НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ______________

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
__________ О. І. Клесов
«___»_____________20__ р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
зі спеціальності 111 Математика
на тему: «Функції, які зберігають граничні властивості»

Виконав:
студент VI курсу, групи ОМ-81мп
Кобеляцький Владислав Віталійович __________

Керівник:
Зав. каф., д. ф.-м. н., проф.
Клесов О. І. __________

Рецензент:
Проф., д. ф.-м. н., проф.
Богданський Ю. В. __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________

Київ – 2019

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедри
________Клесов О. І.
"___"________20__р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Кобеляцькому Владиславу Віталійовичу

1. **Тема дисертації** «Функції, що зберігають граничні властивості», науковий керівник дисертації Клесов Олег Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджена наказом по університету від « 07 » листопада 2019 р. № 3850-С
2. **Термін здачі** студентом оформленої дисертації « 10 » грудня 2019 р.
3. **Об'єкт дослідження** функції, що належать класам ORV, PRV та POV.
4. **Предмет дослідження** граничні властивості функцій, що належать класам ORV, PRV та POV.
5. **Перелік питань, які мають бути розроблені**
   1) Ознайомитись з класами функцій ORV, WORV та їх властивостями. Розглянути приклади функцій, що належать до класів ORV, WORV.
   2) Розглянути та довести твердження та леми пов'язані з класами функцій ORV, WORV
   3) Ознайомитись з класами функцій PRV, WPRV та їх властивостями. Розглянути приклади функцій, що належать до класів PRV, WPRV.

4) Розглянути та довести твердження та леми пов'язані з класами функцій PRV, WPRV.

5) Ознайомитись з класами функцій POV, WPOV та їх властивостями. Розглянути приклади функцій, що належать до класів POV, WPOV.

6) Розглянути та довести твердження та леми пов'язані з класами функцій POV, WPOV.

7) Довести твердження про належність оберненої функції, від функції з класу POV, до класу POV або навести контр-приклади;

6. **Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу** 15 слайдів.

7. **Дата видачі завдання** « 02 » вересня 2019 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літературних джерел	02.09.2019 – 15.09.2019	Виконано
2.	Ознайомитись з класом функцій ORV	16.09.2019 – 29.09.2019	Виконано
3.	Розгляну приклади функцій з класу ORV	30.09.2019 – 13.10.2019	Виконано
4.	Ознайомитись з класом функцій PRV	14.10.2019 – 27.10.2019	Виконано
5.	Розгляну приклади функцій з класу PRV	28.10.2019 – 10.11.2019	Виконано
6.	Ознайомитись з класом функцій POV	11.11.2019 – 17.11.2019	Виконано
7.	Розгляну приклади функцій з класу POV	18.11.2019 – 24.11.2019	Виконано
8.	Довести твердження про належність оберненої функції, від функції з класу POV, до класу POV або навести контр-приклади	25.11.2019 – 01.12.2019	Виконано
9.	Оформлення дисертації	02.12.2019 – 10.12.2019	Виконано

Науковий керівник О. І. Клесов

Завдання прийняв до виконання В. В. Кобеляцький

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація складається з: __ сторінок, список використаної літератури містить __ першоджерел.

В дисертації вивчаються граничні властивості для функцій, що належать до таких класів, як: SV, RV, ORV, PRV, POV, та інших. Розглядаються властивості таких функцій та наведено приклади для кожного з класів. Доведено твердження про належність оберненої функції, від функції з класу POV, до класу POV.

Вперше, поняття правильно змінних функцій було введено Йованом Караматою ще в 30-х рока XX століття. Але створена Караматою теорія залишалась маловідомою довгий час. Вона почала активно розвиватись лише в 70-х роках минулого сторіччя та продовжує активно розвиватись і нині. А отже дана галузь математики є молодою та має багато не розв’язаних задач. Таким чином, можна впевнено стверджувати, що обрана тема є актуальною.

Мета роботи полягає в дослідженні граничних властивостей для ORV-, PRV- та POV-функцій.

Завданням для дипломного проекту є: ознайомлення з такими класами функцій, як: POV, PRV та ORV; пошук функцій та визначення їх належності до одного з вище згаданих класів; доведення твердження про належність оберненої функції, від функції з класу POV, до класу POV або наведення контр-прикладів. Об’єктом дослідження стали функції, що належать класам ORV, PRV та POV. Предметом дослідження стали граничні властивості функцій, що належать класам ORV, PRV та POV.

Під час роботи над дисертацією було отримано нові результати, які були не відомі раніше. На основі отриманих результатів було сформульовано теорему, яка була доведена двома різними способами. Використовуючи теорему та результати, отримані раніше іншими вченими, отримано наслідок з теореми для немонотонних функцій. Результати дисертації можна використовувати в різних галузях математики, приклади можливих напрямків для використання описані наприкінці дисертації.

Ключові слова: граничні властивості функцій, правильно змінні функції, повільно змінні функції, функції з класу ORV, функції з класу PRV, функції з класу POV, обернені функції.

ABSTRACT

The master's thesis consists of: __ pages, the list of used literature contains __ original sources.

The boundary properties for functions belonging to such classes as: SV, RV, ORV, PRV, POV, and others are studied in the dissertation. The properties of such functions are discussed and examples are given for each class. The assertion that the inverse function belongs, from a function of the POV class to the POV class, is proved.

For the first time, the notion of properly variable functions was introduced by John Karamata in the 1930s. But the Karamata theory remained little known for a long time. It began to develop actively only in the 70s of the last century and continues to develop actively today. Therefore, this field of mathematics is young and has many unsolved problems. Thus, it is safe to say that the topic chosen is relevant.

The purpose of the study is to investigate the boundary properties for ORV-, PRV-, and POV-functions.

The aim of the diploma project is: to get acquainted with such classes of functions as: POV, PRV and ORV; search for functions and determine their belonging to one of the above classes; bringing an assertion that an inverse function belongs, from a POV class function, to a POV class, or giving counter-examples. Features of the ORV, PRV, and POV classes are the object of study. The subject of the study was the boundary properties of functions belonging to the classes ORV, PRV and POV.

During the dissertation work, new results were obtained that were not previously known. On the basis of the obtained results, a theorem was formulated, which was proved in two different ways. Using the theorem and the results obtained previously by other scientists, we obtained the consequence of the theorem for nonmonotonic functions. The results of the dissertation can be used in various fields

of mathematics, examples of possible directions for use are described at the end of the dissertation.

Keywords: boundary properties of functions, correctly variable functions, slowly variable functions, functions of class ORV, functions of class PRV, functions of class POV, inverted functions.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

SV(slowly varying) function – повільно змінна функція;

RV(regularly varying) function – правильно змінна функція;

WSV(weakly slowly varying) function – слабо повільно змінна функція;

WRV(weakly regularly varying) function – слабо правильно змінна функція;

WOSV(weakly O- slowly varying) function – слабо О-повільно змінна функція;

OSV(O- slowly varying) function – О-повільно змінна функція;

WORV(weakly O-regularly varying) function – слабо О-правильно змінна функція;

ORV(O-regularly varying) function – О-правильно змінна функція;

WPRV(weakly pseudo-regularly varying) function - слабо псевдо-правильно змінна функція;

PRV(pseudo-regularly varying) function - псевдо-правильно змінна функція;

WPOV(weakly positively varying) function - слабо позитивно змінна функція;

POV(positively varying) function - позитивно змінна функція;

ВСТУП

Вперше, поняття правильно змінних функцій було введено Йованом Караматою ще в 30-х рока XX століття[13]. Але кількість робіт, що збереглися з тих часів, є недостатньою. Можливо, саме тому створена Караматою теорія залишалась маловідомою довгий час.

Вона почала набувати відомості лише в середині XX століття після виходу книги Гніденко Б.В., Колмогоров А.Н. «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин»[1]. А повністю важливість правильно змінних функцій вченні в сфері теорії ймовірностей усвідомили в 1966 році, після виходу другого тому книги В. Феллера «Введение в теорию вероятностейи ее приложения»[2], в якій містилися елементи теорії Карамати.

Пізніше багато відомих вчених використовували правильно змінні функції та похідні від них (PRV, POV, ORV та інші) в різних галузях математики. Так ORV функції застосовували в своїх роботах Сенета[6, 7], Бінгхам[16, 18], Авакумович[5], Карамата[13], Феллер[2, 14, 15], Альянчич[4], Аранделович[4] та інші. Автори використовували багато різних позначень для такого класу функцій. Авакумович використовував позначення «R-O» для таких функцій, таке ж позначення використовував Карамата, Сенета використовував позначення RO, Красносельський та Рутицький використали назву функції з домінуючою варіацією а Альянчич та Аранделович використали назву O-RV та сформулювали загальні умови для такого класу функцій, які ми будемо використовувати надалі.

PRV функції використовували в своїх роботах Коренблюм[20], Матушевська, Гихман та Скороход[19], Штадтмюллер и Траутнер, Якимов[28], Клесов, Рихлік, Штайнебах[27], Булдигін, Клесов, Штайнебах[8-10, 23-25]. Функції з останнього класу, завдяки своїм властивостям, знайшли застосування в таких галузях математики, як: функції з регулярними коливаннями, функції з слабкими коливаннями, узагальнені тауберові теореми для перетворень Лапласа, теорія масового обслуговування та інші.

POV функції ввів та використовував у своїх роботах Булдигін, Клесов, Штайнебах [11, 12]. Докладно цей клас та інші класи вивчено в монографії Булдигіна, Індлекофера, Клесова, Штайнебаха[3].

Сенета[7] в своїй роботі довів, що наступне твердження є вірним: нехай маємо монотонну, неперервну функцію f, що належить класу RV. Тоді обернена до неї функція f^{-1} також належить класу RV. Саме тому, переді мною була поставлена задача довести або навести контр-приклади аналогічного твердження для функцій з класу POV.

1. ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ФУНКЦІЙ

1.1. Поняття границі

Границя — одне з основних понять функціонального аналізу (а також математичного аналізу), яке означає, що деякий об'єкт, змінюючись, нескінченно наближається до певного сталого значення. Точний зміст поняття границі отримує лише при наявності коректного визначення поняття близькості між елементами (точками) множини, в якій вказана величина набуває значення. Основні поняття математичного аналізу — неперервність, похідна, інтеграл — визначають через границю.[29]

Границею послідовності $\{x_n\}$ називають стале число a, якщо для кожного додатного числа ε, скільки б малим воно не було, існує такий номер N, що всі значення x_n, в яких номер $n > N$, задовольняє нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Той факт, що a є границею, позначають так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

або просто

$$\lim x_n = a$$

чи

$$x_n \to a, n \to \infty.$$

Номер N залежить від вибору числа ε. При зменшенні ε число N, як правило, буде збільшуватись.

Розглянемо два визначення границі функції – за Коші та за Гейне.

1.2. Границя функції за Коші

Нехай $A \subset \boldsymbol{R},\ \ f: A \to \boldsymbol{R}, x_0$ – гранична точка множини A.

Число a називають границею точки f у точці x_0, якщо $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\forall x \in A \cap B(x_0, \delta)\backslash\{x_0\}$: $|f(x) - a| < \varepsilon$.[29] Використовують наступне позначення:

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

або

$$f(x) \to a, x \to x_0.$$

1.3. Границя функції за Гейне.

Число A називають границею $f(x)$ функції в точці x_0 якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ що збігається до числа x_0 відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна і має границею одне і теж саме число A.[29]

1.4. Односторонні границі

Одностороння границя — це границя функції однієї змінної в деякій точці, коли аргумент прямує до значення аргументу у цій точці окремо зі сторони більших аргументів (правостороння границя), або зі сторони менших аргументів (лівостороння границя). Тобто, є сенс говорити про односторонні границі функції у деякій точці тільки тоді, коли у цій точці лівостороння границя функції не дорівнює правосторонній.[29]

Правосторонню границю прийнято позначати наступним чином:

$$\lim_{x \to a+} f(x), \quad \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \lim_{x \downarrow a} f(x).$$

Для лівосторонньої границі прийняті такі позначення:

$$\lim_{x \to a-} f(x), \quad \lim_{x \to a-0} f(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f(x).$$

Використовуються також наступні скорочення:

$f(a+)$ і $f(a+0)$ для правої границі;

$f(a-)$ і $f(a-0)$ для лівої границі.

1.5. Верхня та нижня границі

В математичному аналізі верхня і нижня границі визначаються для числових послідовностей чи функцій і використовуються при їх вивченні. На відміну від звичайної границі, верхня і нижня границі завжди існують (хоч і можуть бути рівними нескінченності). Для нижньої границі послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ використовуються позначення $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ (поширене в українській і російській літературі) і $\liminf_{n\to\infty} x_n$ (поширеніше в західній літературі). Для верхньої границі відповідні позначення мають вигляд $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ і $\limsup_{n\to\infty} x_n$.[29]

Властивості верхньої та нижньої границі:

1. У будь-якої послідовності існують верхня і нижня границі, що належать множині $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
2. Числова послідовність $\{x_n\}$ збігається до а тоді і тільки тоді, коли $\underset{n\to\infty}{liminf}\, x_n = \underset{n\to\infty}{limsup}\, x_n = a$.
3. Для будь-якого наперед узятого додатного числа ε всі елементи обмеженої числової послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, починаючи з деякого номера, залежного від ε, лежать усередині інтервалу $\left(\underline{lim}_{n\to\infty}\, x_n - \varepsilon; \overline{lim}_{n\to\infty}\, x_n + \varepsilon\right)$.
4. Якщо за межами інтервалу (a, b) лежить лише скінченна кількість елементів обмеженої числової послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то інтервал $\left(\underline{lim}_{n\to\infty}\, x_n ; \overline{lim}_{n\to\infty}\, x_n\right)$ міститься в інтервалі (a, b).
5. Виконуються наступні нерівності:

$$\underset{n}{inf}\, x_n \leq \underset{n\to\infty}{liminf}\, x_n \leq \underset{n\to\infty}{limsup}\, x_n \leq \underset{n}{sup}\, x_n$$

$$\underset{n\to\infty}{limsup}(a_n + b_n) \leq \underset{n\to\infty}{limsup}\, a_n + \underset{n\to\infty}{limsup}\, b_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$$

2. ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ визначена, монотонно зростає (спадає) і неперервна на деякому проміжку X. Тоді у відповідному проміжку Y значень цієї функції існує однозначна обернена функція $x = f(y)$, також монотонно зростаюча (спадаюча) і неперервна. Доведення теореми описано в [29].

Для того, щоб знайти обернену функцію до заданої, необхідно розв'язати рівняння $y = f(x)$ щодо x. Якщо розв’язків більше ніж один, то функції, оберненої до $f(x)$ не існує. Таким чином, функція $f(x)$ обернена на проміжку (a, b) тоді і тільки тоді, коли на цьому проміжку вона взаємно-однозначна.

Для неперервної функції $F(y)$ визначити її обернену функцію з рівняння $x - F(y) = 0$ можливо тільки в тому випадку, коли функція $F(y)$ строго монотонна. Тим не менше, неперервну функцію завжди можна обернути на проміжках її строгої монотонності. Наприклад, $\sqrt{x}$ є оберненою функцією до x^2 на $[0, +\infty)$, хоча на проміжку $(-\infty, 0]$ обернена функція інша: $-\sqrt{x}$.

3. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ ФУНКЦІЙ

3.1. Необхідні позначення

Перед тим, як ми перейдемо до розгляду кожного класу функцій окремо, необхідно навести певні позначення та нагадати загальновідомі факти, які будуть використані пізніше. Тож, надалі будемо вважати, що: R – множина дійсних чисел; R_+ – множина додатних дійсних чисел; R_{0+} – множина невід'ємних дійсних чисел; Q – множина раціональних чисел; Z – множина цілих чисел; N – множина натуральних чисел; N_0 – множина натуральних чисел об'єднана з множиною $\{0\}$ (множина невід'ємних цілих чисел).

Введемо наступні позначення:

F – множина дійсних функцій $f = f(t), t \geq 0$;

$$F_+(A) = \{f \in F: f(t) \geq 0, t \in [A, \infty)\};$$

$$F_+ = \bigcup_{A>0} F_+(A).$$

Таким чином, $f(t) \in F_+$ тоді і тільки тоді, коли $f(t) > 0$ для всіх $t > T$, де T досить велике.

3.2. Верхня та нижня граничні функції. Їх властивості

Для кожної функції $f \in F_+$ введемо поняття верхньої та нижньої граничних функцій, позначивши їх $f^*(c)$ та $f_*(c)$ відповідно. Так, для будь-якого с > 0

$$f^*(c) = \limsup_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} \tag{1}$$

і

$$f_*(c) = \liminf_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)}. \tag{2}$$

Очевидно, що значення обох функцій належать проміжку $[0, \infty]$.

Розглянемо деякі властивості граничних функцій, які випливають з означення.

Лема 3.1.[3] Нехай $f \in F_+$. Тоді:

(i) для будь-якого с > 0,

$$0 \leq f_*(\text{c}) \leq f^*(\text{c}).$$

(ii) вважаючи, що $1/\infty = 0$ і $1/0 = \infty$, та для будь-якого с > 0,

$$f_*(c) = \frac{1}{f^*\left(\frac{1}{c}\right)}.$$

(iii) для будь-яких $c_1 > 0$ та $c_2 > 0$,

$$\begin{aligned} f_*(c_1) \cdot f_*(c_2) \le f_*(c_1 c_2) &\le min\{f_*(c_1) \cdot f^*(c_2), f^*(c_1) \cdot f_*(c_2)\} \\ &\le max\{f_*(c_1) \cdot f^*(c_2), f^*(c_1) \cdot f_*(c_2)\} \le f^*(c_1 c_2) \\ &\le f^*(c_1) \cdot f^*(c_2). \end{aligned}$$

Останній вираз має місце лише за умови, якщо він не містить виразів, таких як $0 \cdot \infty$ та $\infty \cdot 0$.

(iv) $f_*(1) = f^*(1) = 1$

(v) якщо f не спадна (не зростаюча) функція на нескінченності, то f_* і f^* є не спадаючими (не зростаючими) функціями у множині R_+.

(vi) для будь-якої фіксованої константи $a > 0$ та для будь-якого $c > 0$,

$$(af)_*(c) = f_*(c) \;\; \text{і} \;\; (af)^*(c) = f^*(c);$$

(vii) якщо $f_1 \in F_+, f_2 \in F$, і

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f_2(t)|}{f_1(t)} = 0,$$

тоді для будь-якого $c > 0$,

$$(f_1 + f_2)_*(c) = (f_1)_*(c) \;\; \text{і} \;\; (f_1 + f_2)^*(c) = (f_1)^*(c);$$

(viii) якщо $f_k \in F_+, a_k > 0, k = 1, 2, \ldots, n$, і

$$f = \sum_{k=1}^{n} f_k a_k,$$

тоді для будь-якого $c > 0$,

$$\min_{k=1,\ldots,n}\{(f_k)^*(c)\} \le f^*(c) \le \max_{k=1,\ldots,n}\{(f_k)^*(c)\}$$

і

$$\min_{k=1,\ldots,n}\{(f_k)_*(c)\} \le f_*(c) \le \max_{k=1,\ldots,n}\{(f_k)_*(c)\};$$

(ix) якщо $f_1 \in F_+, f_2 \in F_+$, та

$$f = f_1 \cdot f_2$$

тоді для будь-якого $c > 0$,

$$(f_1)_*(c) \cdot (f_2)_*(c) \le f_*(c) \le min\{(f_1)_*(c) \cdot (f_2)^*(c), (f_1)^*(c) \cdot (f_2)_*(c)\}$$
$$\le max\{(f_1)_*(c) \cdot (f_2)^*(c), (f_1)^*(c) \cdot (f_2)_*(c)\} \le f^*(c)$$
$$\le (f_1)^*(c) \cdot (f_2)^*(c).$$

Останній вираз має місце лише за умови, якщо він не містить виразів, таких як $0 \cdot \infty$ та $\infty \cdot 0$.

(x) для будь-якого $c > 0$,

$$\left(\frac{1}{f}\right)_* (\mathrm{c}) = f^* \left(\frac{1}{\mathrm{c}}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{f}\right)^* (c) = (f)_*(\mathrm{c}).$$

3.3. RV та SV функції

Вперше поняття правильно змінних та повільно змінних функцій були введені сербським математиком Йованом Караматою в його роботі[31].

<u>*Означення 3.1*</u>.[31] Нехай маємо деяку вимірну функцію $f \in F_+$. Таку функцію називаємо правильно змінною або RV-функцією, якщо

$$f_*(\mathrm{c}) = f^*(\mathrm{c}) = k_f(c), \; k_f(c) \in (0, \infty) \tag{3}$$

для будь-якого $c > 0$.

Іншими словами, функція f є RV-функцією, якщо f додатна та вимірна, а границя

$$k_f(c) = \lim_{t \to \infty} \frac{f(\mathrm{c}t)}{f(t)} \tag{4}$$

є додатною та скінченною для всіх $c > 0$.

<u>*Означення 3.2*</u>.[31] Нехай маємо деяку вимірну функцію $f \in F_+$. Таку функцію називаємо повільно змінною або SV-функцією, якщо f є RV-функцією та

$$k_f(c) = 1 \tag{5}$$

для будь-якого $c > 0$.

Якщо функція f належить до класу RV-функцій, то

$$k_f(c) = c^\rho, \; c > 0, \tag{6}$$

для деякого дійсного числа ρ – індекса функції f. Зрозуміло, що для функції f з класу SV-функцій $\rho = 0$.

Властивості функцій з класів RV та SV описані Караматою в його роботі[13].

Теорема 3.1 (про представлення RV-функцій) [13]. RV-функції можна представити в наступному вигляді:

$$f(t) = t^{\rho} \cdot l(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

де $l(t)$ $(t > 0)$ – це деяка SV-функція.

Далі розглянемо ще одне представлення для RV-функцій.

Теорема 3.2 (про інтегральне представлення RV- та SV-функцій) [13]. Функція $f(t)$ належить класу RV-функцій тоді і тільки тоді, коли

$$f(t) = exp\left\{\alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\beta(s)}{s} ds\right\} \tag{8}$$

для деякого $t_0 > 0$ та всіх $t \geq t_0$, де $\alpha(t)$ та $\beta(t)$ це вимірні, обмежені функції для яких границі

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t)$$

та

$$\lim_{t \to \infty} \beta(t)$$

існують. До того ж $f(t)$ належить класу SV-функцій тоді і тільки тоді, коли виконано попередні умови і

$$\lim_{t \to \infty} \beta(t) = 0.$$

3.4. WRV та WSV функції

<u>*Означення 3.3*</u>. Нехай маємо деяку функцію $f \in F_+$. Таку функцію називаємо слабо правильно змінною або WRV-функцією, якщо виконано умову (3) для будь-якого $c > 0$. Аналогічно, якщо для деякої функції $f \in F_+$

виконано умову (4), таку функцію називаємо слабо повільно змінною або WSV-функцією.

В останньому означенні не вимагається, щоб функція f була вимірною. Позначення "W" тут і надалі вказує на те, що вимірність функції не вимагається.

3.5. ORV та WORV функції

Вперше поняття ORV-функцій було введено Авакумовичем в його роботі[5].

Означення 3.4. Нехай маємо деяку функцію $f \in F_{+}$. Таку функцію називаємо WORV-функцією, якщо

$$f^{*}(\mathrm{c}) < \infty$$

для будь-якого $c > 0$.

Відповідно, кожна вимірна WORV-функція називається ORV-функцією.

Зрозуміло, що кожна RV- (WRV-) функція належать до класу ORV- (WORV-) функцій. Але не кожна вимірна швидко змінна функція належить класу ORV-функцій. Прикладом такої функції може слугувати експоненціальна функція $f(t) = e^{t}$.[3]

Розглянемо функцію $f(t) = t(\cos t + 2)$, та перевіримо, чи належить вона класу ORV-функцій.

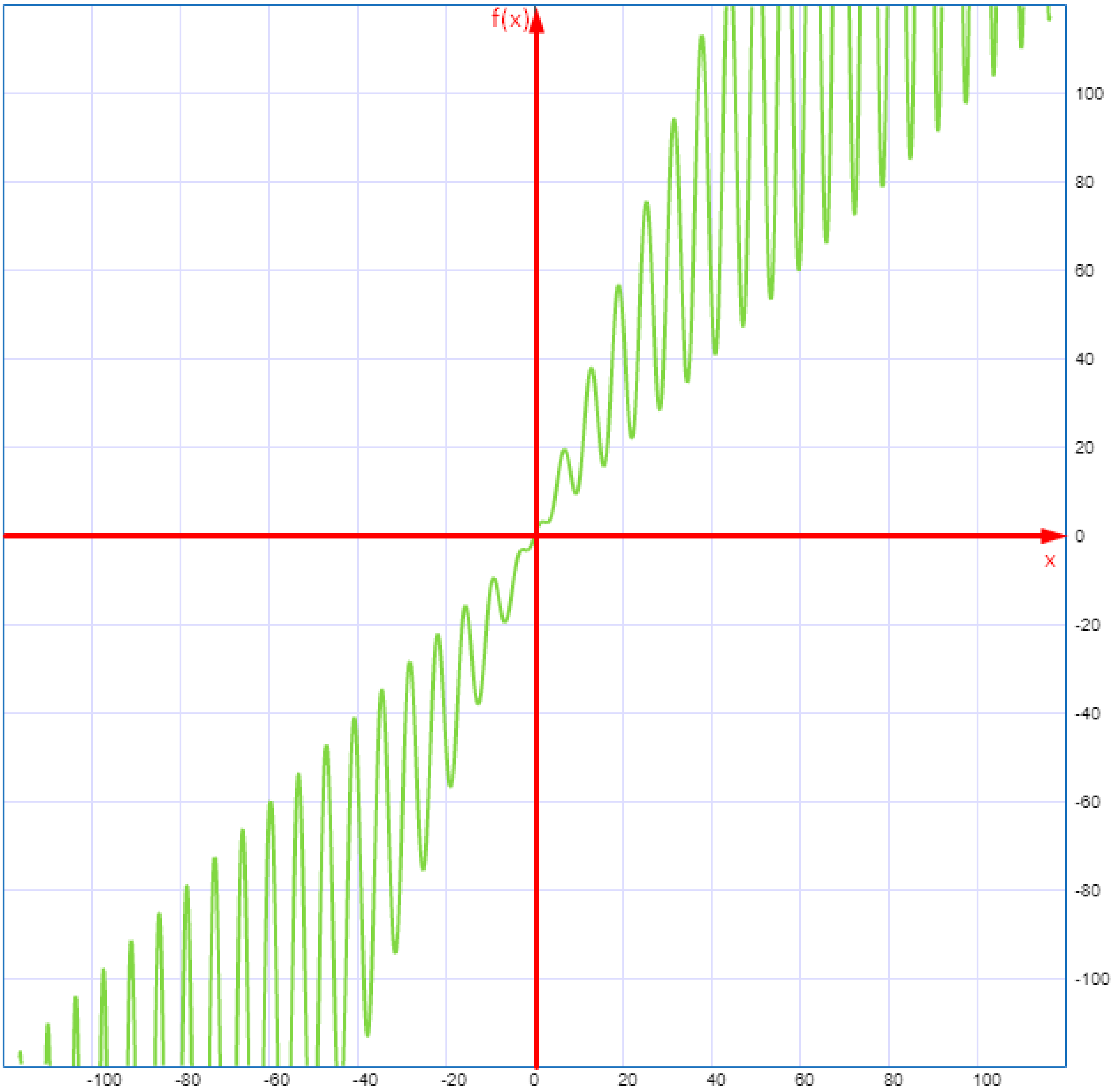

Рис. 1. Графік функції $f(t) = t(\cos t + 2)$

Для цього обчислимо значення $f^*(\text{c})$ для вище описаної функції.

$$f^*(\text{c}) = \limsup_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{ct(\cos ct + 2)}{t(\cos t + 2)} = c \cdot \limsup_{t\to\infty} \frac{(\cos ct + 2)}{(\cos t + 2)}.$$

Для кожного $c > 0$ границя

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{(\cos ct + 2)}{(\cos t + 2)} \le \frac{3}{1}.$$

А отже,

$$f^*(\text{c}) = 3c < \infty.$$

Звідси маємо, що функція належить класу ORV-функцій. Тепер перевіримо, чи належить функція класу RV-функцій. Для цього обчислимо значення

$$k_f(c) = \lim_{t\to\infty} \frac{f(\mathrm{c}t)}{f(t)}.$$

Маємо,

$$k_f(c) = \lim_{t\to\infty} \frac{f(\mathrm{c}t)}{f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{ct(\cos ct + 2)}{t(\cos t + 2)}.$$

Бачимо, що така границя не існує, а отже функція не належить класу RV-функцій. Розглянутий приклад демонструє, що клас ORV-функцій ширший за клас RV-функцій.

Лема 3.2[3] З Леми 3.1 для функцій $f \in F_+$ випливає, що наступні умови еквівалентні:

(i) f належить до класу WORV-функцій;

(ii) $f_*(\mathrm{c}) > 0$ для будь-якого $c > 0$;

(iii) існує інтервал $[a, b]$, $0 < a < 1 < b < \infty$ такий, що $f^*(\mathrm{c}) < \infty$ або рівнозначно, що $f_*(\mathrm{c}) > 0$, для всіх $c \in [a, b]$.

(iv) для всіх $c > 0$,

$$0 < f_*(\mathrm{c}) \le f^*(\mathrm{c}) < \infty \tag{9}$$

(v) відношення (7) виконується для всіх $c \ge 1$. Зауважимо також, що для не спадаючих функцій $f \in F_+$, f належить до класу ORV-функцій тоді і тільки тоді, коли $f_*(\mathrm{c}_0) < \infty$ для деяких $c_0 > 1$. Аналогічно, для не зростаючих функцій $f \in F_+$, f належить до класу ORV-функцій тоді і тільки тоді, коли $f_*(\mathrm{c}_0) > 0$ для деяких $c_0 \in (0, 1)$.

Вперше поняття OSV-функцій було введено Драсіним та Сенетою в їх роботі[6].

<u>Означення 3.5</u>. Нехай маємо деяку функцію $f \in F_+$. Таку функцію називаємо WOSV-функцією, якщо

$$\sup_{c>0} f^*(\mathrm{c}) < \infty.$$

Відповідно, кожна вимірна WORV-функція називається ORV-функцією.

Зрозуміло, що кожна SV- (WSV-) функція належать до класу OSV- (WOSV-) функцій. Розглянемо функцію $f(t) = \ln t \cdot (\cos t + 10)$. Така функція є OSV-функцією але не є SV-функцією. Розглянутий приклад демонструє, що клас OSV-функцій ширший за клас SV-функцій.

Функція $f(t)$ належить класу ORV-функцій тоді і тільки тоді, коли виконано умови (8) для деякого $t_0 > 0$ та всіх $t \geq t_0$, де $\alpha(t)$ та $\beta(t)$ це вимірні, обмежені функції. До того ж $f(t)$ належить класу OSV-функцій тоді і тільки тоді, коли виконано попередні умови і

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = 0.$$

3.6. PRV та WPRV функції

Поняття PRV-функцій та їх властивості описано в монографії Булдигіна, Індлекофера, Клесова, Штайнебаха[3].

<u>*Означення 3.6*</u>. Нехай маємо деяку функцію $f \in F_+$. Таку функцію називаємо WPRV-функцією, якщо

$$\limsup_{c\to 1} f^*(\text{c}) = 1 \tag{10}$$

Відповідно, кожна вимірна WPRV-функція називається PRV-функцією.

Теорема 3.3 (про інтегральне представлення PRV-функцій) [3]. Функція $f(t)$ належить класу PRV-функцій тоді і тільки тоді, коли виконано умову (8) для деякого $t_0 > 0$ та всіх $t \geq t_0$, де $\alpha(t)$ та $\beta(t)$ це вимірні, обмежені функції для яких границі

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t)$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t)$$

існують, до того ж

$$\lim_{c\to 1} \limsup_{t\to\infty} \big(\alpha(ct) - \alpha(t)\big) = 0. \tag{11}$$

Останній вираз є еквівалентним до

$$\underset{c\to 1}{limsup}\ \underset{t\to\infty}{limsup}\big(\alpha(ct)-\alpha(t)\big)=0.$$

Розглянемо деякі приклади PRV-функцій.

Приклад 1. Нехай задано функцію

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad t=0 \\ t^{\alpha}\cdot exp\{\cos\ln t\}, & \text{при} \quad t>0, \end{cases}$$

де α – задане дійсне число.

Перевіримо, чи належить така функція класу PRV- та RV-функцій.

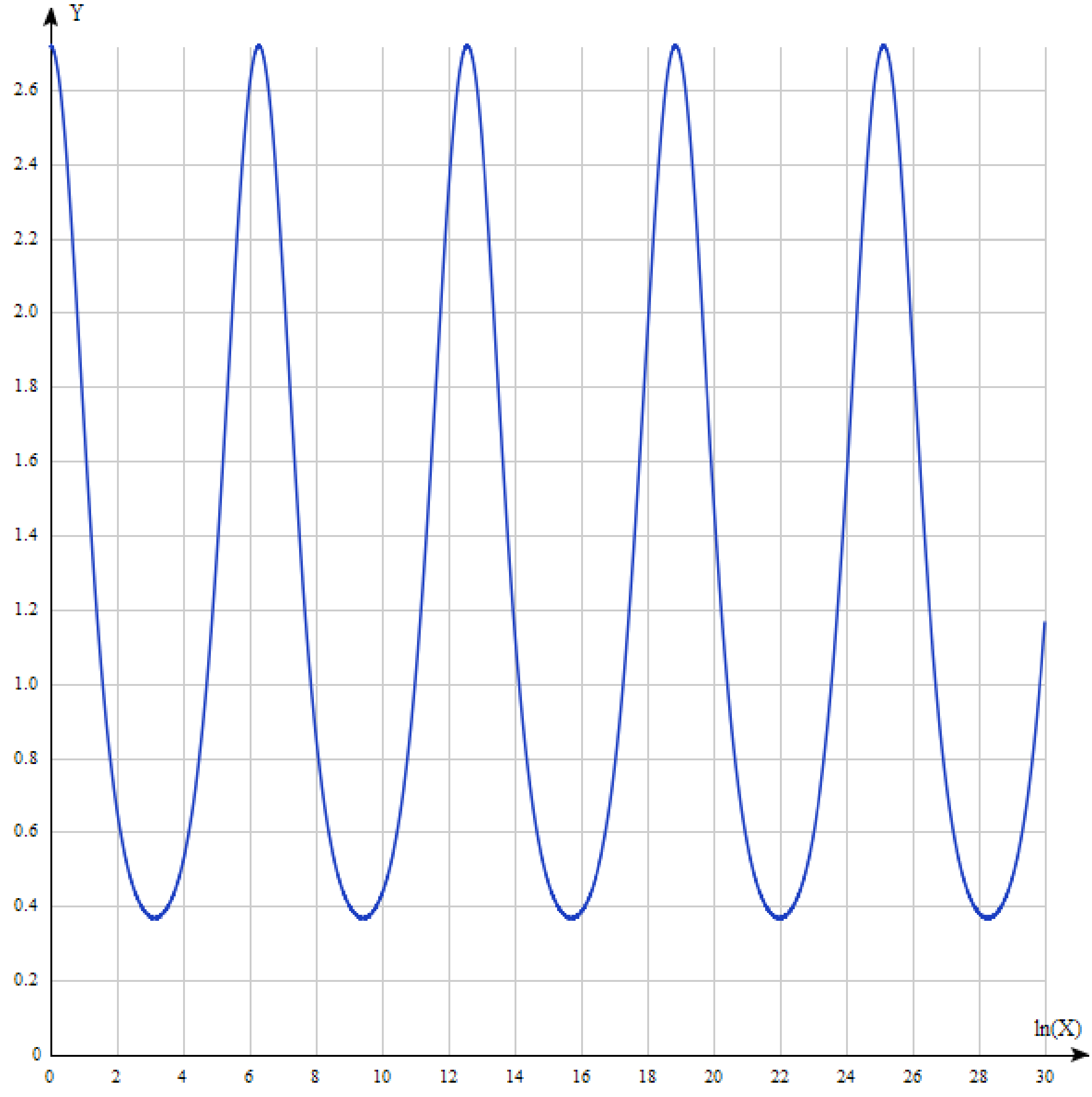

Рис. 2. Графік функції $t^{\alpha}\cdot exp\{\cos\ln t\}$ в логарифмічному масштабі, при $t>0$ та $\alpha=0$

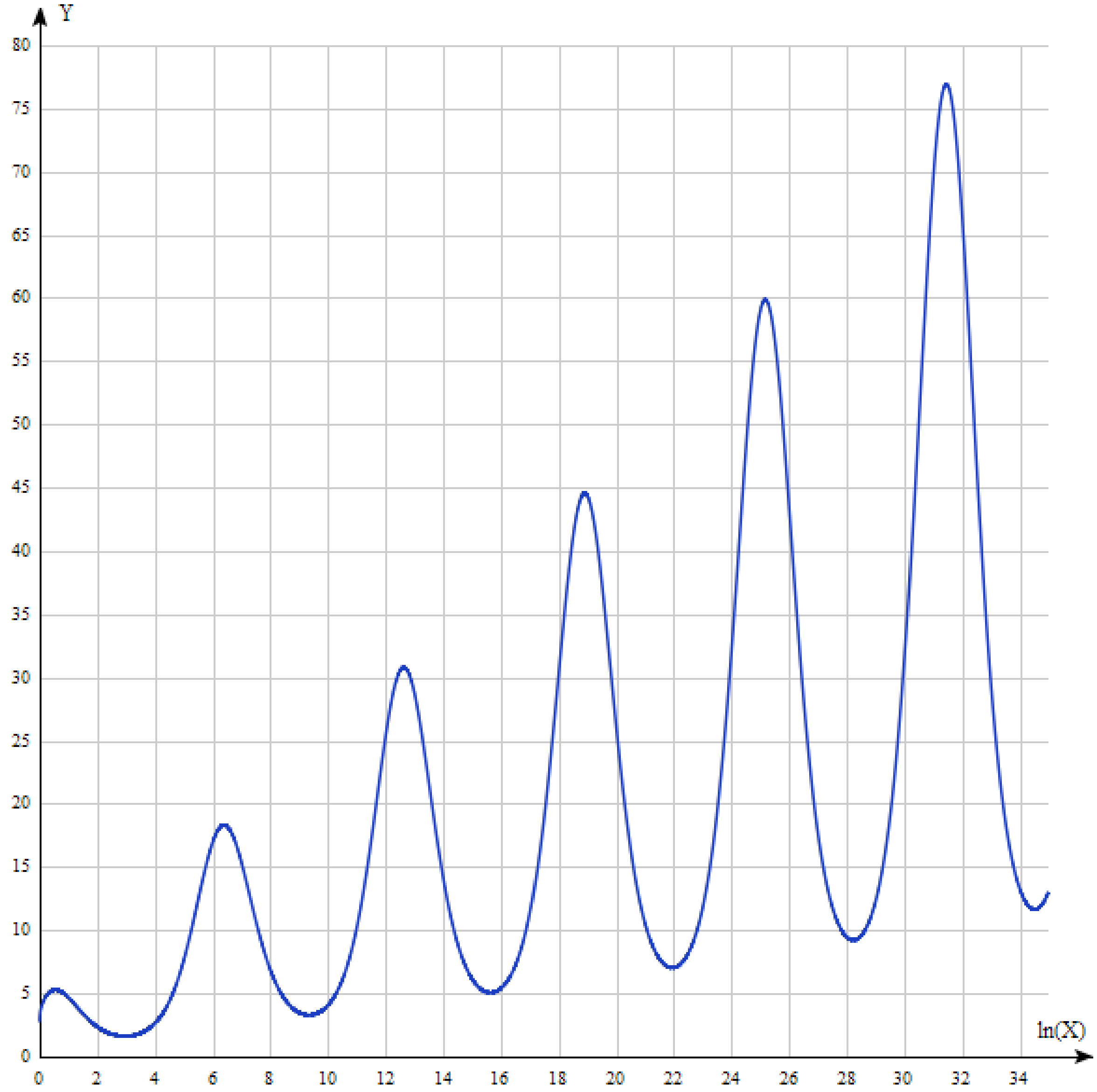

Рис. 3. Графік функції $t^{\alpha} \cdot exp\{\cos \ln t\}$ в логарифмічному масштабі, при $t > 0$ та $\alpha = 0{,}35$

Для цього обчислимо значення виразу (9) заданої функції.

$$\limsup_{c \to 1} f^*(\mathrm{c}) = \limsup_{c \to 1} \left(\limsup_{t \to \infty} \frac{f(ct)}{f(t)} \right)$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{f(ct)}{f(t)} = \limsup_{t\to\infty}\frac{(ct)^{\alpha}\cdot exp\{\cos\ln ct\}}{t^{\alpha}\cdot exp\{\cos\ln t\}}$$

$$= \limsup_{t\to\infty} c^{\alpha}\cdot exp\{\cos\ln ct - \cos\ln t\}$$

$$= c^{\alpha}\, exp\left\{\limsup_{t\to\infty}\left(-2\sin\frac{\ln ct+\ln t}{2}\cdot\sin\frac{\ln ct-\ln t}{2}\right)\right\} =$$

$$= c^{\alpha} exp\left\{\limsup_{t\to\infty}\left(-2\sin\frac{\ln ct^{2}}{2}\cdot\sin\frac{\ln c}{2}\right)\right\} =$$

$$= c^{\alpha} exp\left\{\left(-2\sin\frac{\ln c}{2}\limsup_{t\to\infty}\left(\sin\frac{\ln ct^{2}}{2}\right)\right)\right\} =$$

$$= c^{\alpha} exp\left\{\left(-2\sin\frac{\ln c}{2}\right)\right\}$$

$$\limsup_{c\to 1} f^{*}(\text{c}) = \limsup_{c\to 1}\left(c^{\alpha} exp\left\{\left(-2\sin\frac{\ln c}{2}\right)\right\}\right) = 1\cdot e^{-2\cdot 0} = 1$$

Як бачимо, $\limsup\limits_{c\to 1} f^{*}(\text{c}) = 1$, а отже дана функція належить класу PRV. Тепер перевіримо належність даної функції класу RV. Для цього обчислимо значення виразу (4).

$$k_f(c) = \lim_{t\to\infty}\frac{f(\text{c}t)}{f(t)}$$

Одразу можемо сказати, що така границя не існує, тому задана функція не належить класу RV. Отже наше припущення вірне.

Приклад 2. Перевірити належність функції $f(t)$ класам PRV- та RV-функцій, якщо

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } \; t\in[0,1), \\ 2^{k}, \text{ при } \; t\in[2^{2k},2^{2k+1}), \; k=0,1,2,\dots \\ \frac{t}{2^{k+1}}, \text{ при } \; t\in[2^{2k+1},2^{2k+2}), \; k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

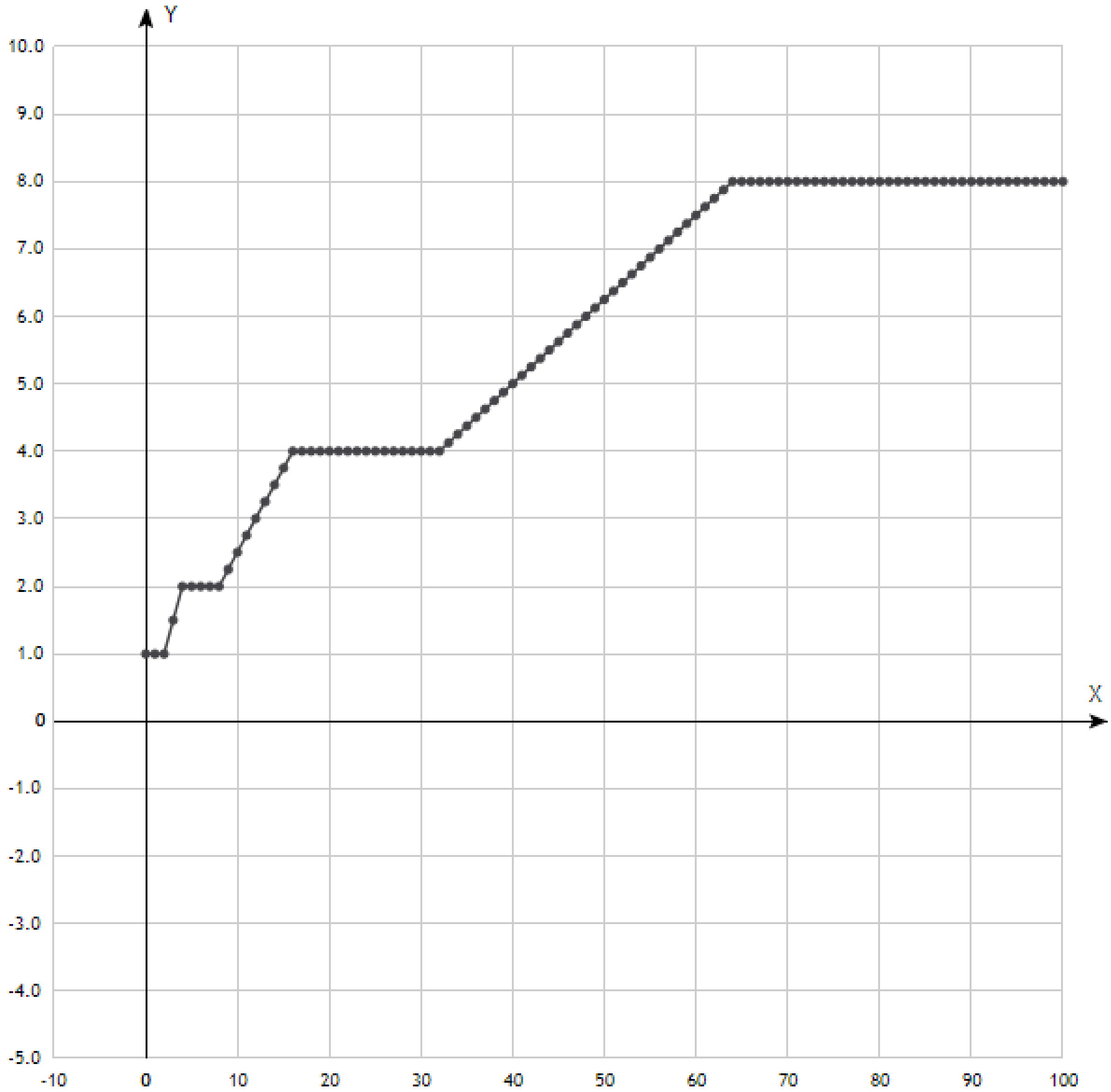

Рис. 4. Графік функції $f(t) = \begin{cases} 1, \ \text{при} \ \ t \in [0,1), \\ 2^k, \ t \in [2^{2k}, 2^{2k+1}), \ \ k = 0,1,2,\ldots \\ \frac{t}{2^{k+1}}, \ t \in [2^{2k+1}, 2^{2k+2}), \ \ k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$

Перевіримо, чи належить задана функція класу PRV-функцій. Для цього обчислимо значення виразу (9) заданої функції.

$$\limsup_{c\to 1} f^*(\mathrm{c}) = \limsup_{c\to 1}\left(\limsup_{t\to\infty}\frac{f(ct)}{f(t)}\right).$$

Для початку розглянемо випадок, коли $t \in [2^{2k}, 2^{2k+1}), \ \ k = 0,1,2,\ldots$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{f(ct)}{f(t)} = \limsup_{t\to\infty}\frac{2^k}{2^k} = 1.$$

Звідси,

$$\limsup_{c\to 1} f^*(\mathrm{c}) = \limsup_{c\to 1}(1) = 1.$$

Тепер розглянемо випадок $t \in [2^{2k+1}, 2^{2k+2}),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{ct/2^{k+1}}{t/2^{k+1}} = \limsup_{t\to\infty} \frac{ct \cdot 2^{k+1}}{t \cdot 2^{k+1}} = c.$$

Звідси,

$$\limsup_{c\to 1} f^*(\mathrm{c}) = \limsup_{c\to 1}(c) = 1.$$

Як бачимо, $\limsup\limits_{c\to 1} f^*(\mathrm{c}) = 1$ для будь-якого t, а отже дана функція належить класу PRV. Тепер перевіримо належність даної функції класу RV. Для цього обчислимо значення виразу (4).

$$k_f(c) = \lim_{t\to\infty} \frac{f(\mathrm{c}t)}{f(t)}.$$

Розглянемо випадок $t \in [2^{2k+1}, 2^{2k+2}),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$k_f(c) = \lim_{t\to\infty} \frac{ct/2^{k+1}}{t/2^{k+1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{ct \cdot 2^{k+1}}{t \cdot 2^{k+1}} = c.$$

Для випадку, коли $t \in [2^{2k}, 2^{2k+1}),\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$

$$k_f(c) = \lim_{t\to\infty} \frac{2^k}{2^k} = 1.$$

Отже, можемо сказати, що така границя не існує, тому задана функція не належить класу RV.

3.7. POV та WPOV функції

Поняття POV-функцій та їх властивості описано в монографії Булдигіна, Індлекофера, Клесова, Штайнебаха[3].

<u>*Означення 3.7*</u>. Нехай маємо деяку функцію $f \in F_+$. Таку функцію називаємо WPOV-функцією, якщо

$$\limsup_{c\to 1} f^*(\mathrm{c}) = 1 \tag{12}$$

та для будь-якого $c > 1$

$$f_*(c) > 1 \tag{13}$$

Відповідно, кожна вимірна WPOV-функція називається POV-функцією.

Теорема 3.3 (про інтегральне представлення POV-функцій) [3]. Функція $f(t)$ належить класу POV-функцій тоді і тільки тоді, коли виконано умови (8) та (11) для деякого $t_0 > 0$ та всіх $t \geq t_0$, де $\alpha(t)$ та $\beta(t)$ це вимірні, обмежені функції для яких границі

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t)$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t)$$

існують, до того ж

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{\beta(s)}{s} ds \right) > 0 \tag{14}$$

для всіх $c > 1$.

Для більш фундаментального розуміння зв'язку між класами функцій зобразимо їх у вигляді діаграми використовуючи круги Ейлера.

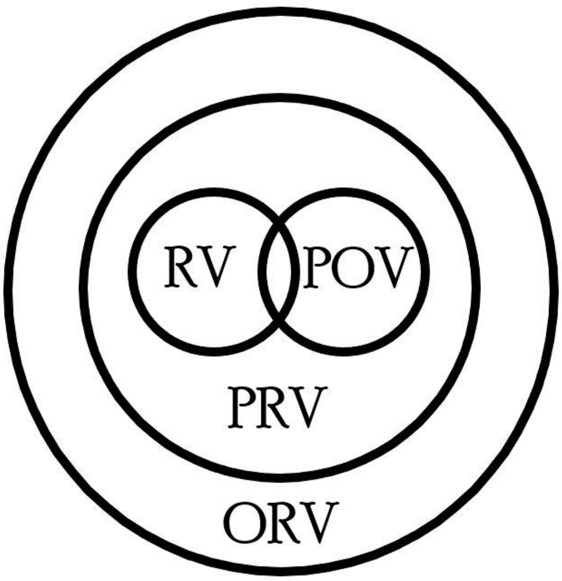

Рис. 5. Схематичне зображення класів функцій

Бачимо, що класи RV та POV мають спільний підклас функцій, а саме функції з додатнім індексом ρ. Об'єднання класів RV та POV є підмножиною класу PRV. В свою чергу, клас PRV є підкласом класу ORV.

4. РЕЗУЛЬТАТИ, ОТРИМАНІ В ДИСЕРТАЦІЇ

Теорема 4.1. Нехай маємо деяку монотонну, неперервну функцію $f \in F_+$. Через f^{-1} позначимо функцію обернену до функції f. Тоді, якщо f належить класу POV-функцій, то і f^{-1} також належить класу POV-функцій.

Доведення. I спосіб

Доведемо від супротивного. Нехай $f(t)$ – монотонна, неперервна POV-функція, а обернена до неї $f^{-1}(t)$ не є POV-функцією. Тоді існує $c_0 > 1$ таке, що

$$(f^{-1})_*(\mathrm{c}_0) = \liminf_{t\to\infty} \frac{f^{-1}(c_0 t)}{f^{-1}(t)} = 1.$$

А отже, існує деяка послідовність дійсних чисел $\{t_k\} \to \infty$, при $k \to \infty$, така, що

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{f^{-1}(c_0 t_k)}{f^{-1}(t_k)} = 1.$$

Тобто, існує деяка послідовність дійсних чисел $\{\varepsilon_k\} \to 0$, при $k \to \infty$, для якої

$$\frac{f^{-1}(c_0 t_k)}{f^{-1}(t_k)} \le 1 + \varepsilon_k.$$

Тоді можемо записати ряд алгебраїчних перетворень:

$$f^{-1}(c_0 t_k) \le (1 + \varepsilon_k) f^{-1}(t_k);$$

$$f\big(f^{-1}(c_0 t_k)\big) \le f\big((1 + \varepsilon_k) f^{-1}(t_k)\big);$$

$$c_0 t_k \le f\big((1 + \varepsilon_k) f^{-1}(t_k)\big);$$

$$c_0 \leq \frac{f\big((1+\varepsilon_k)f^{-1}(t_k)\big)}{t_k};$$

$$c_0 \leq \frac{f\big((1+\varepsilon_k)f^{-1}(t_k)\big)}{f\big(f^{-1}(t_k)\big)}.$$

Введемо допоміжну послідовність $\{s_k\}$, $s_k = f^{-1}(t_k)$. Тоді

$$c_0 \leq \frac{f\big((1+\varepsilon_k)s_k\big)}{f(s_k)}.$$

На даному кроці можемо переформулювати вихідну теорему наступним чином: якщо функція $f(t)$ - POV-функція, то обернена до неї функція $f^{-1}(t)$ буде також POV-функцією тоді і тільки тоді, коли

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{f\big((1+\varepsilon_k)s_k\big)}{f(s_k)} = 1,$$

для деяких послідовностей $\{\varepsilon_k\}$ та $\{s_k\}$ описаних вище.

Оскільки задана функція $f(t)$ - POV-функція, неперервна та зростаюча можемо використати інтегральне перетворення для POV-функцій. Отримаємо:

$$\frac{f\big((1+\varepsilon_k)s_k\big)}{f(s_k)} = \frac{exp\left\{\alpha\big((1+\varepsilon_k)s_k\big) + \int_{t_0}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}\,dp\right\}}{exp\left\{\alpha(s_k) + \int_{t_0}^{s_k} \frac{\beta(p)}{p}\,dp\right\}},$$

де $\alpha(t)$ та $\beta(t)$ - це вимірні, обмежені функції для яких існують границі на нескінченності.

За допомогою алгебраїчних перетворень можемо спростити вище згаданий вираз і отримаємо, що:

$$\frac{exp\left\{\alpha\big((1+\varepsilon_k)s_k\big) + \int_{t_0}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}\,dp\right\}}{exp\left\{\alpha(s_k) + \int_{t_0}^{s_k} \frac{\beta(p)}{p}\,dp\right\}} =$$

$$= exp\left\{\alpha\big((1+\varepsilon_k)s_k\big) - \alpha(s_k) + \int\limits_{t_0}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}\,dp - \int\limits_{t_0}^{s_k} \frac{\beta(p)}{p}\,dp\right\};$$

Виконаємо наступну заміну:

$$
\begin{cases}
A_k = \alpha\big((1+\varepsilon_k)s_k\big) - \alpha(s_k), \\
B_k = \int\limits_{t_0}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp - \int\limits_{t_0}^{s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp = \int\limits_{s_k}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp\,;
\end{cases}
$$

Тоді

$$
exp\left\{\alpha\big((1+\varepsilon_k)s_k\big) - \alpha(s_k) + \int\limits_{t_0}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp - \int\limits_{t_0}^{s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp\right\} = exp\{A_k + B_k\}
$$

$$
\leq exp\left\{\underset{k\to\infty}{limsup}(A_k) + B_k\right\}.
$$

Таким чином

$$
\underset{k\to\infty}{liminf}\frac{f\big((1+\varepsilon_k)s_k\big)}{f(s_k)} = \underset{k\to\infty}{liminf}\, exp\{A_k + B_k\} \leq
$$

$$
\leq \underset{k\to\infty}{liminf}\, exp\left\{\underset{k\to\infty}{limsup}(A_k) + B_k\right\}.
$$

Використовуючи властивість (11) інтегрального перетворення для POV-функцій маємо, що

$$
\underset{k\to\infty}{limsup}(A_k) = 0,
$$

а отже

$$
\underset{k\to\infty}{liminf}\frac{f\big((1+\varepsilon_k)s_k\big)}{f(s_k)} \leq \underset{k\to\infty}{liminf}\, exp\left\{\int\limits_{t_0}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp - \int\limits_{t_0}^{s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp\right\}.
$$

$$
\underset{k\to\infty}{liminf}\, exp\left\{\int\limits_{t_0}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp - \int\limits_{t_0}^{s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp\right\} = \underset{k\to\infty}{liminf}\, exp\left\{\int\limits_{s_k}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp\right\}
$$

$$
= exp\left\{\underset{k\to\infty}{liminf}\left(\int\limits_{s_k}^{(1+\varepsilon_k)s_k} \frac{\beta(p)}{p}dp\right)\right\}.
$$

Розглянемо останній вираз більш детально. Маємо:

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\int_{s_k}^{(1+\varepsilon_k)s_k}\frac{\beta(p)}{p}dp\right)\leq \sup_{s_k\leq p\leq(1+\varepsilon_k)s_k}\beta(p)\cdot\liminf_{k\to\infty}\left(\int_{s_k}^{(1+\varepsilon_k)s_k}\frac{dp}{p}\right)$$

$$=\sup_{s_k\leq p\leq(1+\varepsilon_k)s_k}\beta(p)\cdot\liminf_{k\to\infty}(ln(1+\varepsilon_k)s_k-ln\,s_k)$$

$$=\sup_{s_k\leq p\leq(1+\varepsilon_k)s_k}\beta(p)\cdot\liminf_{k\to\infty}(ln(1+\varepsilon_k)).$$

Розглянемо окремо множники останнього виразу.

$$\sup_{s_k\leq p\leq(1+\varepsilon_k)s_k}\beta(p)<\infty,$$

оскільки функція $\beta(p)$ є обмеженою на всій числовій осі за умовою інтегрального представлення для POV-функцій.

$$\liminf_{k\to\infty}(ln(1+\varepsilon_k))=0.$$

Таким чином,

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\int_{s_k}^{(1+\varepsilon_k)s_k}\frac{\beta(p)}{p}dp\right)=\sup_{s_k\leq p\leq(1+\varepsilon_k)s_k}\beta(p)\cdot\liminf_{k\to\infty}(ln(1+\varepsilon_k))=0.$$

Отже маємо, що

$$exp\left\{\liminf_{k\to\infty}\left(\int_{s_k}^{(1+\varepsilon_k)s_k}\frac{\beta(p)}{p}dp\right)\right\}=exp\{0\}=1.$$

$$1<c_0\leq\liminf_{k\to\infty}\frac{f\big((1+\varepsilon_k)s_k\big)}{f(s_k)}=1.$$

Отримали протиріччя, а отже, якщо функція $f(t)$ є POV-функцєю, то обернена до неї функція $f^{-1}(t)$ буде також POV-функцією, що і треба було довести.

Доведення. II спосіб

Доведемо від супротивного. Нехай $f(t)$ – монотонна, неперервна POV-функція, а обернена до неї $f^{-1}(t)$ не є POV-функцією. Тоді існує $c_0>1$ таке, що

$$(f^{-1})_*(c_0) = \liminf_{t\to\infty} \frac{f^{-1}(c_0 t)}{f^{-1}(t)} = 1.$$

А отже, існує деяка послідовність дійсних чисел $\{t_k\} \to \infty$, при $k \to \infty$, така, що

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{f^{-1}(c_0 t_k)}{f^{-1}(t_k)} = 1.$$

Оскільки кожна POV-функція належить класу PRV (POV є підкласом класу PRV), то використовуючи таку властивість PRV-функцій, як асимптотичну еквівалентність[3], отримуємо:

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{f^{-1}(c_0 t_k)}{f^{-1}(t_k)} = \liminf_{k\to\infty} \frac{f\left(f^{-1}(c_0 t_k)\right)}{f\left(f^{-1}(t_k)\right)}.$$

Звідси випливає, що

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{f\left(f^{-1}(c_0 t_k)\right)}{f\left(f^{-1}(t_k)\right)} = \liminf_{k\to\infty} \frac{c_0 t_k}{t_k} = c_0 \neq 1.$$

А отже, отримали протиріччя. Звідси випливає, що, якщо функція $f(t)$ - POV-функція, то обернена до неї функція $f^{-1}(t)$ буде також POV-функцією, що і треба було довести.

Наслідок з теореми 4.1

Якщо функція f не є монотонною, то її обернена не існує. Проте можна вказати таку функцію, яку у деякому асимптотичному розумінні можна вважати оберненою. Для того, щоб надати точний смисл сказаному вище, наведемо теорему 3.79 з монографії[3].

Теорема 3.79 [3] Нехай f є POV-функцією. Тоді існує неперервна, монотонно зростаюча функція f_1 така, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{f_1(t)} = 1.$$

Наслідок теореми 4.1. Нехай f – неперервна POV-функція. Тоді існує неперервна монотонно зростаюча POV-функція g, для якої

a) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)} = 1$;

b) $g^{-1}(t)$ є POV-функцією.

Твердження а) випливає з теореми 3.79 [3], а твердження б) з Теореми 4.1, приведеної вище.

Саме функцію $g^{-1}(t)$ можна вважати узагальненою оберненою функцією до f.

Можливі напрямки для використання отриманих результатів

Одним з можливих напрямів використання, отриманих в дисертації результатів, є закон великих чисел. Розглянемо його більш детально.

Закон великих чисел в теорії імовірностей стверджує, що емпіричне середнє (арифметичне середнє) скінченної вибірки із фіксованого розподілу близьке до теоретичного середнього (математичного сподівання) цього розподілу. В залежності від виду збіжності розрізняють слабкий закон великих чисел, коли має місце збіжність за ймовірністю, і посилений закон великих чисел, коли має місце збіжність майже скрізь.

Завжди знайдеться така кількість випробувань, при якій з будь-якою заданою наперед імовірністю частота появи деякої події буде як завгодно мало відрізнятися від її імовірності.

Нижче описано дві версії ЗВЧ: Слабкий закон великих чисел та Посилений закон великих чисел. Обидва закони стверджують, що з певною достовірністю середнє вибірки

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

прямує до математичного сподівання

$$\overline{X_n} \to \mu, \ \ n \to \infty$$

де $X_1, X_2, \dots$ — скінченна послідовність н.о.р. випадкові величини зі скінченним математичним сподіванням $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = \mu < \infty$.

Слабкий закон великих чисел

Нехай є нескінченна послідовність однаково розподілених і некорельованих випадкових величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, визначених на одному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Їх коваріація $cov\left(X_i, X_j\right) = 0, \forall i \neq j$. Нехай $E(X_i) = \mu, \forall i \in \mathbb{N}$. Позначимо S_n суму перших n членів:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\, , n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Це означає, що для будь-якого додатного числа ε,

$$\lim_{n \to \infty} Pr\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Посилений закон великих чисел

Нехай є нескінченна послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, визначених на одному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Нехай $E(X_i) = \mu, \forall i \in \mathbb{N}$. Позначимо S_n суму перших n членів:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\, , n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \text{ майже напевно.} \tag{15}$$

Розглянемо також закон великих чисел для процесів відновлення.

Теорія відновлення — це галузь теорії ймовірностей, що узагальнює процеси Пуассона для довільних проміжків часу. Серед застосувань теорії є наприклад порівняння довгострокових переваг різних страхових полісів.

Процес відновлення є узагальненням процесу Пуассона. По суті, процес Пуассона, це неперервний в часі Марківський процес на множині натуральних чисел (звичайно починаючи з нуля), який має незалежні однаково розподілені терміни перебування в кожному цілому i (терміни перебування мають експоненціальний розподіл), до переходу (з ймовірністю 1) до наступного цілого числа $i+1$. Таким же неформальним чином ми можемо визначити процес відновлення, який буде визначатися ідентично, за винятком того, що проміжки часу беруться на більш загальних розподілах.

В загальному випадку процес відновлення означається як

$$N(t) = sup\{n: S_n < t\}$$

Для такого процесу закон великих чисел записується в наступному вигляді:

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu} \text{ м. н.} \tag{16}$$

Для процесу відновлення можемо записати наступну нерівність:

$$S_{N(t)} < t \le S_{N(t)+1}.$$

За допомогою алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} < \frac{t}{N(t)} \le \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

Розглянемо кожен елемент окремо. Маємо:

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[N(t)\to\infty]{} \mu;$$

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \xrightarrow[N(t)\to\infty]{} \mu;$$

$$\frac{N(t)+1}{N(t)} \xrightarrow[N(t)\to\infty]{} 1.$$

Отже,

$$\frac{t}{N(t)} \xrightarrow[N(t)\to\infty]{} \mu.$$

$$S_{N(t)} \approx S_{N(t)+1} \approx t.$$

$$S\big(N(t)\big) \approx t \ \Leftrightarrow f\big(f^{-1}(t)\big) = t.$$

Як бачимо, S_n та $N(t)$ можна розуміти як обернені у певному розумінні функції, тобто $N(t) = {S_n}^{-1}$. Перепишемо (15) та (16) у такому вигляді:

$$\frac{S_n}{n\mu} \to 1 \text{ м. н.}, \qquad \frac{N(t)}{t/\mu} \to 1 \text{ м. н.}$$

Якщо $f(x) = x\mu$, то $f^{-1}(x) = x/\mu$ й тому

$$\frac{S_n}{f(n)} \to 1 \text{ м. н.}, \qquad \frac{S^{-1}(t)}{f^{-1}(t)} \to 1 \text{ м. н.}$$

Таким чином, з асимптотичного результату для S_n можна отримати асимптотичний результат для $N(t)$. При цьому нормуванням для N є обернена функція до нормування для S. Такий перехід можливий тільки за умов, що f та f^{-1} є POV-функціями.

Так посилений закон великих чисел можна вивести через закон великих чисел для процесів відновлення і навпаки.

Також, в посиленому законі великих чисел та законі великих чисел для процесів відновлення використовують нормування n та обернену функцію t (RV-функції). Аналогічно можна використати POV-функцію, і тоді інша буде також POV-функцію (див. Теорему).

ВИСНОВКИ

Під час виконання магістерської дисертації я ознайомився з такими класами функцій, як RV-функції та декількома похідними від них (POV, PRV, ORV та іншими). Було знайдено приклади функцій[3], побудовано їх графіки та визначено належність функцій до вище згаданих класів.

Доведено твердження про належність оберненої функції f^{-1}, від монотонної, неперервної функції f з класу POV, до класу POV. Виявилось, якщо f – монотонна, неперервна функція з F_{+}, що належить класу POV-функцій, то і f^{-1} також належить класу POV-функцій. На основі останнього твердження була отримана теорема, та доведена двома різними способами. Використовуючи здобуту теорему та деяку раніше відому інформацію сформульовано наслідок. Наведено приклад використання отриманої теореми.

Граничні властивості для ORV-, PRV- та POV-функцій досліджено. Всі поставлені завдання розв’язані, мети досягнуто.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин // Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. — 264 с.
2. Феллер У. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. // Москва: Издательство «Мир»: Редакция литературы по математическим наукам, 1967.
3. Valeriĭ V. Buldygin, Karl-Heinz Indlekofer, Oleg I. Klesov, Josef G. Steinebach Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes // Springer Nature Switzerland AG 2018.
4. S. Aljanˇci´c and D. Arandelovi´c, O-regularly varying functions, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 22 (36) (1977), 5–22.
5. V.G. Avakumovi´c, Über einen O-Inversionssatz, Bull. Int. Acad. Youg. Sci. 29–30 (1936), 107–117.
6. D. Drasin and E. Seneta, A generalization of slowly varying functions, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), no. 3, 470–472.
7. Е. Сенета Правильно меняющиеся функции // Москва «Наука» главная редакция физико-математической литературы (1985), 7-51.
8. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, Properties of a subclass of Avakumovi´c functions and their generalized inverses, Ukrain. Matem. Zh. 54 (2002), no. 2, 149–169 (Russian); English transl. in Ukrain. Math. J. 54 (2002), no. 2, 179–206.
9. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, On some properties of asymptotically quasiinverse functions and their applications. I, Teor. Imov. Mat. Stat. 70 (2004), 9–25 (Ukrainian); English transl. in Theory Probab. Math. Statist. 70 (2005), 11–28.
10. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, On some properties of asymptotically quasiinverse functions and their applications. II, Teor. Imovirnost.

Matem. Statist. 71 (2004), 33–48 (Ukrainian); English transl. in Theory Probab. Math. Statist. 71 (2005), 37–52.

11. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, On some extensions of Karamata's theory and their applications, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) 80 (94) (2006), 59–96.

12. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, On the convergence to infinity of positive increasing functions, Ukrain. Matem. Zh. 62 (2010), no. 10, 1299–1308 (Ukrainian); English transl. in Ukrain. Math. J. 62 (2010), no. 10, 1507–1518.

13. J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière. Theéorèmes fondamentaux, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55–62.

14. W. Feller, On regular variation and local limit theorems, Proceeding of the 5th Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1965–1966 2 (1967), no. 1, 373–388.

15. W. Feller,One-sided analogues of Karamata's regular variation, Enseignement Math. 15 (1969), no. 2, 107–121.

16. N.H. Bingham, C.M. Goldie, and J.L. Teugels, Regular Variation, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

17. D. Arandelovi´c, O-regular variation and uniform convergence, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 48 (62) (1990), 25–40.

18. N.H. Bingham, Regular variation and probability: The early years, J. Comp. Appl.Math. 200 (2007), no. 1, 357–363.

19. I.I. Gihman and A.V. Skorohod, Stochastic Differential Equations, "Naukova Dumka", Kiev, 1968 (Russian); English transl. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

20. B.I. Korenblyum, On the asymptotic behavior of Laplace integrals near the boundary of a region of convergence, Dokl. Akad. Nauk. USSR (N.S.) 104 (1955), 173–176. (Russian)

21. S.M. Berman, Sojourns and extremes of a diffusion process on a fixed interval, Adv. Appl. Probab. 14 (1982), no. 4, 811–832.

22. S.M. Berman, The tail of the convolution of densities and its application to a model of HIVlatency time, Ann. Appl. Probab. 2 (1992), no. 2, 481–502.

23. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, The PRV property of functions and the asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations, Teor. Imov. Mat. Stat. 72 (2005), 10–23 (Ukrainian); English transl. in Theory Probab. Math. Statist. 72 (2006), 11–25.

24. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, PRV property and the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations, Theory Stoch. Process. 11 (27) (2005), no. 3–4, 42–57.

25. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, On some properties of asymptotically quasiinverse functions, Teor. Imovirnost. Matem. Statist. 77 (2007), 13–27 (Ukrainian); English transl. in Theory Probab. Math. Statist. 77 (2008), 15–30.

26. V.V. Buldygin, O.I. Klesov, and J.G. Steinebach, PRV property and the ϕ-asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations, Liet. Mat. Rink. 77 (2007), no. 4, 445–465 (Ukrainian); English transl. in Lithuanian Math. J. 77 (2007), no. 4, 361–378.

27. O. Klesov, Z. Rychlik, and J. Steinebach, Strong limit theorems for general renewal processes, Probab. Math. Statist. 21 (2001), no. 2, 329–349.

28. A.L. Yakymiv, Asymptotics of the probability of nonextinction of critical Bellman–Harris branching processes, Trudy Mat. Inst. Steklov. 177 (1986), 177–205, 209 (Russian); English transl. in Proc. Steklov Inst. Math. 4 (1988), 189–217.

29. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. — 5-е изд. — М. : Наука, 1964. — Т. 1. — 440 с.

30. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. — 5-е изд. — М. : Наука, 1968. — Т. 2. — 463 с.

31. J. Karamata, Sur un mode de croissance ret’gulie‘re des fonctions, Mathematica (Cluj) 4 (1930), 38–53.