x)$, що позначають $\alpha(x)=o(\beta(x))$ ($\alpha(x)$ дорівнює «о мале» від $\beta(x)$ при $x\to a$);

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку малості при $x\to a$ ніж $\beta(x)$, що позначають $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to a$;

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C\neq 0$ функція $\alpha(x)$ має порядок малості k відносно $\beta(x)$ при $x\to a$;

6. якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються непорівнюваними при $x\to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C\neq 0$, то функція $C(\beta(x))^k$ називається головною частиною нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to a$.

Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно великими при $x\to a$, то при

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$ вони називаються нескінченно великими одного порядку росту при $x\to a$;

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ функція $f(x)$ називається нескінченно великою нижчого порядку росту при $x\to a$ ніж $g(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ функція $f(x)$ називається нескінченно великою вищого порядку росту при $x\to a$ ніж $g(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=C\neq 0$ функція $f(x)$ має порядок росту k відносно $g(x)$ при $x\to a$;

5. якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не існує, то нескінченно великі $f(x)$ і $g(x)$ називаються непорівнюваними при $x\to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=C\neq 0$, то функція $C(g(x))^k$ називається головною частиною нескінченно великої $f(x)$ відносно $g(x)$ при $x\to a$.

Для того, щоб нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ були еквівалентними при $x\to a$, необхідно і достатньо, щоб $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$ при $x\to a$.

Границя добутку (відношення) функцій не змінюється, якщо в ньому замінити нескінченно малу на еквівалентну нескінченно малу функцію.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих:

$x\sim\sin x\sim \operatorname{tg} x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg} x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$ при $x\to 0$;

$a^x-1\sim x\ln a$ при $x\to 0$;

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ при $x\to 0$;

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ при $x\to 0$.

Приклад 1. Довести за означенням, що границя

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$

не існує.

Доведення. Доведемо, що ця функція не задовольняє означенню границі функції за Гейне при $x \to +\infty$. Для цього розглянемо послідовності $\{x_n'\}$ та $\{x_n''\}$, де

$$x_n' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_n'' = 2\pi n.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_n'' = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n''\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

А оскільки $\left\{ f\left(x_n'\right)\right\}$ та $\left\{ f\left(x_n''\right)\right\}$ мають різні границі, то границя

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$

не існує. □

Приклад 2. Довести за означенням, що границя

$$\lim_{x\to 0} 5^{\frac{1}{x}}$$

не існує.

Доведення. Розглянемо послідовності $\{x_n'\}$ та $\{x_n''\}$, де

$$x_n' = \frac{1}{n}, \quad x_n'' = -\frac{1}{n}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) = \lim_{n\to\infty} 5^n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n''\right) = \lim_{n\to\infty} 5^{-n} = 0,$$

А оскільки $\{f(x'_n)\}$ та $\{f(x''_n)\}$ мають різні границі, то границя

$$\lim_{x\to 0} 5^{\frac{1}{x}}$$

не існує. □

У найпростіших випадках обчислення границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу, наприклад,

$$\lim_{x\to \pi} \cos x = \cos\pi = -1.$$

Проте часто така підстановка приводить до невизначених виразів, зокрема, таких:

1) невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (відношення двох нескінченно великих величин);

2) невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ (відношення двох нескінченно малих величин);

3) невизначеність типу $[0\cdot\infty]$ (добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику);

4) невизначеність типу $[\infty-\infty]$ (різниця двох нескінченно великих величин);

5) невизначеності типу $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$.

Операцію обчислення границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо деякі способи розкриття невизначеності.

1. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ задана відношенням двох многочленів. Такі невизначеності можна розкривати за правилом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

Приклад 3.Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{2x^2+7x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4}{2x^2+7x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4}{2x^2+7x-9}$.

Розв'язання. Користуючись наведеним вище правилом, легко знаходимо:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{2x^2+7x-9}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4}{2x^2+7x-9}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\dfrac{3}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4}{2x^2+7x-9}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\infty$.

Відповідь: а) 0; б) $\dfrac{3}{2}$; в) ∞. □.

2. Невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{x\to-2}(x^2-4)=0,\qquad \lim_{x\to-2}(x^2+x-2)=0,$$

то маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Щоб її розкрити, розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$x^2-4=(x+2)(x-2), \qquad x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

Скорочуючи на $(x+2)$, маємо:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x-1}=\frac{-2-2}{-2-1}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$. □

Множник $(x-a)$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, називають критичним множником. Отже, щоб розкрити невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, задану відношенням двох многочленів, треба скоротити дріб на критичний множник.

3. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ задана ірраціональними виразами.

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}$.

Розв'язання. Для обчислення границі помножимо й поділимо дріб на вираз, спряжений з чисельником, а потім розкладемо на множники знаменник і чисельник і скоротимо на критичний множник:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{n\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\frac{1}{(3+1)(\sqrt{3+6}+3)}=\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{24}.$$

Відповідь: $\frac{1}{24}$. □

У випадку, коли корені кубічні, вираз доповнюють не до різниці квадратів, а до різниці кубів.

4. Невизначеність задана трансцендентними виразами.

У випадку, коли невизначеність задана тригонометричними виразами тощо, користуються еквівалентністю нескінченно малих функцій.

Приклад 6. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin 2x\cdot \operatorname{arctg} 6x}.$$

Розв’язання. При $x\to 0$ $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, $\sin 2x \sim 2x$, $\operatorname{arctg} 6x \sim 6x$. Замінюючи нескінченно малі величини еквівалентними їм величинами, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin 2x\cdot \operatorname{arctg} 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{2x\cdot 6x}=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$. □

Якщо границю потрібно обчислити не в точці $x=0$, то часто використовують заміни.

Приклад 7. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3-2\cos x}}..$$

Розв’язання. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Зробимо заміну $z = x - \dfrac{\pi}{6}$, тоді при $x \to \dfrac{\pi}{6}$ $z \to 0$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos\left(z+\frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos z\cos\frac{\pi}{6}+2\sin z\sin\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z+\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sqrt{3}\sin^2\frac{z}{2}+2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{z}{2}} = 1.$$

Відповідь: 1. □

5. Невизначеність типу $\left[1^{\infty}\right]$.

Її розкривають за допомогою другої визначної границі.

Приклад 8. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{3x+2}.$$

Розв’язання. Використовуючи другу визначну границю, дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{3x+2} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right]^{\frac{2(3x+2)}{x+3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+4}{x+3}} = e^{6}.$$

Відповідь: e^6. □

Завдання 1

Довести за означенням, що границя не існує:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} (-1)^{[x]}$, де $[x]$ — ціла частина x.

5. $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2 - \left[x^2\right]\right)$, де $[x]$ — ціла частина x.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2} x[x]$, де $[x]$ — ціла частина x.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^2 + x^4}}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \sin\frac{1}{x-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} \cos\frac{1}{x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2} 2^{\frac{1}{x-2}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3} e^{\frac{1}{x-3}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{[x]}{x}$, де $[x]$ — ціла частина x.

15. $\lim\limits_{x\to 0} 3^{-\frac{1}{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} [x]$, де $[x]$ — ціла частина x.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} 2^{x-\frac{1}{x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x)$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4+x^5}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} e^{x+\frac{1}{x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\cos x)$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x}\right]$, де $[x]$ — ціла частина x.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(\sin x)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$.

Завдання 2

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^3-3x^2+2x-6}$.

12. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2-x^3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+x}-5}{\sqrt[3]{27+x}-3}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt[3]{7+x}-2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-2x^2-4x+8}$.

20. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}.$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-3x^2+2}.$

22. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^2+5x+6}.$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{8+x}-2}.$

24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-3x^2+2}.$

25. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{4+x}-2}.$

26. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}.$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}.$

29. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}.$

30. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}.$

Завдання 3

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right)\log_x 5.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}.$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}.$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\sin x}-1}{\sin 2x}.$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}.$

12. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\sec x.$

14. $\lim\limits_{x\to1}\left(1-x^3\right)\log_x 3.$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}x^4\left(\ln\left(1+x^4\right)-\ln\left(x^4\right)\right).$

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}\left(x^2\right)}{1-\operatorname{tg}\left(x^2\right)}}$.

18. $\lim\limits_{x\to0}x\left(\ln\left(2+x\right)-\ln x\right).$

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$.

20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$.

21. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin x-\sin 2}{x-2}$.

22. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3}{x-3}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right).$

24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}{1-\cos x}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin\left(x^2\right)}{1-\sin\left(x^2\right)}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$.

Завдання 4

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} 2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\mathrm{ctg}\,x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^x\frac{1}{\sqrt{x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{tg}^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{\mathrm{ctg}^3 x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\ln^{-1}(1+\sin^2 x)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\frac{2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\left(e^{x^2}-1\right)^{-1}}$.

19. $\lim\limits_{x\to -4}(4+3x)^{\frac{2x-1}{x+1}}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2+x}{x-2}\right)^{x}$.

30. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{x}$.

Завдання 5

Знайти порядок малості і виділити головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

1. $\alpha(x) = \sin\sqrt{x}, \quad \beta(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 0.$

2. $\alpha(x) = e^{x^2} - 1, \quad \beta(x) = \sin x, \quad x_0 = 0.$

3. $\alpha(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x}\right), \quad \beta(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x_0 = 0.$

4. $\alpha(x) = \mathrm{tg}\sqrt{x}, \quad \beta(x) = \sin\sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 0.$

5. $\alpha(x) = \arcsin\left(\sqrt{x} - 2\right), \quad \beta(x) = x - 4, \quad x_0 = 4.$

6. $\alpha(x) = x + x^2 - \sqrt{x}, \quad \beta(x) = \sin x, \quad x_0 = 0.$

7. $\alpha(x) = e^{x^2} - e^x, \quad \beta(x) = x, \quad x_0 = 0.$

8. $\alpha(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + 3x + 2}\right), \quad \beta(x) = x + 1, \quad x_0 = -1.$

9. $\alpha(x) = \mathrm{tg}\sqrt[3]{x}, \quad \beta(x) = \sin x, \quad x_0 = 0.$

10. $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 7}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = \infty.$

11. $\alpha(x) = 10x^3 - 3x, \quad \beta(x) = \sin x, \quad x_0 = 0.$

12. $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} + 2, \quad \beta(x) = x + 8, \quad x_0 = -8.$

13. $\alpha(x) = e^{x^2} - \cos x, \quad \beta(x) = x, \quad x_0 = 0.$

14. $\alpha(x) = \arcsin\left(\sqrt{x^2 + 9} - 3\right), \quad \beta(x) = x, \quad x_0 = 0.$

15. $\alpha(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{27-2x^2-3x}-3\right),\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

16. $\alpha(x)=\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}-2x\right),\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

17. $\alpha(x)=\sqrt[3]{\left(e^x-1\right)^2},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

18. $\alpha(x)=1-\sqrt{\cos x},\quad \beta(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_0=0.$

19. $\alpha(x)=\dfrac{x(x+1)}{\sin x+\sqrt{x}},\quad \beta(x)=\operatorname{tg} x,\quad x_0=0.$

20. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x^5},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

21. $\alpha(x)=\sqrt{1+3x}-1-\sqrt{x},\quad \beta(x)=\operatorname{tg} x,\quad x_0=0.$

22. $\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x\operatorname{tg} x}\right),\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

23. $\alpha(x)=\sqrt{1+2x}-1-\sqrt[3]{x},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

24. $\alpha(x)=\sin\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right),\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

25. $\alpha(x)=\sin^2\sqrt{x},\quad \beta(x)=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x},\quad x_0=0.$

26. $\alpha(x)=\arcsin^2\sqrt{x},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

27. $\alpha(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right),\quad \beta(x)=4x-\pi,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

28. $\alpha(x)=\sqrt{8+x^2}-3,\quad \beta(x)=\sin(x-1),\quad x_0=1.$

29. $\alpha(x)=\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

30. $\alpha(x)=2^{\sqrt{x}}-\cos\sqrt[4]{x},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

Завдання 6

Знайти порядок росту і виділити головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

1. $\alpha(x) = 2x + \sqrt{x} + \sin x, \quad \beta(x) = x, \quad x_0 = +\infty.$

2. $\alpha(x) = \sin\sqrt{x} + 2^{x+1}, \quad \beta(x) = 2^x, \quad x_0 = +\infty.$

3. $\alpha(x) = \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1} - x^2, \quad \beta(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = +\infty.$

4. $\alpha(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^5}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 0.$

5. $\alpha(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 + \sqrt{x^5}}}, \quad \beta(x) = x, \quad x_0 = +\infty.$

6. $\alpha(x) = \dfrac{3x^5}{x^2 - 3x + 1}, \quad \beta(x) = x, \quad x_0 = \infty.$

7. $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}, \quad \beta(x) = x, \quad x_0 = +\infty.$

8. $\alpha(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}, \quad \beta(x) = x, \quad x_0 = +\infty.$

9. $\alpha(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{x - 1}, \quad x_0 = 1.$

10. $\alpha(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x^3}}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{1 - x}, \quad x_0 = 1.$

11. $\alpha(x) = \dfrac{\ln x}{(1 - x)^2}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{1 - x}, \quad x_0 = 1.$

12. $\alpha(x) = x + x^2 - \sqrt{x}, \quad \beta(x) = \sqrt[5]{x}, \quad x_0 = +\infty.$

13. $\alpha(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x}{1 - x}}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{1 - x}, \quad x_0 = 1.$

14. $\alpha(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{1-x}, \quad x_0=1.$

15. $\alpha(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x^5}}}, \quad \beta(x)=x, \quad x_0=+\infty.$

16. $\alpha(x)=x^2+\sin^2\sqrt{x}, \quad \beta(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x_0=+\infty.$

17. $\alpha(x)=2x+\operatorname{arctg}x, \quad \beta(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x_0=+\infty.$

18. $\alpha(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{1-x}, \quad x_0=1.$

19. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^8-5x^5}-x^4, \quad \beta(x)=x, \quad x_0=+\infty.$

20. $\alpha(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x-1}, \quad x_0=1.$

21. $\alpha(x)=\dfrac{1-2x}{x^2-2x-3}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x+1}, \quad x_0=-1.$

22. $\alpha(x)=\cos\sqrt{x}+3^{x+2}, \quad \beta(x)=3^x, \quad x_0=+\infty.$

23. $\alpha(x)=\ln(10x)+\sin x, \quad \beta(x)=\ln^2 x, \quad x_0=+\infty.$

24. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}, \quad \beta(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=+\infty.$

25. $\alpha(x)=3^{x+1}+2^x, \quad \beta(x)=3^x, \quad x_0=+\infty.$

26. $\alpha(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x-2}, \quad x_0=2.$

27. $\alpha(x)=\dfrac{x+1}{x^3-1}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x-1}, \quad x_0=1.$

28. $\alpha(x)=\dfrac{x^2}{x^3+8}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x+2}, \quad x_0=-2.$

29. $\alpha(x)=2^{2x}+2^{x+2}, \quad \beta(x)=2^{x}, \quad x_0=+\infty.$

30. $\alpha(x)=2^{-2x}+2^{x+2}, \quad \beta(x)=2^{x}, \quad x_0=+\infty.$

7. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо вона визначена в деякому околі точки $x = a$ і

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Згідно з означенням границі функції за Коші означення неперервності можна сформулювати так.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $f(x)$ визначена в δ-околі $U(a;\delta) = (a - \delta, a + \delta)$ і для всіх $x \in U(a;\delta)$ виконується нерівність

$$\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon.$$

Символічно

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon.$$

Якщо функція $f(x)$ визначена на $[a, a + \delta)$ (відповідно на $(a - \delta, a]$) і $f(a + 0) = f(a)$ (відповідно $f(a - 0) = f(a)$), тоді $f(x)$ називається неперервною справа (відповідно зліва) в точці $x = a$.

Для того, щоб $f(x)$ була неперервною в точці $x = a$, необхідно і достатньо, щоб

$$f(a - 0) = f(a) = f(a + 0),$$

тобто щоб $f(x)$ була неперервною в цій точці справа і зліва.

Властивості неперервних функцій в точці.

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці $x = a$, то

a. $f(x) \pm g(x)$,

b. $f(x)g(x)$,

c. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $g(a) \neq 0$

неперервні в точці $x = a$.

2. Композиція функцій $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ неперервна в точці $x = a$, якщо $f(x)$ неперервна в точці $x = a$, а $g(y)$ неперервна в точці $y = f(a)$.

3. Кожна елементарна функція, що визначена в околі точки $x = a$, є неперервною в цій точці.

Приклад 1. Довести неперервність функції $y = \sqrt{x}$ в точці $x = a > 0$ за означенням неперервності.

Розв'язання. Маємо

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ довільне. Нерівність $\dfrac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$ рівносильна нерівності $|x - a| < \varepsilon\sqrt{a}$. Приймемо $\delta(\varepsilon) = \varepsilon\sqrt{a}$. Тоді

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon,$$

що й доводить неперервність функції $y = \sqrt{x}$ в точці $x = a$. □

Точки розриву функції

Окіл точки a, з якого вилучено саму точку a, називається проколеним околом точки a і позначається символом $\dot{U}(a)$. Таким чином,

$$\dot{U}(a)=U(a)\setminus\{a\},\quad \dot{U}(a;\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

Припустимо, що функція $f(x)$ визначена в проколеному околі точки $x=a$ і, можливо, в самій цій точці. Якщо точка $x=a$ не є точкою неперервності функції $f(x)$, то вона називається точкою розриву функції $f(x)$.

1. При цьому, якщо існує $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, але $f(x)$ невизначена в точці $x=a$, або $f(a)\neq A$, тоді $x=a$ називається точкою усувного розриву функції $f(x)$.

(Зауважимо, що якщо покласти $f(a)=A$, то функція $f(x)$ стане неперервною в точці $x=a$, тобто розрив буде усунуто.)

2. Якщо існують скінченні $f(a+0)$ та $f(a-0)$, але не виконується одна з умов рівності $f(a-0)=f(a)=f(a+0)$, тоді $x=a$ називається точкою розриву I роду.

(При цьому кажуть, що функція $f(x)$ в точці $x=a$ має стрибок.)

3. В точці $x=a$ не існує принаймні одна з границь $f(a+0)$, $f(a-0)$ або хоча б одна з них нескінченна. Тоді точка $x=a$ називається точкою розриву II роду.

Неперервні функції на множині

Функція $f(x)$ називається неперервною на множині A, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Якщо не всі точки $x\in A$ входять у множину A разом з деяким околом, то означення трохи змінюється.

Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a,b]$, називається неперервною на $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу (a,b), неперервна справа в точці $x=a$ і неперервна зліва в точці $x=b$.

Клас неперервних на множині A функцій позначається $C(A)$, тобто запис $f \in C(A)$ означає, що функція $f(x)$ неперервна на множині A.

Нагадаємо основні властивості неперервних функцій на відрізку.

Теорема 1 (Вейєрштрасса). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона обмежена на ньому.

Теорема 2 (Вейєрштрасса). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона приймає на ньому найбільше та найменше значення.

Теорема 3 (Больцано-Коші). Якщо функція неперервна на відрізку і на його кінцях приймає значення протилежного знаку, то існує точка всередині цього відрізку, в якій функція дорівнює нулю.

Теорема 4 (Коші). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона приймає всі проміжні значення між значеннями функції в кінцях цього відрізка.

Функція називається рівномірно неперервною на множині A, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x_1, x_2 \in A$ таких, що $|x_1 - x_2| < \delta$, виконується нерівність

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 5 (Кантора). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона також рівномірно неперервна на ньому на ньому.

Кажуть, що функція $f(x)$ строго зростає (відповідно строго спадає) на множині A, якщо для довільних $a,b \in A$ таких, що $a < b$, маємо $f(a) < f(b)$ (відповідно $f(a) > f(b)$).

Функції, що строго зростають чи спадають на множині A, називають строго монотонними на множині A.

Теорема 6 (про існування оберненої функції). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ та строго монотонна на ньому (наприклад, зростає). Тоді існує єдина функція $x = g(y)$, яка визначена, строго зростає і неперервна на відрізку $[f(a), f(b)]$ така, що $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in [a,b]$ і $f(g(y)) = y$ для всіх $y \in [f(a), f(b)]$, тобто $g = f^{-1}$.

Зауважимо, що для строго спадної функції $y = f(x)$ обернена функція $x = g(y)$ визначена на відрізку $[f(b), f(a)]$.

Приклад 2. Довести, що рівняння $x2^x - 1 = 0$ має додатний корінь, менший за одиницю.

Розв'язання. Функція $f(x) = x2^x - 1$ неперервна на всій числовій осі, зокрема і на відрізку $[0,1]$. Оскільки $f(0) = -1 < 0$, а $f(1) = 2 - 1 = 1 > 0$, то за теоремою Больцано-Коші існує така точка $x_0 \in (0,1)$, що $f(x_0) = x_0 2^{x_0} - 1 = 0$, тобто x_0 — потрібний нам корінь. □

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4}.$$

Розв'язання. Область визначення функції

$$D(f) = [-7,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty).$$

При $x \neq \pm 2$ функція неперервна на $D(f)$ як відношення двох неперервних функцій $y_1 = \sqrt{7+x} - 3.$ і $y_2 = x^2 - 4$, які є елементарними. Функція $f(x)$ визначена в проколеному околі кожної з точок $x = 2$ та $x = -2$, а в самих точках не визначена, тому ці точки є точками розриву. Визначимо характер точок розриву. Обчислимо

$$f(-2-0)=\lim_{x\to-2-0}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to-2-0}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}\cdot\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{x+2}=\frac{\sqrt{5}-3}{-4}\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{x+2}=-\infty.$$

Аналогічно

$$f(-2+0)=\lim_{x\to-2+0}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to-2+0}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}\cdot\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{x+2}=\frac{\sqrt{5}-3}{-4}\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{x+2}=+\infty.$$

Отже, точка $x=-2$ є точкою розриву другого роду.

Обчислимо тепер

$$f(2-0)=\lim_{x\to2-0}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to2-0}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2-0}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}.$$

Аналогічно отримаємо

$$f(2+0)=\lim_{x\to2+0}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}.$$

Отже, оскільки $f(x)$ не визначена в точці $x=2$, ця точка є точкою розриву першого роду (усувний розрив). □

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}.$$

Розв'язання. Область визначення функції

$$D(f)=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty).$$

На області визначення функція неперервна, оскільки є елементарною. Функція $f(x)$ визначена в проколених околах точок $x=0$ і $x=1$ і не визначена в самих цих точках, тому ці точки є точками розриву. Обчислимо

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot \lim_{x\to 0-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot \operatorname{arctg}(-1)=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}}=\left|-\frac{1}{x}\to +\infty,\quad x\to 0-0,\quad e^{-\frac{1}{x}}\to +\infty,\quad x\to 0-0\right|=-\infty.$$

Аналогічно

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot \lim_{x\to 0+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot \operatorname{arctg}(-1)=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}}=\left|-\frac{1}{x}\to -\infty,\quad x\to 0+0,\quad e^{-\frac{1}{x}}\to 0,\quad x\to 0+0\right|=-\frac{\pi}{4}\cdot 0=0.$$

Таким чином, точка $x=0$ є точкою розриву другого роду.

Знайдемо

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot \lim_{x\to 1-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=e^{-1}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2e}.$$

Аналогічно

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot \lim_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=e^{-1}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2e}.$$

Таким чином, точка $x=1$ є точкою розриву першого роду (не усувного). Величина стрибка функції $f(x)$ в точці $x=1$ дорівнює

$$f(1+0)-f(1-0)=\frac{\pi}{2e}-\left(-\frac{\pi}{2e}\right)=\frac{\pi}{e}. \qquad \square$$

Приклад 5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f\left(x\right)=e^{x}\sin\frac{1}{x}$ на інтервалі $\left(0,1\right)$.

Розв'язання. Рівномірна неперервність функції на множині означає, що малому приросту аргументу в довільній точці $x\in\left(0,1\right)$ відповідає малий приріст функції. Однак, для функції $\sin\frac{1}{x}$ це не так. Дійсно, достатньо взяти

$x_{n1}=\frac{1}{2\pi n}$ та $x_{n2}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Тоді

$$\left|x_{n1}-x_{n2}\right|=\left|\frac{1}{2\pi n}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right|=\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi n\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}\to 0,\quad n\to\infty,$$

Але $\sin x_{n1}=0$, а $\sin x_{n2}=1$. Отже, не слід очікувати рівномірної неперервності $f\left(x\right)$ на $\left(0,1\right)$.

Доведемо строго, що $f\left(x\right)$ не буде рівномірно неперервною на інтервалі $\left(0,1\right)$. Побудуємо заперечення до означення рівномірної неперервності: існує $\varepsilon>0$ таке, що для довільного $\delta>0$ можна вказати $x_1,x_2\in\left(0,1\right)$ такі, що $\left|x_1-x_2\right|<\delta$, але $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\geq\varepsilon.$

Візьмемо дві послідовності, вказані вище, а саме $x_{n1}=\frac{1}{2\pi n}$, $x_{n2}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$,

$n\in\mathbb{N}$. Ясно, що $x_{n1},x_{n2}\in\left(0,1\right)$. Оскільки

$$\left|x_{n1}-x_{n2}\right|\to 0,\quad n\to\infty,$$

то $\left|x_{n1}-x_{n2}\right|<\delta$ при достатньо великому $n\in\mathbb{N}$ для довільного $\delta>0$. Але

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \left|f\left(x_{n1}\right)-f\left(x_{n2}\right)\right|=\left|e^{\frac{1}{2\pi n}}\sin 2\pi n-e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right|=e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}>1.$$

Отже, при $\varepsilon=1$ умова рівномірної неперервності не виконується. Таким чином, $f\left(x\right)$ не буду рівномірно неперервною на інтервалі $\left(0,1\right)$. □

Завдання 1

Довести неперервність функції в точці $x=x_0$ за "$\varepsilon-\delta$" означенням:

1. $f\left(x\right)=x^2-x,\quad x_0=2.$

2. $f\left(x\right)=x^2+4x,\quad x_0=2.$

3. $f\left(x\right)=x^3+x,\quad x_0=1.$

4. $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x_0=0.$

5. $f\left(x\right)=\dfrac{x-3}{2x-1},\quad x_0=1.$

6. $f\left(x\right)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x_0=0.$

7. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x+2},\quad x_0=1.$

8. $f\left(x\right)=x^3-3x,\quad x_0=1.$

9. $f\left(x\right)=\cos 2x,\quad x_0=0.$

10. $f\left(x\right)=x^3+3x,\quad x_0=-1.$

11. $f(x)=\dfrac{x+3}{4-x}, \quad x_0=3.$

12. $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}, \quad x_0=-3.$

13. $f(x)=\sin x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

14. $f(x)=x^3-2x, \quad x_0=1.$

15. $f(x)=\sqrt{x+1}, \quad x_0=3.$

16. $f(x)=x^2-4x, \quad x_0=1.$

17. $f(x)=\sqrt[3]{x+7}, \quad x_0=1.$

18. $f(x)=\cos x, \quad x_0=\pi.$

19. $f(x)=\sin 3x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{3}.$

20. $f(x)=\sqrt[3]{2-x}, \quad x_0=1.$

21. $f(x)=\dfrac{4x+1}{3x-2}, \quad x_0=2.$

22. $f(x)=x^2+x, \quad x_0=-2.$

23. $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x_0=4.$

24. $f(x)=2x^3+3, \quad x_0=-1.$

25. $f(x)=3x^2-1, \quad x_0=1.$

26. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}, \quad x_0=1.$

27. $f(x)=\sqrt{x-1}, \quad x_0=5.$

28. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}, \quad x_0=2.$

29. $f(x)=x^3+2x, \quad x_0=1.$

30. $f(x)=\sin 2x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

Завдання 2

Дослідити на неперервність і зобразити схематичні графіки функції в околі точок розриву:

1. $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}.$

2. $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}.$

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x(x+1)}.$

4. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x(x+1)}.$

5. $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}.$

6. $f(x)=2^{\frac{1}{|x+2|}}-1.$

7. $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x+1}}+3}.$

8. $f(x)=x[x],$ де $[x]$ — ціла частина x.

9. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}.$

10. $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x\left(1-3^{x+3}\right)}.$

11. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\log_2\left|x+1\right|-1}.$

12. $f\left(x\right)=\dfrac{2}{\lg\left|2x-3\right|}-1.$

13. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

14. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x^2-x}}+1}.$

15. $f\left(x\right)=\dfrac{2}{2^{\frac{x}{1-x}}-4}.$

16. $f\left(x\right)=x-\left[x\right]$, де $\left[x\right]$— ціла частина x.

17. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2-2^{\frac{1}{2x+1}}}.$

18. $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+1}{x^2+x}.$

19. $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{\sin x}}.$

20. $f\left(x\right)=\dfrac{1-x^2}{1-x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

21. $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{\cos x}}.$

22. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\log_2\left|x-1\right|-1}.$

23. $f\left(x\right)=\dfrac{1-e^{-\frac{1}{x^2}}}{1-x}.$

24. $f\left(x\right)=\sqrt{x}-\left[\sqrt{x}\right],$ де $\left[x\right]$— ціла частина x.

25. $f\left(x\right)=\left|\dfrac{\sin x}{x\left(x-1\right)}\right|.$

26. $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{\left|x^2+x\right|}.$

27. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x-1}\sin\dfrac{1}{x}.$

28. $f\left(x\right)=\left[x\right]\sin\pi x,$ де $\left[x\right]$— ціла частина x.

29. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1}\cos\dfrac{1}{x}.$

30. $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+1}{x+1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

Завдання 3

Обчислити ліву і праву границі функції в точках її розриву та вказати тип точок розриву.

1. $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

2. $f\left(x\right)=e^{-\frac{1}{x^2}}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x^2-3x}.$

3. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}$.

4. $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

5. $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1+x}}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$.

6. $f(x)=e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}\frac{x}{\ln|x-3|}$.

7. $f(x)=e^{-\frac{1}{x+2}}\frac{\sin x}{x}$.

8. $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x+2|}$.

9. $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

10. $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}\frac{x}{\sin x}$.

11. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+2}$.

12. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{x+2}{\ln(x+3)}$.

13. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{\ln(2-x)}$.

14. $f(x)=\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1-2^{\frac{1}{x}}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x(1-x)}$.

15. $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{1}{2-x}}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}.$

16. $f(x)=e^{x^2+\frac{1}{x}}\frac{x+1}{\ln|x+2|}.$

17. $f(x)=e^{\frac{1}{1-x}}\frac{|x+1|}{x^3+x^2}.$

18. $f(x)=e^{\frac{1}{3-x}}\frac{x}{\ln|x+1|}.$

19. $f(x)=e^{\frac{x}{x-2}}x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$

20. $f(x)=\frac{1}{1-3^{x-3}}\cdot\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}.$

21. $f(x)=e^{x^2+\frac{1}{x}}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}.$

22. $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}\cdot\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x+2}.$

23. $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\ln|x-2|}.$

24. $f(x)=2^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\cdot\frac{x\ln|x+3|}{\operatorname{arctg} x}.$

25. $f(x)=\frac{\sin x}{1-2^{\frac{1}{x-1}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{2-x}.$

26. $f(x)=\frac{x+1}{|x^3+1|}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$

27. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{x}{\ln|x-2|}.$

28. $f(x)=e^{\frac{1}{3-x}}\cdot\frac{x}{\ln|x+1|}.$

29. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x^2-3x}.$

30. $f(x)=e^{x^2+\frac{1}{x}}\cdot\frac{x+1}{\ln|x+2|}.$

8. ПОХІДНА

Нехай функція f визначена в деякому околі точки x_0.

Приростом аргументу називається різниця

$$\triangle x = x - x_0,$$

де $x \neq x_0$, $x \in D_f$.

Приростом функції називається вираз

$$\triangle y(x_0) = \triangle f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$

то ця границя називається похідною функції f в точці x_0 та позначається

$$f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Операція знаходження похідної називається диференціюванням.

Приклад 1. Знайти за означенням похідну від функції $y = \sin x$.

Розв'язання. Розглянемо границю відношення приросту нашої функції до приросту аргументу при $\triangle x \to 0$. Для довільної точки $x_0 \in \mathbb{R}$ маємо

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \triangle x) - \sin(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2\sin\frac{\triangle x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right) = \cos x_0,$$

оскільки косинус є неперервною функцією. Таким чином,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x.$$

Відповідь: $(\sin x)' = \cos x.$ □

Приклад 2. Довести за означенням, що похідна функції $y = |x|$ в точці $x = 0$ не існує.

Доведення. Розглянемо односторонні границі даної функції в точці $x = 0$. Тоді

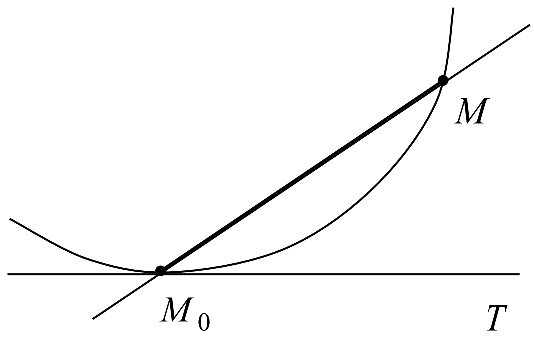
$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

Оскільки між односторонніми границями немає рівності, відповідна границя в точці $x = 0$ не існує, тобто не існує похідна.

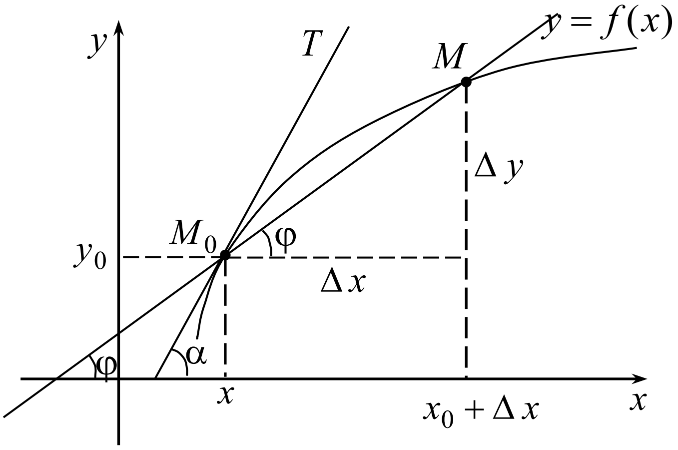
□

Візьмемо на кривій точки M_0 і M і проведемо січну M_0M. Коли точка M буде рухатись вздовж кривої, ця січна буде обертатись навколо точки M_0.



Дотичною до кривої в точці M_0 називається граничне положення M_0T січної M_0M, якщо воно існує, коли точка M вздовж кривої наближається до точки M_0.

Розглянемо графік функції $y = f(x)$. Нехай $M_0(x_0; y_0)$та $M(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$. Позначимо через φ кут між січною M_0M і віссю Ox. Очевидно, що $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $M \to M_0$ і кут φ буде змінюватися. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$, то пряма M_0T, що утворює з віссю Ox кут α, буде дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці M_0. Тоді



$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha .$$

Геометричний зміст похідної: похідна функції f в точці x_0 дорівнює тангенсу кута між дотичною до графіка функції f в точці $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ та віссю абсцис, тобто кутовому коефіцієнту дотичної.

Пряма, що проходить через точку $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ перпендикулярно дотичній до графіка функції f у цій точці, називається нормаллю.

Рівняння дотичної до графіка функції f в точці $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$:

$$y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Рівняння нормалі до графіка функції f в точці $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$:

$$y = f\left(x_0\right) - \frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right).$$

Якщо функція має похідну в точці, то вона й неперервна і цій точці.

Таблиця похідних.

1. $C' = 0.$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$ *а*) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2},$ *б*) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *в*) $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$
3. $(\sin x)' = \cos x.$
4. $(\cos x)' = -\sin x.$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(a^x)' = a^x \ln a$.

8. $(e^x)' = e^x$.

9. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

10. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Правила диференціювання

Якщо $u(x)$, $v(x)$ мають похідні, а C — довільна стала, то

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = Cu'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(uv)' = u'v + uv'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \quad (v \neq 0)$.

Приклад 3. Знайти похідну функції

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{arcctg} x}.$$

Розв’язання. Користуючись правилом диференціювання частки

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

і таблицею похідних, дістанемо:

$$y' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)' \operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}\,(\operatorname{arcctg} x)'}{(\operatorname{arcctg} x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\operatorname{arcctg}^2 x} =$$

$$= \frac{(1+x^2)\operatorname{arcctg} x + 2x}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)\operatorname{arcctg}^2 x}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{(1+x^2)\operatorname{arcctg} x + 2x}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)\operatorname{arcctg}^2 x}$. □

Теорема (похідна складеної функції).

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0, а функція $g(y)$ має похідну $g'(y_0)$ у відповідній точці $y_0 = f\left(x_0\right)$, то складена функція $g(f(x))$ в цій точці x_0 має похідну $g'(f(x_0))\,f'(x_0)$, тобто похідна складеної функції дорівнює добутку похідної даної функції по проміжному аргументу y на похідну проміжного аргументу по x.

За допомогою методу математичної індукції це правило диференціювання складеної функції можна узагальнити на ланцюжок із довільного скінченного числа функцій.

Приклад 4. Знайти похідну функції

$$y = 2^{\arccos(\ln x)}.$$

Розв’язання. Користуючись правилом диференціювання складеної функції й таблицею похідних, дістанемо:

$$y' = 2^{\arccos(\ln x)} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2^{\arccos(\ln x)} \cdot \ln 2}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

Відповідь: $y' = -\dfrac{2^{\arccos(\ln x)} \cdot \ln 2}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. □

Теорема (похідна оберненої функції).

Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, де $-\infty\le a<b\le+\infty$, а також

1. $f\in C\big((a,b)\big)$;

2. f строго зростає на (a,b).

Позначимо

$$(c,d)=\{f(x),\, x\in(a,b)\}.$$

Нехай функція $g:(c,d)\to(a,b)$ — обернена функція до f. Якщо функція f має похідну в точці $x_0\in(a,b)$, причому $f'(x_0)\neq 0$, то існує похідна функції g в точці $y_0=f(x_0)$, причому

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції

$$y=\arcsin x.$$

Розв’язання. Оберненою до функції $f(x)=\arcsin x$ є функція $g(y)=\sin x$. Отже,

$$\forall x\in(-1,1)\quad f'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знак перед квадратним коренем обумовлений тим, що $\cos y=\cos(\arcsin x)$, $\arcsin x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, а косинус на цьому проміжку додатний.

Відповідь: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

Якщо обидві змінні x та y є функціями від деякого параметра t, та кажуть, що функція $y(x)$ задана параметрично.

Теорема (похідна параметрично заданої функції).

Нехай

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t), \end{cases} \quad t \in (a,b),$$

причому на інтервалі існують похідні (a,b) φ' та ψ', а також φ строго монотонна на (a,b). Тоді існує похідна

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції

$$\begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = \cos^3 t. \end{cases}$$

Розв’язання. Оскільки

$$y' = \left(\sin^3 t\right)' = 3\sin^2 t\cos t, \quad x' = \left(\cos^3 t\right)' = -3\cos^2 t\sin t,$$

то за правилом диференціювання параметрично заданої функції одержимо

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\mathrm{tg}\, t.$$

Відповідь: $y'_x = -\mathrm{tg}\, t, \quad x = \cos^3 t.$ □

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x,y) = 0,$ не розв’язаного відносно залежної змінної y. Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина його розв'язків (x,y) така, що кожному значенню x відповідає тільки одне значення y.

Щоб знайти похідну від неявно заданої функції $F(x,y)=0,$ потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності, вважаючи y функцією від x, та розв'язати одержане рівняння відносно похідної y'.

Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад 7. Знайти похідну функції

$$y+x\ln y=5.$$

Розв'язання. Функція задана у неявному вигляді. Щоб її продиференціювати, треба взяти похідну по x від обох частин рівності $y+x\ln y= \ =5$, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y':

$$y'+\ln y+\frac{x}{y}y'=0, \qquad \left(1+\frac{x}{y}\right)y'=-\ln y, \qquad y'=-\frac{y\ln y}{x+y}.$$

Відповідь: $-\dfrac{y\ln y}{x+y}.$ □

Диференціал.

Фукція f називається диференційовною в точці x_0, якщо існує така константа $L\in\mathbb{R}$, що приріст функції має вигляд

$$f(x)-f(x_0)=L(x-x_0)+o(x-x_0), \quad x\to x_0.$$

Для диференційовної функції f лінійна функція $L(x-x_0)$ називається диференціалом в точці x_0 і позначається $df(x_0)$.

Тоді

$$dx = x - x_0 = \Delta x.$$

Функція f диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$, причому

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Остання формула дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної: $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Форма запису диференціала функції не залежить від того, чи є змінна x незалежною змінною чи функцією від іншої змінної t. Ця властивість називається інваріантність форми диференціала.

Правило Лопіталя.

Розглянемо відношення $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, де функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені і диференційовні в деякому околі точки $x = a$ (крім, можливо, самої точки a). Якщо при $x \to a$ функція $f(x)$ має невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то розкрити її можна, користуючись таким правилом:

Теорема (правило Лопіталя). Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо вона існує, тобто

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Приклад 8. Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Розв’язання.

а) Застосовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x)-x)'}{(e^x-x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1+x)(e^x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to 0}\frac{x'}{(e^x-1)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=-1.$$

б) Використовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x-x^2)'}{(x^4)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x-2x)'}{(4x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{6x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)'}{(6x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{12x}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=-\frac{1}{3}.$$

Відповідь: а) -1; б) $-\frac{1}{3}$. □

Розкриття невизначеностей інших типів за допомогою правила Лопіталя.

1. Невизначеність $[0\cdot\infty]$ зводиться до $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\left(g(x)\right)^{-1}}=\left[\frac{0}{0}\right],$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\left(f(x)\right)^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Приклад 9. Обчислити границю, користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0+} x^3\ln x.$$

Розв’язання. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0+} x^3\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{-3x^{-4}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x^3}{3}=0.$$

Відповідь: 0. □

2. Невизначеність $[\infty-\infty]$ зводиться до $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}-\frac{1}{g^{-1}(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)\cdot g^{-1}(x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Приклад 10. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-x^{-1}\right).$$

Розв’язання. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-x^{-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x\operatorname{tg}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{\left(x\sin x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=-\frac{0}{2}=0.$$

Відповідь: 0. □

3. Невизначеності $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$ розкриваються за допомогою формули

$$\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)},$$

якщо функція $f\left(x\right)$ додатна.

Приклад 11. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.$$

Розв’язання. Перейдемо до неперервної змінної та обчислимо

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{1}}=e^{0}=1.$$

Відповідь: 1. □

Теореми про диференційовні функції.

Теорема (Ферма). Нехай $f:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$, а в точці $x_0\in\left(a,b\right)$ досягається найбільше або найменше значення на інтервалі $\left(a,b\right)$. Якщо в точці x_0 існує похідна функції f, то

$$f'(x_0)=0.$$

Теорема (Ролль). Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ та виконуються такі умови:

1) $f\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b)\quad \exists f'(x)$;

3) $f(a)=f(b)$.

Тоді

$$\exists c\in(a,b)\quad f'(c)=0.$$

Теорема (Лагранж). Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ та виконуються такі умови:

1) $f\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b)\quad \exists f'(x)$.

Тоді

$$\exists c\in(a,b)\quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Наслідок 1. Якщо функція f має тотожно рівну нулю похідну на інтервалі, то на цьому проміжку функція f є сталою.

Наслідок 2. Якщо функції f і g мають тотожно рівні нулю похідні на інтервалі, то на цьому проміжку дані функції відрізняються лише на сталу.

Теорема (Коші). Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ та виконуються такі умови:

1) $f,g\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b)\quad \exists f'(x), g'(x)$;

3) $\forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0.$

Тоді

$$\exists c \in (a,b) \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Приклад 12. Довести, що

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

Доведення. Нехай для визначеності $x_1 < x_2$. За теоремою Лагранжа

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \quad \sin x_2 - \sin x_1 = \cos x_0 \cdot (x_2 - x_1),$$

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = |\cos x_0| \cdot |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|,$$

що й треба було довести. □

Похідні та диференціали вищих порядків.

Похідна диференційовної функції в свою чергу теж є функцією і може мати похідну, яку називають похідною другого порядку або другою похідною.

Дамо означення похідних вищих порядків за індукцією.

Похідна f' диференційовної функції f називається похідною першого порядку функції f. Якщо існує похідна порядку $n \in \mathbb{N}$, то похідна від неї називається похідною порядку $n+1$, тобто

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

За означенням вважають похідною нульового порядку саму функцію f.

Теорема (Лейбніц). Нехай функції f та g мають похідні порядку $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує похідна порядку n їхнього добутку і

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Виведемо формулу для другої похідної параметрично заданої функції. Нехай

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t), \end{cases} \quad t \in (a,b).$$

Нагадаємо, що $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$. Тоді функцію

$$\begin{cases} y = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}, \\ x = x(t), \end{cases} \quad t \in (a,b)$$

можна розглядати як нову функцію, від якої можна брати похідну.

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_x}{x'_t} = \frac{1}{x'_t} \cdot \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t = \frac{1}{x'} \cdot \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^2} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Таким чином,

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Приклад 12. Знайти другу похідну функції

$$\begin{cases} y = \sin t, \\ x = \cos t, \end{cases} \quad t \in (0, 2\pi).$$

Розв’язання. Оскільки

$$x'_t = -\sin t, \quad x''_{tt} = -\cos t, \quad y'_t = \cos t, \quad y''_{tt} = -\sin t,$$

одержимо

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}=\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{-\sin^3 t}=-\frac{1}{\sin^3 t}=-\frac{1}{y^3}.$$

Відповідь: $y''_{xx}=-\dfrac{1}{y^3}$. □

Диференціал df диференційовної функції f називається диференціалом першого порядку функції f. Якщо існує диференціал порядку $n\in\mathbb{N}$, то диференціал від нього називається диференціалом порядку $n+1$, тобто

$$d^{(n+1)}f=d\left(d^{(n)}f\right).$$

При обчисленні диференціалів вищих порядків важливо пам'ятати, що dx не залежить від x, а отже, при диференціюванні його слід розглядати як постійний множник.

Методом математичної індукції легко доводиться, що

$$d^{(n)}f=f^{(n)}dx^n.$$

Диференціали вищих порядків не мають інваріантності форми.

Завдання 1

Знайти похідні функцій:

1. $y=x^{\arcsin x}$.
2. $y=(\ln x)^{\sin x}$.
3. $y=(\cos x)^{\operatorname{tg} x}$.
4. $y=(\operatorname{arcctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.
5. $y=x^{\operatorname{arcctg} x}$.

6. $y = (\ln x)^{x+3}$.

7. $y = (\operatorname{arcctg} x)^{x^2}$.

8. $y = x^{\operatorname{ctg} x}$.

9. $y = (\cos x)^{2x}$.

10. $y = (\operatorname{ctg} x)^{e^x}$.

11. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

12. $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$.

13. $y = (\ln x)^{\sqrt{x+3}}$.

14. $y = (\ln(x+1))^{\operatorname{tg} x}$.

15. $y = (\operatorname{ctg} x)^{\lg x}$.

16. $y = (1+\sqrt{x})^{x}$.

17. $y = (\ln x)^{1+\sin x}$.

18. $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2}$.

19. $y = x^{\arccos x}$.

20. $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$.

21. $y = x^{\sin x}$.

22. $y = (\log_4 x)^{\sin x}$.

23. $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x+1}}$.

24. $y = x^{\ln^2 x}$.

25. $y = (\lg x)^{\operatorname{tg} x}$.

26. $y = (\sin x)^{\operatorname{arcctg} x}$.

27. $y = (\operatorname{tg} x)^{\log_4 x}$.

28. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$.

29. $y = (3x)^{\operatorname{arcctg} 3x}$.

30. $y = (\cos 2x)^{\operatorname{arctg} 5x}$.

Завдання 2

Знайти похідні y'_x функцій:

1. $xy = x + e^y$.

2. $\sqrt{y} = e^{xy} + 3$.

3. $xy = \operatorname{tg}\ \ x + y\ \ $.

4. $x + y = \ln\ \ x - y\ \ $.

5. $y = \sin\ \ xy\ \ $.

6. $\cos\ \ xy\ \ = x - 2y$.

7. $xy^2 = x^2 + y + 1$.

8. $y = \operatorname{ctg}\ \ x + y\ \ $.

9. $y^2 = x \sin y$.

10. $y = x^2 \operatorname{tg}(x + y)$.

11. $\arcsin y = x + y$.

12. $\operatorname{tg} y = x - y^2$.

13. $y = x^2 + \cos y$.

14. $x^2 + y^2 + xy = 0$.

15. $x + y^3 - x^2 y = 0$.

16. $y = x \operatorname{tg} y$.

17. $y = e^{xy}$.

18. $y^2 = \sin(x^2 + y)$.

19. $x + \dfrac{1}{y} = xy^2$.

20. $x^3 - y^3 = x^2 y$.

21. $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = xy$.

22. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sin y$.

23. $x^2 + y^2 = \cos(x + y)$.

24. $x^2 y = y^4 - x^2$.

25. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = y^2$.

26. $y^3 + xy + x^3 = 0$.

27. $\operatorname{ctg}(x + y) = y^2$.

28. $\ln\ \ x+y\ \ = x-y.$

29. $y = \mathrm{ctg}\ \ x^2 + y^2\ \ .$

30. $e^{x+y} = xy^2.$

Завдання 3

Обчислити знайти похідні першого та другого порядку параметрично заданих функцій:

1. $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}, \\ y = t^3 \ln t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \mathrm{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+2}, \\ y = \dfrac{t^2}{(t+2)^2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \mathrm{sh}^2 t, \\ y = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \operatorname{arcctg} t, \\ y = e^{t}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = e^{t} \cos t, \\ y = e^{t} \sin t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = t^3 \ln t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin e^t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \dfrac{t}{2}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = \ln(1 + e^t). \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \operatorname{ch}^2 t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{1}{2} t^2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = te^{-t}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$

Завдання 4

Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1 - e^{4x}}$;

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\ln \cos x}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - x^2 - 1}{1 - \cos x}$;

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7^x - 1}{6^x - 1}$;

6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{7x^4 - 8x^3 + 3x - 2}{x^5 - 4x^3 + 3}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x^2}$;

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$;

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$;

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + x^3)}{x}$;

11. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - x^3 - 8}{x^3 - 3x - 2}$;

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{x}$;

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1}$;

15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4}{e^x}$;

16. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^5 - 3x^3 + x - 1}{x^4 + 3x^2 - x - 5}$;

17. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$;

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$;

19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-1}{e^{2x}-1}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{3^x-3^{-x}}$;

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^9+x^5-2}{x^4-x^3}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5-3x}{x^3-\sin x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^2}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\sin x}$;

26. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$;

28. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4+x^3+x-26}{x^4-x^2-12}$;

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{e^{x^2}-1}$;

30. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Завдання 5

Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\mathrm{tg}\frac{3}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \ln x^2$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (2x-\pi)\,\mathrm{tg}\,x$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x \cdot \ln x^2$.

7. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} x \arcsin\frac{4}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \left(1-x^2\right)\mathrm{ctg}\,\pi x$.

10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{tg}\,x \ln x^2$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)\ln x$.

16. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to \infty} x\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\cdot\ln\cos x$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x^2$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to +0} x\ln\dfrac{1}{x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right).$

27. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2.$

28. $\lim\limits_{x\to +0} \sin x \ln \mathrm{ctg}\, x.$

29. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{tg}\, 2x.$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{tg}\, x^{\sin x}.$

Завдання 6

Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1. $y=\frac{3x-2x^3}{3}, x_0=1.$

2. $x=t^3+1, y=t^2, t_0=-2.$

3. $y=\frac{x^2}{10}+3, x_0=2.$

4. $x=\sin t, y=a^t, t_0=0.$

5. $y=\frac{x^2-2x-3}{4}, x_0=4.$

6. $x=\sin t, y=\cos 2t, t_0=\frac{\pi}{6}.$

7. $y=x^2-7x+3, x_0=1.$

8. $x=a\sin^3 t, y=a\cos^3 t, t_0=\frac{\pi}{3}.$

9. $y = x^2 - 16x + 7, x_0 = 1.$

10. $x = \sqrt{3}\cos t, y = \sin t, t_0 = \frac{\pi}{3}.$

11. $y = \sqrt{x-4}, x_0 = 8.$

12. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t_0 = \frac{\pi}{3}.$

13. $y = \sqrt{x+4}, x_0 = -3.$

14. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3, t_0 = 1.$

15. $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7, x_0 = 2.$

16. $x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}, t_0 = 1.$

17. $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2, x_0 = 1.$

18. $x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = -1.$

19. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x_0 = 4.$

20. $x = t\cos t - 2\sin t, y = t\sin t + 2\cos t, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}.$

21. $y = \sqrt{x+4}, x_0 = -3.$

22. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3, t_0 = 1.$

23. $y = 2x^2 - 3x + 1, x_0 = 1.$

24. $x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1, y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, t_0 = \frac{\pi}{4}.$

25. $y=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2}, x_0=3.$

26. $x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{4}t^4, y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3, t_0=0.$

27. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}, x_0=2.$

28. $x=\sin^2 t, y=\cos^2 t, t_0=\dfrac{\pi}{6}.$

29. $y=2x^2+3, x_0=-1.$

30. $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y=\arccos t, t_0=1.$

9. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ

Формула Тейлора.

Дуже часто при дослідженні функції виникає потреба наблизити її більш простою функцією, наприклад, многочленом, тобто представити функцію у вигляді

$$f(x) = P(x) + r(x),$$

де $P(x)$ — многочлен, а доданок $r(x)$, який називається залишковим членом, можна зробити як завгодно малим. Формула Тейлора дає таке наближення.

Теорема (формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано). Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ та $n\in\mathbb{N}$. Якщо виконуються умови

1) $\forall x\in(a,b)\quad \exists f^{(n)}(x)$;

2) $\exists f^{(n)}(x_0)$,

то для довільного $x\in(a,b)$ має місце представлення

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^n\Big),\quad x\to x_0.$$

Теорема (формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа). Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ та $n\in\mathbb{N}$. Якщо виконується умова

$$\forall x\in(a,b)\quad \exists f^{(n+1)}(x),$$

то для довільного $x\in(a,b)$ має місце представлення

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

де ξ — деяка середня точка між x та x_0.

Формула Тейлора при $x_0 = 0$ також називається формулою Маклорена.

Формули Маклорена для деяких елементарних функцій:

1) $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right), \quad x \to 0;$$

2) $$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0;$$

3) $$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0;$$

4) $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right), \quad x \to 0$$

при $x > -1$;

5) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o\left(x^n\right) =$$

$$= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right),$$

при $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x > -1$, де

$$C_\alpha^k=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}.$$

6) $$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right),\quad x\to 0;$$

7) $$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+2}\right)=$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+2}\right),\quad x\to 0.$$

Застосування формули Тейлора.

Формула Тейлора широко використовується при знаходженні границь та у наближених обчисленнях.

Приклад 1. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Розв’язання. За формулою Маклорена

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(x^{-2}\right)}{x^{-2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$. □

Приклад 2. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Розв'язання. За формулою Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)-x-x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)-x-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$. □

Приклад 3. Знайти, для яких значень x справедлива з точністю до $0,001$ наближена формула

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}.$$

Розв'язання. Використаємо формулу Маклорена для косинуса з залишковим членом у формі Лагранжа:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+r(x),$$

де

$$r(x) = -\frac{\cos\xi}{4!}x^4 = \frac{1}{24}x^4.$$

Похибка буде менше $0,001$, якщо

$$\left|r(x)\right| = \frac{1}{24}x^4 < 0,001,$$

тобто при $|x| < \sqrt[4]{0,024} \approx 0,39.$

Відповідь: $x \in (-0,39; 0,39)$. □

Монотонність функцій. Екстремуми.

Теорема.

1. Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку невід'ємна. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку недодатна.

2. Якщо функція має додатну похідну в кожній точці деякого проміжку, то функція на цьому проміжку зростає. Якщо функція має від'ємну похідну в кожній точці деякого проміжку, то функція на цьому проміжку спадає.

Геометричне пояснення цієї теореми досить просте, якщо пригадати, що $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$.

Кажуть, що

1) функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має строгий локальний максимум, якщо $f(x) < f(x_0)$ в деякому досить малому проколеному околі точки x_0.

2) функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має строгий локальний мінімум, якщо $f(x) > f(x_0)$ в деякому досить малому проколеному околі точки x_0;

3) функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має локальний максимум, якщо $f(x) \le f(x_0)$ в деякому досить малому околі точки x_0;

4) функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має локальний мінімум, якщо $f(x) \ge f(x_0)$ в деякому досить малому околі точки x_0.

Максимуми й мінімуми функції називають екстремумами, або екстремальними значеннями функції.

Зауваження. З означення екстремумів випливає, що функція, визначена на проміжку, може досягати екстремальних значень тільки всередині проміжку, але не на його кінцях.

Зауваження. Не слід вважати, що максимум і мінімум функції є відповідно її найбільшим і найменшим значенням на проміжку.

Теорема Ферма (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційовна функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ максимум або мінімум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю:

$$f'(x_0) = 0 .$$

Зауваження. Якщо в деякій точці похідна функції дорівнює нулю, то це ще не означає, що функція в цій точці обов'язково має екстремум, тобто теорема Ферма дає тільки необхідну умову існування екстремуму, але не достатню. Наприклад, функція $y = x^3$ екстремуму не має, хоча її похідна в точці $x = 0$ дорівнює нулю.

Зауваження. У точках, в яких похідна функції не існує, функція може мати максимум або мінімум, а може не мати ані того, ані іншого.

Значення аргументу, для яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками. Значення аргументу, для яких похідна дорівнює, називаються стаціонарними точками.

Зі сказаного вище випливає, що екстремальні значення функція може приймати лише в критичних точках, проте не в кожній критичній точці функція приймає екстремальне значення.

Теорема (перша достатня умова існування екстремуму). Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку, що містить критичну точку x_0. Тоді якщо при переході зліва направо через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "+" на "–", то в точці x_0 функція має максимум;

якщо при переході зліва направо через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+", то в точці x_0 функція має мінімум, тобто

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{при} \quad x < x_0, \\ f'(x) < 0, & \text{при} \quad x > x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{в точці } x_0 \text{ — максимум;}$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & \text{при} \quad x < x_0, \\ f'(x) > 0, & \text{при} \quad x > x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{в точці } x_0 \text{ — мінімум.}$$

Теорема (друга достатня умова існування екстремуму). Нехай

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Тоді

1) якщо число m парне і $f^{(m)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого локального максимуму;

2) якщо число m парне і $f^{(m)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого локального мінімуму;

3) якщо число m непарне, то в точці x_0 немає екстремуму.

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Представимо функцію у вигляді

$$f(x) = 2\left(\operatorname{ch} x + \cos x\right)$$

та дослідимо похідні вищих порядків в точці $x_0 = 0$:

$$f'(0) = 2\left(\operatorname{sh} x - \sin x\right)\Big|_{x=0} = 0,$$

$$f''(0)=2\left(\operatorname{ch}x-\cos x\right)\Big|_{x=0}=0,$$

$$f'''(0)=2\left(\operatorname{sh}x+\sin x\right)\Big|_{x=0}=0,$$

$$f^{(4)}(0)=2\left(\operatorname{ch}x+\cos x\right)\Big|_{x=0}=4>0.$$

Отже, точка $x_0=0$ є точкою локального мінімуму.

Відповідь: $f_{\min}(0)=4.$ □

Найбільше та найменше значення функції.

Зі сказаного вище випливає, що неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$ може досягати своїх найбільших і найменших на цьому відрізку значень лише на кінцях відрізка або в критичних точках, які належать інтервалу $(a;b)$. Тому, щоб знайти найбільші і найменші значення функції, яка неперервна на відрізку $[a;b]$, треба:

1) знайти критичні точки функції, які належать інтервалу $(a;b)$;
2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках і в точках $x=a$, $x=b$;
3) серед обчислених значень вибрати найбільші і найменші.

Опуклість графіків функцій. Точки перегину.

Функція називається опуклою донизу на проміжку (a,b), якщо для довільного числа $\alpha\in[0;1]$

$$\forall x_1,x_2\in(a;b)\quad f\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

Функція називається строго опуклою донизу на проміжку (a,b), якщо для довільного числа $\alpha\in(0;1)$

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b),\, x_1 \neq x_2 \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція $y = f(x)$ є строго опуклою донизу на деякому інтервалі тоді і тільки тоді, коли всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Функція називається опуклою вгору на проміжку (a,b), якщо для довільного числа $\alpha \in [0;1]$

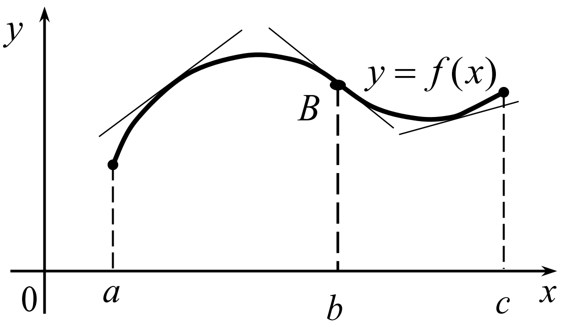
$$\forall x_1, x_2 \in (a;b) \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція називається строго опуклою вгору на проміжку (a,b), якщо для довільного числа $\alpha \in (0;1)$

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b),\, x_1 \neq x_2 \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція $y = f(x)$ є строго опуклою вгору на деякому інтервалі тоді і тільки тоді, коли всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точка неперервності функції, яка відділяє опуклу вгору частину графіка функції від опуклої донизу, називається точкою перегину.



На рисунку функція $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(a;b)$, вгнута на інтервалі $(b;c)$ і точка $B(b; f(b))$ — точка перегину.

Теорема. Якщо в усіх точках інтервалу $(a;b)$ $f''(x) < 0$, то функція $y = f(x)$ на цьому інтервалі опукла; якщо ж в усіх точках інтервалу $(a;b)$ $f''(x) > 0$, то функція $y = f(x)$ на цьому інтервалі вгнута.

Точки, в яких $f''(x)=0$ або не існує, називаються критичними точками другого роду.

Теорема. Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $y=f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину функції $y=f(x)$.

Теорема. Нехай

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(m-1)}(x_0)=0, \quad f^{(m)}(x_0)\neq 0.$$

Тоді

1) якщо число m непарне, то x_0 — точка перегину функції f;

2) якщо число m парне, то x_0 не є точкою перегину функції f.

Асимптоти

Пряма l називається асимптотою кривої, якщо відстань від змінної точки $M(x;y)$ кривої до прямої l прямує до нуля, коли точка $M(x;y)$, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Розрізняють вертикальні й невертикальні (похилі) асимптоти (горизонтальні асимптоти розглядають як окремі випадки похилих асимптот).

Для існування похилої асимптоти $x=x_0$ графіка функції f необхідно і достатньо, щоб хоча б одна з границь $f\left(x_0-0\right)$, $f\left(x_0+0\right)$ дорівнювала нескінченності.

Похилу асимптоту $y=kx+b$ графіка функції можна знайти, користуючись формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Якщо хоча б одна з указаних границь не існує або дорівнює нескінченності, то графік функції похилих асимптот не має.

Зауваження. Асимптоти кривої при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ можуть бути різні. У цьому випадку відповідні границі потрібно обчислювати окремо при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Побудова графіків функцій.

Дослідити функцію та побудувати її графік можна за такою схемою:

1) знайти область визначення функції;
2) дослідити функцію на парність та непарність;
3) дослідити функцію на періодичність;
4) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;
5) дослідити функцію на неперервність (знайти та дослідити точки розриву функції);
6) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
7) знайти інтервали опуклості, точки перегину;
8) знайти асимптоти графіка функції;
9) побудувати графік функції, враховуючи результати досліджень, проведених у п. 1–8;
10) знайти область значень функції.

Якщо функція парна (або непарна), то достатньо побудувати її графік лише для $x \geq 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (або відносно початку координат).

Приклад 5. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Область визначення функції. Знаменник дробу повинен бути відмінним від нуля, тому

$$x^2 - 1 \neq 0, \ x \neq \pm 1,$$

$$D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

2) Парність, непарність функції. Оскільки

$$y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -y(x),$$

то дана функція непарна. Зазначимо, що графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

3) Періодичність функції. Функція неперіодична.

4) Точки перетину графіка функції з координатними осями.

$$Ox : \ y = 0, \quad \frac{x}{x^2 - 1} = 0, \quad x = 0, \quad (0; 0);$$

$$Oy : \ x = 0, \quad y = \frac{0}{0^2 - 1} = 0, \quad (0; 0).$$

5) Неперервність функції (треба знайти та дослідити точки розриву функції).

Функція неперервна в усіх точках, які належать області визначення функції, і має розриви в точках $x = \pm 1$. Дослідимо характер розриву в точках $x = \pm 1$.

$x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x}{x^2-1}=\left\{\dfrac{-1}{+0}\right\}=-\infty,\\ \lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x}{x^2-1}=\left\{\dfrac{-1}{-0}\right\}=+\infty,\end{array}\right|\Rightarrow \begin{array}{l}x=-1 \text{ – точка розриву другого роду,}\\ x=-1 \text{ – вертикальна асимптота графіка.}\end{array}$$

$x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x^2-1}=\left\{\dfrac{1}{-0}\right\}=-\infty,\\ \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{x^2-1}=\left\{\dfrac{1}{+0}\right\}=+\infty,\end{array}\right|\Rightarrow \begin{array}{l}x=1 \text{ – точка розриву другого роду,}\\ x=1 \text{ – вертикальна асимптота графіка.}\end{array}$$

6) Монотонність, екстремуми, опуклість, вгнутість точки перегину.

Знайдемо критичні точки 1-го і 2-го роду, тобто точки, в яких дорівнює нулю або не існує відповідна перша чи друга похідна даної функції. Маємо:

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2},$$

$$y''=-\frac{2x(x^2-1)^2-(x^2+1)\,2(x^2-1)\,2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Похідні y' і y'' не існують лише при $x=\pm 1$, тобто тільки в тих точках, які не належать області визначення функції. Тому критичними точками будуть лише ті точки, де похідні y' і y'' дорівнюють нулю.

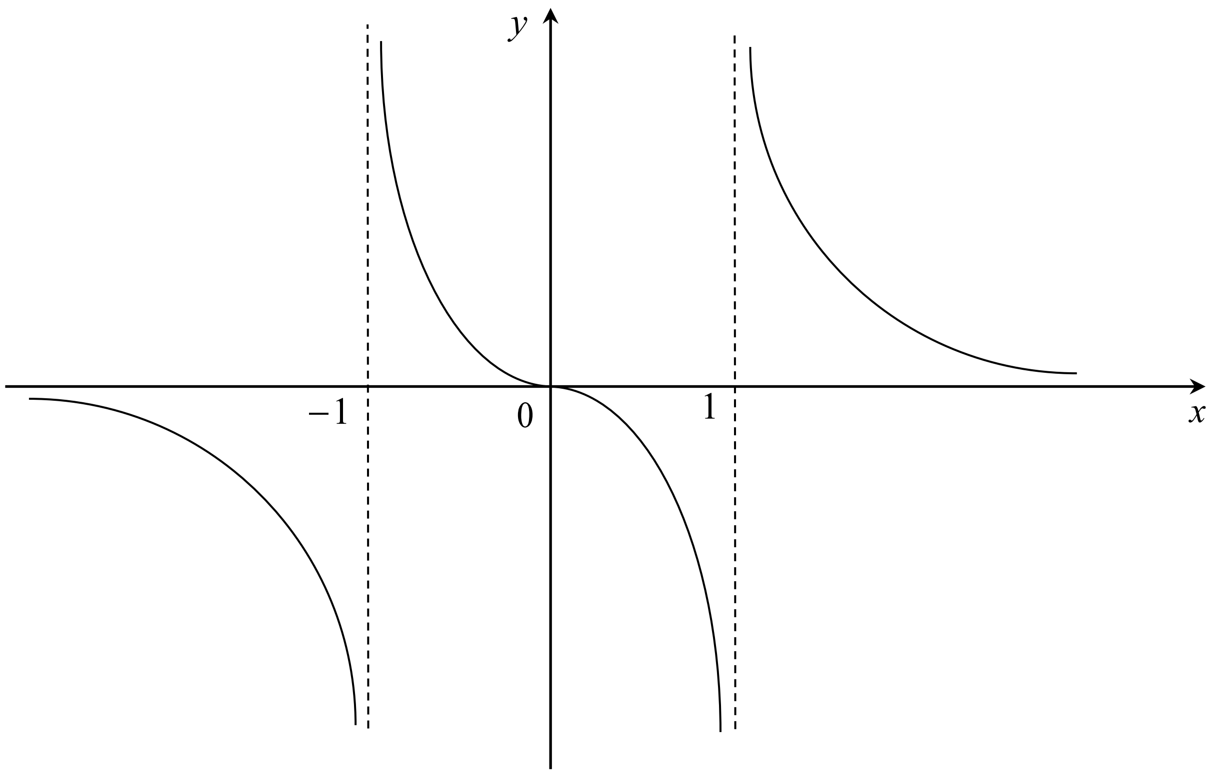
Оскільки $y' \neq 0$, то критичних точок 1-го роду немає. Похідна y'' дорівнює нулю при $x=0$, тому $x=0$ — критична точка 2-го роду.

Таким чином, y' зберігає сталий знак у кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$, а y'' — у кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

Щоб визначити знаки похідних y', y'' в кожному з указаних інтервалів, достатньо визначити знаки похідних у якій-небудь точці кожного інтервалу. Результати такого дослідження зручно звести в таблицю.

x	(–∞; –1)	(–1; 0)	0	(0; 1)	(1; +∞)
y'	–	–	–	–	–
y''	–	+	0	–	+
y	↘ ∩	↘ ∪	0 точка перегину	↘ ∩	↘ ∪

7) Асимптоти. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$, при $x \to \infty$.



8) За результатами досліджень побудуємо графік функції.

9) Область значень функції : $E_f = \mathbb{R}$.

Завдання 1

Обчислити наближено значення функції у вказаній точці з указаною похибкою:

1. $y=2^x,\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

2. $y=\sqrt[3]{1+x},\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

3. $y=\sin x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

4. $y=e^x,\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

5. $y=\ln\ 1+x\ ,\quad x_0=0{,}05,\quad \varepsilon=0{,}001.$

6. $y=3^x,\quad x_0=\dfrac{1}{3},\quad \varepsilon=0{,}001.$

7. $y=\sqrt[4]{1+x},\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

8. $y=\cos x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

9. $y=e^x,\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

10. $y=\ln\ 1-x\ ,\quad x_0=0{,}05,\quad \varepsilon=0{,}001.$

11. $y=5^x,\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

12. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}},\quad x_0=0{,}2,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

13. $y=\operatorname{sh} x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

14. $y=e^{-x},\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

15. $y=\ln\ 1+x\ ,\quad x_0=0{,}01,\quad \varepsilon=0{,}001.$

16. $y=2^x-1,\quad x_0=0{,}3,\quad \varepsilon=0{,}001.$

17. $y=\sqrt[5]{1+x},\quad x_0=-0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

18. $y=\operatorname{ch}x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

19. $y=e^x,\quad x_0=0{,}7,\quad \varepsilon=0{,}001.$

20. $y=x\ln\ 1+x\ ,\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

21. $y=2^x,\quad x_0=0{,}01,\quad \varepsilon=0{,}001.$

22. $y=\sqrt[7]{1+x},\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

23. $y=\sin^2 x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

24. $y=e^{-2x},\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

25. $y=\ln\ 1+x^2\ ,\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

26. $y=2^{-x},\quad x_0=0{,}2,\quad \varepsilon=0{,}001.$

27. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}},\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

28. $y=\cos^2 x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

29. $y=e^{3x},\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

30. $y=\ln\ 1+2x\ ,\quad x_0=0{,}01,\quad \varepsilon=0{,}001.$

Завдання 2

Знайти найбільше те найменше значення функції на відрізку:

1. $y=\ln(x^2-2x+2),[0;3].$

2. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1;4].$

3. $y = \frac{3x}{x^2 + 1}, [0;5].$

4. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, [1;4].$

5. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \left[-\frac{1}{2};0\right].$

6. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}, [0;6].$

7. $y = (x+2)e^{1-x}, [-2;2].$

8. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2 - 2x + 5}, [-3;3].$

9. $y = \ln(x^2 - 2x + 4), \left[-1;\frac{3}{2}\right].$

10. $y = 2\sqrt{x} - x, [0;4].$

11. $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}, [-1;1].$

12. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-7)}, [-1;5].$

13. $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3, [1;2].$

14. $y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1;9].$

15. $y = \sqrt{4x - x^3}, [-2;2].$

16. $y=\dfrac{10x}{x^2+1}$, $[0;3]$.

17. $y=4-e^{-x^2}$, $[0;1]$.

18. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2(5-x)}$, $[-3;3]$.

19. $y=x+\dfrac{4}{x^2}$, $[1;2]$.

20. $y=2x^2+\dfrac{108}{x}$, $[2;4]$.

21. $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$, $\left[-\dfrac{4}{5};3\right]$.

22. $y=x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}$, $[2;5]$.

23. $y=e^{6x-x^2}$, $[-3;3]$.

24. $y=2\sqrt{x-1}-x$, $[1;5]$.

25. $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $[1;4]$.

26. $y=3x^4-16x^3+2$, $[-3;1]$.

27. $y=2x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x-2}$, $[-2;1]$.

28. $y=(3-x)e^{-x}$, $[0;5]$.

29. $y=x^2+4x+\dfrac{16}{x+2}$, $[-1;2]$.

30. $y=108x-x^4$, $[-1;4]$.

Завдання 3

Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x.$

2. $y = x \operatorname{arctg} x.$

3. $y = \frac{\ln x}{x}.$

4. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}.$

5. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}.$

6. $y = x \ln x.$

7. $y = x^4 - 2x^2 + 2.$

8. $y = x^2 \ln x.$

9. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}.$

10. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$

11. $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$

12. $y = \frac{1}{x^2 - 1}.$

13. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$

14. $y = xe^{-x}.$

15. $y = \dfrac{x^3}{x+2}$.

16. $y = x - \ln(x+1)$.

17. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

18. $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$.

19. $y = x + \dfrac{1}{x}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x+1}$.

21. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

22. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$.

23. $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$.

24. $y = \dfrac{x^4-3}{x}$.

25. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

26. $y = \dfrac{4}{x^2-4}$.

27. $y = x + \ln(x+1)$.

28. $y = x - \dfrac{1}{x}$.

29. $y = \dfrac{x^2}{x-3}$.

30. $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

10. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Первісна. Поняття невизначеного інтеграла.

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, первісними функції $f(x) = 3x^2$ будуть функції x^3, $x^3 + 1$, $x^3 + 0{,}5$ і взагалі $F(x) = x^3 + C$, де C — довільна стала, оскільки $F'(x) = = (x^3 + C)' = 3x^2$. Цей приклад показує, що якщо функція $f(x)$ має одну первісну, то вона може мати їх нескінченно багато. Виникає питання: як знайти всі первісні даної функції, якщо відома одна з них? Відповідь дає така теорема.

Теорема. *Якщо* $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на деякому проміжку, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому проміжку має вигляд $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Множину всіх первісних $F(x) + C$ функції $f(x)$ називають невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і позначають $\int f(x)\,dx$. Таким чином, за означенням

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{якщо} \quad F'(x) = f(x).$$

При цьому $f(x)$ називають підінтегральною функцією, $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом, x — змінною інтегрування, знак $\int$ — знаком інтегралу, C — сталою інтегрування.

Операцію знаходження первісної функції $f(x)$ називають інтегруванням цієї функції.

Операції диференціювання та інтегрування є оберненими одна до одної.

Виникає питання: чи для кожної функції $f(x)$ існує первісна, а отже, і невизначений інтеграл? Виявляється, що не для кожної. Але справедлива така

Теорема. Усяка неперервна на проміжку $[a,b]$ функція має на цьому проміжку первісну.

Елементарні властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

4. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \int \left(A\, f\left(x\right)\right) dx = A\int f(x)\,dx.$

5. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

6. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Таблиця основних інтегралів.

1. $\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1.$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
3. $\int a^{u}\,du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, \qquad a > 0, \;\; a \neq 1.$
4. $\int e^{u}\,du = e^{u} + C.$
5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$
6. $\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C.$

7. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$

8. $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C.$

9. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C.$

10. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C.$

11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

12. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$

13. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

14. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$

16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C.$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C.$

19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$

20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{u^2 + A}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C.$

Безпосереднє інтегрування.

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла й таблиці інтегралів.

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int \left(x^5 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx; \qquad \text{б) } \int \mathrm{tg}^2\, x dx.$$

Розв’язання. Користуючись правилами інтегрування і таблицею інтегралів, дістанемо:

$$\text{а) } \int \left(x^5 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \int x^5 dx - 4\int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-2} dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - 4\ln|x| - \frac{3}{x} + C.$$

$$\text{б) } \int \mathrm{tg}^2\, x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

Відповідь: а) $\frac{x^6}{6} - 4\ln|x| - \frac{3}{x} + C$; б) $\mathrm{tg}\, x - x + C$. □

Метод підстановки (заміни змінної).

Метод підстановки є одним з основних методів інтегрування. Більше того, вивчення методів інтегрування в основному зводиться до з’ясування того, яку потрібно зробити підстановку в тому чи іншому випадку.

Теорема. Якщо

$$\forall x \in (a,b) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

і $\varphi: (\alpha, \beta) \to (a,b)$ — довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\forall t \in (\alpha, \beta) \quad \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Зауваження. Останню формулу можна записати у вигляді

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

де $u=\varphi(t)$. Це пояснює, чому в позначенні інтеграла присутній диференціал.

З цієї дуже важливої теореми випливає, що таблиця інтегралів залишається правильною незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною або довільною диференційованою функцією. Таким чином, з однієї формули можна одержувати безліч інших.

Наприклад,

$$\int e^u du = e^u + C \quad \Rightarrow \quad \int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2} d\left(x^2\right) = e^{x^2} + C,$$

$$\int e^u du = e^u + C \quad \Rightarrow \quad \int \cos x e^{\sin x} dx = \int e^{\sin x} d\sin x = e^{\sin x} + C ,$$

$$\int e^u du = e^u + C \quad \Rightarrow \quad \int e^{7x+5} dx = \frac{1}{7} e^{7x+5} + C .$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}\, dx ; \qquad \text{б) } \int \sin^5 x \cos x dx .$$

Розв’язання.

а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}\, dx$. Застосовуючи метод підстановки, одержимо:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}\, dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t, \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \end{array} \right| = \int t^7 dt = \frac{1}{8} t^8 + C = \frac{1}{8} \operatorname{arctg}^8 x + C .$$

Цей інтеграл можна було б обчислити і методом введення функції під знак диференціала:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}\, dx = \int \operatorname{arctg}^7 x \; d\left(\operatorname{arctg} x\right) = \frac{1}{8} \operatorname{arctg}^8 x + C .$$

б) Спосіб 1 (метод заміни змінної).

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

Спосіб 2 (метод введення функції під знак диференціала).

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^5 x \, d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{8} \operatorname{arctg}^8 x + C$; б) $\frac{1}{6} \sin^6 x + C$. □

Різниця між методом заміни змінної та методом введення функції під знак диференціала полягаю, по суті, лише в оформленні.

Інтегрування частинами.

Нехай $u(x)$, $v(x)$ — функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді

$$d(uv) = udv + vdu$$

або

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруючи цю рівність, дістанемо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

або, враховуючи властивість 2 невизначених інтегралів,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами.

Запишемо деякі інтеграли, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) в інтегралах виду $\int P_n(x)\,e^{ax}dx,\ \int P_n(x)\sin ax\,dx,\ \int P_n(x)\cos ax\,dx,$ де $P_n(x)$ — многочлен степеня n, за u слід брати $P_n(x)$, а за dv — вираз, що залишився;

2) в інтегралах виду $\int P_n(x)\ln x\,dx,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int P_n(x)\arcsin x\,dx,$ $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int P_n(x)\arccos x\,dx$ слід позначати $dv = P_n(x)\,dx$.

3) інтеграли $\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ \int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int \cos\ln x\,dx,\ \int \sin\ln x\,dx$ тощо обчислюються за допомогою так званого циклічного інтегрування.

Приклад 3. Обчислити інтеграли:

а) $\int (x^2+3x+2)\sin x dx$; б) $\int \ln(2x+3)\,dx$.

Розв’язання.

а) $$\int (x^2+3x+2)\sin x dx = \left|\begin{matrix} u = x^2+3x+2,\ dv=\sin x\,dx, \\ du=(2x+3)dx,\ v=-\cos x \end{matrix}\right| =$$

$$= -(x^2+3x+2)\cos x + \int (2x+3)\cos x dx = \left|\begin{matrix} u=2x+3,\ dv=\cos x dx, \\ du=2dx,\quad v=\sin x \end{matrix}\right| =$$

$$= -(x^2+3x+2)\cos x + (2x+3)\sin x - \int 2\sin x dx =$$

$$= -(x^2+3x+2)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x + C =$$

$$= (2x+3)\sin x - (x^2+3x)\cos x + C\,.$$

б) $\int \ln(2x+3)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln\left(2x+3\right), & dv=dx, \\ du=\dfrac{2}{2x+3}dx, & v=x, \end{array} \right| = x\ln(2x+3) - \int \dfrac{2x}{2x+3}\,dx =$

$$= x\ln(2x+3) - \int \frac{(2x+3)-3}{2x+3}\,dx = x\ln(2x+3) - \int dx + 3\int \frac{dx}{2x+3} =$$

$$= x\ln(2x+3) - x + \frac{3}{2}\ln(2x+3) + C = \left(x+\frac{3}{2}\right)\ln(2x+3) - x + C.$$

Відповідь: а) $(2x+3)\sin x - (x^2+3x)\cos x + C$; б) $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\ln(2x+3) - x - C$. □

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int e^x \sin 2x\,dx.$$

Розв’язання. Позначимо цей інтеграл I та застосуємо метод циклічного інтегрування:

$$I = \int e^x \sin 2x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\sin 2x, & dv=e^x dx, \\ du=2\cos 2x\,dx, & v=e^x, \end{array} \right| = e^x\sin 2x - 2\int e^x \cos 2x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u=\cos 2x, & dv=e^x dx, \\ du=-2\sin 2x\,dx, & v=e^x, \end{array} \right| = e^x\sin 2x - 2\left(e^x\cos 2x + 2\int e^x \sin 2x\,dx\right) + C_1 =$$

$$= e^x\sin 2x - 2e^x\cos 2x - 4I + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, ми одержали рівняння

$$I = e^x\sin 2x - 2e^x\cos 2x - 4I + C_1,$$

з якого легко знаходимо, що

$$I = \frac{1}{5}\left(e^x\sin 2x - 2e^x\cos 2x\right) + C, \quad C = \frac{1}{5}C_1.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}\left(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x\right) + C.$ □

Інтеграли, що “не беруться”.

Невизначений інтеграл існує для довільної неперервної функції $f(x)$, тобто

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Але при цьому не завжди первісна $F(x)$ є елементарною функцією. Про такі інтеграли кажуть, що вони “не беруться”. Наприклад:

$$\int e^{-x^2} dx = F(x) + C, \quad \text{де} \quad F(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \dots\,.$$

Приклади інтегралів, які “не беруться”:

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ — інтегральний логарифм,}$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \text{ — інтегральний синус,}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx \text{ — інтегральний косинус,}$$

$$\int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx \text{ — інтеграли Френеля та інші.}$$

У зв’язку з цим важливо виділити такі класи функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції. Одним із таких класів функцій, інтеграли від яких завжди виражаються в елементарних функціях є клас раціональних функцій.

Інтегрування раціональних функцій.

Раціональною функцією або раціональним дробом називають дріб

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\ ,$$

де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлени степеня m і n:

$$Q_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\quad P_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m.$$

Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m<n$, і неправильним, якщо $m\geq n$.

Неправильний дріб завжди можна записати у вигляді суми многочлена і правильного дробу.

Оскільки многочлени інтегруються дуже легко, то задача інтегрування раціональних функцій зводиться, таким чином, до інтегрування правильних дробів. Правильні дроби, у свою чергу, розкладаються на елементарні дроби. Тому зараз розглянемо інтегрування елементарних дробів.

Розрізняють чотири типи елементарних дробів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a},\quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n},\quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

де $n=2,3,\ldots,$ а тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $D=p^2-4q<0$.

Розглянемо, як інтегруються ці дроби.

I. $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln\left|x-a\right|+C$.

II. $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}dx=A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}+C=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$

III. Інтеграли від дробів третього типу представляють у вигляді лінійної комбінації двох інтегралів, в першому з яких у чисельнику стоїть похідна від знаменника, а в другому — одиниця. Таким чином, перший інтеграл зводиться до логарифму від знаменника, а другий до арктангенса.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{a} + C,$$

де $a=\sqrt{4q-p^2}$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx.$$

Розв’язання.

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{3x+2}{(x+1)^2+4}dx = \begin{vmatrix} x+1=u, \\ dx=du, \\ x=u-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{3u-1}{u^2+4}du = \frac{3}{2}\int \frac{d(u^2+4)}{u^2+4} - \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{3}{2}\ln(u^2+4) -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$ □

IV. Інтеграли від дробів четвертого типу, як й інтеграли третього типу, представляють у вигляді лінійної комбінації двох інтегралів, в першому з яких у чисельнику стоїть похідна від знаменника, а в другому — одиниця.

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=$$

$$=-\frac{M}{2(n-1)}\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n}dx,$$

де $a=\sqrt{4q-p^2}$, $t=x+\frac{p}{2}$.

Інтеграл

$$I_n=\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n}dx$$

обчислюють за рекурентною формулою

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+(2n-1)I_n\right), \quad n\geq 1,$$

$$I_1=\int \frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Як відомо з алгебри, многочлен $Q_n(x)$ степеня n може бути розкладений на лінійні та квадратні множники:

$$Q_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

де a_0, x_i, p_i, q_i — дійсні числа; k_i, l_i — натуральні числа; $k_1 + \ldots + k_r + 2(l_1 + \ldots + l_s) = n, \quad p_i^2 - 4q_i < 0$.

Розглянемо правильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменник якого вже розкладений на лінійні та квадратні множники. Тоді цей дріб можна розкласти на суму елементарних дробів за такими правилами:

1) множнику $(x-a)^k$ відповідає сума дробів виду

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k};$$

2) множнику $(x^2 + px + q)^l$ відповідає сума дробів виду

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_l x + N_l}{(x^2 + px + q)^l},$$

де A_i, M_i, N_i — невизначені коефіцієнти.

Шукати ці невизначені коефіцієнти можна з огляду на те, що рівні многочлени мають рівні коефіцієнти при однакових степенях x.

Приклад 5. Обчислити інтеграл:

$$I = \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом. Виділимо цілу частину цього дробу:

$$\begin{array}{l|l} x^4+1 & x^3-2x^2+x \\ \underline{x^4-2x^3+x^2} & \overline{\quad x+2 \quad} \\ \quad 2x^3-x^2+1 & \\ \quad \underline{2x^3-4x^2+2x} & \\ \qquad 3x^2-2x+1 & \end{array}$$

Тоді

$$I=\int\left(x+2+\frac{3x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)^2}dx.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

$$3x^2-2x+1=A(x-1)^2+B(x^2-x)+Cx.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 3=A+B, \\ x & -2=-2A-B+C, \\ x^0 & 1=A \end{array}$$

звідки $A=1,\ B=2,\ C=2$. Далі маємо:

$$I=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$ □

Метод Остроградського.

Інтеграл від правильного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можна подати і вигляді

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

де дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ і $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ правильні, і якщо

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s},$$

то

$$Q_1(x) = (x - x_1)^{k_1 - 1} \cdots (x - x_r)^{k_r - 1} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1 - 1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s - 1},$$
$$Q_2(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_r)(x^2 + p_1 x + q_1) \cdots (x^2 + p_s x + q_s).$$

Коефіцієнти многочленів $P_1(x)$ та $P_2(x)$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів після диференціювання обох частин рівності:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Інтегрування тригонометричних функцій.

1. Інтеграли виду

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

де R — раціональна функція, завжди зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауваження. Універсальна тригонометрична підстановка завжди приводить до мети, але в силу своєї універсальності вона часто вимагає невиправдано громіздких обчислень. Тому в багатьох випадках зручніше користуватися іншими підстановками. Розглянемо деякі з них.

1) Якщо в інтегралі

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то зручно робити підстановку $\cos x = t.$

2) Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то зручно робити підстановку $\sin x = t$.

3) Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$ то зручно робити підстановку:

$$\mathrm{tg}\,x = t, \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \mathrm{arctg}\,t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Розглянемо більш докладно інтеграли виду

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx,$$

де m, n — цілі числа.

1) Якщо m — непарне додатне число, то зручно робити підстановку $\cos x = t.$

2) Якщо $n-$непарне додатне число, то зручно робити підстановку $\sin x = t.$

3) Якщо обидва показники m і n — парні невід'ємні числа, то треба робити пониження степенів синуса і косинуса за формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Для знаходження інтегралів виду

$$\int \mathrm{tg}^n\, x dx, \qquad \int \mathrm{ctg}^n\, x dx$$

зручно користуватися формулами

$$\mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \mathrm{ctg}^2\, x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

2. В інтегралах

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx, \qquad m \neq n$$

треба підінтегральну функцію записати у вигляді суми функцій за допомогою формул:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right].$$

Приклад 6. Обчислити інтеграли:

а) $\int \sin 3x \cos 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$.

Розв'язання.

а) Використаємо формулу

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right].$$

Тоді

$$\int\sin 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)\,dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 5x}{5}+\cos x\right)+C.$$

б) Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int\frac{dx}{3+2\cos x}=\left|\begin{array}{ll}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t, & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ x=2\operatorname{arctg}t, & dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{3+2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\int\frac{dt}{3(1+t^2)+2(1-t^2)}=2\int\frac{dt}{t^2+5}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C.$$

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos 5x}{5}+\cos x\right)+C$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}+C.$ □

Інтегрування ірраціональних функцій.

1. Інтеграли виду

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\,dx,$$

де $R(x,y)$ — раціональна функція відносно x і y, $a\neq 0$, зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки:

$$ax+b=t^n.$$

2. Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right) dx,$$

де R – раціональна функція , p_i, q_i — цілі числа , зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, де n — спільний знаменник дробів $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$.

Приклад 7. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Розв’язання.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(t+1)-1}{1+t} dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2(t - \ln(t+1)) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)) + C.$$

Відповідь: $2(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)) + C$ □

3. Квадратичні ірраціональності.

Інтеграли

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad a \neq 0$$

завжди можна раціоналізувати за допомогою підстановок Ейлера.

I. Якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$.

II. Якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\,x \pm \sqrt{c}$.

III.Якщо

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Частинні випадки:

1. $$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

2. Інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

зводиться до попереднього випадку заміною $t = \dfrac{1}{x - \alpha}$.

Інший метод інтегрування квадратичних ірраціональностей полягає в тому, що в підкореневому виразі виділяють повний квадрат і застосовують одну з таких підстановок:

1) в інтегралі

$$\int R\left(z, \sqrt{z^2 + a^2}\right) dz$$

використовують підстановки $z = a\,\mathrm{tg}\,t,\ z = a\,\mathrm{sh}\,t$;

2) в інтегралі

$$\int R\left(z, \sqrt{a^2 - z^2}\right) dz$$

використовують підстановки $z = a\sin t,\ z = a\cos t$;

3) в інтегралі

$$\int R\left(z, \sqrt{z^2 - a^2}\right) dz$$

використовують підстановки $z = \dfrac{a}{\cos t}$, $z = \dfrac{a}{\cos t}$, $z = a \operatorname{ch} t$.

Приклад 8. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x - 10 - x^2}}.$$

Розв’язання.

Спосіб I.

Застосуємо третю підстановку Ейлера. Оскільки

$$7x - 10 - x^2 = -(x-2)(x-5),$$

введемо заміну

$$\begin{aligned} &\sqrt{7x - 10 - x^2} = t(x-2), \\ &-(x-2)(x-5) = t^2 (x-2)^2, \\ &-(x-5) = t^2 (x-2), \end{aligned}$$

$$x = \frac{2t^2 + 5}{t^2 + 1}, \quad dx = -\frac{6t\,dt}{\left(t^2 + 1\right)^2}, \quad \sqrt{7x - 10 - x^2} = \frac{3t}{t^2 + 1}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x - 10 - x^2}} = -\int \frac{2t^2 + 5}{t^2 + 1} \cdot \frac{t^2 + 1}{3t} \cdot \frac{6t\,dt}{\left(t^2 + 1\right)^2} =$$

$$= -2\int \frac{2t^2 + 5}{\left(t^2 + 1\right)^2} dt = -4\int \frac{dt}{t^2 + 1} - 6\int \frac{dt}{\left(t^2 + 1\right)^2} = -4 \operatorname{arctg} t - 6 I_2,$$

де за рекурентною формулою

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + I_1\right),$$

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C_1.$$

Таким чином,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = -4\operatorname{arctg} t - 3\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t\right) + C =$$

$$= -7\operatorname{arctg} t - \frac{3t}{t^2+1} + C = -7\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}\right) - \sqrt{7x-10-x^2} + C.$$

Спосіб II.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = A\sqrt{7x-10-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

Продиференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{x}{\sqrt{7x-10-x^2}} = A\frac{7-2x}{2\sqrt{7x-10-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$2x = 7A - 2Ax + 2\lambda,$$
$$x:\quad 2 = -2A \quad\Rightarrow\quad A = -1,$$
$$x^0:\ 0 = 7A + 2\lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda = \frac{7}{2}.$$

Таким чином,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = -\sqrt{7x-10-x^2} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} =$$

$$= -\sqrt{7x-10-x^2} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}} =$$

$$= -\sqrt{7x-10-x^2} + \frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3} + C.$$

Спосіб III.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}}.$$

Зробимо підстановку $x-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}\sin t.$ Тоді

$$x=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t, \quad \sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\cos t, \quad dx=\frac{3}{2}\cos t\,dt,$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = \int \frac{\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t\right)\frac{3}{2}\cos t\,dt}{\frac{3}{2}\cos t} = \int\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{7}{2}t+\frac{3}{2}\cos t + C = \frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+\frac{3}{2}\cos\left(\arcsin\frac{2x-7}{3}\right)+C$$

$$= \frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+\frac{3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x-7}{3}\right)^2} = -\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+C.$$

Відповідь: $-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+C.$ □

4. Диференціальні біноми.

Диференціальним біномом називають вираз

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p,$$

де $a, b \in \mathbb{R}, \; m, n, p \in \mathbb{Q}.$

Теорема. Інтеграл від диференціального бінома раціоналізується

1) підстановкою $t^s = x,$ де s — спільний знаменник дробів m і n, якщо $p \in \mathbb{Z}$;

2) підстановкою $t^l = a + bx^n,$ де l — знаменник дробу $p,$ якщо $p \notin \mathbb{Z}, \quad \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$;

3) підстановкою $t^l = \dfrac{a + bx^n}{x^n},$ де l — знаменник дробу $p,$ якщо $p \notin \mathbb{Z}, \quad \dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}, \quad \dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}.$

Теорема (Чебишов). Якщо

$$p \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{m+1}{n} + p \notin \mathbb{Z},$$

то інтеграл

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

не виражається в елементарних функціях.

Завдання 1

Обчислити безпосереднім інтегруванням інтеграли:

1. $\int \left(3 - x^2\right)^3 dx.$

2. $\int x^2 \left(5 - x\right)^4 dx.$

3. $\int \left(1 - x\right)\left(1 - 2x\right)\left(1 - 3x\right) dx.$

4. $\int\left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2 dx.$

5. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx.$

6. $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

7. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

8. $\int\frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx.$

9. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

10. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

11. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$

12. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx.$

13. $\int\mathrm{tg}^2\,x\,dx.$

14. $\int\mathrm{ctg}^2\,x\,dx.$

15. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

16. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$

17. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx.$

18. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$

19. $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)} dx.$

20. $\int \frac{\left(1+x\right)^2}{x^2\left(1+x^2\right)} dx.$

21. $\int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x} dx.$

22. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$

23. $\int \frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx.$

24. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

25. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$

26. $\int \frac{\left(3^x - 5^x\right)^2}{15^x} dx.$

27. $\int \frac{x^6}{1-x^2} dx.$

28. $\int\left(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x\right)dx.$

29. $\int\frac{x^4}{1-x^2}dx.$

30. $\int\frac{\left(1+x\right)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx.$

Завдання 2

Обчислити інтеграли:

1. $\int(1-5x)\sin 2xdx$.

2. $\int(x^2+2x)\,e^{-x}dx$.

3. $\int(x^2-7x+2)\sin x\,dx$.

4. $\int(x^2+1)\,\sin 5x\,dx$.

5. $\int x^2e^{3x}dx$.

6. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

7. $\int x^3\operatorname{arctg} x\;dx$.

8. $\int(x-3)\cos\frac{x}{2}\;dx$.

9. $\int\frac{\ln x}{x^3}\;dx$.

10. $\int(x+2)\ln x\;dx$.

11. $\int (x^2+4)\, e^{-2x} dx$.

12. $\int (4x^2+x+2)\, \sin x\, dx$.

13. $\int \arccos x\, dx$.

14. $\int x \operatorname{arcctg} x\, dx$.

15. $\int (x^2+4x+3) \ln x\, dx$.

16. $\int (7x+4)\, e^{x+2} dx$.

17. $\int (x+1)^2 e^{-x} dx$.

18. $\int (8-7x^2) \sin x\, dx$.

19. $\int (2x^2+x)\, \cos x\, dx$.

20. $\int \left(x^2+1\right) e^{2x+3} dx$.

21. $\int x^2 \sin 2x\, dx$.

22. $\int x^3 e^x dx$.

23. $\int \left(2x+3\right) \cos 2x\, dx$.

24. $\int (x^2+2x)\, \sin x\, dx$.

25. $\int (x^2+3)\, e^{-x} dx$.

26. $\int (x+4)^3 \ln x\, dx$.

27. $\int (x^2-2x+5)\, e^{2x} dx$.

28. $\int (3-x)^2 e^{7x} dx$.

29. $\int (2-3x)\cos 3x\, dx$.

30. $\int (x^2+3x+2)\, \sin x\, dx$.

Завдання 3

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

2. $\int \frac{x+\sqrt{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

3. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} dx.$

4. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}.$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}.$

6. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x} dx.$

7. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}} dx.$

8. $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$

9. $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x - 9)}.$

11. $\int \frac{\sqrt{5+\ln x}}{x}\,dx.$

12. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4}}\,.$

13. $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx.$

14. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+3\sin x}.$

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+\mathrm{tg}\,x)}\,.$

16. $\int \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

17. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

18. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{2x}}.$

19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{7+3x^3}}.$

20. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{3+x^5}}.$

21. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

22. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}.$

23. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

24. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$

25. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$

26. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}} dx.$

27. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

28. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2}.$

29. $\int \sin^5 x \, dx.$

30. $\int \cos^5 x \, dx.$

Завдання 4

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{x^3+2}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

2. $\int \frac{dx}{x^3 - 4x}.$

3. $\int \frac{x^2\, dx}{(x-1)^3}$.

4. $\int \frac{x\ dx}{(x-1)(x^2-1)}$.

5. $\int \frac{x+7}{x^3-4x^2+4x}\ dx$.

6. $\int \frac{2x^4+1}{x^3+x}\ dx.$

7. $\int \frac{x^4+2x+3}{x^3-9x}\ dx.$

8. $\int \frac{x+4}{(x+1)(x^2-1)}\ dx.$

9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2}$.

10. $\int \frac{x-6}{x^3+2x^2+x}\ dx.$

11. $\int \frac{x+1}{x^3+4x}\ dx.$

12. $\int \frac{(x+2)\, dx}{x^3-7x^2+6x}$.

13. $\int \frac{\left(x+1\right)\ dx}{x^3+2x^2+5x}$.

14. $\int \frac{8x-15}{x^3-4x^2+5x}\ dx.$

15. $\int \frac{x^4+1}{x^2-x-2}\ dx.$

16. $\int \frac{x^2+2x}{(x+3)^3}\ dx.$

17. $\int \frac{2x+3}{(x+1)(x^2-3x+2)}\ dx.$

18. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

19. $\int \frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x}\ dx.$

20. $\int \frac{x\ dx}{(x+4)(x^2-1)}.$

21. $\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-5x+6}\ dx\ .$

22. $\int \frac{x^2+3x+4}{x^2+3x+2}\ dx.$

23. $\int \frac{x^3+2}{(x+1)(x^2+1)}\ dx\ .$

24. $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx.$

25. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6} dx.$

26. $\int \frac{x}{x^3-3x+2} dx.$

27. $\int \frac{x^5}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)} dx.$

28. $\int \frac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}dx.$

29. $\int \frac{x^2}{\left(x+2\right)^2\left(x+4\right)^2}dx.$

30. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$

Завдання 5

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^3}\, dx\,.$

2. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\, dx\,.$

3. $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\, dx\,.$

4. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$

5. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}.$

6. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}.$

7. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^3}\,.$

8. $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\, dx\,.$

9. $\int \frac{dx}{(x^2+25)^3}$.

10. $\int \frac{dx}{(x^2+6x+25)^2}$.

11. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^4}$.

12. $\int \frac{dx}{(x^2-6x+13)^3}$.

13. $\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^3}$.

14. $\int \frac{dx}{(x^2-6x+25)^2}$.

15. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^3}$.

16. $\int \frac{dx}{(x^2+16)^4}$.

17. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+10)^3}$.

18. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$.

19. $\int \frac{x-2}{(x^2+1)^4}\,dx$.

20. $\int \frac{2x-1}{(x^2+4)^3}\,dx$.

21. $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+2)^3}\,dx.$

22. $\int \frac{x^2-4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx.$

23. $\int \frac{x^2-1}{(x^2-6x+13)^2}\,dx\,.$

24. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx\,.$

25. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+15)^3}.$

26. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3}.$

27. $\int \frac{x^2+2x+3}{(x^2+2x+15)^2}\,dx\,.$

28. $\int \frac{x-2}{(x^2+4x+5)^3}\,dx.$

29. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+15)^3}.$

30. $\int \frac{x^2+2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx\,.$

Завдання 6

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{1+2\sin x}.$

2. $\int \dfrac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$.

3. $\int \dfrac{dx}{4 + 5\cos x}$.

4. $\int \dfrac{dx}{5 - 4\cos x}$.

5. $\int \dfrac{dx}{5 + 13\cos x}$.

6. $\int \dfrac{dx}{1 + 4\sin x}$.

7. $\int \dfrac{dx}{4 - 5\cos x}$.

8. $\int \dfrac{\cos x \ dx}{1 + \cos x}$.

9. $\int \dfrac{dx}{5 + 3\cos x}$.

10. $\int \dfrac{\sin x \ dx}{1 - \sin x}$.

11. $\int \dfrac{dx}{13 - 12\cos x}$.

12. $\int \dfrac{dx}{5 + 4\cos x}$.

13. $\int \dfrac{dx}{1 - 3\sin x}$.

14. $\int \dfrac{dx}{11 + 5\cos x}$.

15. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

17. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

18. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$.

19. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.

20. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$.

21. $\int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}$.

22. $\int \frac{dx}{2 - \cos x}$.

23. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$.

24. $\int \frac{dx}{5 - 3\sin x}$.

25. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x + 2\sin x}$.

26. $\int \frac{dx}{5 + 2\cos x - 4\sin x}$.

27. $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1 + \cos x} dx$.

28. $\int \dfrac{dx}{5\cos x + 10\sin x}$.

29. $\int \dfrac{dx}{3 + 2\cos x - \sin x}$.

30. $\int \dfrac{dx}{8 + 7\cos x - 4\sin x}$.

Завдання 7

Обчислити інтеграли:

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

2. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

3. $\int \dfrac{dx}{4 + 5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$.

4. $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

5. $\int \dfrac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$.

6. $\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos 3x} dx$.

7. $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$.

8. $\int \dfrac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

9. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos 2x}$.

10. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$

11. $\int \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}.$

12. $\int \mathrm{ctg}^4 x \, dx.$

13. $\int \dfrac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}.$

14. $\int \dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx.$

15. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$

16. $\int \dfrac{dx}{1-\sin^4 x}.$

17. $\int \mathrm{tg}^5 x \, dx.$

18. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{tg}^2 x + \sin^2 x}.$

19. $\int \dfrac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx.$

20. $\int \dfrac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx.$

21. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x}.$

22. $\int \dfrac{dx}{\cos^3 x}.$

23. $\int \mathrm{ctg}^6 x \, dx.$

24. $\int \dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx.$

25. $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

26. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$

27. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^5 x}.$

28. $\int \sin^6 x\, dx.$

29. $\int \cos^6 x\, dx.$

30. $\int \sin x \sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{3}dx.$

Завдання 8

Обчислити інтеграли:

1. $\int \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

2. $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

3. $\int \dfrac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}.$

4. $\int \dfrac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}.$

6. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

7. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}.$

8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}.$

9. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$

10. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$

11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}.$

12. $\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\,\frac{dx}{2x+1}.$

13. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}.$

16. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}.$

17. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\,dx.$

18. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx.$

19. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}.$

20. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}}\,dx.$

21. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}.$

22. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt{x}+1}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}}\,dx.$

23. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}.$

24. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx.$

25. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}\,dx}{\sqrt[6]{x-1}+1}.$

26. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}-2}{\sqrt[6]{x-1}+2}\,dx.$

27. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}\,dx.$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[6]{x+3}+1}\,dx.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$.

30. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$.

Завдання 9

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$.

2. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

3. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

5. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

6. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

7. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

8. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$.

9. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$.

10. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx.$

11. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx.$

12. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

14. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

16. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx.$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

18. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx.$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}.$

20. $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}.$

21. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2x^2-5x+1}}.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

23. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx.$

24. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$

25. $\int \frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

26. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

28. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x+x^2}}.$

29. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

30. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx.$

Завдання 10

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\,dx.$

3. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$

4. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}.$

6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

7. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

10. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[6]{1+x^6}}.$

11. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$

12. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$

13. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}\,dx.$

14. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^7}}\,dx.$

15. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx.$

16. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}.$

17. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx.$

18. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx.$

19. $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx.$

20. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}.$

21. $\int x^5\cdot\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\,dx.$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

23. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^5+1}}.$

24. $\int \frac{dx}{x^{11}\cdot\sqrt{x^4+1}}.$

25. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

26. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

27. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^4}}\,dx.$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^8}}\,dx.$

29. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x \cdot \sqrt[9]{x^5}}\,dx.$

30. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}}{x^2 \cdot \sqrt[9]{x}}\,dx.$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Справочное пособие, К.: Вища школа, 1985.
2. Фихтенгольц В. Н. Курс дифференциального и интегрального исчисления (Том 1, 2, 3). М.: Наука, 1969.
3. Ильин В.А., Позняк С.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1965.
4. Письменний Д.Т. Конспект лекций по высшей математике (частини 1, 2). М.: Рольф, 2000.
5. Берман Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1967.
6. І.В. Алєксєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. К., 2012.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. К.: Вища школа, 1998.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.1, М., Наука, 1981.
9. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т.1, М., Наука, 1983.
10. И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.
11. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., Физматгиз, 1972.

12. Гудименко Ф.С. Збірник задач з вищої математики. — К.: КДУ, 1967. — 352 с.

13. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.

14. Сборник задач по курсу высшей математики / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина,
П.Е. Дюбюк и др. — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.

15. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. — М.: Наука, 1984. — 592 с.

16. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. — М.: Наука, 1986. — 528 с.

ЗМІСТ