О.А.ЖУКОВСЬКА, Л.С.ФАЙНЗІЛЬБЕРГ

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ КОЛЕКТИВНИХ РІШЕНЬ

ОСОБИСТІ РІШЕННЯ ЕКСПЕРТІВ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

О.А.Жуковська, Л.С.Файнзільберг

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ КОЛЕКТИВНИХ РІШЕНЬ

Київ
Освіта України
2018

УДК 519.87:330.137.7
Ж 864

Рекомендовано до друку Вченою радою КПІ імені Ігоря Сікорського (протокол № 12 від 26.12.2017 р.)

Рецензенти: **М.І. Шлезінгер,** професор, доктор фізико-математичних наук
В.М. Азарсков, професор, доктор технічних наук

Математичні моделі колективних рішень: монографія / О.А. Жуковська, Л.С. Файнзільберг. – Київ: Освіта України, 2018. – 160 с.

Наведено результати оригінальних досліджень, спрямованих на формалізацію процесу прийняття колективних рішень групи незалежних експертів. Запропоновано математичні моделі колективних рішень в умовах ризику, що ґрунтуються на байєсових стратегіях, та моделі формальної оцінки кваліфікації експертів. На основі вдосконалених методів інтервального аналізу побудовані субоптимальні моделі, що забезпечують умови оптимальності з заданою довірчою ймовірністю.

Для спеціалістів з теорії прийняття рішень та читачів, які цікавляться практичним застосуванням методів колективних рішень в техніці, медицині та економіці.

ISBN 978-617-7625-08-6

ЗМІСТ

ВСТУП

Різні сфери професійної діяльності людини пов'язані з прийняттям рішень, які зводяться до вибору оптимального варіанту поведінки з множини альтернатив. Досить часто такий вибір спирається на інформацію, яку особа, що приймає рішення, отримує у вигляді рекомендацій від колективу експертів. Типові приклади – медичний консиліум, коли необхідно прийняти рішення про поточний стан пацієнта на основі доступної і часом суперечливої інформації окремих лікарів, або задача скорингу, коли на підставі інтегрування приватної інформації групи незалежних експертів необхідно прийняти обґрунтоване рішення про видачу кредиту конкретному позичальнику.

Колективні рішення використовують також комп'ютерні системи, що застосовуються в техніці, медицині та економіці, коли для підвищення ефективності залучають комбіновані класифікатори (Multiple Classifier Systems), засновані на «інтеграції» особистих рішень окремих алгоритмів автоматичної класифікації.

Існують різні підходи до інтеграції особистих рішень експертів (алгоритмів), наприклад, метод голосування (Majority Vote Method) або ранжування (Label Ranking Method). Водночас такі підходи, засновані на суб'єктивних оцінках, мають ряд обмежень і призводять до відомих «парадоксів» формування колективного рішення.

Автори розробили оригінальний метод інтеграції індивідуальних рішень експертів в колективне рішення в рамках байєсівського підходу. Створено оптимальні та субоптимальні моделі, головна перевага яких перед існуючими полягає в тому, що алгоритм інтеграції не передбачає використання жодних евристичних процедур і тому дозволяє отримувати математично обґрунтоване оптимальне (субоптимальне) рішення за конкретними даними.

Книга складається з чотирьох розділів, які бажано читати послідовно.

<u>В першому розділі</u> розглянуто сучасний стан теорії прийняття рішень та проведено аналіз існуючих методів побудови колективних

рішень. Зазначені недоліки відомих методів показують, що на сьогодні наукову проблему інтеграції особистих рішень експертів в узгоджене колективне рішення ще не можна вважати вирішеною.

В другому розділі задача прийняття колективних рішень сформульована як задача визначення поточного стану об'єкту в умовах протиріч групи незалежних експертів. Запропоновано байєсівські моделі, які забезпечують мінімум середньої імовірності помилки (середнього ризику) колективного рішення на множині можливих ситуацій. Запропоновано схему, в якій за вказівками зовнішнього «вчителя» уточнюються оцінки імовірнісних характеристики. Побудовані також формальні моделі, які дозволяють оцінювати та порівнювати кваліфікації окремих експертів групи.

Третій розділ присвячено дослідженню методів інтервальних обчислень, на основі яких може бути узагальнено пропонований підхід до колективних рішень шляхом переходу від точкових імовірностей до довірчих інтервалів. Проаналізовано особливості та властивості інтервальних арифметичних операцій. Запропоновано оригінальні методи обчислення добутку та піднесення до цілого додатного ступеня інтервальних величин у формі центр-радіус. Продемонстровано переваги запропонованого підходу у порівнянні з відомими.

Четвертий розділ присвячено побудові субоптимальних моделей прийняття колективних рішень, які з заданою довірчою імовірністю гарантують мінімум середньої похибки або в загальному випадку мінімум середнього ризику колективних рішень. Ці моделі побудовані на основі результатів досліджень, наведених в другому та третьому розділах. Представлено також інтервальні моделі, які забезпечують оцінювання та порівняння кваліфікації експертів. На конкретних прикладах продемонстрована конструктивність запропонованих моделей для вирішення практичних задач.

Автори висловлюють щиру вдячність професору М.І. Шлезінгеру, професору В.М. Азарскову і професору А.І. Петренко за цінні поради, які сприяли поліпшенню монографії.

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ КОЛЕКТИВНИХ РІШЕНЬ

1.1. Загальна характеристика проблеми

На сучасному етапі розвитку суспільства постійно підвищується ціна від неправильно прийнятих рішень в різних сферах професійної діяльності та в повсякденному житті людини. Неправильно встановлений медичний діагноз, ризиковане взяття кредитів та вкладання інвестицій, несвоєчасно виявлений аварійний стан обладнання – це далеко не повний перелік хибних рішень в медицині, економіці та техніці, негативні наслідки яких добре відомі.

Теорія прийняття рішень – це математична дисципліна, яка забезпечує науково обґрунтований підхід до вибору найкращого, в деякому розумінні, варіанту (варіантів) поведінки в умовах неповної інформації про зовнішнє середовище. Важливість наукового підходу до прийняття рішень полягає в тому, що рішення, які людина приймає інтуїтивно, не завжди є раціональними.

Можна сформулювати такі загальні принципи (постулати) теорії прийняття рішень як наукової дисципліни.

1. Задача прийняття рішень виникає в ситуаціях, коли існує не менш, ніж два варіанти розвитку подій (альтернатив).
2. Ідеальних рішень не буває: вибір кожної з можливих альтернатив може призводити до певних втрат (ризику).

3. Теорія прийняття рішень забезпечує вибір альтернативи, яка мінімізує можливий ризик.

4. Математичний метод, який реалізує спосіб мінімізації ризику, має відповідати ситуації, в якій приймається рішення, та відношенню до ризику особи, що приймає рішення.

В одних випадках задача може бути зведена до пошуку найкращої альтернативи за сукупністю критеріїв і тоді її розв'язування ґрунтується на методах багатокритеріальної оптимізації [50, 78, 111]. В інших випадках адекватною моделлю задачі є прийняття рішень в умовах конфлікту в припущенні активної протидії супротивників, і тоді оптимальна стратегія ґрунтується на теорії ігор [48, 49, 123]. Якщо ж прийняття рішень здійснюється в умовах «гри з природою», яка байдужа до наслідків прийнятих рішень, то вибір оптимальної альтернативи ґрунтується на методах теорії статистичних рішень [14, 67].

Основна трудність прийняття рішень в умовах невизначеності полягає в тому, що наслідки, пов'язані з прийняттям того чи іншого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності таких наслідків прийнято вимірювати в умовних одиницях – втратах, які може зазнати особа, що приймає рішення (ОПР).

В загальному випадку функція втрат $\varphi(D,S)$ залежить від двох аргументів: рішення $D \in \mathbf{D}$ та ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$ [101]. Основний крок при розв'язуванні задачі полягає в перетворюванні функції втрат $\varphi(D,S)$ у функцію ризику $R(D)$, яка залежність тільки від одного аргументу – рішення $D \in \mathbf{D}$, яке приймається.

Спосіб такого перетворювання неоднозначний і залежить від вибраного критерію ризику. Від цього критерію залежить і зміст виразу «найкраще рішення»: найкращим називається рішення, яке мінімізує ризик.

Формально задачу прийняття рішень можна описати таким чином [37]. Якщо зафіксувати деяке певне рішення $D \in \mathbf{D}$, то функція втрат $\varphi(D,S)$ вироджується в функцію $\varphi_D(S)$ одного аргументу, визначену на множині $\mathbf{\Theta}$, і така функція відображує залежність втрати від ситуації при заданому і фіксованому рішенні D.

Результат $R(D) = \sum[\varphi_D(S)]$ застосування деякого функціоналу Σ до функції $\varphi_D(S)$ називається ризиком, пов'язаним з фіксованим рішенням $D \in \mathbf{D}$. Найкращим рішенням, якщо воно існує, називається таке $D^{opt} \in \mathbf{D}$, яке мінімізує ризик на множині рішень $\mathbf{D}$, тобто задовольняє вимогу

$$R(D^{opt}) = \inf_{D \in \mathbf{D}} R(D). \qquad (1.1)$$

Якщо множина $\mathbf{D}$ скінчена, для неї можна визначити невід'ємну числову функцію $p(D)$, що задовольняє умову $\sum_{D \in \mathbf{D}} p(D) = 1$. Таку функцію прийнято називати рандомізованим рішенням, заданим на скінченій множині $\mathbf{D}$. Число $p(D)$ називається імовірністю детермінованого рішення $D \in \mathbf{D}$ щодо рандомізованого рішення $p(D)$.

Практичне застосування всякого рандомізованого рішення полягає в тому, що кидають жереб, який визначає, яке детерміноване рішення з $\mathbf{D}$ необхідно прийняти. Застосування рандомізованого рішення потребує такої організації кидання жереба, щоб детерміноване рішення D випадало з імовірністю $p(D)$.

Позначимо множину всіх рандомізованих рішень, заданих на множині $\mathbf{D}$, як $\tilde{\mathbf{D}}$. Оскільки для кожного $D \in \mathbf{D}$ знайдеться таке еквівалентне йому рандомізоване рішення $p_D \in \mathbf{D}$, відносно якого імовірність $p_D(D)$ детермінованого рішення D дорівнює 1, то множину $\tilde{\mathbf{D}}$ можна розглядати як результат поповнення множини $\mathbf{D}$ та ставити задачу пошуку найкращого рішення вже на множині $\tilde{\mathbf{D}}$. В такому випадку необхідно продовжити функцію втрат φ з множини $\mathbf{D} \times \mathbf{\Theta}$ пар вигляду (D,S) на множину $\tilde{\mathbf{D}} \times \mathbf{\Theta}$ пар вигляду (p,S).

Середньою втратою, що супроводжує рішення $p \in \tilde{\mathbf{D}}$ у ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$, називають число

$$\tilde{\varphi}(p, S) = \sum_{D \in \mathbf{D}} p(D)\varphi(D, S). \qquad (1.2)$$

Оскільки співвідношення $\tilde{\varphi}(p_D, S) = \varphi(D, S)$ справедливо для будь-якої пари (D, S), то функція середніх втрат $\tilde{\varphi}$ є продовженням функції втрат φ. Тому, якщо для детермінованих рішень вже було вибрано критерій ризику (функціонал Σ), то за допомогою функціоналу Σ для рандомізованих рішень можна визначити функцію середніх ризиків $\tilde{R}$.

Тобто середнім ризиком, пов'язаним з рандомізованим рішенням $p \in \tilde{\mathbf{D}}$, називають число

$$\tilde{R}(p) = \sum \tilde{\varphi}(p, S),$$

а найкращим рандомізованим рішенням вважають рішення, що мінімізує середній ризик.

Важливий загальний висновок, що стосується будь-яких критеріїв ризику, полягає в тому, що яким би не був функціонал Σ, має місце співвідношення

$$\inf_{p \in \tilde{\mathbf{D}}} \sum \tilde{\varphi}(p, S) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \sum \varphi(D, S).$$

тобто поповнення множини $\mathbf{D}$ не може завдати шкоди при розв'язуванні задачі.

Відповідь на питання, чи дасть поповнення реальну користь, тобто чи можна знак «$\leq$» замінити на знак «$<$», залежить від використовуваного критерію ризику. Найпоширенішими є два такі критерії: критерій мінімаксу та критерій Байєса.

Використання критерію мінімаксу не потребує ніякої інформації про ситуацію окрім визначення множини можливих ситуацій $\mathbf{\Theta}$. Тому такий критерій може застосовуватись при невідомому розподілі імовірностей на множині $\mathbf{\Theta}$ усіх можливих ситуацій, наприклад, при невідомому розподілі імовірностей випадкових станів об'єкта, відносно яких приймається рішення, а також тоді, коли ці стани взагалі не є випадковими [67].

Більш того, для невизначеності протидії критерій мінімаксу є найбільш прийнятним критерієм [101].

Для критерію мінімаксу функціонал $\sum$ має вигляд $\sup\limits_{S}$, тобто в даному випадку ризик $R(D)$, пов'язаний з рішенням $D \in \mathbf{D}$, визначають за співвідношенням

$$R(D) = \sup_{S \in \mathbf{\Theta}} \varphi(D, S).$$

Тому в багатьох практично важливих випадках, коли множини $\mathbf{D}$ та $\mathbf{\Theta}$ скінченні, найкраще детерміноване рішення D^{opt} задовольняє умову

$$R(D^{opt}) = \min_{D \in \mathbf{D}} \max_{S \in \mathbf{\Theta}} \varphi(D, S). \qquad (1.3)$$

Слід зауважити, що коли правомірна гіпотеза про імовірні стани середовища, в якому приймаються рішення, тобто існує розподіл імовірностей на множині можливих ситуацій, маємо задачу прийняття рішень в умовах стохастичної невизначеності, яку саме і прийнято називати задачею прийняття рішень в умовах ризику. Для її вирішення можна використовувати критерій Байєса, коли функціонал $\sum$ має вигляд математичного сподівання за розподілом $P(S)$, а ризик $R(D)$ визначають за формулою

$$R(D) = \sum_{S \in \mathbf{\Theta}} P(S) \varphi(D, S). \qquad (1.4)$$

На відміну від критерію мінімаксу, поповнення множини $\mathbf{D}$ для критерію Байєса є неістотним, тобто введення рандомізованих рішень не дає ніякого виграшу. Більш того, в [67, с. 17] доведена теорема про детермінований характер байєсових стратегій, яка зазначає, що рандомізація стратегії не може покращити детерміновану стратегію з точки зору математичного сподівання втрат.

Один з варіантів ускладнення задачі прийняття найкращого рішення пов'язаний з використанням результатів деяких спостережень. При такій постановці задачі потрібно шукати вже не найкраще рішення (основна задача), а найкращу стратегію, тобто залежність найкращого рішення від результатів спостереження.

Нехай $\mathbf{Z}$ – множина можливих результатів спостереження z і нехай відомими є умовні імовірності $P(z\,|\,S)$ для всіх $z \in \mathbf{Z}$ та $S \in \mathbf{\Theta}$. Детермінованою стратегією називають будь-яке відображення $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{D}$ множини $\mathbf{Z}$ можливих результатів у множину детермінованих рішень $\mathbf{D}$. Мішаною стратегією називають будь-яке відображення $\tilde{f} : \mathbf{Z} \to \tilde{\mathbf{D}}$ множини $\mathbf{Z}$ у множину рандомізованих рішень $\tilde{\mathbf{D}}$.

Множину $\tilde{\mathbf{F}}$ всіх мішаних стратегій можна розглядати як результат поповнення множини $\mathbf{F}$ всіх детермінованих стратегій. Пошук найкращої стратегії у множині $\mathbf{F}$ або у множині $\tilde{\mathbf{F}}$ можна звести до розглянутої вище основної задачі. Роль рішень в основній задачі відіграють стратегії з множини $\mathbf{F}$, а роль функції втрат – функція $L(f,S)$, яку визначають для кожної пари (f,S):

$$L(f,S) = \sum_{z \in \mathbf{Z}} P(z\,|\,S)\,\varphi\,[\,f(z),S],$$

де f – стратегія, S – ситуація, а $\varphi[\cdot]$ – вихідна функція втрат.

Критерій Байєса дає ще й такий спосіб зведення стратегічної задачі до основної. Нехай для всіх $z \in \mathbf{Z}$ та $S \in \mathbf{\Theta}$ відомі імовірності $P(S)$ та $P(z\,|\,S)$. Тоді, якщо одержано результат спостереження $z \in \mathbf{Z}$, то, розглядаючи імовірності $P(S)$ як апріорні, можна одержати апостеріорні імовірності $P(S\,|\,z)$ для всіх $S \in \mathbf{\Theta}$ за відомою формулою Байєса

$$P(S/z) = \frac{P(S)P(z\,|\,S)}{\sum\limits_{S \,\in\, \mathbf{\Theta}} P(S)P(z\,|\,S)}. \tag{1.5}$$

Використовуючи в співвідношенні (1.4) апостеріорні імовірності $P(S\,|\,z)$ замість $P(S)$ можна для кожного відомого результату спостереження $z \in Z$ звести задачу пошуку найкращої стратегії до основної задачі, тобто пошуку найкращого рішення $D_Z \in \mathbf{D}$ з точки зору мінімуму середнього ризику.

Критерій Байєса активно застосовується до аналізу експертних оцінок в задачах прийняття рішень [40, 47]. Окрім критерію Байєса в теорії статистичних рішень використовують також інші критерії вибору оптимальних стратегій, зокрема, критерії Вальда, Гурвіца, Лапласа, Севіджа [35], які засновані на певних припущеннях (гіпотезах) відносно поведінки зовнішнього середовища та особистому ставленню ОПР до можливого ризику.

Останнім часом активно досліджуються підходи до задачі вибору альтернатив з множини $\mathbf{D}$, яка включає сукупність статистично пов'язаних між собою альтернатив. В таких більш складних випадках процес прийняття рішень ґрунтується на використанні байєсовських сіток [36, 88, 91, 103] та методах їх навчання за вибірками спостережень [13].

Важливим розвитком наукового підходу до проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності є сучасний напрям, який використовує апарат нечітких множин Заде [29]. Для реалізації такого підходу автори монографії [33] розробили оригінальний метод багатокритеріального нелінійного програмування, який ґрунтується на нечітких параметрах і системах нечіткого логічного виводу та може використовувати якісну інформацію. Ефективність запропонованого підходу підтверджено реалізацією прикладних систем у вигляді нечітких нейронних мереж у різних сферах застосування [30-32].

В роботі [44] показано, що різні форми опису нечітких даних (цілі, обмежень, коефіцієнтів) породжують різні постановки задачі нечіткого математичного програмування, та досліджено умови розв'язування задачі математичного програмування з нечіткою множиною індексів обмежень.

Для розв'язування задачі прийняття рішень за умов нечітких даних в роботі [6] запропоновано метод непрямого визначення інтервальних величин, а в роботі [8] – алгоритми, які розвивають відомий метод послідовного аналізу варіантів. Ефективність запропонованих алгоритмів підтверджена теоретичними дослідженнями, обчислювальними експериментами і розв'язанням низки практичних задач.

Слід зауважити, що існує певний клас задач, коли особа, що приймає рішення (ОПР), повинна вибрати найкращу альтернативу з множини неоднорідних альтернатив, тобто альтернатив, для яких не існує єдина сукупність критеріїв. Такою є, наприклад, задача формування комплексної цільової програми, коли ОПР має справу з проектами різної фізичної природи. В монографії [55] розглядаються алгоритмічні аспекти побудови систем підтримки прийняття рішень, орієнтованих саме на такий особливий випадок оброблення експертної інформації.

Системи підтримки прийняття рішень, підґрунтям яких є методи теорії прийняття рішень – один з актуальних напрямків сучасного суспільства [5, 54, 73, 79].

1.2. Задача формування колективних рішень

Відомим прийомом підвищення якості прийняття рішень є об'єднання спеціалістів певної галузі у колектив, який приймає спільне рішення [9, 10, 55, 110]. Постає проблема формування колективного рішення, яке в той чи іншій мірі узгоджує думки різних експертів.

Ідею колективного рішення активно застосовують також до побудови «колективу» формальних алгоритмів (Multiple Classifier Systems), що дозволяє підвищити ефективність вирішувальних правил в задачах класифікації спостережуваних ситуацій [4, 12, 51, 71, 98,104–107, 130, 135] та відновлення залежностей за вибіркою експериментальних даних [52].

Для побудови інформаційних технологій, спрямованих на інтеграцію особистих рішень експертів, актуальним є розроблення математичних моделей прийняття колективних рішень.

Водночас можна погодитись з висновком автора монографії [10], що у більшості випадків при створенні прикладних систем підтримки прийняття колективних рішень недооцінюють значення процесу коректного оброблювання різнорідної експертної інформації та недостатнє використання наукових результатів для розв'язання реальних задач

Аналіз доступних публікацій, присвячених проблемі прийняття колективних рішень, показує, що на сучасному етапі сформувалось два напрямки наукових досліджень, які доповнюють один одного.

Основна увага досліджень першого напрямку приділяється *психологічним* аспектам проблеми прийняття колективних рішень [1, 38, 74, 75, 97]. В цих роботах досліджуються принципи оптимального формування колективу експертів, вибору та організації самої процедури проведення експертиз, питанням, на які мають дати відповіді окремі експерти, емоційному впливу учасників експертизи друг на друга тощо.

Саме психологічні аспекти організації процедури колективних експертиз є підґрунтям методу прийняття колективних рішень Argument Delphi Technique [127], який є розвитком класичної моделі Delphi [100, 139] та базується на суперечливих ідеях експертів, виявлених під час проведення дискусій, до яких запрошують експертів для формування нових аргументів та критики аргументів інших експертів. Після певного рівня протиріччя метод підсумовує критичні аргументи та будує колективне рішення.

Проведений метааналіз результатів практичного застосування методу Delphi на вибірці більш ніж 3000 експертних груп [109], підтвердив його ефективність і дозволив сформувати додаткові рекомендації щодо формування колективу експертів.

Зрозуміло, що метод Delphi, також як і аналогічний метод TOPSIS [80, 118] та інші популярні технології формують колективне рішення на основі математичних обчислень результатів експертиз. Але саме психологічні аспекти формування колективного рішення займають головне місце в цих технологіях.

Тут доречно провести аналогію з конфліктологією – науковою дисципліною, яка вивчає лише психологічні аспекти виникнення, розвитку і завершення конфліктів, що суттєво доповнює теорію ігор, яка ґрунтується на математичних моделях формування рішень в умовах активної протидії.

Розроблення та аналіз математичних моделей складають основу другого важливого напрямку досліджень теорії прийняття колективних рішень, про що свідчить велика кількість наукових публікацій. Стисло наведемо інформацію про сучасні тенденції цього напрямку.

Перш за все зазначимо, що формальний підхід до задачі побудови колективного рішення можна розглядати з позиції багатокритеріальної оптимізації, якщо особисті рішення експертів вважати значеннями окремих критеріїв, або коли експерти надають своє рішення у вигляді бінарних відношень між окремими альтернативами. Тоді існуючий математичний апарат багатокритеріальної оптимізації та його модифікації можна прямо використовувати для отримання узгодженого колективного рішення.

Саме такій підхід розглядається в багатьох публікаціях, зокрема, в роботах [39, 141]. Більш того, застосування існуючого математичного апарату багатокритеріальної оптимізації до задачі формування колективних рішень дозволив отримати нові наукові результати.

Наприклад, в роботі [141] запропоновано оригінальний метод послідовної оцінки альтернатив з урахуванням відповідної компетенції експертів в умовах, коли кожен з експертів групи оцінює не всі пари об'єктів, тобто в умовах не повних бінарних відношень та відсутності прямої оцінки деяких альтернатив окремими експертами.

Запропоновано також метод підтримки прийняття рішень на основі цільового динамічного оцінювання альтернатив з урахуванням імовірностей їх реалізації [55].

В роботах [86, 117] доведено, що у процесі формування колективного рішення двосторонні угоди між експертами можуть збільшити або зменшити імовірність пошуку компромісів в залежності від того, чи мають такі угоди зовнішні наслідки. Позитивні зовнішні наслідки означають, що треті учасники отримують прибуток від двосторонніх угод, тоді як негативні зовнішні наслідки означають, що двосторонні угоди зачіпають третіх осіб.

Показано [128], що врахування особливості задачі оброблення експертної інформації дозволяє знайти рівновагу колективного рішення за Нешем.

В статтях [42, 43] досліджується новий принцип оптимальності в некооперативних іграх та запропонована загальна модель, в якій розглядається концепція індивідуальної оптимальності. Доведено, що узагальнення ігор, в яких цілі гравців визначаються функціями виграшів, дозволяє більш детально аналізувати конфліктну ситуацію та шляхи виходу з неї на основі принципу індивідуальної оптимальності.

Спираючись на фундаментальне поняття рівноваги за Нешем [66] автор роботи [43] довів, що концепція коаліційної рівноваги є узагальненням рівноваги за Нешем та своєрідним компромісом кожного гравця з іншими, який не розумно порушувати жодному з гравців.

Важливим кроком у розвитку математичних методів прийняття колективного рішення є роботи, які базуються на нечітких множинах Заде [29]. Зокрема, в роботі [118] введено розширення методу TOPSIS для обробки нечітких множинних атрибутів групових рішень та показано, що за умови використання запропонованого методу розв'язок задачі отримується з меншою обчислювальною складністю.

Аналогічні результати ефективного вдосконалення методів багатокритеріальної оптимізації на основі використання нечітких множин та їх практичне використання представлені в роботах [30, 32, 70, 76, 81, 82, 93, 99, 115, 118, 124, 132, 133, 136, 137, 142 та інших].

Водночас, як на це справедливо вказує автор роботи [140], всі існуючі методи багатокритеріальної оптимізації, зокрема, методи, що використовують лінгвістичні змінні та відношення [138], формують неоднозначне колективне рішення. На модельних експериментах доведено [108], що застосування різних методів для оброблення однакових даних, зокрема, методів ELECTRE, TOPSIS та інших популярних технологій, надають різні рішення, причому остаточне ранжування альтернатив суттєво залежить від обраного методу, кількості можливих альтернатив та експертів.

Крім того, для практичного використання методу ELECTRE [92] користувач має обрати порогові рівні так званих індексів згоди та незгоди, а тому отриманий результат в значній мірі є суб'єктивним та суттєво залежить від інтуїції та досвіду ОПР.

Одним з широко відомих способів побудови колективного рішення $D \in \mathbf{D}$ є правило голосування, яке досі активно використовують для формування колективного рішення за індивідуальними голосами δ_i, $i = 1,...,N$, наданими N експертами кожній з альтернатив множини $\mathbf{D}$ [45, 46, 69, 72, 77, 82, 83, 85, 87, 90, 112, 119, 121, 122, 126, 134].

Припускається, що заборонено голосувати відразу за два рішення, а колективним рішенням вважається альтернатива, що отримала найбільше число голосів експертів (рис. 1.1).

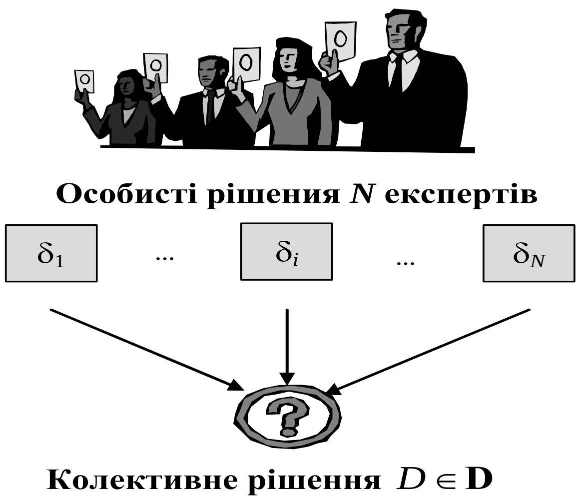

Рис. 1.1. Схема формування колективного рішення

Такий метод, заснований на здоровому глузді, на перший погляд здається найбільш справедливим. Водночас відомо [72], що метод голосування надає однозначне та справедливе рішення лише в тому випадку, коли число можливих альтернатів дорівнює вом ($M = 2$) та експерти групи мають однакові компетентності в оцінювані альтернатив.

Якщо ж $M > 2$, то метод голосування може не відповідати дійсно оптимальному варіанту та призводити до так званих «парадоксів» голосування [126]. Це ще раз підтверджує відомий крилатий вираз: «Наука починається там, де закінчується здоровий глузд».

Наведемо декілька відомих з літератури недоліків існуючих схем голосування [77].

Метод голосування ґрунтується на індивідуальних перевагах експертів щодо альтернатив $D \in \mathbf{D}$. Якщо експерт встановлює, що альтернатива $D_i \in \mathbf{D}$ перевершує альтернативу $D_j \in \mathbf{D}$, то цей факт позначається так:

$$D_i \succ D_j,\ i \neq j.$$

Якщо при голосуванні жодна з альтернатив не набирає більше половини голосів експертів, тобто не отримує абсолютної більшості, то для прийняття колективного рішення використовують правило відносної більшості: «перемагає» альтернатива, яка набирає більше голосів, ніж кожна з інших.

Отримало популярність також правило Борда [126], відповідно до якого альтернатива, що займає останнє місце в індивідуальному порядку переваг, отримує 1 бал, передостаннє місце – 2 бали і т.д. Отже, альтернатива, яка займає перше місце в індивідуальному порядку переваг експерта, отримує від нього M балів.

За сумами індивідуальних балів підраховуються сумарні бали і найкращою вважається та альтернатива, яка отримала найбільшу суму балів.

Водночас легко показати [90], що переможець за правилом Борда може не співпадати з переможцем за правилом відносної більшості, що викликає недовіру до отриманого колективного рішення.

Інше відоме правило голосування – правило Кондорсе [126], відповідно до якого, найкращою вважається та альтернатива D_i, яка за правилом більшості перемагає будь-яку іншу альтернативу при парному порівнянні. Проте відомо, що існують такі індивідуальні профілі переваг, за якими найкраща альтернатива за правилом відносної більшості, виявляється гірше інших альтернатив за правилом попарного порівняння Кондорсе [85].

Можна вказати інші парадокси методів голосування [126]. Один з таких парадоксів – парадокс правила Борда, який полягає в тому, що виключення з множини $\mathbf{D}$ допустимих альтернатив заздалегідь слабкої альтернативи $D \in \mathbf{D}$, яка б не отримала жодного голосу експертів, змінює переможця. Отже, правило Борда, яке допускає подібну ситуацію, не викликає довіри до способу визначення кращої альтернативи.

Зауважимо, що колективне рішення, визначене за правилом Кондорсе може призводити до нетранзитивного співвідношення типу

$$a \succ b \succ c \succ a .$$

Таку ситуацію прийнято називати парадоксом Кондорсе [72].

Математичний аналіз схем голосування, результати якого наведено в роботі [126], дозволив виявити інші недоліки методів голосування. Зокрема, існують випадки, коли прийняття колективного рішення за методом голосування призведе до *парадоксу Сімпсона* [112], *Остогорського* [121] та інших парадоксів.

Кеннет Ерроу із Стенфордского університету сформулював ряд принципів (аксіом), які повинна задовольняти справедлива система голосування [68]:

Аксіома монотонності. Нехай для заданого правила голосування при деякому профілі переваг експертів перемагає альтернатива $D \in \mathbf{D}$.

Тоді альтернатива D повинна перемогти і в тому випадку, коли

- порядок альтернативи D поліпшується по відношенню хоча б до однієї будь-якої альтернативи і не погіршується по відношенню до решти альтернатив;
- порядок переваги пари будь-яких інших альтернатив для кожного експерта залишається незмінним.

Зауважимо, що правило відносної більшості і правило Борда задовольняють властивість монотонності. Правила голосування в два тури з послідовним виключенням не задовольняють властивість монотонності.

Аксіома участі. Нехай для заданого правила голосування при деякому профілі переваг група N експертів визнала найкращою альтернативу $D_i \in \mathbf{D}$.

Тоді, якщо деякий додатковий експерт, який не входив до групи, візьме участь в голосуванні у відповідності до свого індивідуального порядку переваг, то експертами об'єднаної множини з $N+1$ експертів найкращою має бути визнана або та ж альтернатива D_i, або альтернатива, яка за думкою додаткового експерта перевершує альтернативу D_i.

Інакше кажучи, якщо додатковий голос змінює результат прийняття колективного рішення, то це повинно бути *тільки* на руку додатковому голосуючому експерту.

Можна показати, що правила Борда і відносної більшості задовольняють аксіому участі, а правило голосування в два тури і правило голосування з послідовним виключенням не задовольняють.

Аксіома анонімності (рівноправність експертів). Якщо два експерта поміняються своїми індивідуальними порядками переваг, то результат колективного рішення не зміниться.

Аксіома нейтральності (рівноправність альтернатив). Якщо альтернативи D_i і D_j поміняти місцями в індивідуальних порядках переваг всіх експертів, то результат колективного голосування буде таким:

• якщо раніше перемагала альтернатива D_i, то тепер переможцем буде альтернатива D_j,

• якщо раніше перемагала альтернатива D_j, то тепер переможцем буде альтернатива D_i,

• якщо раніше перемагала альтернатива D_m, яку не торкалися перейменування, то і тепер переможцем буде альтернатива D_m.

Аксіома поповнення. Нехай є дві групи експертів N_1 і N_2, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$. Тоді, якщо експерти груп N_1 і N_2 за заданим правилом голосування визнають найкращою альтернативу $D_i \in \mathbf{D}$, то експерти об'єднаної групи $N_1 \cup N_2$ за тим же правилом голосування також визнають найкращою альтернативу D_i.

Аксіома неперервності. Нехай експерти з множини N_1 за заданим правилом голосування обирають альтернативу $D_i \in \mathbf{D}$, а експерти з множини N_2 – іншу альтернативу $D_j \in \mathbf{D}$, $j \neq i$, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$.

Тоді існує достатньо велике натуральне число k, яке забезпечить розширення групи експертів N_1, голосуючих за D_i, що експерти об'єднаної множини $(kN_1) \cup N_2$ виберуть альтернативу D_i. Іншими словами, якщо до множини N_1 додавати по одному експерту, що віддає перевагу альтернативі D_i, то існує «критична маса» експертів, така, що далі буде визнаватися найкращою тільки альтернатива D_i.

Крім вирішення задачі колективного вибору найкращої альтернативи методи голосування розглядають також задачу визначення *колективної переваги* альтернатив [77]. Змістовна постановка такої задачі полягає в тому, що на основі *індивідуальних* переваг членів експертної групи необхідно узгоджене колективне рішення про порядок переваги розглянутих альтернатив. Іншими словами, в даному випадку потрібно не тільки вибрати кращу альтернативу з деякої множини альтернатив, наприклад, множини з чотирьох альтернатив $\mathbf{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, але і сформувати *колективне* рішення про порядок їх переваг, наприклад, такий порядок

$$D_3 \succ D_1 \succ D_4 \succ D_2 .$$

Зрозуміло, що процедура вироблення колективної думки про переваги альтернатив також повинна задовольняти ряд розумних вимог. Згідно з [68] така процедура має задовольняти таким принципам:

Принцип універсальності. Система голосування повинна бути дієвою (призводити до результату) за будь-яких переваг експертів.

Принцип одностайності. Якщо кожен експерт вважає, що альтернатива D_i, краще D_j, то і в колективна думка має бути

$$D_i \succ D_j .$$

Принцип незалежності. Розташування будь-яких двох альтернатив D_i і D_j в колективній думці залежить тільки від того, в якому порядку експерти розташували ці альтернативи і не залежить від їх ставлення до інших альтернатив.

Принцип повноти. Система повинна забезпечувати можливість порівняння будь-якої пари альтернатив і визначати хто з них краще.

Принцип транзитивності (раціональності). Якщо у відповідності до думки експертів альтернатива D_j визнається не краще альтернативи D_i, а альтернатива D_m не краще альтернативи D_j, то альтернатива D_m не краще альтернативи D_i.

Кеннет Ерроу довів теорему [68] про неможливість ідеального «колективного вибору», яка отримала назву *парадокс Ерроу*.

Теорема Ерроу. Якщо число альтернатив $M \geq 3$, то не існує ніяких інших способів побудови колективного рішення, що задовольняє зазначеним вище принципам, крім призначення диктатором одного з експертів, думка якого приймається за колективну думку (нав'язується іншим експертам).

Наведені парадокси голосування, зокрема парадокс Ерроу, можуть призвести, та іноді дійсно призводять, до дуже неприємних особливостей процедури голосування [77]. Наприклад, трапляються випадки, коли група взагалі не може прийняти єдине рішення, оскільки кожний експерт голосує за свій унікальний варіант. Також при багатоступінчастому голосуванні меншість може нав’язати свою волю більшості.

Таким чином, спосіб рівноправного голосування далеко не найкращий спосіб побудови колективного рішення.

З метою підвищення гнучкості процедури голосування часто пропонується зважувати рішення δ_{im} кожного i-го ($i = 1,\dots,N$) експерта колективу, який прийняв рішення на користь m-ї ($m = 1,\dots,M$) альтернативи, тобто, використовуючи деякі фіксовані ваги $\eta_i \geq 0$, організувати підрахунок голосів за формулою

$$K_m = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \delta_{im}.$$

Однак, при такій організації схеми помилка члену колективу з високою вагою часто стає причиною помилки всього колективу навіть у тих випадках, коли деякі з експертів прийняли правильні рішення.

Дослідження показали [114], що експерт або особа, що приймає рішення, може адекватно визначати вагові коефіцієнти тільки у випадках, коли кількість альтернатив не перевищує 5 – 9, інакше необхідно застосовувати методи непрямого визначення інтервалів відносної важливості альтернатив [120].

Цікаві підходи до побудови колективних вирішувальних правил розглянуті в роботі [51]. Головна їх відмінність полягає в тому, що множину $\mathbf{\Theta}$ всіх можливих ситуацій пропонують розділити на підмножини $\mathbf{\Theta}_1,\dots,\mathbf{\Theta}_L$ компетентностей експертів та встановити значення вагових коефіцієнтів η_i в залежності від поточної ситуації. Зокрема, встановлювати значення η_i так:

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S \in \mathbf{\Theta}_i, \\ 0, & \text{якщо} \quad S \notin \mathbf{\Theta}_i, \end{cases}$$

де $\mathbf{\Theta}_i$ – область компетентності i-го експерта.

За такого підходу прийняття колективного рішення здійснюється в два етапи. На першому етапі визначають належність даної ситуації той чи іншій області компетентності, а на другому – вступає в силу рішення того з експертів, компетентність якого максимальна в даній області. Таким чином, індивідуальне рішення члена колективу, найбільш компетентного в даній ситуації, ототожнюється з рішенням всього колективу.

Для розділення множини $\mathbf{\Theta}$ на підмножини $\mathbf{\Theta}_1,...,\mathbf{\Theta}_L$ пропонується використовувати різні алгоритми, що спираються на відомі методи навчання розпізнавання, зокрема, на метод потенційних функцій [2]. Спеціальну групу алгоритмів виокремлення областей компетентності $\mathbf{\Theta}_1,...,\mathbf{\Theta}_L$ представляють алгоритми самонавчання. З цією метою в роботі [98] запропоновано використовувати метод сумісних розподілів.

Низка наукових робіт вивчає методи побудови колективного рішення, яке ґрунтуються лише на бінарних відношеннях, що враховують індивідуальні ставлення кожного з членів колективу до всіх пар можливих альтернатив.

Ґрунтуючись на індивідуальних перевагах кожного i-го члену групи можна обрати єдину альтернативу за допомогою того чи іншого правила. Згідно з правилом одностайності (консенсусу) вибраною вважається та альтернатива $D_j \in \mathbf{D}$, якій надає перевагу кожний i-й член колектив, тобто

$$D_j^{(i)} \succ D_m^{(i)} \quad \forall m = 1,...,M,\, m \neq j\,.$$

Хоча правило консенсусу є єдиним «справедливим» правилом, яке дозволяє блокувати диктат одних членів групи над іншими, таке правило не завжди може бути реалізовано через розходження (протиріччя) оцінок переваг експертів групи.

Повністю протилежним правилом є принцип, згідно з яким групове рішення ототожнюється з рішенням одного з членів групи – лідера. Така процедура зовсім не враховує переваги інших членів групи, тому принцип диктатора не може характеризувати колективне рішення та застосовується виключно для прийняття рішень за надзвичайних обставин.

Один з можливих підходів до узгодження рішення колективу експертів, який ґрунтується на індивідуальних бінарних відношеннях окремих експертів – метод аналізу ієрархій Сааті [53], який є популярним для розв'язання багатокритеріальних задач.

В математичному сенсі метод Сааті узагальнює властивість транзитивності наступним чином

$$\text{якщо } a \succ b \text{ в } m_1 \text{ раз, а } b \succ c \text{ в } m_2 \text{ раз, то } a \succ c \text{ в } m_1 m_2 \text{ рази,}$$

а також заснований на аксіомі спряженості, у відповідності до якої постулюється, що

$$\text{якщо } a \succ b \text{ в } m \text{ раз, то } b \succ a \text{ в } 1/m \text{ раз.}$$

Метод Сааті передбачає перевірку узгодженості таблиць бінарних відношень, в яких фігурують суб'єктивні оцінки пріоритетів порівнюваних альтернатив, і перехід від матриць парних порівнянь до кількісних оцінок, що дозволяє провести рейтинг альтернатив.

Незважаючи на те, що класичний метод Сааті достатньо широко розповсюджений, дослідження показали, що методу також притаманні вади, які випливають з властивостей запропонованого методу парних порівнянь. Популярність методу Сааті привернула увагу дослідників, які ставлять за мету вдосконалити метод та усунути деякі відомі недоліки.

Так, наприклад, у роботі [131] знайдено достатні умови відсутності реверсу рангів і запропоновано метод обчислення багатокритеріальних кардинальних оцінок. Модельні експерименти підтвердили достовірність одержаних теоретичних результатів. В роботі [34] запропоновано математичні моделі оптимізації для обґрунтування та адаптивного знаходження вагових коефіцієнтах методу парних порівнянь.

Для визначення колективної переваги альтернатив за індивідуальними перевагами окремих експертів використовується також метод, заснований на визначені так званої медіани Кемені [84]. Наведемо основні властивості цього методу.

Нехай є M альтернатив і кожен з N експертів надав своє особисте ранжування цих альтернатив:

$$P_1, \; ..., \; P_N ,$$

тобто P_n , $n = 1,..., N$ визначає порядок, в якому за розумінням n-го експерту альтернативи розташовані за їх перевагами: на першому місті найкраща альтернатива, а на останньому – найгірша.

Медіана Кемені дозволяє знайти таке підсумкове ранжування P^*, сумарна відстань від якого до кожного заданого ранжування мінімальна, тобто

$$P^* = \arg\min_P \sum_{n=1}^{N} R_c(P, P_n),$$

де $R_c(P, P_n)$ – відстань між ранжуванням P і P_n.

Відстань $R_c(P, P_n)$ між ранжуванням P і P_n (відстань Кемені) визначається за допомогою матриць бінарних відношень

$$A^n = \left\| a_{ij}^n \right\| \quad i = 1,..., M , \quad j = 1,..., M , \; n = 1,..., N ,$$

які кожен з N експертів надає у формі

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } d_i \text{ має перевагу перед } d_j, \\ -1, & \text{якщо } d_j \text{ має перевагу перед } d_i, \\ 0, & \text{якщо } d_i \text{ та } d_j \text{ рівноцінні.} \end{cases}$$

Відстань від довільного ранжування P, якому відповідає матриця бінарних відношень $\| a_{ij} \|$, до кожного з наданого експертами ранжування $P_1,..., P_N$, яким відповідають матриці $\left\| a_{ij}^{(1)} \right\|, \ldots, \left\| a_{ij}^{(N)} \right\|$ бінарних відношень, визначають за формулою

$$\hat{R}_c = \sum_{n=1}^{N} R_c(P, P_n) = \sum_{i<j} \sum_{n=1}^{N} \left| a_{ij} - a_{ij}^{(n)} \right|.$$

Звідси випливає, що визначення узгодженого ранжування P^* альтернатив за медіаною Кемені зводиться до визначення рядків та стовпчиків матриці $\left\| a_{ij} \right\|$, у якої сума елементів a_{ij}, розташованих вище діагоналі, мінімальна.

Для розв’язку такої задачі існує декілька евристичних ітеративних алгоритмів. Зокрема, в роботі [7] запропоновано оригінальні алгоритми побудови колективного ранжування альтернатив на основі індивідуальних переваг експертів в умовах задач великої розмірності.

Доведено, що медіана Кемені задовольняє принцип Кондорсе (правилу більшості) і не призводить до парадоксу Кондорсе [84]. Проте відомо, що ранжування альтернатив за медіаною Кемені хоч і задовольняє більшість принципів Ерроу, але не задовольняє принцип незалежності. Тобто, при розширенні множини альтернатив нове колективне ранжування може змінитися.

Проведений аналіз сучасного стану теорії прийняття рішень свідчить про високий науковий потенціал запропонованих методів. Водночас зазначені недоліки відомих методів прийняття колективних рішень показують, що на сьогодні проблему інтеграції особистих рішень експертів в узгоджене колективне рішення ще не можна вважати вирішеною.

Саме цей факт був стимулом в проведенні додаткових наукових досліджень, основні результати яких [16–23, 28, 56–61, 89] представлені в наступних розділах монографії.

Автори розробили оригінальні моделі оптимальних та субоптимальних стратегій прийняття колективних рішень в рамках байєсівського підходу. Головна перевага запропонованих математичних моделей полягає в тому, що інтеграція індивідуальних рішень експертів здійснюється на основі формального критерію, а самі процедури не використовують жодних евристичних процедур і тому дозволяють отримати математично обґрунтоване оптимальне (субоптимальне) рішення за конкретними даними.

РОЗДІЛ 2

ОПТИМАЛЬНІ МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ КОЛЕКТИВНИХ РІШЕНЬ ТА ОЦІНЮВАННЯ КВАЛІФІКАЦІЇ ЕКСПЕРТІВ

2.1. Постановка задачі

Представлений у попередньому розділі аналіз існуючих підходів до формування колективних рішень показує, що, незважаючи на досягнути важливі наукові та практичні результати, існує декілька невирішених проблем:

1. Майже всі відомі схеми формування колективних рішень ґрунтуються на евристичних процедурах, які так чи інакше потребують налаштування параметрів, а тому остаточні рішення, які надають інформаційні технології, що реалізують такі схеми, значною мірою є суб'єктивними, оскільки залежать від досвіду та інтуїції користувача технології.

2. Основна мета методів інтеграції індивідуальних рішень експертів полягає у формуванні компромісного колективного рішення, яке буде «узгоджено» з окремими думками членів колективу, але саме поняття такої узгодженості не формалізовано, що також призводить до суб'єктивності остаточного рішення.

Покажемо, що існує достатньо широкий клас прикладних задач, для яких можна подолати зазначені проблеми та запропонувати математичні моделі прийняття колективних рішень, які, на відміну від відомих, задовольняють формальний критерій та не потребують використання жодних евристичних процедур та їх суб’єктивного налаштування.

Задача 1 (медичний консиліум). Кожен з N експертів медичного консиліуму, ґрунтуючись на своєму попередньому досвіді та доступній інформації, визначає поточний стан пацієнта, який належить множині $V = \{V_1, ..., V_M\}$ можливих станів (діагнозів), наприклад трьом станам ($M = 3$):

$$V_1 - \text{умовно здоровий},$$
$$V_2 - \text{онкологія};$$
$$V_3 - \text{запалення}.$$

Задача 2 (скоринг). Кожен з N експертів комерційного банку, ґрунтуючись на своєму попередньому досвіді та доступній інформації [30] визначає можливість надання кредиту конкретному позичальнику, тобто відносить його до одного з двох типів:

$$V_1 - \text{надійний},$$
$$V_1 - \text{ненадійний}.$$

Задача 3. Кожен з N експертів, не виводячи технічний агрегат з роботи і ґрунтуючись на своєму попередньому досвіді та доступних зовнішніх ознаках визначає належність поточного стану агрегату до одного з трьох можливих станів:

$$V_1 - \text{нормальний},$$
$$V_2 - \text{передаварійний};$$
$$V_3 - \text{аварійний}.$$

Задача 4. Кожна з N станцій спостереження ґрунтуючись на доступній інформації виявляють об'єкт у повітряному просторі та приймає одне з двох можливих рішень

$$V_1 - \text{свій},$$

$$V_1 - \text{чужий.}$$

Для всіх наведених задач, перелік яких може бути продовжений, треба побудувати математичну модель формування колективного рішення за результатами *індивідуальних* рішень *незалежних* експертів $A_1,...,A_N$, виражених у формі

$$\delta_i = m, \tag{2.1}$$

якщо A_i прийняв рішення на користь V_m, $m = \overline{1,M}$, $i = \overline{1,N}$.

Зрозуміло, що в загальному випадку множина

$$\mathbf{\Theta} = \{S_{m_1 \dots m_N} : (\delta_1 = m_1) \wedge ... \wedge (\delta_N = m_N),\ m_1,...,m_N = \overline{1,M}\}$$

можливих ситуацій включає M^N комбінацій $S_{m_1 \dots m_N}$ особистих рішень експертів, причому тільки в M випадках особисті рішення будуть узгодженими (коли всі експерти приймають рішення на користь одного класу), а в інших – рішення суперечливі.

Для прийняття остаточного рішення в умовах суперечності індивідуальних рішень побудуємо оптимальні стратегії колективних рішень в рамках байєсівського підходу [56].

Будемо, як це прийнято в теорії статистичних рішень, розглядати можливі гіпотези (стани об’єкту) $V_1,...,V_M$ як випадкові події, які виникають з апріорними імовірностями $P(V_1)$,…, $P(V_M)$, $\sum_{j=1}^{M} P(V_j) = 1$.

Зрозуміло, що за відсутністю додаткової інформації не залишається нічого іншого, як завжди вважати, що об’єкт знаходиться в стані з найбільшою апріорною імовірністю. Тоді величина

$$P_0 = 1 - \max\{P(V_1),..., P(V_M)\}$$

визначає мінімальну імовірність помилкового рішення.

Будемо також характеризувати «кваліфікації» кожного з експертів імовірностями $P^{(i)}$, $i=\overline{1,N}$ помилкової класифікації, припускаючи, що вони заздалегідь оцінені на основі попереднього дослідження[1].

Природно допустити, що такі імовірності задовольняють умови

$$P^{(i)} < P_0,\ i=\overline{1,N}. \tag{2.2}$$

Поставимо задачу побудови оптимального колективного рішення

$$D=m,$$

якщо колектив прийняв рішення на користь V_m, $m=\overline{1,M}$, яке за відомими особистими рішеннями $\delta_1,...,\delta_N$ незалежних експертів та імовірностями $P(V_m)$, $P^{(i)}$ забезпечить мінімум середньої імовірності помилки або, в загальному випадку, мінімум середнього ризику колективного рішення (мінімум математичного сподівання втрат від правильних та неправильних рішень) на множині $\mathbf{\Theta}$ [56].

Оскільки байєсівська стратегія прийняття рішень за означенням є оптимальною [67], тобто забезпечує мінімум середньої імовірності похибки, або в загальному випадку, мінімум середнього ризику, будемо використовувати саме таку стратегію для побудови математичних моделей прийняття оптимальних колективних рішень.

Зауважимо, що оцінки $P(V_m)$ можуть бути заздалегідь відомі за результатами попередніх спостережень.

Наприклад, для задачі 1 (медичний консиліум) за даними медичної статистики може бути відомим преваленс (розповсюдженість) тої чи іншої хвороби у пацієнтів певної вікової групи, а для

[1] Більш точно означення «кваліфікація експерта» та метод його оцінювання буде розглянуто далі

задачі 2 (скоринг) – за даними кредитних історій апріорна імовірність кредитоспроможності позичальників певного типу.

Також за результатами участі експертів у попередніх медичних консиліумах та скорингових операціях можна оцінити «кваліфікації» $P^{(i)}$ окремих експертів у прийнятті правильних рішень.

2.2. Байєсові моделі прийняття колективного рішення

Розглянемо спочатку простіший випадок, коли два експерта ($N=2$) незалежно один від одного приймають особисті рішення (2.1) про поточний стан об'єкту, який знаходиться в одному з двох можливих станів ($M=2$) з апріорними імовірностями $P(V_1)$ і $P(V_2)=1-P(V_1)$.

Зрозуміло, що в такому частковому випадку множина $\mathbf{\Theta}=\{S\}$ ситуацій S складається лише з чотирьох можливих комбінацій особистих рішень (2.1), а саме

$$\mathbf{\Theta}=\{S_{m_1 m_2} : (\delta_1 = m_1) \wedge (\delta_2 = m_2),\ m_1, m_2 = 1{,}2\}. \qquad (2.3)$$

Покажемо [56], що на основі такої інформації може бути побудована формальна модель, яка на множині ситуацій $\mathbf{\Theta}$ забезпечить мінімум середньої імовірності помилки колективного рішення $D \in \{1{,}2\}$ про поточний стан об'єкту. Цей факт у точному формулюванні визначає лема, яка буде використовуватись у подальших дослідженнях.

Лема 2.1. Нехай два експерти ($N=2$) незалежно один від одного приймають особисті рішення (2.1) про поточний стан об'єкту, який знаходиться в одному з двох можливих станів ($M=2$) з апріорними імовірностями $P(V_1)$ і $P(V_2)=1-P(V_1)$.

Нехай на основі попередніх спостережень відомі середні імовірності $P^{(i)}$, $i=1,2$ помилок особистих рішень кожного з незалежних експертів.

Тоді колективне рішення $D=m$, $m=1,\ 2$ є оптимальним з точки зору мінімуму середньої імовірності помилки на множині можливих ситуацій (2.3), якщо в суперечливій ситуації $S_{m_1m_2}$, $m_1 \neq m_2$ приймається рішення $D=1$ на користь V_1 за умови

$$P(V_1)P^{(m_2)}[1-P^{(m_1)}] > P(V_2)P^{(m_1)}[1-P^{(m_2)}], \tag{2.4}$$

і рішення $D=2$ на користь V_2 за умови

$$P(V_1)P^{(m_2)}[1-P^{(m_1)}] < P(V_2)P^{(m_1)}[1-P^{(m_2)}]. \tag{2.5}$$

Доведення. Відповідно до теорії статистичних рішень середня імовірність помилки колективного рішення $D=m$, $m=1,\ 2$ буде мінімальною, якщо в суперечливих ситуаціях $S_{m_1m_2}$, $m_1 \neq m_2$ приймати рішення за максимумом апостеріорних імовірностей $P(V_1 \mid S_{m_1m_2})$, $P(V_2 \mid S_{m_1m_2})$. Наприклад, в ситуації S_{12} приймати рішення на користь V_1, якщо

$$P(V_1 \mid S_{12}) > P(V_2 \mid S_{12}), \tag{2.6}$$

і рішення на користь V_2 у протилежному випадку.

За формулою Байєса маємо

$$P(V_1 \mid S_{12}) = \frac{P(V_1)P(S_{12} \mid V_1)}{P(S_{12})},$$

$$P(V_2 \mid S_{12}) = \frac{P(V_2)P(S_{12} \mid V_2)}{P(S_{12})}.$$

Очевидно, що нерівність (2.6) має місце тільки тоді, коли

$$P(V_1)P(S_{12}|V_1) > P(V_2)P(S_{12}|V_2). \qquad (2.7)$$

За означенням умовна імовірність $P(S_{12}|V_1)$ є імовірність того, що в ситуації, коли об’єкт знаходиться у стані V_1, експерт A_1 прийняв правильне рішення, а експерт A_2 помилився. Оскільки припускається, що рішення експертів незалежні, то за формулою добутку імовірностей маємо

$$P(S_{12}|V_1) = (1 - P^{(1)})P^{(2)}. \qquad (2.8)$$

Аналогічним чином

$$P(S_{12}|V_2) = (1 - P^{(2)})P^{(1)}. \qquad (2.9)$$

Тоді із (2.7) з урахуванням (2.8), (2.9) випливає, що в суперечливих ситуаціях S_{12} і S_{21} колективне рішення, що забезпечує мінімум середньої імовірності помилки, повинно прийматися за схемою (2.4) та (2.5). Лема 2.1 доведена.

Співвідношення (2.4), (2.5) означають, що в ситуації S_{12} суперечливих індивідуальних рішень експертів об’єкт слід відносити до класу V_1 тоді і тільки тоді, коли

$$P^{(2)} > \frac{\lambda P^{(1)}}{1 - P^{(1)}(1-\lambda)}, \qquad (2.10)$$

і до класу V_2, коли

$$P^{(2)} < \frac{\lambda P^{(1)}}{1 - P^{(1)}(1-\lambda)}, \qquad (2.11)$$

де $\lambda = P(V_2)/(P(V_1)$ – відношення апріорних імовірностей класів.

Аналогічним чином легко показати, що в суперечливій ситуації S_{21} слід приймати колективне рішення $D=1$ тоді і тільки тоді, коли

$$P^{(1)} > \frac{\lambda P^{(2)}}{1-P^{(2)}(1-\lambda)},$$

а рішення на користь $D=2$, коли

$$P^{(1)} < \frac{\lambda P^{(2)}}{1-P^{(2)}(1-\lambda)}.$$

Для ілюстрації на рис. 2.1 показані границі областей колективних рішень для ситуації S_{12}, які побудовані згідно з умовами (2.10), (2.11) при різних значеннях λ, причому вище відповідної границі слід відносити стан об'єкта до класу V_1 (рішення $D=1$), а нижче відповідної границі – до класу V_2 (рішення $D=2$).

Таким чином, в загальному випадку колективне рішення може не співпадати з особистим рішенням експерту, який має меншу середню імовірність помилки особистих рішень за результатами попередніх спостережень.

Продемонструємо цей цікавий факт на наступному прикладі.

Приклад 2.1. Нехай $P(V_1)=0{,}3$, $P(V_2)=0{,}7$, тобто $\lambda=2{,}33$. Нехай на підставі попереднього досвіду відомо, що перший експерт помиляється в 5% випадків ($P^{(1)}=0{,}05$), а другий – в 8% випадків ($P^{(2)}=0{,}08$).

Припустимо, що перший експерт відніс об'єкт до класу V_1 ($\delta_1=1$), а другий – до класу V_2($\delta_2=2$), тобто спостерігаємо ситуацію S_{12} суперечливих рішень.

Як видно з рисунку 2.1, точка з координатами $P^{(1)}=0{,}05$ і $P^{(2)}=0{,}08$ розташована нижче межі, що відповідає значенню $\lambda=2{,}33$. Отже, колективне рішення повинно бути $D=2$ (об'єкт повинен бути віднесений до класу V_2), хоча перший експерт, який продемонстрував більш низьку середню імовірність помилок ($P^{(1)} = 0{,}05$), ніж другий експерт ($P^{(2)} = 0{,}08$) прийняв протилежне рішення $\delta_1 = 1$.

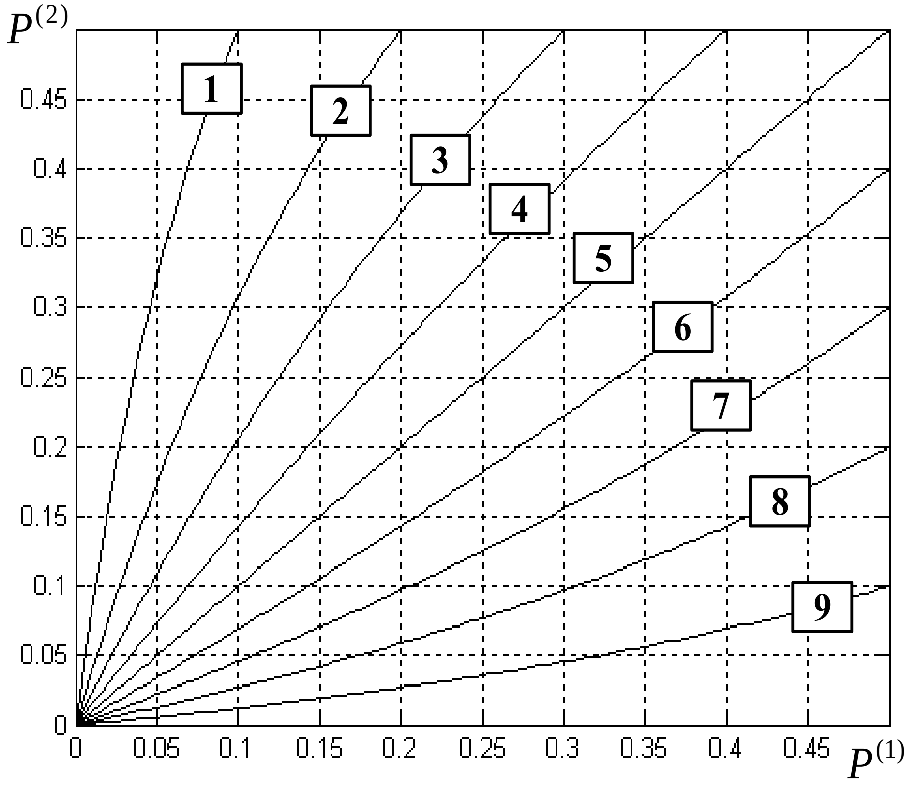

Рис. 2.1. Границі областей колективних рішень в ситуації S_{12}:
$1 - \lambda = 9$; $2 - \lambda = 4$; $3 - \lambda = 2{,}33$; $4 - \lambda = 1{,}5$; $5 - \lambda = 1{,}0$; $6 - \lambda = 0{,}67$; $7 - \lambda = 0{,}43$; $8 - \lambda = 0{,}25$; $9 - \lambda = 0{,}11$

Для перевірки обґрунтованості колективного рішення на користь V_2 визначимо за формулою Байєса апостеріорні імовірності класів в даній ситуації S_{12}:

$$P(V_1 \mid S_{12}) = \frac{P(V_1)P(S_{12} \mid V_1)}{P(S_{12})} =$$

$$= \frac{0{,}3(1-0{,}05)0{,}08}{0{,}3(1-0{,}05)0{,}08 + 0{,}7 \cdot 0{,}05(1-0{,}08)} = 0{,}415$$

і

$$P(V_2 \mid S_{12}) = \frac{P(V_2)P(S_{12} \mid V_2)}{P(S_{12})} =$$

$$= \frac{0,7 \cdot 0,05(1-0,08)}{0,3(1-0,05)0,08 + 0,7 \cdot 0,05(1-0,08)} = 0,585.$$

Як бачимо, $P(V_1|S_{12}) < P(V_2|S_{12})$, отже, об'єкт дійсно слід віднести до класу V_2.

Змінимо в умовах прикладу співвідношення апріорних імовірностей класів, поклавши $P(V_1)$ = 0,4, $P(V_2)$ = 0,6. В цьому випадку $\lambda = 0,67$ і, як видно з рисунку 2.1, точка з координатами $P^{(1)} = 0,05$ і $P^{(2)} = 0,08$ потрапляє вже в область рішень на користь класу V_1.

Справді,

$$P(V_1 \mid S_{12}) = \frac{0,4(1-0,05)0,08}{0,4(1-0,05)0,08 + 0,6 \cdot 0,05(1-0,08)} = 0,524$$

і

$$P(V_2 \mid S_{12}) = \frac{0,6 \cdot 0,05(1-0,08)}{0,4(1-0,05)0,08 + 0,6 \cdot 0,05(1-0,08)} = 0,476,$$

тобто $P(V_1|S_{12}) > P(V_2|S_{12})$. Отже, в такому випадку об'єкт слід віднести вже до класу V_1.

Зауважимо, що дана схема прийняття колективного рішення ґрунтується на знанні дуже обмежених імовірнісних характеристик, які при вирішенні практичних завдань, зокрема завдань медичної і технічної діагностики, легко можуть бути оцінені на підставі попереднього досвіду.

Слід також зауважити, що умови (2.4) – (2.5) отримані у припущенні, що помилки експертів не залежать від того, у якому стані знаходиться об’єкт, тобто вважається, що

$$P(\delta_i = 1 | V_2) = P(\delta_i = 2 | V_1) = P^{(i)}.$$

Але при розв'язанні практичних задач, наприклад, задач медичної діагностики, таке припущення не завжди вірно: імовірність помилкового віднесення здорового пацієнта до групи хворих може не збігатися з імовірністю помилкового віднесення хворого пацієнта до групи здорових.

Для характеристики умовних імовірностей $P(\delta_i = 1 | V_2)$ і $P(\delta_i = 2 | V_1)$ (імовірностей помилок першого та другого роду) в медичній діагностиці введені спеціальні терміни: чутливість та специфічність діагнозу.

Тому доцільно розширити формальну модель побудови колективного рішення, орієнтованої на цей практично важливий випадок та отримати умови, які на множині $\mathbf{\Theta}$ можливих ситуацій (2.3) забезпечать мінімум середньої імовірності помилки колективного рішення $D \in \{1,2\}$ про поточний стан об'єкту.

Лема 2.2. Нехай два експерта ($N = 2$) незалежно один від одного приймають особисті рішення (2.1) про поточний стан об'єкту, який може знаходитись в одному з двох можливих станів ($M = 2$) з апріорними імовірностями $P(V_1)$ і $P(V_2) = 1 - P(V_1)$. Нехай відомі імовірності помилок першого та другого роду особистих рішень незалежних експертів

$$P^{(i)}(E | V_k) = P(\delta_i = m | V_k), \ m, k, i = 1,2, \quad k \neq m .$$

Тоді на множині можливих ситуацій (2.3) колективне рішення $D = m$, $m = 1, 2$ є оптимальним з точки зору мінімуму середньої імовірності помилки, якщо рішення $D = 1$ приймається на користь класу V_1 за умови

$$P(V_1)P^{(m_2)}(E | V_1)[1 - P^{(m_1)}(E | V_1)] > P(V_2)P^{(m_1)}(E | V_2)[1 - P^{(m_2)}(E | V_2)],$$

і рішення $D = 2$ на користь V_2 за умови

$$P(V_1)P^{(m_2)}(E | V_1)[1 - P^{(m_1)}(E | V_1)] < P(V_2)P^{(m_1)}(E | V_2)[1 - P^{(m_2)}(E | V_2)].$$

Доведення. Доведення леми аналогічно доведенню леми 2.1 з тією різницею, що в даному випадку при обчисленні імовірностей $P(S_{m_1 m_2} | V_k)$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 = 1, 2$ припускається *умовна незалежність* імовірностей помилок експертів:

$$P^{(m_1 m_2)}(E | V_k) = P^{(m_1)}(E | V_k) P^{(m_2)}(E | V_k),$$

де $P^{(m_1 m_2)}(E | V_k)$ – імовірність помилки обох експертів за умови знаходження об'єкта в k-му стані.

Слід зауважити, що розглянуті формальні моделі можуть бути використані не тільки для інтеграції індивідуальних рішень незалежних експертів, а й для визначення умов побудови оптимальних рішень групи незалежних комп'ютерних алгоритмів, зокрема, діагностичних тестів, за якими визначається поточний стан пацієнта – хворий (клас V_1) або умовно здоровий[2] (клас V_2).

З леми 2.2 безпосередньо випливають умови для вирішення такої практичної задачі.

Наслідок 2.1. Нехай на основі двох незалежних діагностичних тестів проводяться профілактичні обстеження (скринінг) для виявлення деякої хвороби у пацієнтів. Тобто для конкретного пацієнта треба визначити чи є в нього ця хвороба чи ні.

Припускається, що на основі попередніх статистичних досліджень відомий превaленс P (розповсюдженість) хвороби в популяції, а також визначені індивідуальні чутливості $S_E^{(m)}$ та специфічності $S_E^{(m)}$ тестів, $m = 1,2$.

Тоді в суперечливій ситуації S_{12}, коли перший тест признав пацієнта хворим, а інший – здоровим, колективне рішення, яке забезпечує мінімум середньої імовірності помилки, має прийматися за схемою:

$$\text{хворий,} \quad \text{якщо} \quad S_E^{(1)}(1 - S_E^{(2)}) > \lambda_0 [1 - S_P^{(1)}] S_P^{(2)},$$

[2] Мається на увазі не абсолютно здоровий пацієнт, а пацієнт, у якого немає хвороби, яка досліджується.

$$\text{здоровий,}\quad \text{якщо}\quad S_E^{(1)}(1-S_E^{(2)}) < \lambda_0[1-S_P^{(1)}]S_P^{(2)},$$

де $\lambda = (1-P)/P$ – параметр, що залежить лише від преваленсу хвороби в досліджуваній популяції.

Розглянемо тепер загальний випадок побудови колективного рішення $D = m$, $m = \overline{1,M}$, що ґрунтується на інтеграції особистих рішень $\delta_1,...,\delta_N$ групи з $N \geq 2$ незалежних експертів [56].

Лема 2.3. Нехай $P(\delta_i = m | V_k)$, $m,k = \overline{1,M}$, $i = \overline{1,N}$ – відомий розподіл умовних імовірностей особистих рішень кожного з $N \geq 2$ незалежних експертів колективу, $P(V_k)$ – відомий розподіл імовірностей станів об'єкта, $\sum_{k=1}^{M} P(V_k) = 1$, $M \geq 2$, а $\mathbf{L} = \|L_{km}\|$ – платіжна матриця, що характеризує втрати від колективного рішення $D = m$, $m = \overline{1,M}$ при істинному стані об'єкта V_k, $k = \overline{1,M}$.

Тоді колективне рішення $D = m$, $m = \overline{1,M}$ є оптимальним з точки зору мінімуму середнього ризику на множині можливих ситуацій (особистих рішень експертів)

$$\mathbf{\Theta} = \{S_{m_1...m_N} : (\delta_1 = m_1) \wedge ... \wedge (\delta_N = m_N),\ m_1,...,m_N = \overline{1,M}\}, \quad (2.12)$$

якщо колективне рішення приймається за схемою

$$D_S^{opt} = \arg \min_{D_S \in [1,M]} \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i | V_k). \quad (2.13)$$

де $D_S = \overline{1,M}$ – колективне рішення в спостережуваній ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$.

Доведення. Запишемо середній ризик, який визначає математичне сподівання втрат від колективних рішень у вигляді

$$R(D) = \sum_{S \in \boldsymbol{\Theta}} \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k, S), \qquad (2.14)$$

де L_{kD_S} – елемент платіжної матриці $L = \|L_{km}\|$, що в спостережуваній ситуації $S \in \Theta$ відповідає колективному рішенню $D_S = m$, $m = \overline{1, M}$ та k-му стану об'єкта, $k = \overline{1, M}$, а $P(V_k, S)$ – сумісна імовірність двох випадкових подій: об'єкт знаходиться в стані V_k та спостерігається певна комбінація $S = (\delta_1, ..., \delta_N)$ особистих рішень експертів $\delta_1, ..., \delta_N$, що виражені в формі (2.1).

За теоремою множення імовірностей величину $P(V_k, S)$ можна представити так

$$P(V_k, S) = P(S) P(V_k \mid S).$$

Підстановка останнього виразу в (2.14) дає

$$R(D) = \sum_{S \in \boldsymbol{\Theta}} P(S) \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k \mid S). \qquad (2.15)$$

Як видно з (2.15), середній ризик $R(D)$ має вигляд суми за S. Тому для кожної окремої комбінації $S \in \boldsymbol{\Theta}$ можна будувати оптимальне колективне рішення незалежно від інших комбінацій так, щоб мінімізувати умовний ризик, тобто

$$D_S^{opt} = \arg \min_{D_S \in [1, M]} R(D_S),$$

де

$$R(D_S) = \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} P(V_k \mid S). \qquad (2.16)$$

Оскільки припускається, що експерти приймають свої рішення незалежно один від одного, то за відомих імовірностей $P(V_k)$ і

$P(\delta_i = m | V_k)$ для кожної комбінації $S = (\delta_1, ..., \delta_N)$ особистих рішень експертів можна обчислити апостеріорні імовірності

$$P(V_k | S) = \frac{P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i | V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i | V_k)} .$$

Підстановка останнього виразу в (2.16) дає

$$R(D_S) = \sum_{k=1}^{M} L_{kD_S} \frac{P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i | V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i | V_k)} . \qquad (2.17)$$

Оскільки знаменник (2.17) додатній, то мінімум середнього ризику (2.14) на всій множині (2.12) буде забезпеченим, якщо в кожній спостережуваній ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$ колективне рішення приймається за умовою (2.13). Лема 2.3 доведена.

Легко бачити, що модель (2.13) припускає достатньо великий об'єм апріорної інформації: потрібно знати не тільки апріорні імовірності $P(V_k)$ станів об'єкта, але й всі умовні імовірності $P(\delta_i = m | V_k)$, $m = \overline{1, M}$ можливих особистих рішень кожного i-го експерту.

Розглянута модель може бути істотно спрощена, якщо припустити, що елементи платіжної матриці L задовольняють умову

$$L_{km} = \begin{cases} 0 \text{ при } m = k \\ 1 \text{ при } m \neq k \end{cases}, \qquad (2.18)$$

тобто прийняти, що втрати від правильних рішень дорівнюють нулю, а втрати від будь-яких помилкових рішень дорівнюють одиниці.

Оскільки при виконанні умов (2.18) середній ризик (2.12) вироджується в середню імовірність помилкових рішень, а оптимальне рішення відповідає правилу максимуму апостеріорних імовірностей [67], то з леми 2.3 випливає такий наслідок.

Наслідок 2.2. Колективне рішення забезпечить мінімум середньої імовірності помилки на множині (2.12), якщо в кожній конкретній спостережуваній ситуації $S \in \boldsymbol{\Theta}$ колективне рішення приймається за схемою

$$D_S^{opt} = \arg \max_{1 \le k \le M} P(V_k) \prod_{i \in J_k} [1 - P^{(i)}(E \mid V_k)] \prod_{i \notin J_k} P^{(i)}(E \mid V_k) \;, \qquad (2.19)$$

де J_k – множина номерів експертів, що в ситуації $S \in \boldsymbol{\Theta}$ прийняли особисте рішення $\delta_i = k$, $k = \overline{1, M}$,

$$J_\mu \cap J_\nu = \varnothing \;\; \forall \mu, \nu = \overline{1, M}, \; J_1 \cup \ldots \cup J_M = \{1, \ldots, M\},$$

а $P^{(i)}(E \mid V_k)$ – розподіл умовних імовірностей помилкових рішень кожного з експертів.

Дійсно, нехай наперед відомі умовні імовірності $P^{(i)}(E \mid V_k)$ помилкових рішень кожного з експертів для всіх $k = \overline{1, M}$. Будемо будувати оптимальне колективне рішення за правилом максимуму апостеріорних імовірностей $P(V_k \mid S)$, які відповідно до формули Байєса визначаються виразом

$$P(V_k \mid S) = \frac{P(V_k) P(S \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k) P(S \mid V_k)}. \qquad (2.20)$$

Імовірність $P(S \mid V_k)$, що фігурує в (2.20), представляє собою імовірність того, що експерти, номера яких належать множині J_k, прийняли правильне рішення, а решта помилились. Тому, в силу умовної незалежності особистих рішень експертів, апостеріорні імовірності (2.20) можна представити у вигляді

$$P(V_k \mid S) = \frac{P(V_k)\prod\limits_{i \in J_k}[1 - P^{(i)}(E \mid V_k)]\prod\limits_{i \notin J_k} P^{(i)}(E \mid V_k)}{\sum\limits_{k=1}^{M} P(V_k)\prod\limits_{i \in J_k}[1 - P^{(i)}(E \mid V_k)]\prod\limits_{i \notin J_k} P^{(i)}(E \mid V_k)}. \qquad (2.21)$$

Із співвідношення (2.21) безпосередньо випливає, що колективне рішення забезпечить мінімум середньої імовірності помилки на множині $\mathbf{\Theta}$ можливих комбінацій особистих рішень, якщо у кожній конкретній спостережуваній ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$ колективне рішення приймається за схемою (2.19) [56].

Для ілюстрації схеми формування колективного рішення за правилом (2.19) розглянемо модельний приклад.

Нехай деякий об'єкт знаходиться в одному з трьох станів, що утворюють повну групу випадкових подій з апріорними імовірностями $P(V_1) = 0{,}7$, $P(V_2) = 0{,}08$ і $P(V_3) = 0{,}22$. Стан об'єкту оцінює п'ять незалежних експертів. Імовірності помилок експертів і можлива комбінація прийнятих ними особистих рішень наведені в таблиці 2.1.

Легко бачити, що в даному випадку особисті рішення експертів суперечливі, причому $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{3{,}4\}$, $I_3 = \{2{,}5\}$.

Для прийняття колективного рішення обчислимо такі величини

$$P(V_1)\prod_{i \in J_1}[1 - P^{(i)}(E \mid V_1)]\prod_{i \notin J_1} P^{(i)}(E \mid V_1)P(V_1) = 4{,}03 \cdot 10^{-8},$$

$$P(V_2)\prod_{i \in J_2}[1 - P^{(i)}(E \mid V_2)]\prod_{i \notin J_2} P^{(i)}(E \mid V_2)P(V_2) = 1{,}12 \cdot 10^{-6},$$

$$P(V_1)\prod_{i \in J_3}[1 - P^{(i)}(E \mid V_3)]\prod_{i \notin J_3} P^{(i)}(E \mid V_3)P(V_3) = 3{,}73 \cdot 10^{-6}.$$

Оскільки третя зі знайдених величин максимальна, то, на підставі правила (2.19), приймаємо остаточне рішення на користь стану V_3. Зауважимо, що стан V_3 не має найвищу апріорну імовірність.

Таблиця 2.1. Імовірність помилок і особисті рішення експертів

Експерт	Імовірності помилок			Особисті рішення
	$P^{(i)}(E\,\vert\,V_1)$	$P^{(i)}(E\,\vert\,V_2)$	$P^{(i)}(E\,\vert\,V_3)$	δ_i
Перший	0,04	0,01	0,03	$\delta_1 = 1$
Другий	0,01	0,03	0,02	$\delta_2 = 3$
Третій	0,03	0,05	0,01	$\delta_3 = 2$
Четвертий	0,02	0,02	0,06	$\delta_4 = 2$
П'ятий	0,01	0,05	0,04	$\delta_5 = 3$

2.3. Схема прийняття колективних рішень, що навчається

Цілком зрозуміло, що при вирішенні практичних завдань найчастіше невідомі точні значення імовірнісних характеристик, які фігурують в запропонованих правилах. Однак при достатньому обсязі спостережень імовірності $P(V_k)$ і $P^{(i)}(E_i\,|\,V_k)$ можуть бути оцінені відповідними частотами:

$$\hat{P}(V_k) = \frac{G_k}{G}, \tag{2.22}$$

$$\hat{P}^{(i)}(E\,|\,V_k) = \frac{E_{ki}}{G_k}, \tag{2.23}$$

де G_k – число спостережень знаходження об’єкту в k-му стані ($k = \overline{1, M}$) у вибірці з G спостережень, а E_{ki} – число помилкових рішень i-го експерту ($i = \overline{1, N}$) при аналізі ситуацій, коли об’єкт знаходився в k-му стані.

Розглянемо зручну для практичного застосування схему, яка навчається та може бути покладена в основу системи підтримки прийняття колективного рішення [57].

Припустимо, що для кожного з G спостережень відома точна належність об'єкту до одного з можливих станів, що виражена у вигляді вказівок «вчителя» y_1, y_2, … , y_G, де $y_n \in \{1, ..., M\}$. Запишемо частоту спостереження знаходження об’єкту в k-му стані, оцінену відповідно до наведеного виразу, у вигляді

$$\hat{P}(V_k) = \frac{\sum_{n=1}^{G} \chi_{kn}}{G}, \tag{2.24}$$

де

$$\chi_{kn} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y_n = k, \\ 0, \text{ якщо } y_n \neq k. \end{cases}$$

Оскільки праву частину (2.24) можна виразити у вигляді суми двох доданків

$$\frac{\sum_{n=1}^{G} \chi_{kn}}{G} = \frac{G-1}{G} \frac{\sum_{n=1}^{G-1} \chi_{kn}}{G-1} + \frac{\chi_{kG}}{G},$$

в першому з яких фігурує оцінка частоти знаходження об’єкту в k-му стані, обчислена за $G-1$ спостереженнями, то після очевидних перетворень отримаємо

$$\hat{P}_G(V_k) = \hat{P}_{G-1}(V_k) - \frac{1}{G}(\hat{P}_{G-1}(V_k) - \chi_{kG}). \tag{2.25}$$

Для оцінки імовірностей помилок експертів розглянемо послідовність $y_{k1},...,y_{kG_k}$ вказівок вчителя, що задовольняють умову $y_{kn}=k$. Очевидно, що величина E_{ki}, яка фігурує в правій частині (2.23), може бути записана у вигляді суми

$$E_{ki}=\sum_{n=1}^{G_k}\eta_{kin},$$

де η_{kin} – штрафна функція, яка надана у формі

$$\eta_{kin}=\begin{cases}0, \text{ якщо } \delta_{in}=k;\\ 1, \text{ якщо } \delta_{in}\neq k.\end{cases}$$

Тоді оцінка імовірності помилки i-го експерта при знаходженні об’єкту в k-му стані також може бути знайдена за рекурентною формулою

$$\hat{P}_{G_k}^{(i)}(E\,|\,V_k)=\hat{P}_{G_{k-1}}^{(i)}(E\,|\,V_k)-\frac{1}{G_k}(\hat{P}_{G_{k-1}}^{(i)}(E\,|\,V_k)-\eta_{kiG_k}). \qquad (2.26)$$

З рекурентних формул (2.25), (2.26) видно прямування до нуля величини поправки при необмеженому зростанні числа спостережень, що, природно, узгоджується з граничною теоремою Бернуллі про збіжність за імовірністю частоти випадкової події до її імовірності.

На основі запропонованого підходу легко може бути реалізована система підтримки прийняття колективних рішень, архітектура якої показана на рис. 2.2.

Колективне рішення реалізується на підставі особистих рішень $\delta_1,...,\delta_N$ групи незалежних експертів за правилом (2.19), в якому використовуються поточні значення оцінок імовірнісних характеристик $P(V_k)$ і $P^{(i)}(E\,|\,V_k)$, $i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,M}$.

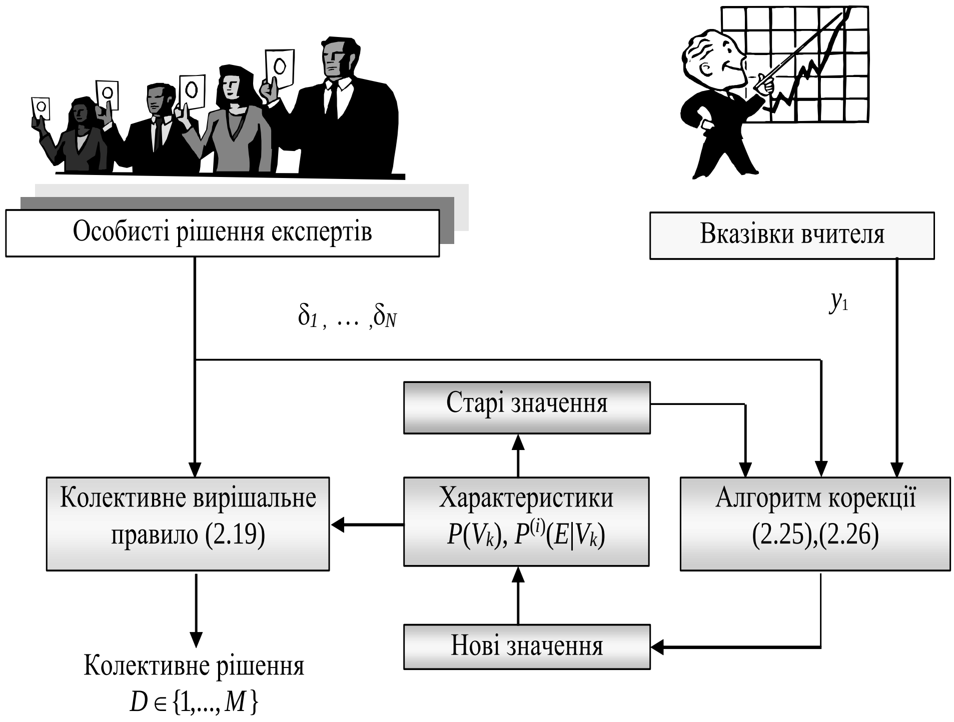

Рис. 2.2. Архітектура системи формування колективного рішення

У базі даних системи фіксуються обсяги спостережень $G_1,...,G_M$ $(G_1+...+G_M=G)$, за якими були оцінені зазначені імовірні характеристики.

Як тільки після прийняття колективного рішення з'явилася можливість перевірити справжній стан об'єкту, то така додаткова інформація вводиться в систему у вигляді вказівки «вчителя» y_n. За допомогою рекурентних формул (2.25) і (2.26) така інформація дозволяє скорегувати поточні оцінки $P(V_k)$ і $P^{(i)}(E\,|V_k)$, $i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,M}$.

Запропонована архітектура системи, що поєднує колективне рішення з можливістю періодичної корекції характеристик вирішувального правила, може бути використана в різних областях застосування.

Зокрема, таку схему застосовували для формування колективного рішення комп’ютерної системи діагностики захворювань серця, заснованої на об'єднанні методів електрокардіографії і магнітокардіографії [62]. В даному випадку вказівками вчителя слугували наявні в розпорядженні медиків результати референтного методу (коронарографії), який за медичними показаннями призначали деяким з обстежуваних пацієнтів.

2.4. Моделі формальної оцінки кваліфікації експертів

Термін «кваліфікований» експерт досить часто зустрічається у публікаціях, в тому числі, і в науковій літературі. Інтуїтивне визначення такого терміну зрозуміло: кваліфікованим експертом вважається визнаний спеціаліст у конкретній предметній області. Однак, побудова моделей прийняття колективних рішень, що ґрунтуються на інтеграції особистих рішень експертів, потребує формалізацію знань про кваліфікацію окремого експерта.

Для оцінки кваліфікації окремого експерта та порівняння кваліфікацій двох експертів будемо використовувати такі означення.

Означення 2.1. Експерт кваліфікований, якщо середній ризик $R^{(i)}$ його особистих рішень (2.1), менше апріорного ризику R_0, тобто

$$R^{(i)} < R_0. \tag{2.27}$$

Означення 2.2. Експерт A_1 більш кваліфікований, ніж експерт A_2, якщо середній ризик R_1, що ґрунтується на рішеннях A_1, менше середнього ризику R_2, що ґрунтується на рішеннях A_2, тобто виконується строга нерівність

$$R^{(1)} < R^{(2)}. \tag{2.28}$$

Нехай, як і раніш, об’єкт знаходиться в одному з $M \geq 2$ можливих станів з відомими апріорними імовірностями $P(V_k)$, $\sum_{k=1}^{M} P(V_k) = 1$.

Нехай також задана $M \times M$ платіжна матриця $L = \|L_{km}\|$, елементи якої характеризують втрати від рішень на користь стану V_m, в той час, як справжній стан об’єкта V_k.

Оскільки, будь-яке апріорне рішення $\delta_0 = m$, $m = \overline{1, M}$ пов’язано з ризиком

$$R_0(m) = \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k), \tag{2.29}$$

то оптимальним апріорним рішенням δ_0^{opt} буде таке рішення, при якому ризик $R_0(m)$ буде мінімальним, тобто

$$\delta_0^{opt} = \arg \min_{1 \leq m \leq M} \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k). \tag{2.30}$$

Таким чином, апріорний ризик R_0, що фігурує в правій частині (2.27), визначається виразом

$$R_0 = \min_{1 \leq m \leq M} \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k). \tag{2.31}$$

Припустимо, що відомі умовні імовірності $P(\delta_i = m \,|\, V_k)$, $m = \overline{1, M}$ особистих рішень i-го експерту ($i = \overline{1, N}$) на користь стану V_m, коли справжній стан об’єкта V_k. Маючи таку інформацію, можна визначити ризик, що пов’язаний з рішенням i-го експерту

$$R^{(i)} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k) P(\delta_i = m \,|\, V_k). \tag{2.32}$$

Приймаючи до уваги (2.31) і (2.32) з умови (2.27) випливає, що експерт кваліфікований в сенсі означення 2.1 в тому і тільки в тому випадку, коли

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k) P(\delta_i = m \,|\, V_k) < \min_{1\le m\le M} \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k)\,. \qquad (2.33)$$

Розглянемо більш детально частковий випадок використання умови (2.33). Нехай об'єкт знаходиться в одному з двох можливих станів V_1, V_2, переходячи випадковим чином з одного стану до другого з відомими апріорними імовірностями $P(V_1)$, $P(V_2) = 1 - P(V_1)$. Експерт A_i, спираючись на свої знання та доступну інформацію, приймає рішення (2.1).

Оскільки $M = 2$, то можливі втрати характеризує платіжна матриця вигляду

$$L = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{Vmatrix}, \qquad (2.34)$$

де L_{11} і L_{22} – втрати, пов'язані з правильними рішеннями, а L_{12} і L_{21} – втрати, пов'язані з помилками першого та другого роду.

Середній ризик R_i рішень, що приймаються експертом A_i, визначається математичним сподіванням вказаних втрат

$$R = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} L_{jk} P(V_k, \delta_i = j)\ . \qquad (2.35)$$

де величина $P(V_k, \delta_i = j)$ позначає імовірність сумісного виконання двох випадкових подій: об'єкт знаходиться у стані V_k $(k = 1, 2)$, а експерт A_i прийняв рішення $\delta_i = j$ на користь j-го стану V_j $(j = 1, 2)$.

Сформулюємо лему [28, 61], яка буде використовуватись у подальших дослідженнях.

Лема 2.4. Нехай відомі апріорна імовірність $P(V_1)$ і умовні імовірності помилок i-го експерту

$$P_{12}^{(i)} = P\{\delta_i = 1 \mid V_2\}, \tag{2.36}$$

$$P_{21}^{(i)} = P\{\delta_i = 2 \mid V_1\}. \tag{2.37}$$

Тоді експерт A_i кваліфікований в сенсі означення 2.1 в тому і тільки в тому випадку, коли виконуються умови

$$P_{12}^{(i)} < \theta(1 - P_{21}^{(i)}) \text{ при } \theta \le 1, \tag{2.38}$$

$$1 - P_{12}^{(i)} > \theta P_{21}^{(i)} \text{ при } \theta > 1, \tag{2.39}$$

де

$$\theta = \frac{(L_{21} - L_{11})P(V_1)}{(L_{12} - L_{22})[1 - P(V_1)]}.$$

Доведення. За формулою добутку імовірностей маємо

$$P(V_k, \delta_i = j) = P(V_k)P(\delta_i = j \mid V_k).$$

З урахуванням позначень (2.36), (2.37) апостеріорний ризик (2.35) можна записати [61] в еквівалентній формі

$$R^{(i)} = L_{11}P(V_1)(1 - P_{21}^{(i)}) + L_{22}[1 - P(V_1)](1 - P_{12}^{(i)}) +$$

$$+ L_{21}P(V_1)P_{21}^{(i)} + L_{12}[1 - P(V_1)]P_{12}^{(i)}. \tag{2.40}$$

Відповідно до загального виразу (2.31) оцінимо ризик апріорних рішень в даному випадку. Зрозуміло, що якщо не використовувати інформацію, отриману від експерта, то при $M = 2$ апріорні рішення зводяться до вибору одного з двох альтернативних варіантів: або завжди приймати рішення на користь стану V_1, або завжди приймати рішення на користь стану V_2.

Очевидно, що в першому випадку апріорний ризик буде дорівнювати величині

$$R_{01} = L_{11}P(V_1) + L_{12}[1 - P(V_1)], \tag{2.41}$$

а в другому – величині

$$R_{02} = L_{22}[1 - P(V_1)] + L_{21}P(V_1). \tag{2.42}$$

З порівняння співвідношень (2.41) і (2.42) маємо, що при $\theta < 1$ мінімум апріорного ризику (2.31) досягається, якщо завжди приймати рішення на користь стану V_2, а при $\theta > 1$, якщо завжди приймати рішення на користь стану V_1.

Якщо також врахувати, що $R_{01} = R_{02}$ при $\theta = 1$, то в даному випадку загальний вираз (2.31) ризику апріорних рішень набуває вигляду

$$R_0 = \begin{cases} L_{22}[1 - P(V_1)] + L_{21}P(V_1), & \text{якщо } \theta \le 1, \\ L_{11}P(V_1) + L_{12}[1 - P(V_1)], & \text{якщо } \theta > 1 \end{cases}. \tag{2.43}$$

В результаті підстановки (2.40), (2.43) в (2.27) та елементарних перетворень отримаємо умови (2.38) і (2.39). Лема 2.4 доведена.

Формальні умови, що дозволяють порівнювати кваліфікацію двох експертів, доведені у наступній лемі [28].

Лема 2.5. Нехай відомі апріорна імовірність $P(V_1)$ та умовні імовірності помилок (2.36), (2.37) двох експертів A_1, A_2. Тоді експерт A_1 більш кваліфікований, ніж A_2 в сенсі означення 2.2 в тому і тільки в тому випадку, коли виконується умова

$$\theta(P_{21}^{(1)} - P_{21}^{(2)}) < P_{12}^{(2)} - P_{12}^{(1)}. \tag{2.44}$$

Доведення. Приймаючи до уваги (2.40), в даному випадку $M = 2$ загальну умову (2.28) порівняння ризиків рішень експертів можна представити у вигляді

$$L_{11}P(V_1)(1-P_{21}^{(1)}) + L_{22}[1-P(V_1)](1-P_{12}^{(1)}) + L_{21}P(V_1)P_{21}^{(1)} +$$

$$+ L_{12}[1-P(V_1)]P_{12}^{(1)} < L_{11}P(V_1)(1-P_{21}^{(2)}) + L_{22}[1-P(V_1)](1-P_{12}^{(2)}) +$$

$$+ L_{21}P(V_1)P_{21}^{(2)} + L_{12}[1-P(V_1)]P_{12}^{(2)}, \quad (2.45)$$

яка після елементарних перетворень зводиться до нерівності (2.44).

Лема 2.5 доведена.

Зауважимо, що отримані умови можна застосовувати не тільки для оцінювання кваліфікації експертів, а й для оцінювання корисності діагностичних ознак [63]. Зокрема, умови (2.38), (2.39) дозволили підсилити традиційний ROC-аналіз за рахунок обмеження експериментальної ROC-кривій областю гарантовано корисного діагностичного тесту і тим самим розширити сфери застосування цього популярного методу оцінювання ефективності діагностичних систем [64].

Застосування підсиленого програмного модулю, який реалізує підсилений ROC-аналіз, підтвердило діагностичну цінність оригінального показника електрокардіограми у фазовому просторі для виявлення під час профілактичних обстежень (скринінгу) пацієнтів з високим ризиком ішемічної хвороби серця [65, с. 57–59].

РОЗДІЛ 3

ОСНОВИ ІНТЕРВАЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Зрозуміло, що перехід від точкових значень імовірностей, що фігурують в байєсових оптимальних колективних рішеннях, до їх оцінок відповідними частотами, правомірний лише при достатньо великому обсязі спостережень. Тому при вирішенні практичних задач цікаво узагальнити запропоновані моделі на випадок, коли замість невідомих значень імовірностей використовують їх довірчі інтервали.

Інтервальне узагальнення запропонованих в розділі 2 моделей пов'язано з використанням арифметичних операцій над інтервальними величинами. Однак, як буде показано далі, застосування інтервальної арифметики викликає певні труднощі [94, 95, 96, 125, 129].

Саме тому в цьому розділі наведемо оригінальні результати додаткових досліджень, спрямованих на розвиток методів інтервальних обчислень, зокрема на вдосконалення операції добутку інтервальних величин та виконання дистрибутивного закону.

Такі дослідження [17–19, 21– 23, 25, 26] розвивають існуючи раніш результати інших дослідників [113, 114, 116, 129] та усувають відомий недолік надмірної похибки при визначенні добутку інтервалів. А саме визначення добутку інтервальних величин необхідно для побудови субоптимальних (конструктивних) моделей колективних рішень, які розглядаються в 4 розділі.

Нагадаємо, що інтервальний аналіз, об'єктами якого є інтервальні величини, головним чином використовується в задачах з нестатистичною заданою невизначеністю [15, 16, 102]. Тому інтервальний аналіз як наукова дисципліна довгі роки розвивався незалежно від теорії імовірності та математичної статистики.

Одним з недоліків інтервального аналізу, який часто піддається справедливій критиці – відсутність обґрунтованих міркувань про те, як визначаються границі розглянутих інтервалів. Найчастіше це питання залишається за "кадром" досліджень, і при вирішенні прикладних задач границі інтервалів вважаються апріорі заданими.

Водночас деякі дослідники проклали "місток" між цими математичними дисциплінами. Швидко розвивається перспективний метод математичної статистики інтервальних даних, який використовують в дослідженні результатів спостережень з помилками [20].

Виявилось, що при вирішенні ряду прикладних задач, зокрема задачі формування колективних рішень, можна, спираючись на теорію імовірності, вказати граничні значення інтервалів, що розглядаються, а потім вже застосувати операції над інтервальними величинами.

Саме таке поєднання методів теорії імовірності, математичної статистики та інтервального аналізу дозволило побудувати конструктивні моделі [27, 28] при вирішенні актуальних прикладних задач [24]. Зауважимо, що на відміну від методів, основаних на нечітких множинах Заде, такій підхід не потребує визначення функції належності, вибір якої є суб'єктивним, а тому якість отриманого результату суттєво залежить від досвіду дослідника.

3.1. Загальні означення та властивості

Наведемо деякі класичні означення та властивості інтервальних величин [3, 129].

Означення 3.1. Множина $A = \{\xi\}$ дійсних чисел, які задовольняють умову $a_1 \le \xi \le a_2$, називається дійсним інтервалом і позначається так:

$$A = [a_1, a_2],$$

де a_1 – нижня, а a_2 – верхня границя інтервалу A.

Множина всіх замкнених дійсних інтервалів позначається як $I(\mathrm{R})$.

Кожне дійсне число $x \in R$ є елементом із $I(\mathrm{R})$, якщо його зобразити у вигляді $[x, x]$. Такий інтервал називається точковим інтервалом. Взагалі дійсні числа є частковим випадком інтервалів.

Означення 3.2. Два інтервали $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ називаються рівними $A = B$, якщо вони рівні в теоретико-множинному сенсі.

З означення 3.2 безпосередньо випливає, що

$$A = B \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2.$$

Відношення рівності між двома елементами із $I(\mathrm{R})$ рефлексивне, симетричне та транзитивне.

Означення 3.3. Нехай $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ – бінарна операція на множині дійсних чисел. Якщо $A, B \in I(\mathrm{R})$, то

$$A * B = \{z = a * b \mid a \in A, b \in B\} \tag{3.1}$$

визначає бінарну операцію на $I(\mathrm{R})$.

Арифметичні операції для $A, B \in I(\mathrm{R})$ визначаються таким чином:

$$A + B = \{\xi + \eta \mid \xi \in A, \eta \in B\};$$

$$A - B = \{\xi - \eta \mid \xi \in A, \eta \in B\};$$

$$AB = \{\xi\eta \mid \xi \in A, \eta \in B\};$$

$$A/B = \{\xi/\eta \mid \xi \in A, \eta \in B\},\ \eta \neq 0.$$

В явному вигляді результат арифметичних операцій над дійсними інтервалами $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ можна отримати за допомогою формул:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \tag{3.2}$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1], \tag{3.3}$$

$$AB = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}], \tag{3.4}$$

$$A/B = A[1/b_2, 1/b_1], \quad 0 \notin B. \tag{3.5}$$

Обґрунтуванням формул (3.2) – (3.5) є той факт [3, 116], що функція $z = f(x, y) = x * y$, де $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ – неперервна на компактній множині та $f(x, y)$ приймає як найменше і найбільше значення, так і всі інші значення між ними. Множина $I(\mathrm{R})$ замкнена відносно введених таким чином операцій, так як $A * B$ – замкнений дійсний інтервал і формули (3.2) – (3.5) – це формули для обчислення найменшого і найбільшого значень $f(x, y)$.

Наведемо приклади виконання інтервальних арифметичних операцій.

Приклад 3.1. Знайти суму інтервалів $A = [-1,2]$, $B = [3,8]$. За формулою (3.2) маємо

$$[-1,2] + [3,8] = [-1 + 3,\ 2 + 8] = [2,10].$$

Приклад 3.2. Знайти різницю інтервалів $A = [3,7]$, $B = [-2,5]$. За формулою (3.3) маємо

$$[3,7] - [-2,5] = [3 - 5,\ 7 - (-2)] = [-2,9].$$

Приклад 3.3. Знайти добуток інтервалів $A = [-2,4]$, $B = [3,6]$. За формулою (3.4) маємо

$$[-2,4][3,6]=[\min\{(-2)\cdot 3,(-2)\cdot 6,4\cdot 3,4\cdot 6\},$$
$$\max\{(-2)\cdot 3,(-2)\cdot 6,4\cdot 3,4\cdot 6\}]=[-12,24],$$

Приклад 3.4. Знайти частку інтервалів $A=[-4,9]$ і $B=[3,7]$. За формулою (3.5) маємо

$$\frac{[-4,9]}{[3,7]}=[-4,9]\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right]=[\min\{(-4)\cdot\frac{1}{7},(-4)\cdot\frac{1}{3},9\cdot\frac{1}{7},9\cdot\frac{1}{3}\},$$
$$\max\{(-4)\cdot\frac{1}{7},(-4)\cdot\frac{1}{3},9\cdot\frac{1}{7},9\cdot\frac{1}{3}\}]=\left[\frac{-4}{3},3\right].$$

Розглянемо ***властивості класичної інтервальної арифметики.***

Нехай $A,B,C\in I(\mathrm{R})$. Тоді виконуються такі властивості [116, 129]:

1. Комутативності $A+B=B+A,\quad AB=BA;$

2. Асоціативності

$$(A+B)+C=A+(B+C),\ (AB)C=A(BC);$$

3. Для інтервалів $A,B,C\in I(\mathrm{R})$ властивість дистрибутивності $A(B+C)=AB+AC$ справедлива тільки, якщо $bc\geq 0$ для всіх $b\in B$ і $c\in C$. А в загальному випадку виконується властивість субдистрибутивності

$$A(B+C)\subseteq AB+AC.$$

Саме завдяки цій властивості, ширина результуючого інтервалу в інтервальних обчисленнях залежить від кількості операцій.

4. Дистрибутивна властивість числового множника відносно суми інтервалів

$$a(B+C)=aB+aC,\quad \text{де}\quad a\in\mathrm{R}.$$

5. $X=[0,0]$, $Y=[1,1]$ – єдині нейтральні елементи відносно додавання та множення, тобто

$$A=A+X=X+A, \text{ для всіх } A\in I(\mathrm{R}) \Leftrightarrow X=[0,0];$$

$$A=AY=YA, \text{ для всіх } \quad A\in I(\mathrm{R}) \Leftrightarrow Y=[1,1];$$

6. $I(\mathrm{R})$ не має дільників нуля;

7. Довільний елемент $A=[a_1,a_2]\in I(\mathrm{R})$ при $a_1\neq a_2$, не має зворотного ні за додаванням, ні за множенням.

Однак, $0\in A-A$ і $1\in A\div A$.

Наприклад, знайдемо різницю $B=A-A$ при $A=[1,2]$. За формулою (3.3) маємо,

$$B=[1,2]-[1,2]=[-1,1],\ 0\in[-1,1].$$

Таким чином, інтервал B містить нуль, але не є нульовим.

Для знаходження частки $D=\dfrac{A}{A}$ при $A=[2,5]$ застосуємо формулу ділення (3.5) та отримаємо

$$D=\frac{A}{A}=\frac{[2,5]}{[2,5]}=[2,5]\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{5},\frac{5}{2}\right], \quad 1\in\left[\frac{2}{5},\frac{5}{2}\right].$$

Як бачимо, інтервал D містить одиницю, але не є одиничним.

8. Основою всіх чисельних методів, реалізованих в інтервальний арифметиці, є властивість, яка називається “монотонністю включення”. Наступна теорема пояснює цю властивість.

Теорема 3.1. Нехай $A_k,B_k\in I(\mathrm{R})$, $k=1,2$, та припускається, що

$$A_k\subseteq B_k,\ k=1,2.$$

Тоді для операції $*$ з $\{+, -, \cdot, /\}$ маємо

$$A_1 * A_2 \subseteq B_1 * B_2 .$$

Доведення. Так як $A_k \subseteq B_k$, $k = 1,2$, то

$$A_1 * A_2 = \{z = x * y \mid x \in A_1, y \in A_2\} \subseteq$$
$$\subseteq \{w = u * v \mid u \in B_1, v \in B_2\} = B_1 * B_2 .$$

Теорема доведена.

Приклад 3.5. Нехай $A_1 = [3,5]$, $A_2 = [6,8]$ та $B_1 = [2,9]$, $B_2 = [1,10]$. За умовою теореми, якщо

$$A_1 \subseteq B_1,\ A_1 \subseteq B_2,\ A_2 \subseteq B_1,\ A_2 \subseteq B_2 ,$$

то

$$A_1 * A_2 \subseteq B_1 * B_2 ,$$

де $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Дійсно, так як

$$[3,5] \subset [2,9],\ [3,5] \subset [1,10],\ [6,8] \subset [2,9],\ [6,8] \subset [1,10],$$

то

$$A_1 A_2 = [18,40],\ B_1 B_2 = [2,90] \text{ та } A_1 A_2 \subseteq B_1 B_2 ,$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{6}\right],\ \frac{B_1}{B_2} = \left[\frac{1}{5}, 9\right] \text{ та } \frac{A_1}{A_2} \subseteq \frac{B_1}{B_2},$$

$$A_1 + A_2 = [9,13],\ B_1 + B_2 = [3,19] \text{ та } A_1 + A_2 \subseteq B_1 + B_2 ,$$

$$A_1 - A_2 = [-5,1],\ B_1 - B_2 = [-8,8] \text{ та } A_1 - A_2 \subseteq B_1 - B_2 .$$

Наведемо частковий випадок теореми 3.1.

Наслідок 3.1. Нехай $A, B \in I(\mathrm{R})$, $a \in A$, $b \in B$. Тоді

$$a * b \in A * B ,$$

де $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Приклад 3.6. Продемонструємо виконання наслідку на прикладі операції множення. Так як $4 \in [2,7]$ та $5 \in [1,9]$, то $20 \in [2,63]$.

Саме ця властивість дозволяє будувати ітераційні процедури наближення множини розв'язків для задач з інтервальними (неточними) даними.

Зауваження. Обчислення добутку AB за формулою (3.4) не викликає труднощів [17, 23, 94, 129], коли числа a_1, a_2, b_1, b_2 одного знаку. Наприклад, коли $a_1 > 0$ та $b_1 > 0$, то

$$AB = [a_1 b_1, a_2 b_2],$$

а коли $a_2 < 0$ та $b_2 < 0$, то

$$AB = [a_2 b_2, a_1 b_1].$$

В загальному ж випадку, коли границі a_1, a_2, b_1, b_2 інтервалів різного знаку, обчислення добутку AB ускладнюється: необхідно визначити який із добутків $a_i b_j$ $(i, j = 1,2)$ та в яких випадках буде мати найменше, а який найбільше значення. На жаль, даний факт заважає подальшому аналізу та дослідженню математичних моделей. Існує декілька підходів для подолання таких труднощів.

Таблиця 3.1. Результат добутку інтервалів

	$B \in P(\mathrm{R})$	$B \in Z(\mathrm{R})$	$B \in -P(\mathrm{R})$
$A \in P(\mathrm{R})$	$[a_1 b_1, a_2 b_2]$	$[a_2 b_1, a_2 b_2]$	$[a_2 b_1, a_1 b_2]$
$A \in Z(\mathrm{R})$	$[a_1 b_2, a_2 b_2]$	$[\min\{a_1 b_2, a_2 b_1\},$ $\max\{a_1 b_1, a_2 b_2\}]$	$[a_2 b_1, a_1 b_1]$
$A \in -P(\mathrm{R})$	$[a_1 b_2, a_2 b_1]$	$[a_1 b_2, a_2 b_2\}]$	$[a_2 b_2, a_1 b_1]$

Один з них полягає у визначенні інтервального множення у вигляді так званої таблиці Келі, що класифікує співмножники $A=[a_1,a_2]\in I(\mathrm{R})$ і $B=[b_1,b_2]\in I(\mathrm{R})$ та надає результат операції в залежності від різних комбінацій значень операндів (табл.3.1). З цією метою в $I(\mathrm{R})$ виокремлюються такі підмножини:

$P(\mathrm{R})=\{A\in I(\mathrm{R})\,|\,a_2\ge a_1\ge 0\}$ – підмножина невід'ємних інтервалів,

$Z(\mathrm{R})=\{A\in I(\mathrm{R})\,|\,a_1\le 0\le a_2\}$ – підмножина інтервалів, що містять нуль,

$-P(\mathrm{R})=\{A\in I(\mathrm{R})\,|-A\in P(\mathrm{R})\}$ – підмножина недодатних інтервалів.

І множення двох інтервалів $A=[a_1,a_2]$, $B=[b_1,b_2]$ записується до таблиці Келі (табл. 3.1).

В роботах [113, 114] для здійснення операції множення пропонується інший підхід до класифікації інтервалів $A\in I(\mathrm{R})$ і $B\in I(\mathrm{R})$. Для цього вводяться додаткові оператори «–», «+» та границі інтервалу позначаються так: $A=[a^-,a^+]$.

Множину всіх дійсних інтервалів $I(\mathrm{R})$ представлено як об'єднання множини всіх інтервалів, що містять нуль

$$Z(\mathrm{R})=\{A\in I(\mathrm{R})\,|\,0\in A\}=\{[a^-,a^+]\in I(\mathrm{R})\,|\,a^-\le 0\le a^+\}$$

та множини інтервалів, що не містять нуль

$$I(\mathrm{R})\setminus Z(\mathrm{R})=\{A\in I(\mathrm{R})\,|\,0\notin A\}=\{[a^-,a^+]\in I(\mathrm{R})\,|\,a^->0 \;\text{ або }\; a^+<0\}$$

тобто

$$I(\mathrm{R})=Z(\mathrm{R})\cup(I(\mathrm{R})\setminus Z(\mathrm{R})).$$

Тоді формули для добутку інтервалів $A,B\in I(\mathrm{R})$ набувають вигляду

$$A \times B = \begin{cases} [a^{-\sigma(B)} b^{-\sigma(A)}, a^{\sigma(B)} b^{\sigma(A)}], & A, B \in I(\mathrm{R}) \setminus Z(\mathrm{R}); \\ [a^{\delta} b^{-\delta}, a^{\delta} b^{\delta}], \quad \delta = \sigma(A), & A \in I(\mathrm{R}) \setminus Z(\mathrm{R}), \quad B \in Z(\mathrm{R}); \\ [a^{-\delta} b^{\delta}, a^{\delta} b^{\delta}], \quad \delta = \sigma(B), & A \in Z(\mathrm{R}), \quad B \in I(\mathrm{R}) \setminus Z(\mathrm{R}); \\ [\min\{a^- b^+, a^+ b^-\}, \max\{a^- b^-, a^+ b^+\}], & A, B \in Z(\mathrm{R}); \end{cases}$$

де $\sigma : \{A \in I(\mathrm{R}) \mid a^+ \leq 0 \text{ або } a^- \geq 0\} \to \{-,+\}$ враховує належність певного інтервалу із множини $I(\mathrm{R}) \setminus Z(\mathrm{R})$ до додатної або від'ємної області, тобто

$$\sigma(A) = \begin{cases} +, & \text{якщо } a^- \geq 0, \\ -, & \text{якщо } a^+ \leq 0, \quad A \neq [0,0], \end{cases}$$

аналогічним чином визначається $\sigma(B)$.

З обох наведених класифікацій випливає, що операція обчислення добутку інтервалів ускладнюється для інтервалів, що містять нуль: необхідно визначити який із добутків границь інтервалів приймає найменше, а який найбільше значення. Тому для практичних задач ще в роботі [129] запропоновано інший спосіб запису інтервалу у формі центр-радіус, за якого знаходження добутку інтервалів не потребує визначення найменшого та найбільшого значень добутків границь будь-яких інтервалів.

3.2. Арифметичні операції над інтервалами в формі центр-радіус

Інтервали у формі центр-радіус позначаються як [129]:

$$A = \langle a, r_a \rangle, \qquad B = \langle b, r_b \rangle,$$

де

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}; \qquad r_a = \frac{a_2 - a_1}{2};$$
$$b = \frac{b_1 + b_2}{2}; \qquad r_b = \frac{b_2 - b_1}{2}. \tag{3.6}$$

центри та радіуси відповідних інтервалів.

Зрозуміло, що за цього способу запису пара чисел $\langle a, r_a \rangle$ визначає інтервал $[a - r_a, a + r_a]$.

Для явного опису інтервальних операцій (3.1) використовуються співвідношення:

$$\langle a, r_a \rangle + \langle b, r_b \rangle = \langle a + b, r_a + r_b \rangle, \tag{3.7}$$

$$\langle a, r_a \rangle - \langle b, r_b \rangle = \langle a - b, r_a + r_b \rangle, \tag{3.8}$$

$$\langle a, r_a \rangle \langle b, r_b \rangle = \langle ab + r_a r_b, br_a + ar_b \rangle,\ a \ge r_a \ge 0, b \ge r_b \ge 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\langle a, r_a \rangle}{\langle b, r_b \rangle} = \left\langle \frac{ab + r_a r_b}{b^2 - r_b^2}, \frac{br_a + ar_b}{b^2 - r_b^2} \right\rangle, \qquad 0 \notin \langle b, r_b \rangle.$$

Зауважимо, що співвідношення (3.7), (3.8) надають можливість визначити суму та різницю двох інтервалів за будь-яких значень центрів та радіусів a, r_a, b, r_b. Водночас формулу (3.9) для визначення добутку можна застосовувати тільки за умови $a \ge r_a \ge 0, b \ge r_b \ge 0$.

В роботі [116] запропонована узагальнена формула добутку інтервалів

$$\langle a, r_a \rangle \langle b, r_b \rangle = \langle ab, br_a + ar_b + r_a r_b \rangle, \tag{3.10}$$

перевага якої полягає в тому, що на відміну від (3.4), операція добутку не пов’язана з необхідністю визначення найменшого та найбільшого значень добутків границь інтервалів. А на відміну від (3.9), формула (3.10) дозволяє отримати результат за будь-яких значень a, r_a, b, r_b, зокрема і для інтервалів, що містять нуль.

Проте, легко показати неузгодженість формули (3.10) з класичним означенням (3.4), що спричиняє виникнення похибки у результуючому інтервалі. Продемонструємо цей факт на прикладі.

Приклад 3.7. Добуток інтервалів $A = \langle 3,5 \rangle$, $B = \langle 4,3 \rangle$ за формулою (3.10), буде таким

$$AB = \langle 3 \cdot 4,\ \ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \rangle = \langle 12,\ 44 \rangle,$$

а за означенням (3.4) – таким:

$$AB = [(3-5)(4-3),\ (3+5)(4+3)] = [-14,\ 56]$$

і при переході за формулами (3.6) до форми центр-радіус маємо

$$AB = \langle 21, 35 \rangle.$$

Як бачимо обчислення добутку інтервалів за формулою (3.10) призведе до зсуву центру та збільшення радіусу.

Зауважимо, що відносна похибка у визначенні центру – 42%, а у визначенні радіусу – 25%.

Для подолання цього недоліку нами в роботах [17, 23] проведена класифікація інтервалів у формі центр-радіус.

Нехай $A = \langle a, r_a \rangle$ і $B = \langle b, r_b \rangle$, $A, B \in I(\mathrm{R})$ дійсні інтервали у формі центр-радіус, де a, b – центри, а $r_a, r_b \geq 0$ – радіуси даних інтервалів. У випадку $r_a, r_b = 0$ інтервали вироджуються у дійсні числа і називаються точковими або виродженими. Так як нас цікавить саме добуток двох невироджених інтервалів, то без втрати загальності вважаємо, що $r_a, r_b \neq 0$ і запишемо інтервали $A, B \in I(\mathrm{R})$ так

$$A = r_a \left\langle \frac{a}{r_a}, 1 \right\rangle, B = r_b \left\langle \frac{b}{r_b}, 1 \right\rangle.$$

Множину всіх можливих пар дійсних інтервалів подамо як об’єднання підмножин, що не перетинаються:

$$\bigcup_{i=1}^{16} \tilde{I}_i(\mathrm{R}) = I(\mathrm{R}) \times I(\mathrm{R}),$$

де

$$\tilde{I}_1(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \ \frac{a}{r_a} \geq 1,\ \frac{b}{r_b} \geq 1,\ \frac{a}{r_a} \geq \frac{b}{r_b}\ ,$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\}\ ,$$

$$\tilde{I}_2(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \ \frac{a}{r_a} \geq 1,\ \frac{b}{r_b} \geq 1,\ \ \frac{a}{r_a} < \frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_3(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \ \frac{a}{r_a} \geq -1,\ \frac{b}{r_b} \geq -1,\ -\frac{a}{r_a} \geq -\frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_4(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \ \frac{a}{r_a} \geq -1,\ \frac{b}{r_b} \geq -1,\ \ -\frac{a}{r_a} < -\frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_5(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \ \frac{a}{r_a} \geq 1, \frac{b}{r_b} \geq -1, \frac{a}{r_a} \geq -\frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_6(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \ \frac{a}{r_a} \geq 1, \frac{b}{r_b} \geq -1, \frac{a}{r_a} < -\frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_7(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{a}{r_a} \ge -1,\ \frac{b}{r_b} \ge 1, -\frac{a}{r_a} \ge \frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_8(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{a}{r_a} \ge 1, \frac{b}{r_b} \ge -1, -\frac{a}{r_a} < \frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_9(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{a}{r_a} > 1, \frac{|b|}{r_b} < 1,\ r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_{10}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{a}{r_a} < -1, \frac{|b|}{r_b} < 1,\ r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_{11}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{b}{r_b} > 1,\ \frac{|a|}{r_a} < 1,\ r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_{12}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{b}{r_b} < -1, \frac{|a|}{r_a} < 1,\ r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_{13}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|b|}{r_b} < 1, \frac{a}{r_a} \ge \frac{b}{r_b}, -\frac{a}{r_a} < \frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_{14}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|b|}{r_b} < 1,\ \frac{a}{r_a} < \frac{b}{r_b}, -\frac{a}{r_a} > \frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_{15}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{|a|}{r_a} < 1,\ \frac{|b|}{r_b} < 1,\ \ \frac{a}{r_a} < \frac{b}{r_b}\ , -\frac{a}{r_a} < \frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$\tilde{I}_{16}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \ \frac{|a|}{r_a} < 1,\ \frac{|b|}{r_b} < 1,\ \ \frac{a}{r_a} \ge \frac{b}{r_b}, -\frac{a}{r_a} < \frac{b}{r_b},$$

$$r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\}.$$

Ґрунтуючись на такий класифікації покажемо, що результат добутку інтервалів $A=\langle a, r_a\rangle$ та $B=\langle b, r_b\rangle$ буде належати відповідній підмножині залежно від співвідношення їх центрів та радіусів і визначатись через елементарні функції без застосування операцій min та max. В результаті об'єднання таких підмножин за спільними ознаками вдалося довести ряд теорем, які наведені нижче.

Теорема 3.2. Нехай $A, B \in \bigcup_{i=1}^{8} \tilde{I}_i(\mathrm{R}) = I_1(\mathrm{R})$, де

$$I_1(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \frac{|a|}{r_a} \geq 1, \frac{|b|}{r_b} \geq 1, \;\; r_a, r_b > 0, \;\; a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\}.$$

Тоді добуток інтервалів $A=\langle a, r_a\rangle$, $B=\langle b, r_b\rangle$ визначається за формулою

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab)\, r_a r_b, \, |a| r_b + |b| r_a\rangle. \tag{3.11}$$

Доведення. Якщо $A, B \in \tilde{I}_1(\mathrm{R})$, то

$$AB = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}] =$$
$$= [a_1b_1, a_2b_2] =$$
$$= [(a - r_a)(b - r_b), (a + r_a)(b + r_b)] =$$
$$= [ab - br_a - ar_b + r_a r_b, \; ab + br_a + ar_b + r_a r_b] =$$
$$= [(ab + r_a r_b) - (br_a + ar_b), \; (ab + r_a r_b) + (br_a + ar_b)]$$

або в формі центр-радіус

$$AB = \langle ab + r_a r_b, \; ar_b + br_a\rangle. \tag{3.12}$$

Використовуючи аналогічну техніку легко показати, що добуток інтервалів $A, B \in \widetilde{I}_2(\mathrm{R})$ також визначається за формулою (3.12).

Таким чином, якщо $A, B \in \widetilde{I}_1(\mathrm{R}) \cup \widetilde{I}_2(\mathrm{R})$, то їх добуток знаходимо за формулою (3.12).

Використовуючи таблицю Келі, аналогічно можна довести, що

$$AB = \langle ab + r_a r_b, \, -ar_b - br_a \rangle, \text{ якщо } A, B \in \widetilde{I}_3(\mathrm{R}) \cup \widetilde{I}_4(\mathrm{R}),$$

$$AB = \langle ab - r_a r_b, \, ar_b - br_a \rangle, \text{ якщо } A, B \in \widetilde{I}_5(\mathrm{R}) \cup \widetilde{I}_6(\mathrm{R}),$$

$$AB = \langle ab - r_a r_b, \, -ar_b + br_a \rangle, \text{ якщо } A, B \in \widetilde{I}_7(\mathrm{R}) \cup \widetilde{I}_8(\mathrm{R}),$$

або в узагальненій формі запису (3.11).

Теорема доведена.

Теорема 3.3. Нехай $A, B \in \bigcup_{i=9}^{12} \widetilde{I}_i(\mathrm{R})$, де

$$I_2 = \{\langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} < \frac{|b|}{r_b}, \;\; r_a, r_b > 0, \;\; a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

тоді добуток інтервалів $A = \langle a, r_a \rangle$, $B = \langle b, r_b \rangle$ визначається за формулою

$$AB = \langle \operatorname{sgn}(b)\, a, r_a \rangle (|\, b \,| + r_b). \tag{3.13}$$

Доведення. Запишемо умови $\frac{b}{r_b} > 1$, $\frac{|a|}{r_a} < 1$ множини $\widetilde{I}_9(\mathrm{R})$ у вигляді

$$\begin{cases} a_1 < 0 < a_2, \\ 0 < b_1 < b_2. \end{cases}$$

Очевидно, що для $A, B \in \widetilde{I}_9(\mathrm{R})$ добуток (3.4) визначається так

$$AB = [a_1 b_2, a_2 b_2] = [a_1, a_2] b_2$$

або в формі центр-радіус

$$AB = \langle a,\ r_a \rangle (b + r_b)\,. \qquad (3.14)$$

Перші дві нерівності умов $\tilde{I}_{10}(\mathrm{R})$

$$\begin{cases} \dfrac{|a|}{r_a} < 1, \\ \dfrac{|b|}{r_b} < 1, \\ \dfrac{|a|}{r_a} < \dfrac{b}{r_b}, \end{cases} \qquad (3.15)$$

запишемо у вигляді

$$\begin{cases} a_1 < 0 < a_2, \\ b_1 < 0 < b_2. \end{cases}$$

У такому випадку добуток інтервалів (3.4) набуває вигляду

$$AB = [\min\{a_1 b_2, a_2 b_1\}, \max\{a_1 b_1, a_2 b_2\}]\,. \qquad (3.16)$$

Для визначення мінімального та максимального значення в (3.16) розглянемо останню нерівність системи (3.15), яка за означенням модуля, рівносильна сукупності двох систем нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{a}{r_a} < \dfrac{b}{r_b}, \\ -\dfrac{a}{r_a} < \dfrac{b}{r_b}, \end{cases}$$

або, з урахуванням (3.6),

$$\begin{cases} a_1 b_2 < a_2 b_1, \\ a_2 b_2 > a_1 b_1, \end{cases}$$

Отже, для $A, B \in \tilde{I}_{10}(\mathrm{R})$ добуток AB буде таким:

$$AB = [a_1 b_2, a_2 b_2] = [a_1, a_2] b_2$$

або

$$AB = \langle a,\ r_a \rangle (b + r_b)\,. \tag{3.14}$$

Таким чином, якщо $A, B \in \tilde{I}_9(\mathrm{R}) \cup \tilde{I}_{10}(\mathrm{R})$, то їх добуток знаходимо за формулою (3.14).

Аналогічно можна показати, що для $A, B \in \tilde{I}_{11}(\mathrm{R}) \cup \tilde{I}_{12}(\mathrm{R})$ справедлива формула

$$AB = \langle -a,\ r_a \rangle (-b + r_b)\,.$$

В результаті узагальнення отримаємо справедливість (3.13).

Теорема доведена.

Теорема 3.4. Нехай $A, B \in \bigcup_{i=13}^{16} \tilde{I}_i(\mathrm{R})$, де

$$I_3 = \{\langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \frac{|b|}{r_b} < 1, \frac{|a|}{r_a} \ge \frac{|b|}{r_b},\ \ r_a, r_b > 0,\ \ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\}$$

Тоді добуток інтервалів $A=\langle a,r_a\rangle$, $B=\langle b,r_b\rangle$ визначається за формулою

$$AB = \langle \mathrm{sgn}(a)b,\ r_b\rangle(|\,a\,|+r_a). \qquad (3.17)$$

Доведення. Оскільки операція множення дійсних чисел комутативна, тому ввівши заміну $a\leftrightarrow b, r_a\leftrightarrow r_b$ із (3.13) отримаємо (3.17). Теорема доведена.

Таким чином, в теоремах 3.2 – 3.4 доведено, що запропонована класифікація дійсних інтервалів дозволила отримати формулу добутку інтервалів у формі центр-радіус при всіх можливих значеннях центру та радіусу:

$$AB=\begin{cases}\langle ab+\mathrm{sgn}(ab)r_ar_b,\ |\,a\,|r_b+|\,b\,|\,r_a\rangle,\ \ A,B\in I_1,\\ \langle\ \mathrm{sgn}(b)\,a,r_a\rangle(|\,b\,|+r_b),\ \ A,B\in I_2,\\ \langle \mathrm{sgn}(a)b,\ r_b\rangle(|\,a\,|+r_a),\ \ A,B\in I_3.\end{cases} \qquad (3.18)$$

З теорем 3.2 – 3.4 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.2. Нехай $A,B\in I(\mathrm{R})$ і $\dfrac{|\,b\,|}{r_b}>1$. Тоді ділення інтервалів $A=\langle a,r_a\rangle$ та $B=\langle b,r_b\rangle$ визначається так:

$$\frac{A}{B}=\frac{\langle ab+\mathrm{sgn}(ab)r_ar_b,|\,a\,|r_b+|\,b\,|\,r_a\rangle}{b^2-r_b^2}\ , \qquad (3.19)$$

якщо

$$\frac{|\,a\,|}{r_a}\ge 1, \qquad (3.20)$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\langle\ \mathrm{sgn}(b)\,a,r_a\rangle(|\,b\,|+r_b)}{b^2-r_b^2}\ , \qquad (3.21)$$

якщо

$$\frac{|\,a\,|}{r_a}<1. \qquad (3.22)$$

Доведення. Відомо [3, 116], що результат операції ділення дійсних інтервалів $A=[a_1,a_2]$ і $B=[b_1,b_2]$ отримується за допомогою формули:

$$\frac{A}{B}=[a_1,a_2]\left[\frac{1}{b_2},\frac{1}{b_1}\right], \qquad \text{якщо} \quad 0\notin B$$

або

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{b_1b_2}[a_1,a_2][b_1,b_2], \qquad \text{якщо } 0\notin B.$$

Використовуючи (3.6), запишемо останній вираз у формі центр-радіус:

$$\frac{A}{B}=\frac{\langle a,r_a\rangle\langle b,r_b\rangle}{b^2-r_b^2}=\frac{AB}{b^2-r_b^2}\ , \quad \text{якщо } \frac{|b|}{r_b}>1.$$

Тоді, згідно з теоремами 3.2 – 3.4, арифметичну операцію ділення інтервалів A та B визначатимемо за формулами (3.19), (3.21) за умов (3.20), (3.22) відповідно.

Отримані формули (3.18) відповідають класичному означенню (3.4), що дозволяє оцінити ступінь розходження результатів арифметичних операцій за формулою (3.10). З цією метою порівняємо ширину інтервалу $C_I=\langle c_I,r_I\rangle$, який є результатом множення за (3.18), з шириною інтервалу $C_S=\langle c_S,r_S\rangle$, який є результатом множення інтервалів A,B за формулою (3.10), та визначимо розходження центрів c_I,c_S.

Спочатку проведемо порівняльний аналіз для $A,B\in I_1(\mathrm{R})$. Запишемо C_S для $A,B\in \tilde{I}_1(\mathrm{R})$ (див. доведення теореми 3.2):

$$C_S=AB=\left[ab-a\,r_b-br_a-r_ar_b,\ \ ab+a\,r_b+br_a+r_ar_b\right]$$

або, після відповідних перетворень, в еквівалентній формі

$$C_S=AB=\left[(a-r_a)(b-r_b)-2r_ar_b,\ (a+r_a)(b+r_b)\right]. \quad (3.23)$$

Аналогічно, C_I представимо у вигляді

$$C_I = AB = \left[(a - r_a)(b - r_b),\ (a + r_a)(b + r_b)\right]. \qquad (3.24)$$

З (3.23) та (3.24) випливає, що розширення інтервалу C_S відбувається за рахунок зміщення тільки лівої границі на величину $2r_a r_b$, а права залишається постійною. Якщо скористатися поняттям абсолютної похибки Δ при обчисленні ширини інтервалу, то для даного випадку матимемо

$$\Delta = 2\left|r_S - r_I\right| = 2r_a r_b .$$

Легко показати, що і для $A, B \in I_1(\mathrm{R})$ формула (3.10) також дає ширший інтервал на величину $2r_a r_b$.

Аналогічно, проводиться порівняльний аналіз результатів теорем 3.2, 3.3 з формулою (3.10). В результаті отримаємо, що абсолютна похибка Δ у визначенні ширини інтервалу для випадків $A, B \in I_2(\mathrm{R})$, $A, B \in I_3(\mathrm{R})$ дорівнює $2\,|\,a\,|\,r_b$, $2\,|\,b\,|\,r_a$ відповідно.

Таким чином, формула (3.10) дає ширший інтервал на величину абсолютної похибки Δ. Також відмітимо, що розширення інтервалу, для всіх випадків, при $ab > 0$, відбувається за рахунок зміщення тільки лівої границі, а при $ab < 0$ розширення інтервалу відбувається за рахунок зміщення тільки правої границі.

Відносна похибка $\partial = \dfrac{\Delta}{2r_I} 100\%$ у визначенні ширини інтервалу дорівнює:

а) $A, B \in I_1(\mathrm{R})$:
$$\partial = \frac{1}{\dfrac{|\,a\,|}{r_a} + \dfrac{|\,b\,|}{r_b}} 100\%, \qquad (3.25)$$

b) $A, B \in I_2(\mathrm{R})$: $$\partial = \frac{\frac{|a|}{r_a}}{1+\frac{|b|}{r_b}} 100\%, \quad (3.26)$$

c) $A, B \in I_3(\mathrm{R})$: $$\partial = \frac{\frac{|b|}{r_b}}{1+\frac{|a|}{r_a}} 100\%. \quad (3.27)$$

З (3.25) – (3.27) безпосередньо випливає, що $0 \le \partial \le 50\%$, причому значення $\partial = 50\%$ досягається тільки в тому випадку, коли $\frac{|a|}{r_a} = \frac{|b|}{r_b} = 1$, а значення $\partial = 0\%$, коли $a = 0$ для $A, B \in I_2(\mathrm{R})$ та $b = 0$ для $A, B \in I_3(\mathrm{R})$.

На рисунку 3.1 представлена поверхня залежності ∂ від $\frac{|a|}{r_a}$ та $\frac{|b|}{r_b}$, а на рисунку 3.2 – залежність $\partial = \partial\left(\frac{|a|}{r_a}\right)$ при різних значеннях $\frac{|b|}{r_b}$.

Аналогічно можна провести оцінку розходження центрів інтервалів C_S, C_I. В результаті такої оцінки виявилося, що відносна похибка $\partial_c = \frac{|c_I - c_S|}{|c_I|} 100\%$ у визначенні центра інтервалу дорівнює:

a) $A, B \in I_1(\mathrm{R})$: $$\partial_c = \frac{1}{\frac{|a|}{r_a}\frac{|b|}{r_b} + 1} 100\%, \quad (3.28)$$

b) $A, B \in I_2(\mathrm{R})$: $$\partial_c = \frac{1}{1+\frac{|b|}{r_b}} 100\%, \quad \text{якщо} \quad a, b \ne 0, \quad (3.29)$$

c) $A, B \in I_3(\mathrm{R})$: $\quad \partial_c = \dfrac{1}{1+\dfrac{|a|}{r_a}} 100\%, \quad$ якщо $a, b \neq 0$. (3.30)

З (3.28) випливає, що для $A, B \in I_1(\mathrm{R})$ найбільше значення відносної помилки $\partial_c = 50\%$ при $\dfrac{|a|}{r_a} = 1$ та $\dfrac{|b|}{r_b} = 1$. Значення відно-

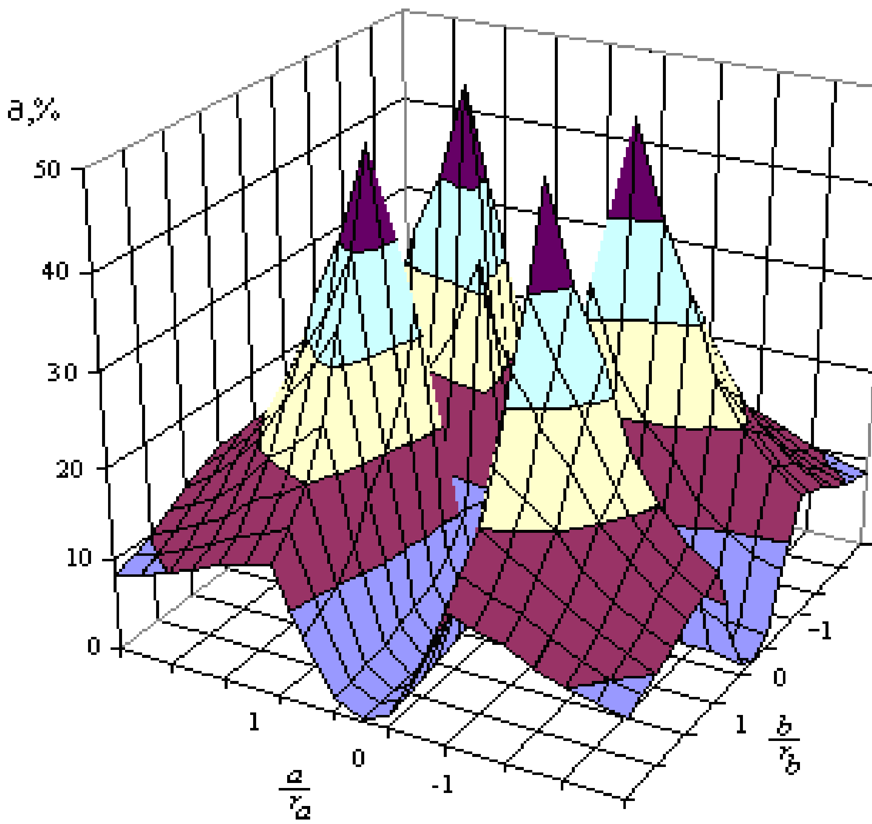

Рис.3.1. Поверхня залежності ∂ від $\dfrac{|a|}{r_a}$ та $\dfrac{|b|}{r_b}$.

сної помилки прямує до нуля ($\partial_c \to 0$) при $\dfrac{|a|}{r_a} \to \infty$ та $\dfrac{|b|}{r_b} \to \infty$.

Для $A, B \in I_2(\mathrm{R})$: $C_I = C_S = \langle 0, |b| r_a + r_a r_b \rangle$ при $a = 0$. Крім того, коли $a = 0$ та $b = 0$, то $C_I = C_S = \langle 0, r_a r_b \rangle$. Тобто, лише за таких умов інтервали C_S, C_I збігаються. Але, якщо центр інтервалу B має дуже близьке до нуля значення, відносна помилка, згідно з (3.29), наближається до 100 %.

Аналогічно, для $A, B \in I_3(\mathrm{R})$ інтервали C_S, C_I збігаються та дорівнюють $C_I = C_S = \langle 0, |a| r_b + r_a r_b \rangle$ при $b = 0$, або $C_I = C_S = \langle 0, r_a r_b \rangle$ при $a = 0$ та $b = 0$. Якщо центр інтервалу A прямує до нуля, відносна помилка, згідно з (3.30), наближається до 100 %.

Таким чином відносна помилка у визначенні центра інтерва-

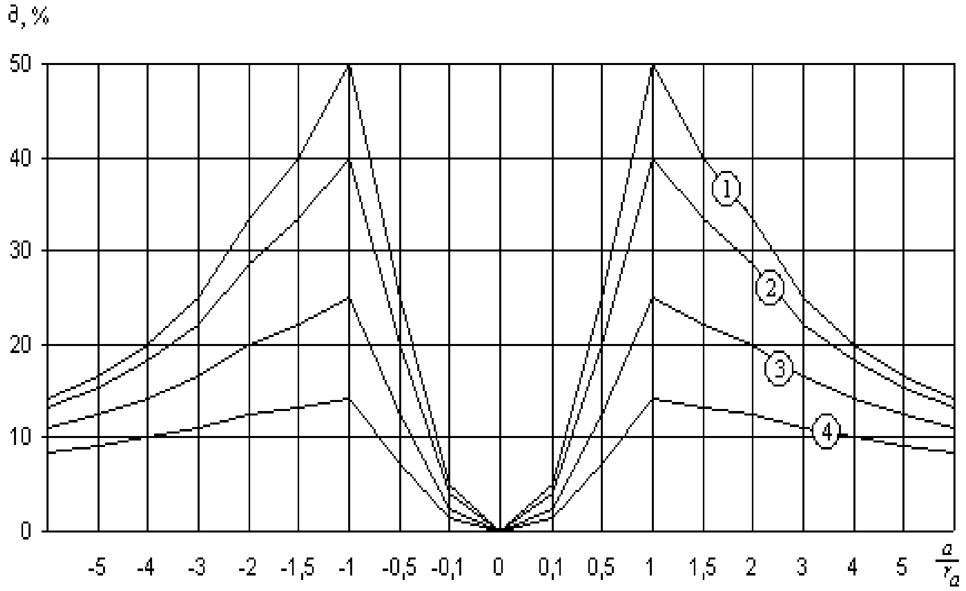

Рис.3.2. Залежність $\partial = \partial\left(\frac{|a|}{r_a}\right)$ **при різних** $\frac{|b|}{r_b}$.

1) $\frac{|b|}{r_b}$=1; 2) $\frac{|b|}{r_b}$=2.5; 3) $\frac{|b|}{r_b}$=3; 4) $\frac{|b|}{r_b}$=7.6

лу, обмежена границями $0 \le \partial_c < 100\%$, причому $\partial_c = 0$ при $a = 0$

та $b=0$. Але, якщо $a \to 0$ та $b \to 0$, то $\partial_c \to 100\%$. При $\frac{|a|}{r_a}=1$ та $\frac{|b|}{r_b}=1$, $\partial_c = 50\%$. При $\frac{|a|}{r_a} \to \infty$ та $\frac{|b|}{r_b} \to \infty$, $\partial_c \to 0$.

Для ілюстрації, на рисунку 3.3 зображена залежність $\partial_c = \partial_c\left(\frac{|a|}{r_a}\right)$ при різних значеннях $\frac{|b|}{r_b}$.

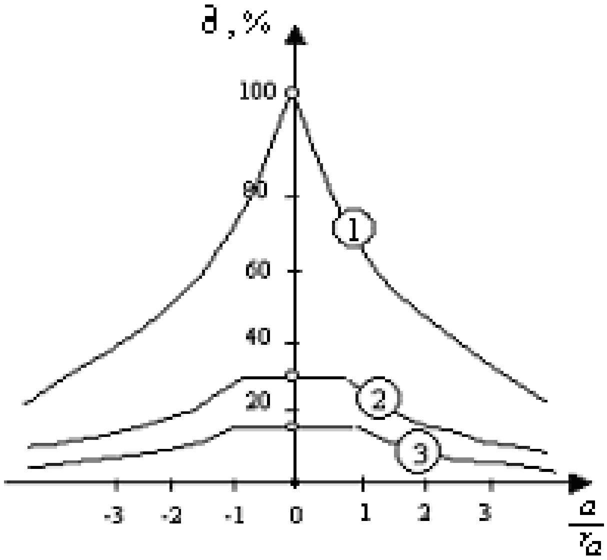

Рис.3.3. Залежність $\partial_c = \partial_c\left(\frac{|a|}{r_a}\right)$ **при різних** $\frac{|b|}{r_b}$:

1) $b=0$; 2) $\frac{|b|}{r_b}=3$; 3) $\frac{|b|}{r_b}=5{,}7$.

Приклад 3.8. Знайдемо добуток інтервалів $A=\langle -0.9, 0.3\rangle$, $B=\langle -0.8, 0.1\rangle$. Оскільки, ці інтервали належать області (3.2), то обчислення проведемо за формулою (3.13):

$$AB = \langle -0.9, 0.3\rangle\langle -0.8, 0.1\rangle =$$

$$= \langle -0.9\cdot(-0.8) + 0.3\cdot 0.1,\ |-0.9|\cdot 0.1 + |-0.8|\cdot 0.3\rangle = \langle 0.75, 0.33\rangle.$$

Використовуючи формули (3.10), отримаємо такий результат

$$AB = \langle -0.9, 0.3 \rangle \langle -0.8, 0.1 \rangle =$$

$$= \langle -0.9 \cdot (-0.8),\ |-0.9| \cdot 0.1 + |-0.8| \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.1 \rangle = \langle 0.72, 0.36 \rangle.$$

Відносні похибки у визначенні ширини та центра інтервалу дорівнюють $\partial = 9.09\%$ та $\partial_c = 4\%$ відповідно.

В результаті проведеної оцінки точності формули (3.10) виявилося, що відносна помилка зсуву центра інтервалу, який є результатом добутку за формулою (3.10), може досягати 100%, а відносна помилка збільшення радіусу – 50%. Застосування ж отриманих формул (3.18) для добутку інтервалів дає точний результат, тобто є аналогом (3.4) та завдяки проведеної класифікації інтервалів і застосуванню форми центр-радіус, вирішує задачу визначення, присутніх в (3.4), мінімального та максимального значень границь для будь-яких інтервалів.

3.3. Процедура піднесення до цілого додатного степеня

Цікаво розглянути також задачу піднесення інтервалу у формі центр-радіус $A = \langle a, r_a \rangle$ до цілого додатного степеня [21]. За означенням [116], для інтервалів $A = [a_1, a_2]$ ця процедура визначається за формулою

$$A^n = [\min \xi^n, \max \xi^n],\ \ a_1 \le \xi \le a_2, \qquad (3.31)$$

або, якщо $0 \notin A$, то

$$A^n = [a_1^n, a_2^n] \text{ або } A^n = [a_2^n, a_1^n].$$

Звідси випливає, що операція піднесення до цілого додатного степеня інтервалу, який не містить нуль, еквівалентна багатократному множенню, тобто

$$A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A.$$

Спираючись на останнє співвідношення, дослідимо механізм піднесення до цілого додатного степеня n інтервалу $A = \langle a, r_a \rangle$ у формі центр-радіус за умови $\dfrac{|a|}{r_a} \geq 1$.

Будемо послідовно підносити інтервал A до цілого степеня n. Згідно з (3.12) маємо

$$A^2 = \langle a, r_a \rangle \langle a, r_a \rangle = \langle aa + \mathrm{sgn}(aa) r_a r_a, |a| r_a + |a| r_a \rangle =$$

$$= \langle a^2 + r_a^2,\ 2|a| r_a \rangle;$$

$$A^3 = \langle a, r_a \rangle A^2 = \langle a, r_a \rangle \langle a^2 + r_a^2,\ 2|a| r_a \rangle = \langle a^3 + 3ar_a^2,\ 3a^2 r_a + r_a^3 \rangle;$$

$$A^4 = \langle a, r_a \rangle A^3 = \langle a^4 + 6a^2 r_a^2 + r_a^4,\ 4|a|^3 r_a + 4|a| r_a^3 \rangle;$$

$$A^5 = \langle a, r_a \rangle A^4 = \langle a^5 + 10a^3 r_a^2 + 5ar_a^4,\ 5a^4 r_a + 10a^2 r_a^3 + r_a^5 \rangle;$$

$$A^6 = \langle a, r_a \rangle A^5 =$$

$$= \langle a^6 + 15a^4 r_a^2 + 15a^2 r_a^4 + r_a^6,\ 6|a|^5 r_a + 20|a|^3 r_a^3 + 6|a| r_a^5 \rangle.$$

Легко бачити, що при «ігноруванні» в отриманих результатах коми між виразами центру і радіусу, маємо многочлен, який є розкладом бінома Ньютона $(a + r_a)^n$. Іншими словами, щоб піднести до степеня інтервал, необхідно правильно визначити члени розкладу бінома Ньютона $(a + r_a)^n$ для центра та радіуса.

Зазначимо також, що центр отриманого інтервалу – многочлен, впорядкований за спадаючими ступенями a, старший ступень якого дорівнює степеню інтервалу, а радіус – многочлен, впорядкований за зростаючими степенями r_a, причому сума біноміальних коефіцієнтів центру дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів радіусу [19].

Теорема 3.5. Нехай для інтервалу $A = \langle a, r_a \rangle$ виконується умова $\dfrac{|a|}{r_a} \geq 1$. Тоді для будь-якого $n > 0$ справедлива формула

$$A^n = \left\langle \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |a|^{n-(2k+1)} \right\rangle, \tag{3.32}$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доведення. Проведемо доведення теореми методом математичної індукції.

Рівність (3.32) справедлива при $n = 1$:

$$\langle a, r_a \rangle^1 = \left\langle C_1^0 r_a^0 a^1, \quad C_1^1 r_a^1 |a|^{1-(2\cdot 0+1)} \right\rangle.$$

Покажемо, що, якщо формула (3.32) справедлива при будь-якому $n > 0$, то вона справедлива і при $n+1$.

Припустимо, що при деякому значенні $n > 0$ виконується рівність (3.32), тобто

$$\langle a, r_a \rangle^n = \left\langle \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |a|^{n-(2k+1)} \right\rangle, \tag{3.33}$$

Помножимо обидві частини співвідношення (3.33) на $\langle a, r_a \rangle$. В результаті множення лівої частини маємо

$$\langle a, r_a \rangle^n \langle a, r_a \rangle = \langle a, r_a \rangle^{n+1}.$$

Відповідно до (3.12) при множенні на $\langle a, r_a \rangle$ правої частини співвідношення (3.33) отримаємо

$$\left\langle \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |\, a\,|^{n-(2k+1)} \right\rangle \langle a, r_a \rangle =$$

$$= \left\langle a \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k} + \operatorname{sgn}(a \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k})\, r_a \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |\, a\,|^{n-(2k+1)}, \right.$$

$$\left. \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k} \right| r_a + |\, a\,| \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |\, a\,|^{n-(2k+1)} \right\rangle =$$

$$= \left\langle a^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-(2k+1)} + r_a^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k} a^{n-(2k+1)}, \right.$$

$$\left. \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k+1} |\, a\,|^{n-2k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |\, a\,|^{n-2k} \right\rangle.$$

Позначимо центр отриманого інтервалу

$$W = a^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-(2k+1)} + r_a^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k} a^{n-(2k+1)}, \qquad (3.34)$$

а радіус –

$$V = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k+1} |\, a\,|^{n-2k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |\, a\,|^{n-2k}. \qquad (3.35)$$

З (3.34) випливає

$$W = a^{n+1} + C_n^2 r_a^2 a^{n-1} + C_n^4 r_a^4 a^{n-3} + C_n^6 r_a^6 a^{n-5} + \ldots + C_n^{n-1} r_a^{n-1} a^2 + C_n^n r_a^n a +$$

$$+ C_n^1 r_a^2 a^{n-1} + C_n^3 r_a^4 a^{n-3} + C_n^5 r_a^6 a^{n-5} + \ldots + C_n^{n-2} r_a^{n-1} a^2 + C_n^{n-1} r_a^n a + r_a^{n+1}.$$

В результаті зведення подібних отримаємо

$$W = a^{n+1} + (C_n^2 + C_n^1) r_a^2 a^{n-1} + (C_n^4 + C_n^3) r_a^4 a^{n-3} + (C_n^6 + C_n^5) r_a^6 a^{n-5} + \ldots +$$

$$+ (C_n^{n-1} + C_n^{n-2}) r_a^{n-1} a^2 + (C_n^n + C_n^{n-1}) r_a^n a + r_a^{n+1}.$$

Оскільки $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, то

$$W = a^{n+1} + C_{n+1}^2 r_a^2 a^{(n+1)-2} + C_{n+1}^4 r_a^4 a^{(n+1)-4} + C_{n+1}^6 r_a^6 a^{(n+1)-6} + \ldots +$$

$$+ C_{n+1}^{(n+1)-2} r_a^{(n+1)-2} a^2 + C_n^{(n+1)-1} r_a^{(n+1)-1} a + r_a^{n+1},$$

$$W = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{2k} r_a^{2k} a^{(n+1)-2k}.$$

З (3.35) отримаємо

$$V = C_n^0 r_a \,|a|^n + C_n^2 r_a^3 \,|a|^{n-2} + C_n^4 r_a^5 \,|a|^{n-4} + C_n^6 r_a^7 \,|a|^{n-6} + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-3} r_a^{n-2} |a|^3 + C_n^{n-2} r_a^{n-1} |a|^2 + C_n^{n-1} r_a^n |a| + C_n^n r_a^n |a|^0 +$$

$$+ C_n^1 r_a \,|a|^n + C_n^3 r_a^3 \,|a|^{n-2} + C_n^5 r_a^5 \,|a|^{n-4} + C_n^7 r_a^7 \,|a|^{n-6} + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-2} r_a^{n-2} |a|^3 + C_n^{n-1} r_a^n |a|^2 + C_n^n r_a^n |a|.$$

Зведемо подібні та отримаємо

$$V = (C_n^0 + C_n^1) r_a \,|a|^n + (C_n^2 + C_n^3) r_a^3 |a|^{n-2} + (C_n^4 + C_n^5) r_a^5 |a|^{n-5} +$$

$$+ (C_n^6 + C_n^7) r_a^7 \,|a|^{n-6} + \ldots + (C_n^{n-3} + C_n^{n-2}) r_a^{n-2} \,|a|^3 +$$

$$+(C_n^{n-1}+C_n^{n-2})r_a^{n-1}\,|\,a\,|^2+(C_n^n+C_n^{n-1})r_a^n\,|\,a\,|+r_a^{n+1}.$$

Оскільки $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, то

$$V=C_{n+1}^1 r_a\;|\,a\,|^{(n+1)-1}+C_{n+1}^3 r_a^3\,|\,a\,|^{(n+1)-3}+C_{n+1}^5 r_a^5\,|\,a\,|^{(n+1)-5}+$$

$$+C_{n+1}^7 r_a^7\;|\,a\,|^{(n+1)-7}+\ldots+C_{n+1}^{(n+1)-3} r_a^{(n+1)-3}\;|\,a\,|^3+$$

$$+C_{n+1}^{(n+1)-2} r_a^{(n+1)-2}\,|\,a\,|^2+C_n^{(n+1)-1} r_a^{(n+1)-1}\,|\,a\,|+r_a^{n+1}.$$

Отже,

$$V=\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{2k+1} r_a^{2k+1} a^{(n+1)-(2k+1)}\,.$$

Таким чином, показано, що

$$\left\langle \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k},\;\; \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1}\,|\,a\,|^{n-(2k+1)} \right\rangle \langle a, r_a\rangle =$$

$$=\left\langle \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{2k} r_a^{2k} a^{(n+1)-2k}, \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{2k+1} r_a^{2k+1} a^{(n+1)-(2k+1)} \right\rangle.$$

Теорема доведена.

Розглянемо випадок, коли умова $\dfrac{|\,a\,|}{r_a}\ge 1$ не виконується, тобто $0\in[a_1,a_2]$. При непарному значенні степені n з (3.31) випливає, що

$$\min \xi^n = a_1^n,\ \max \xi^n = a_2^n,\quad a_1\le \xi \le a_2.$$

Таким чином, при $\dfrac{|\,a\,|}{r_a}<1$ та непарному значенні n буде також виконуватись співвідношення (3.32).

Якщо n парне, то, згідно з (3.31),

$$\min \xi^n = 0,$$

$$\max \xi^n = a_2^n, \text{ якщо } |a_1| > |a_2|,$$

$$\max \xi^n = a_1^n, \text{ якщо } |a_1| < |a_2|.$$

У формі центр-радіус маємо

$$\max \xi^n = (|a| + |r_a|)^n.$$

$$A^n = \langle a, r_a \rangle^n = \frac{1}{2}(|a| + |r_a|)^n \langle 1,1 \rangle,$$

$$A^n = \langle 1, 1 \rangle \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k r_a^{n-k}.$$

З вище сказаного випливає такий алгоритм процедури піднесення інтервалу $A = \langle a, r_a \rangle$ до цілого додатного степеня n:

1. При $\frac{|a|}{r_a} \ge 1, \forall n > 0$ та при $\frac{|a|}{r_a} < 1,\ n = 2k+1 > 0$

$$A^n = \left\langle \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k},\quad \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |a|^{n-(2k+1)} \right\rangle,$$

2. При $\frac{|a|}{r_a} < 1,\ n = 2k > 0$

$$A^n = \langle 1, 1 \rangle \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k r_a^{n-k}.$$

Таким чином, доведено, що результат піднесення до цілого додатного степеня дійсних інтервалів в формі центр-радіус має вигляд біноміальних коефіцієнтів формули бінома Ньютона, які відповідним чином розподіляються між центром та радіусом.

Ще одне питання, яке виникає при застосуванні інтервальних обчислень – умови виконання властивостей інтервальної арифметики. Легко показати, що властивості комутативності та асоціативності виконуються при довільних інтервалах $A,B,C \in I(\mathrm{R})$. Водночас питання про виконання властивості дистрибутивності потребує додаткових досліджень [18].

3.4. Умови виконання закону дистрибутивності

Для подальшого дослідження введемо такі позначення [25 ,26]:

$$I_1^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \frac{|a|}{r_a} \geq 1, \frac{|b|}{r_b} \geq 1,\ r_a, r_b > 0,\ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$I_1^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle c, r_c\rangle \mid \frac{|a|}{r_a} \geq 1, \frac{|c|}{r_c} \geq 1,\ r_a, r_c > 0,\ a, r_a, c, r_c \in \mathrm{R}\},$$

$$I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle (b+c), r_c\rangle \mid \frac{|a|}{r_a} \geq 1, \frac{|b+c|}{r_b + r_c} \geq 1,$$
$$r_a, (r_b + r_c) > 0,\ a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in \mathrm{R}\},$$

$$I_2^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} \leq \frac{|b|}{r_b},\ r_a, r_b > 0,\ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$I_2^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle c, r_c\rangle \mid \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} \leq \frac{|c|}{r_c},\ r_a, r_c > 0,\ a, r_a, c, r_c \in \mathrm{R}\},$$

$$I_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle (b+c), r_c\rangle \mid \frac{|a|}{r_a} < 1, \frac{|a|}{r_a} \leq \frac{|b+c|}{r_b + r_c},$$
$$r_a, (r_b + r_c) > 0,\ a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in \mathrm{R}\},$$

$$I_3^{(A,B)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle b, r_b\rangle \mid \frac{|b|}{r_b} < 1, \frac{|a|}{r_a} \geq \frac{|b|}{r_b},\ r_a, r_b > 0,\ a, r_a, b, r_b \in \mathrm{R}\},$$

$$I_3^{(A,C)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle c, r_c\rangle \mid \frac{|c|}{r_c} < 1, \frac{|a|}{r_a} \geq \frac{|c|}{r_c},\ r_a, r_c > 0,\ a, r_a, c, r_c \in \mathrm{R}\},$$

$$I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R}) = \{\langle a, r_a\rangle, \langle (b+c), r_c\rangle \mid \frac{|b+c|}{r_b+r_c} < 1, \frac{|a|}{r_a} \geq \frac{|b+c|}{r_b+r_c},$$
$$r_a, (r_b+r_c) > 0,\ a, r_a, (b+c), (r_b+r_c) \in \mathrm{R}\}.$$

Розглянемо за яких умов пара інтервалів A та $B+C$ буде належати до підмножини $I_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n=1,2,3$, з тим же значенням n, що і пари інтервалів: $A, B \in I_n^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C \in I_n^{(A,C)}(\mathrm{R})$. З цією метою доведемо таку лему.

Лема 3.1. Нехай

$$A, B \in I_n^{(A,B)}(\mathrm{R}),\ A, C \in I_n^{(A,C)}(\mathrm{R}),$$

тоді $A, B+C \in I_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n=1,2,3$, якщо $bc \geq 0$, де b, c – центри інтервалів B, C відповідно.

Доведення. Нехай $A, B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$. Доведемо, що $A, B+C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$ при $bc \geq 0$. Використовуючи формулу (3.7) визначимо суму $B+C$:

$$B + C = \langle b, r_b\rangle + \langle c, r_c\rangle = \langle b+c, r_b + r_c\rangle.$$

Оскільки $A, B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, то

$$\frac{|a|}{r_a} \geq 1,\ \frac{|b|}{r_b} \geq 1,$$
$$\frac{|a|}{r_a} \geq 1,\ \frac{|c|}{r_c} \geq 1.$$

Запишемо нерівності $\dfrac{|b|}{r_b} \geq 1$, $\dfrac{|c|}{r_c} \geq 1$ у вигляді $|b| \geq r_b$, $|c| \geq r_c$ та просумуємо їх:

$$|b| + |c| \geq r_b + r_c$$

або

$$\frac{|b|+|c|}{r_b+r_c}\geq 1. \tag{3.36}$$

Якщо $A, B+C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, то

$$\frac{|a|}{r_a}\geq 1,\ \ \frac{|b+c|}{r_b+r_c}\geq 1. \tag{3.37}$$

Відомо, що $|b|+|c|\geq|b+c|$, причому рівність виконується тільки у випадку $bc\geq 0$. Враховуючи цей факт та порівнюючи умови (3.36) і (3.37) можна зробити висновок про належність інтервалів $A, B+C$ до підмножини $I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, як і пар інтервалів: $A, B\in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$, $A, C\in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$ за умови однакових знаків центрів $bc\geq 0$ інтервалів B, C.

Доведення інших випадків проводиться аналогічно.

Лема доведена.

Теорема 3.6. Нехай

$$A, B\in I_n^{(A,B)}(\mathrm{R}),\ A, C\in I_n^{(A,C)}(\mathrm{R}),\ n=1,2,3$$

тоді для виконання закону дистрибутивності

$$A(B+C)=AB+AC$$

необхідно та достатньо, щоб $A, B+C\in I_n^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, $n=1,2,3$.

Доведення. *Необхідність.* Розглянемо такі випадки:

1. $A, B\in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A, C\in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а $A, B+C\in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.
2. $A, B\in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ та $A, C\in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$, а $A, B+C\in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Випадок 1. Нехай

$$A,\ B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R}) \text{ та } A, C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R}), \text{ а } A, B+C \in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R}),$$

тоді за формулою (3.11) маємо

$$AB = \langle ab + \mathrm{sgn}(ab)\, r_a r_b, |a| r_b + |b| r_a \rangle,$$
$$AC = \langle ac + \mathrm{sgn}(ac)\, r_a r_c, |a| r_c + |c| r_a \rangle.$$

Суму $AB + AC$ визначимо згідно з (3.7):

$$AB + AC =$$
$$\langle a(b+c) + \mathrm{sgn}(a(b+c))\, r_a (r_b + r_c), |a|(r_b + r_c) + (|b| + |c|) r_a \rangle. \quad (3.38)$$

Оскільки $A, B+C \in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (3.17):

$$A(B+C) \ = \langle \mathrm{sgn}(a)(b+c), (r_b + r_c) \rangle (|a| + r_a). \quad (3.39)$$

За означенням рівності двох інтервалів: інтервали $AB + AC$ і $A(B+C)$ дорівнюють один одному, якщо співпадають їх центри та радіуси.

З (3.38) та (3.39) випливає, що рівність

$$a(b+c) + \mathrm{sgn}(a(b+c))\, r_a (r_b + r_c) = a(b+c) + \mathrm{sgn}(a)(b+c) r_a$$

центрів інтервалів $AB + AC$ і $A(B+C)$ можлива тільки тоді, якщо виконується рівність

$$\frac{|b+c|}{r_b + r_c} = 1,$$

яка суперечить умові $A, B+C \in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Випадок 2. Нехай

$$A,\ B\in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R}) \text{ та } A,C\in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})\text{, а } A,B+C\in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R}),$$

тоді за формулою (3.11) для $A,\ B\in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R})$ маємо

$$AB=\langle ab+\mathrm{sgn}(ab)\,r_a r_b,\,|\,a\,|r_b+|\,b\,|r_a\rangle\,.$$

Добуток для інтервалів $A,C\in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$ обчислюємо за формулою (3.17):

$$AC\ =\ \langle \mathrm{sgn}(a)c,\ r_c\rangle(|\,a\,|+r_a)\,.$$

Суму $AB+AC$ визначимо згідно з (3.7):

$$AB+AC=$$
$$=\langle a(b+c)+\mathrm{sgn}(a)\,r_a\,(r_b\,\mathrm{sgn}\,b+c),\,|\,a\,|(r_b+r_c)+(|\,b\,|+r_c)\,r_a\rangle\,. \quad (3.40)$$

Так як $A,B+C\in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (3.11):

$$A(B+C)=$$
$$=\langle a(b+c)+\mathrm{sgn}(a(b+c))\,r_a\,(r_b+r_c),\,|\,a\,|(r_b+r_c)+|\,b+c\,|r_a\rangle\,. \quad (3.41)$$

З (3.40) та (3.41) випливає, що рівність

$$a(b+c)+\mathrm{sgn}(a)\,r_a\,(r_b\,\mathrm{sgn}\,b+c)=a(b+c)+\mathrm{sgn}(a(b+c))\,r_a\,(r_b+r_c)$$

центрів інтервалів $AB+AC$ і $A(B+C)$ можлива тільки тоді, якщо виконується рівність

$$\frac{|\,c\,|}{r_c}=1,$$

яка суперечить умові $A, C \in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R})$.

Інші можливі випадки доводяться аналогічно.

Достатність. Нехай

$$A,\ B \in I_1^{(A,B)}(\mathrm{R}) \text{ та } A, C \in I_1^{(A,C)}(\mathrm{R}),\quad A, B+C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$$

тоді за формулою (3.11) маємо

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab)\, r_a r_b\,,\ |\,a\,| r_b + |\,b\,| r_a \rangle,$$
$$AC = \langle ac + \operatorname{sgn}(ac)\, r_a r_c\,,\ |\,a\,| r_c + |\,c\,| r_a \rangle,$$

$$A(B+C) =$$
$$= \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a (r_b + r_c),\ |\,a\,|(r_b + r_c) + |\,b+c\,| r_a \rangle, \quad (3.42)$$

Згідно з (3.7) визначимо суму $AB + AC$:

$$AB + AC =$$
$$= \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a (r_b + r_c),\ |\,a\,|(r_b + r_c) + (|\,b\,| + |\,c\,|) r_a \rangle. \quad (3.43)$$

Оскільки, за лемою, $A,\ B + C \in I_1^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$ при $bc \geq 0$, то $|\,b\,| + |\,c\,| = |\,b + c\,|$, тому вираз (3.43) набуває вигляду

$$AB + AC =$$
$$= \langle a(b+c) + \operatorname{sgn}(a(b+c))\, r_a (r_b + r_c),\ |\,a\,|(r_b + r_c) + (|\,b+c\,|) r_a \rangle. \quad (3.44)$$

З порівняння виразів (3.42) та (3.44) випливає, що має місце рівність

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Аналогічно проводиться доведення в інших випадках:

$$A,\ B \in I_2^{(A,B)}(\mathrm{R}) \text{ та } A, C \in I_2^{(A,C)}(\mathrm{R}),\ \ A, B+C \in I_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R}),$$
$$A,\ B \in I_3^{(A,B)}(\mathrm{R}) \text{ та } A, C \in I_3^{(A,C)}(\mathrm{R}),\ \ A, B+C \in I_3^{(A,B+C)}(\mathrm{R}).$$

Теорема доведена.

Приклад 3.9. Визначимо чи виконується закон дистрибутивності для інтервалів $A = \langle 1,5 \rangle$, $B = \langle 1,2 \rangle$, $C = \langle 2,3 \rangle$.

Знайдемо суму інтервалів $B = \langle 1,2 \rangle$, $C = \langle 2,3 \rangle$:

$$B + C = \langle 1+2,\ 2+3 \rangle = \langle 3,5 \rangle$$

та визначимо до якої з підмножин $I_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $n = 1,2,3$ належить кожна пара інтервалів.

Для $A = \langle 1,5 \rangle$, $B = \langle 1,2 \rangle$:

$$\frac{|a|}{r_a} = \frac{1}{5} < 1, \quad \frac{|b|}{r_b} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|a|}{r_a} < \frac{|b|}{r_b},$$

тобто $A,\ B \in I_2^{(A,B)}(\mathrm{R})$.

Для $A = \langle 1,5 \rangle$, $C = \langle 2,3 \rangle$:

$$\frac{|a|}{r_a} = \frac{1}{5} < 1,\ \frac{|c|}{r_c} = \frac{2}{3},\ \frac{|a|}{r_a} < \frac{|c|}{r_c},$$

тобто $A, C \in I_2^{(A,C)}(\mathrm{R})$.

Для $A = \langle 1,5 \rangle$, $B + C = \langle 3,5 \rangle$:

$$\frac{|a|}{r_a} = \frac{1}{5} < 1,\ \frac{|b+c|}{r_b + r_c} = \frac{3}{5},\ \frac{|a|}{r_a} < \frac{|b+c|}{r_b + r_c},$$

тобто $A,\ B + C \in I_2^{(A,B+C)}(\mathrm{R})$.

Так як всі пари інтервалів належать до підмножини з номером 2, то згідно з теоремою виконується закон дистрибутивності. Перевіримо це. Множення інтервалів виконуємо за формулою (3.13).

$$AB = \langle 1,\ 5\rangle(1+2) = \langle 3,\ 15\rangle,$$

$$AC = \langle 1,\ 5\rangle(2+3) = \langle 5,\ 25\rangle,$$

$$A(B+C) = \langle 1,\ 5\rangle(3+5) = \langle 8,\ 40\rangle, \tag{3.45}$$

$$AB + AC = \langle 3,\ 15\rangle + \langle 5,\ 25\rangle = \langle 8,\ 40\rangle. \tag{3.46}$$

З порівняння виразів (3.45) та (3.46) випливає, що закон дистрибутивності виконується.

Таким чином, доведені необхідні та достатні умови, що забезпечують виконання закону дистрибутивності для інтервалів, що належать до однієї з підмножин $I_n^{(X,Y)}(\mathrm{R})$, $n = 1,2,3$.

Отримані результати можуть бути узагальнені наступним чином [25, 26].

Лема 3.2. Нехай $A_i, C \in I_n^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i = \overline{1,k}$, $n = 1,2,3$, тоді $\sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_n^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R})$, якщо центри a_i інтервалів A_i одного знаку.

Доведення. Розглянемо випадок $n = 1$: $A_i, C \in I_1^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i = \overline{1,k}$. Доведемо, що $\sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_1^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R})$ при $\sum_{i=1}^{k} |a_i| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|$. За формулою (3.7) визначимо $\sum_{i=1}^{k} A_i$:

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \langle a_1, r_{a_1}\rangle + \langle a_2, r_{a_2}\rangle + \ldots + \langle a_k, r_{a_k}\rangle =$$

$$= \langle a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ r_{a_1} + r_{a_2} + \ldots + r_{a_k}\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \right\rangle.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_1^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R})$, то

$$\frac{|c|}{r_c} \geq 1, \quad \frac{\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|}{\sum_{i=1}^{k} r_{a_i}} \geq 1. \tag{3.47}$$

Запишемо нерівності $\frac{|a_i|}{r_{a_i}} \geq 1$ у вигляді $|a_i| \geq r_{a_i}$ та просумуємо їх:

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i| \geq \sum_{i=1}^{k} r_{a_i}$$

або

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i|}{\sum_{i=1}^{n} r_{a_i}} \geq 1. \tag{3.48}$$

Відомо, що $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \geq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|$, причому рівність виконується тільки у випадку однакових знаків центрів інтервалів A_i. Враховуючи цей факт та порівнюючи умови (3.47) і (3.48) можна зробити висновок, що $\sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_1^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R})$, $A_i, C \in I_1^{(A_i, C)}(\mathrm{R})$ за умови однакових знаків центрів a_i інтервалів A_i, $i = \overline{1,k}$.

Доведення випадків для $n = 2$ і $n = 3$ проводиться аналогічно. Лема доведена.

Теорема 3.7. Нехай для $A_i, C \in I_n^{(A_i, C)}(\mathrm{R})$, $i = \overline{1,k}$, тоді для виконання узагальненого закону дистрибутивності

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) C = \sum_{i=1}^{n} A_i C$$

необхідно та достатньо, щоб $\sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_n^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R})$.

Доведення. *Необхідність.* Розглянемо випадок, коли

$$A_i, C \in I_1^{(A_i, C)}(\mathrm{R}), \quad \text{а} \quad \sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_3^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R}),\ i = \overline{1,k}.$$

Тоді за формулою (3.11) маємо

$$A_i C = \langle a_i c + \operatorname{sgn}(a_i c)\, r_{a_i} r_c, |a_i| r_c + |c| r_{a_i} \rangle,$$

$$\sum_{i=1}^{k} A_i C =$$

$$= \langle \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) c + r_c \operatorname{sgn} c \left(\sum_{i=1}^{n} r_{a_i} \operatorname{sgn} a_i\right),\ r_c \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |c| \sum_{i=1}^{n} r_{a_i} \rangle. \quad (3.49)$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_3^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R})$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (3.17):

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C = (|c| + r_c) \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \operatorname{sgn} c, \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \right\rangle. \quad (3.50)$$

За означенням рівності двох інтервалів: інтервали $\sum_{i=1}^{k} A_i C$ і $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C$ дорівнюють один одному, якщо співпадають їх центри та радіуси.

Розглянемо радіуси інтервалів $\sum_{i=1}^{k} A_i C$ і $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C$ та визначимо за яких умов можлива їх рівність.

З (3.49) та (3.50) випливає, що рівність

$$r_c \sum_{i=1}^{k} |a_i| + |c| \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} = (|c| + r_c) \sum_{i=1}^{k} r_{a_i}$$

радіусів інтервалів $\sum_{i=1}^{k} A_i C$ і $\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) C$ можлива тільки тоді, якщо виконується рівність

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} |a_i|}{\sum_{i=1}^{k} r_{a_i}} = 1,$$

яка суперечить умові $\sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_3^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R})$.

Інші можливі випадки доводяться аналогічно.

Достатність. Нехай

$$A_i, C \in I_1^{(A_i, C)}(\mathrm{R}), \quad \sum_{i=1}^{k} A_i, C \in I_1^{(\sum_{i=1}^{k} A_i, C)}(\mathrm{R}), \quad i = \overline{1,k},$$

тоді за формулою (3.11) маємо

$$A_i C = \langle a_i c + \operatorname{sgn}(a_i c)\, r_{a_i} r_c, |a_i| r_c + |c| r_{a_i} \rangle, \ i = \overline{1,k},$$

$$\sum_{i=1}^{k} A_i C = \langle \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) c + r_c \operatorname{sgn} c \left(\sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \operatorname{sgn} a_i\right), \ r_c \sum_{i=1}^{k} |a_i| + |c| \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \rangle, \tag{3.51}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)C = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)c + r_c \operatorname{sgn} c \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right),\ \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| r_c + |c| \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \right\rangle . \tag{3.52}$$

За лемою 2 $A_i, C \in I_1^{(A_i,C)}(\mathrm{R})$, $i = \overline{1,k}$ при всіх $a_i \geq 0$ або $a_i < 0$. Звідси випливає справедливість таких рівностей

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| = \sum_{i=1}^{k} | a_i |, \tag{3.53}$$

$$\sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} r_{a_i} \operatorname{sgn} a_i . \tag{3.54}$$

Таким чином, з порівняння (3.51) і (3.50) та приймаючи до уваги (3.53) і (3.54) маємо

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)C = \sum_{i=1}^{k} A_i C .$$

Аналогічним чином проводиться доведення в інших можливих випадках.

Теорема доведена.

РОЗДІЛ 4

СУБОПТИМАЛЬНІ МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ КОЛЕКТИВНИХ РІШЕНЬ ТА ОЦІНЮВАННЯ КВАЛІФІКАЦІЇ ЕКСПЕРТІВ

Розглянуті в розділі 2 формальні моделі припускають повні апріорні знання про імовірнісні характеристики $P(V_k)$, $k=\overline{1,M}$ і $P(\delta_i = m \mid V_k)$, $m=\overline{1,M}$, $\overline{i=1,N}$, які далеко не завжди відомі при розв'язуванні практичних задач. Водночас оцінки зазначених характеристик можуть бути отримані на основі попередніх експериментів.

Нехай є експериментальна вибірка, яка містить скінчений обсяг n спостережень з заздалегідь відомими станами об'єкта. Тоді імовірності $P(V_k)$ і $P(\delta_i = m \mid V_k)$ можна оцінити частотами відповідних подій:

$$P^*(V_k) = \frac{n_k}{n}\ ,\ \ k=\overline{1,M}$$

і

$$P^*(\delta_i = m \mid V_k) = \frac{n_{mk}^{(i)}}{n_k},\ i=\overline{1,N},\ m=\overline{1,M},\ k=\overline{1,M},$$

де n_k – число спостережень, коли об'єкт знаходився у стані V_k $(\sum_{k=1}^{M} n_k = n)$, а $n_{mk}^{(i)}$ – число випадків, коли i-й експерт прийняв особисте рішення на користь стану об'єкта V_m, $m = \overline{1,M}$ при заздалегідь відомому знаходженні об'єкту у стані V_k, $k = \overline{1,M}$.

Ясно, що заміна імовірностей $P(V_k)$ і $P(\delta_i = m \,|\, V_k)$ точковими оцінками $P^*(V_k)$ і $P^*(\delta_i = m \,|\, V_k)$ правомірна лише при $n \to \infty$. Тому для розв'язання практичних задач представляє інтерес дослідження, спрямоване на узагальнення отриманих результатів на випадки, коли замість точкових значень імовірностей $P(V_k)$ і $P(\delta_i = m \,|\, V_k)$ використовуються їх довірчі інтервали $\mathbf{I}_{V_k} = \left\langle P_{V_k}^c, r_{V_k} \right\rangle$, $\mathbf{I}^{(i)} = \left\langle P^{c(i)}, r^{(i)} \right\rangle$, центри і радіуси яких при заданій довірчої імовірності β можна обчислити за оціненими частотами відповідних подій з урахуванням об'єму експериментальних даних.

З теорії імовірності відомо, що частота P^* випадкової події, яка обчислена на вибірці об'ємом n, з довірчою імовірністю β визначає довірчий інтервал $\mathbf{I}$ для імовірності P, який можна записати у формі центр-радіус

$$\mathbf{I} = \left\langle P^c, r \right\rangle, \tag{4.1}$$

де

$$P^c = \frac{P^* + t_\beta^2 \big/ 2n}{1 + t_\beta^2 \big/ n}, \tag{4.2}$$

$$r = \frac{t_\beta \sqrt{\dfrac{P^*(1-P^*)}{n} + \dfrac{t_\beta^2}{4n^2}}}{1 + t_\beta^2 \big/ n}, \tag{4.3}$$

де $t_\beta = \arg\Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right) > 0$, $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$ – функція нормального розподілу.

В подальших дослідженнях будуть використовуватись дві важливі властивості довірчих інтервалів (4.1), які безпосередньо випливають з (4.2), (4.3), а саме

$$\frac{P^c}{r} > 1\ , \qquad (4.4)$$

$$\frac{1-P^c}{r} > 1, \qquad (4.5)$$

де без втрати загальності вважається, що $r \neq 0$.

Дійсно, враховуючи (4.2), (4.3), запишемо нерівність (4.4) так

$$\frac{P^* + \frac{t_\beta^2}{2n}}{t_\beta\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2}}} > 1.$$

Після елементарних перетворень останнє співвідношення набуває вигляду $1 > -\frac{t_\beta^2}{n}$, і так як $t_\beta > 0$, $n > 0$, то умова (4.4) справедлива.

Оскільки нерівність (4.5) еквівалентна нерівності $P^c + r < 1$, то для доведення справедливості (4.5) достатньо показати виконання нерівності

$$\frac{P^* + \frac{t_\beta^2}{2n} + t_\beta\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2}}}{1 + \frac{t_\beta^2}{n}} < 1,$$

яка, після елементарних перетворень, зводиться до нерівності $-\frac{t_\beta^2}{n} < 1$, істинність якої очевидна, оскільки $t_\beta > 0$, $n > 0$, що доводить справедливість умови (4.5).

Для переходу від оптимальних моделей прийняття колективних рішень до їх інтервальних аналогів введемо означення.

Означення 4.1. Колективне рішення $\tilde{D} = m$, $m = \overline{1, M}$ будемо називати субоптимальним з точки зору критерію $\Im$, якщо $\tilde{D}$ забезпечує $\Im$ з заданою довірчою імовірністю.

4.1. Моделі прийняття колективних рішень за критерієм мінімуму середньої помилки

Розглянемо спочатку найбільш простий випадок, коли два експерти приймають незалежні рішення про один з двох випадкових станів об’єкта. В розділі 2 була побудована формальна модель (2.4), (2.5), що ґрунтується на точкових апріорних імовірностей стану об’єкта $P(V_k)$, $k = 1{,}2$ та імовірностей помилок експертів $P^{(i)}$, $i = 1{,}2$ та доведено, що така модель забезпечує мінімум середньої імовірності колективного рішення $D = m$, $m = 1, 2$ в ситуаціях $S_{m_1 m_2}$, $m_1 \neq m_2$ суперечливості особистих рішень експертів.

Нехай тепер замість точкових значень імовірностей $P^{(i)}$ маємо лише інформацію про частоти $P^{*(i)}$, $i = 1{,}2$ припущених експертами помилок на вибірці обмеженого об’єму з відомими станами об’єкта.

Поставимо задачу побудувати за такими неповними апріорними даними субоптимальну модель, що в умовах суперечності особистих рішень експертів з довірчою імовірністю буде оптимальною з точки зору критерію мінімуму середньої імовірності помилки колективного рішення [27].

З метою інтервального узагальнення точкової моделі (2.4), (2.5) прийняття колективного рішення введемо такі позначення

$$Z_{m_1 m_2} = P^{(m_2)}(1 - P^{(m_1)}), \quad m_1, m_2 = 1, 2,\ m_1 \neq m_2, \tag{4.6}$$

$$W_{m_1 m_2} = \lambda P^{(m_1)}(1 - P^{(m_2)}), \quad m_1, m_2 = 1, 2,\ m_1 \neq m_2, \tag{4.7}$$

де $\lambda = \dfrac{P(V_2)}{P(V_1)}$.

Перейдемо від точкових значень (4.6), (4.7) до їх інтервальних аналогів

$$\mathbf{Z}_{m_1 m_2} = \mathbf{I}_{m_2}(1 - \mathbf{I}_{m_1}), \tag{4.8}$$

$$\mathbf{W}_{m_1 m_2} = \lambda \mathbf{I}_{m_1}(1 - \mathbf{I}_{m_2}), \tag{4.9}$$

де $\mathbf{I}_{m_1}, \mathbf{I}_{m_2}$ – довірчі інтервали імовірностей $P^{(m_1)}, P^{(m_2)}$ відповідно.

Враховуючи умови (4.4), (4.5), застосуємо інтервальні арифметичні операції (3.18) для інтервалів $\mathbf{I}_{m_1}, \mathbf{I}_{m_2}$, що фігурують у (4.8), (4.9). В результаті маємо

$$\mathbf{Z}_{m_1 m_2} = \langle Z^c_{m_1 m_2}, r_{Z_{m_1 m_2}} \rangle = \langle P^{c(m_2)}, r^{(m_2)} \rangle (1 - \langle P^{c(m_1)}, r^{(m_1)} \rangle) =$$

$$= \langle P^{c(m_2)}, r^{(m_2)} \rangle \langle 1 - P^{c(m_1)}, r^{(m_1)} \rangle =$$

$$= \langle P^{c(m_2)}(1 - P^{c(m_1)}) + r^{(m_1)} r^{(m_2)}, P^{c(m_2)} r^{(m_1)} + r^{(m_2)}(1 - P^{c(m_1)}) \rangle, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{W}_{m_1 m_2} = \langle W^c_{m_1 m_2}, r_{W_{m_1 m_2}} \rangle = \lambda \langle P^{c(m_1)}, r^{(m_1)} \rangle (1 - \langle P^{c(m_2)}, r^{(m_2)} \rangle) =$$

$$=\lambda\langle P^{c(m_1)}, r^{(m_1)}\rangle\langle 1-P^{c(m_2)}, r^{(m_2)}\rangle =$$

$$=\lambda\langle P^{c(m_1)}(1-P^{c(m_2)})+r^{(m_1)}r^{(m_2)}, P^{c(m_1)}r^{(m_2)}+r^{(m_1)}(1-P^{c(m_2)})\rangle. \quad (4.11)$$

Згідно з умовами (2.4), (2.5) оптимальне колективне рішення повинно прийматися на основі порівняння точкових величин $Z_{m_1m_2}$ і $W_{m_1m_2}$. Очевидно, що будь-яке значення $Z_{m_1m_2} \in \mathbf{Z}_{m_1m_2}$ буде більше (або менше) будь-якого значення $W_{m_1m_2} \in \mathbf{W}_{m_1m_2}$, якщо інтервали $\mathbf{Z}_{m_1m_2} = \left\langle Z^c_{m_1m_2}, r_{Z_{m_1m_2}} \right\rangle$, $\mathbf{W}_{m_1m_2} = \left\langle W^c_{m_1m_2}, r_{W_{m_1m_2}} \right\rangle$ не перетинаються, тобто

$$Z^c_{m_1m_2} - r_{Z_{m_1m_2}} > W^c_{m_1m_2} + r_{W_{m_1m_2}}, \quad (4.12)$$

або

$$Z^c_{m_1m_2} + r_{Z_{m_1m_2}} < W^c_{m_1m_2} - r_{W_{m_1m_2}}. \quad (4.13)$$

Умову (4.12), з урахуванням (4.10), (4.11), можна представити у вигляді

$$P^{c^{(m_2)}}(1-P^{c^{(m_1)}})+r^{(m_1)}r^{(m_2)}-P^{c^{(m_2)}}r^{(m_1)}-r^{(m_2)}(1-P^{c^{(m_1)}})>$$

$$>\lambda(P^{c^{(m_1)}}(1-P^{c^{(m_2)}})+r^{(m_1)}r^{(m_2)}+P^{c^{(m_1)}}r^{(m_2)}+r^{(m_1)}(1-P^{c^{(m_2)}})),$$

звідси, в результаті елементарних перетворень, маємо

$$(P^{c(m_2)}-r^{(m_2)})(1-P^{c(m_1)}-r^{(m_1)})>\lambda(P^{c(m_1)}+r^{(m_1)})(1-P^{c(m_2)}+r^{(m_2)}), \quad (4.14)$$

а умова (4.13) з урахуванням (4.10), (4.11) може бути записана так

$$(P^{c(m_2)}+r^{(m_2)})(1-P^{c(m_1)}+r^{(m_1)})<\lambda(P^{c(m_1)}-r^{(m_1)})(1-P^{c(m_2)}-r^{(m_2)}).$$
(4.15)

Ґрунтуючись на означенні 4.1, покажемо [27, 59, 60], що умови (4.14), (4.15) забезпечують субоптимальність моделі прийняття колективних рішень в умовах ризику, коли точкові значення імовірностей $P^{(i)}$, $i=1,2$ помилок експертів невідомі, а відомі лише частоти $P^{*(i)}(n)$ допущених помилок кожним з експертів на вибірці скінченого об'єму з відомими станами об'єкту.

Теорема 4.1. Колективне рішення $\widetilde{D}=m$, $m=1,2$ є субоптимальним з точки зору критерію мінімуму середньої імовірності помилки на множині можливих ситуацій (2.3), якщо в ситуаціях $S_{m_1 m_2}$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 = 1,2$ приймати остаточне рішення $\widetilde{D}=1$ на користь V_1 при виконанні умови (4.14), та рішення $\widetilde{D}=2$ на користь V_2 при виконанні умови (4.15).

Доведення. Розглянемо ситуацію $S_{m_1 m_2}$ при $m_1=1$, $m_2=2$ та покажемо, що при виконанні умови (4.14) з довірчою імовірністю β^2 гарантовано виконується умова оптимальності (2.4).

Оскільки точкові значення імовірностей $P^{(i)}$, $i=1,2$ з довірчою імовірністю β належать відповідним довірчим інтервалам

$$P^{(1)} \in \langle P^{c^{(1)}}, r^{(1)} \rangle, \quad P^{(2)} \in \langle P^{c^{(2)}}, r^{(2)} \rangle,$$

то $1-P^{(1)} \in \langle 1-P^{c^{(1)}}, r^{(1)} \rangle$ і $1-P^{(2)} \in \langle 1-P^{c^{(2)}}, r^{(2)} \rangle$. Отже, з довірчою імовірністю β справедливі нерівності

$$P^{c^{(1)}} - r^{(1)} \leq P^{(1)} \leq P^{c^{(1)}} + r^{(1)}, \tag{4.16}$$

$$P^{c^{(2)}} - r^{(2)} \leq P^{(2)} \leq P^{c^{(2)}} + r^{(2)}, \tag{4.17}$$

$$1-P^{c^{(1)}} - r^{(1)} \leq 1-P^{(1)} \leq 1-P^{c^{(1)}} + r^{(1)}, \tag{4.18}$$

$$1-P^{c^{(2)}} - r^{(2)} \leq 1-P^{(2)} \leq 1-P^{c^{(2)}} + r^{(2)}. \tag{4.19}$$

З нерівностей (4.17) і (4.18) безпосередньо випливає, що з довірчою імовірністю β^2 справедлива нерівність

$$(1-P^{(1)})P^{(2)} \geq (1-P^{c(1)}-r^{(1)})(P^{c(2)}-r^{(2)}), \qquad (4.20)$$

а з нерівностей (4.16) і (4.17) з урахуванням значення $\lambda > 0$ випливає

$$\lambda(1-P^{(2)})P^{(1)} \leq \lambda(P^{c(1)}+r^{(1)})(1-P^{c(2)}+r^{(2)}), \qquad (4.21)$$

Нехай виконується умова (4.14). Тоді, ґрунтуючись на (4.20), (4.21), маємо

$$(1-P^{(1)})P^{(2)} \geq (1-P^{c(1)}-r^{(1)})(P^{c(2)}-r^{(2)}) >$$
$$> \lambda(P^{c(1)}+r^{(1)})(1-P^{c(2)}+r^{(2)}) \geq \lambda(1-P^{(2)})P^{(1)}.$$

Отже, якщо в ситуації S_{12} суперечності особистих рішень експертів приймати рішення на користь V_1 при виконанні умови (4.14), то з імовірністю β^2 буде виконуватись і умова (2.4), яка згідно з лемою 2.1 гарантує оптимальність колективного рішення з точки зору критерію мінімуму середньої імовірності помилки. Аналогічно доводиться справедливість умови (4.14) і в ситуації S_{21}.

Справедливість умови (4.15) доводиться аналогічним чином.

Теорема доведена.

Теорема 4.1 доведена на випадок, коли інтервали $\mathbf{Z}_{m_1m_2} = \left\langle Z^c_{m_1m_2}, r_{Z_{m_1m_2}} \right\rangle$ і $\mathbf{W}_{m_1m_2} = \left\langle W^c_{m_1m_2}, r_{W_{m_1m_2}} \right\rangle$ не перетинаються. Проте ситуація протиріччя індивідуальних рішень експертів залишиться невирішеною при перетині інтервалів $\mathbf{Z}_{m_1m_2}$ і $\mathbf{W}_{m_1m_2}$, тобто не виконується жодна з умов теореми 4.1. Зауважимо, що інтервали $\mathbf{Z}_{m_1 m_2}$ і $\mathbf{W}_{m_1 m_2}$ можуть перетинатися навіть у тому випадку, коли не перетинаються довірчі інтервали $\mathbf{I}_{m_1}$ і $\mathbf{I}_{m_2}$.

На рис. 4.1 наведено приклади областей колективного рішення згідно з умовами (4.14), (4.15) при оцінці стану об’єкта з апріорними імовірностями $P(V_1) = 0{,}8$ і $P(V_2) = 0{,}2$ в ситуації S_{12} протиріччя особистих рішень експертів. Сірим кольором виділені області значень частот особистих помилок експертів, при яких ситуація протиріччя не може бути вирішена через перетин інтервалів $\mathbf{Z}_{m_1 m_2}$ і $\mathbf{W}_{m_1 m_2}$. Легко бачити, що область невизначеності (виділена сірим кольором на рис. 4.1) зменшується з ростом об’єму n експериментальної вибірки і збільшується з ростом довірчої імовірності β.

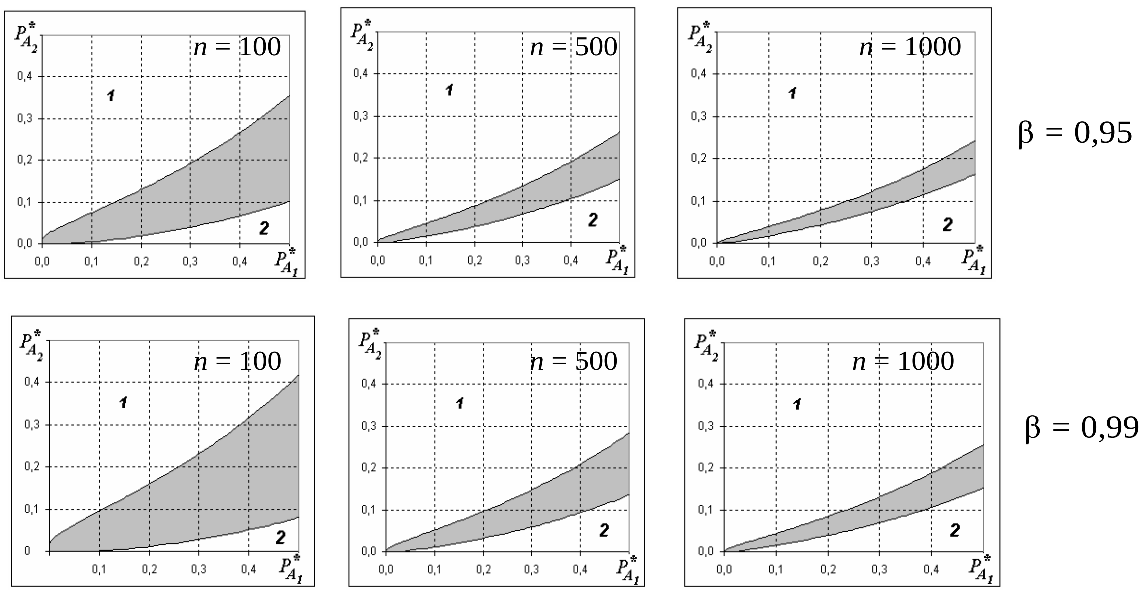

Рис.4.1. Області колективного рішення в ситуації S_{12} при $\lambda = 0{,}25$:
область 1 – колективне рішення на користь стану V_1;
область 2 – колективне рішення на користь стану V_2.

Для розв’язання прикладних задач представляє інтерес визначення формальних умов, які накладаються на об’єм n експериментальної вибірки для оцінки кваліфікацій експертів з метою подальшого вирішення ситуацій протиріч їх особистих рішень згідно з моделлю (4.14), (4.15).

Для визначення цих умов необхідно провести дослідження монотонності допоміжних функцій – результату арифметичних операцій над довірчими інтервалами $\mathbf{I}_{m_1}$ і $\mathbf{I}_{m_2}$.

Лема 4.1. Функції

$$f_1(n) = P^c(n) - r(n), \tag{4.22}$$

$$f_2(n) = 1 - P^c(n) - r(n), \tag{4.23}$$

строго монотонно зростають з ростом n, а функції

$$f_3(n) = P^c(n) + r(n), \tag{4.24}$$

$$f_4(n) = 1 - P^c(n) + r(n), \tag{4.25}$$

строго монотонно спадають з ростом n.

Доведення. Використовуючи співвідношення (4.2), (4.3), розглянемо $f_1(n)$ як функцію від неперервного аргументу n. Покажемо, що перша похідна функції $f_1(n)$ додатна при будь-якому $n > 0$, тобто

$$f_1^{'}(n) = (P^c - r)' = \frac{t_\beta^2}{2n^2}\left(\frac{P^*(1-P^*) + \dfrac{t_\beta^2}{2n}}{t_\beta\sqrt{\dfrac{P^*(1-P^*)}{n} + \dfrac{t_\beta^2}{4n^2}}} - 1\right) > 0.$$

Так як $\dfrac{t_\beta^2}{2n^2} > 0$, то монотонність функції $f_1(n)$ доводить виконання нерівності

$$\frac{P^*(1-P^*)+\dfrac{t_\beta^2}{2n}}{t_\beta\sqrt{\dfrac{P^*(1-P^*)}{n}+\dfrac{t_\beta^2}{4n^2}}}-1>0.$$

Звідси маємо

$$P^*(1-P^*)+\frac{t_\beta^2}{2n}>t_\beta\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{n}+\frac{t_\beta^2}{4n^2}}.$$

Оскільки обидві частини останньої нерівності додатні, то вона еквівалентна нерівності

$$\left(P^*(1-P^*)+\frac{t_\beta^2}{2n}\right)^2>\left(t_\beta\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{n}+\frac{t_\beta^2}{4n^2}}\right)^2,$$

яка після елементарних перетворень набуває вигляду

$$(P^*(1-P^*))^2+\frac{t_\beta^2}{n}P^*(1-P^*)+\frac{t_\beta^2}{4n^2}>\frac{t_\beta^2}{n}P^*(1-P^*)+\frac{t_\beta^4}{4n^2}.$$

В результаті приходимо до нерівності $(P^*(1-P^*))^2>0$, справедливість якої доводить, що функція $f_1(n)$ строго монотонно зростає для будь-якого $n>0$.

Аналогічно можна показати, що функція $f_2(n)$ строго монотонно зростає, а функції $f_3(n)$, $f_4(n)$ строго монотонно спадають за будь-яких неперервних $n>0$. Очевидно, що твердження леми залишаються справедливими і при дискретних значеннях $n>1$.

Лема доведена.

Теорема 4.2. $\exists n_0>0$, що $\forall P(V_i)$, $\forall\beta$ після оцінки частот особистих помилок $P^{*(i)}(n)$ експертів за вибіркою об'ємом $n>n_0$ з заздалегідь відомими станами об'єкта може бути реалізована субоптимальна модель колективних рішень за умовами теореми 4.1.

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що незалежно від значень $P(V_i)$ і β при будь-яких $P^{*(i)}(n)$, $i=1,2$ завжди можливе вирішення ситуацій $S_{m_1m_2}$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 = 1,2$ при збільшенні кількості випробувань, що забезпечує звуження довірчих інтервалів (4.1).

Нехай при деякому значенні $n = n^*$ отримані оцінки $P^{*(i)}(n)$ такі, що для заданих значень $P(V_i)$ і β інтервали $\mathbf{Z}_{m_1m_2}$ і $\mathbf{W}_{m_1m_2}$ перетинаються, тобто

$$Z^c_{m_1m_2}(n) - r_{Z_{m_1m_2}}(n) < W^c_{m_1m_2}(n) + r_{W_{m_1m_2}}(n), \tag{4.26}$$

та

$$Z^c_{m_1m_2}(n) + r_{Z_{m_1m_2}}(n) > W^c_{m_1m_2}(n) - r_{W_{m_1m_2}}(n). \tag{4.27}$$

Зрозуміло, що в такому випадку вирішити конфліктну ситуацію S_{12} неможливо, так як жодна з умов (4.14) і (4.15) не буде виконуватись.

Згідно зі співвідношеннями (4.4), (4.5) функції $P^{c^{(m_2)}}(n) - r^{(m_2)}(n)$ і $1 - P^{c^{(m_1)}}(n) - r^{(m_1)}(n)$ додатні. Оскільки у відповідності з лемою 4.1 при збільшенні n додатні функції $P^{c^{(m_2)}}(n) - r^{(m_2)}(n)$ і $1 - P^{c^{(m_1)}}(n) - r^{(m_1)}(n)$ строго монотонно зростають, то буде зростати і функція

$$Z^c_{m_1m_2}(n) - r_{Z_{m_1m_2}}(n) = (P^{c^{(m_2)}}(n) - r^{(m_2)}(n))(1 - P^{c^{(m_1)}}(n) - r^{(m_1)}(n)). \tag{4.28}$$

З іншого боку, відповідно до леми 4.1 додатні функції $P^{c^{(m_2)}}(n) + r^{(m_2)}(n)$ і $1 - P^{c^{(m_1)}}(n) + r^{(m_1)}(n)$ строго монотонно спадають при збільшенні n, а $\lambda > 0$. Тому зі зростанням n функція

$$W^{c}_{m_1m_2}(n)+r_{W_{m_1m_2}}(n)=\ \lambda\,(P^{c^{(2)}}(n)+r^{(2)}(n))(1-P^{c^{(1)}}(n)+r^{(1)}(n)) \tag{4.29}$$

буде строго монотонно спадати.

Аналогічно доводиться, що функція

$$Z^{c}_{m_1m_2}(n)+r_{Z_{m_1m_2}}(n)=\ (P^{c^{(m_2)}}(n)+r^{(m_2)}(n))(1-P^{c^{(m_1)}}(n)+r^{(m_1)}(n)) \tag{4.30}$$

строго монотонно спадає, а функція

$$W^{c}_{m_1m_2}(n)-r_{W_{m_1m_2}}(n)=\ \lambda\,(P^{c^{(2)}}(n)-r^{(2)}(n))(1-P^{c^{(1)}}(n)-r^{(1)}(n)) \tag{4.31}$$

строго монотонно зростає.

Визначимо границі функцій, які визначають центри та радіуси інтервалів

$$\mathbf{Z}_{m_1m_2}=\left\langle Z^{c}_{m_1m_2}(n), r_{Z_{m_1m_2}}(n)\right\rangle, \qquad \mathbf{W}_{m_1m_2}=\left\langle W^{c}_{m_1m_2}(n), r_{W_{m_1m_2}}(n)\right\rangle$$

при $n\to\infty$.

Згідно з (4.10), (4.11) та з урахуванням (4.2), (4.3) маємо

$$\lim_{n\to\infty} Z^{c}_{m_1m_2}(n)=\lim_{n\to\infty}(P^{c^{(m_2)}}(1-P^{c^{(m_1)}})+r^{(m_1)}r^{(m_2)})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{P^{*^{(m_2)}}+\dfrac{t_\beta^2}{2n}}{1+\dfrac{t_\beta^2}{n}}\left(1-\frac{P^{*^{(m_1)}}+\dfrac{t_\beta^2}{2n}}{1+\dfrac{t_\beta^2}{n}}\right)+\right.$$

$$\left. + \frac{t_\beta^2 \sqrt{\left(\frac{P^{*(m_1)}(1-P^{*(m_1)})}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2} \right)\left(\frac{P^{*(m_2)}(1-P^{*(m_2)})}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2} \right)}}{1+\frac{t_\beta^2}{n}} \right) =$$

$$= P^{*(m_2)}(1-P^{*(m_1)}).$$

Також маємо

$$\lim_{n\to\infty} r_{Z_{m_1m_2}}(n) = \lim_{n\to\infty}(P^{c(m_2)}r^{(m_1)} + r^{(m_2)}(1-P^{c(m_1)})) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(P^{*(m_2)} + \frac{t_\beta^2}{2n}\right) t_\beta \sqrt{\left(\frac{P^{*(m_1)}(1-P^{*(m_1)})}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2} \right)}}{1+\frac{t_\beta^2}{n}} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{P^{*(m_1)} + \frac{t_\beta^2}{2n}}{1+\frac{t_\beta^2}{n}} \right) \frac{t_\beta \sqrt{\left(\frac{P^{*(m_2)}(1-P^{*(m_2)})}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2} \right)}}{1+\frac{t_\beta^2}{n}} \right) = 0$$

Отже, при $n\to\infty$ центр інтервалу $\mathbf{Z}_{m_1m_2}$ прямує до значення

$$\lim_{n\to\infty} Z^c_{m_1m_2}(n) = P^{*(m_2)}(1-P^{*(m_1)}), \tag{4.32}$$

а радіус інтервалу $\mathbf{Z}_{m_1m_2}$ прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} r_{Z_{m_1m_2}}(n) = 0. \tag{4.33}$$

Аналогічно визначаються граничні значення до яких при $n \to \infty$ прямують центр і радіус інтервалу $\mathbf{W}_{m_1 m_2} = \left\langle W^c_{m_1 m_2}, r_{W_{m_1 m_2}} \right\rangle$:

$$\lim_{n\to\infty} W^c_{m_1 m_2}(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(P^{c(m_1)}(1 - P^{c(m_2)}) + r^{(m_1)} r^{(m_2)}) =$$
$$= \lambda P^{*(m_1)}(1 - P^{*(m_2)}), \quad (4.34)$$

$$\lim_{n\to\infty} r_{W_{m_1 m_2}}(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(P^{c(m_1)} r^{(m_2)} + r^{(m_1)}(1 - P^{c(m_2)})) = 0. \quad (4.35)$$

Таким чином, при $n \to \infty$ інтервали $\mathbf{Z}_{m_1 m_2}$, $\mathbf{W}_{m_1 m_2}$ збігаються до відповідних точкових значень

$$P^{*(m_2)}(1 - P^{*(m_1)}),\ \lambda P^{*(m_1)}(1 - P^{*(m_2)}).$$

Залежно від значень $P^{*(m_2)}$, $P^{*(m_1)}$, λ може виконуватись одна з нерівностей:

$$P^{*(m_2)}(1 - P^{*(m_1)}) > \lambda P^{*(m_1)}(1 - P^{*(m_2)}), \quad (4.36)$$

$$P^{*(m_2)}(1 - P^{*(m_1)}) < \lambda P^{*(m_1)}(1 - P^{*(m_2)}). \quad (4.37)$$

Нехай виконується (4.36). Покажемо, що в такому випадку при збільшенні кількості спостережень n на деякому кроці порушується умова (4.26), тобто інтервали $\mathbf{Z}_{m_1 m_2}$, $\mathbf{W}_{m_1 m_2}$ не будуть перетинатися. Оскільки функція (4.28), що фігурує в лівій частині нерівності (4.26), строго монотонно зростає та прямує до $P^{*(m_2)}(1 - P^{*(m_1)})$, а функція (4.29), що фігурує в правій частині нерівності (4.26), строго монотонно спадає та прямує до $\lambda P^{*(m_1)}(1 - P^{*(m_2)})$, то завжди знайдеться таке значення $n_0 > n^*$, що

$$Z^c(n_0) - r_Z(n_0) = W^c(n_0) + r_W(n_0)\,, \tag{4.38}$$

а значить для $n > n_0$ буде виконуватись умова (4.14).

Тепер нехай виконується (4.37). Покажемо, що в такому випадку при $n \to \infty$ на деякому кроці порушується умова (4.27), тобто інтервали $\mathbf{Z}_{m_1 m_2}$, $\mathbf{W}_{m_1 m_2}$ не будуть перетинатися. Оскільки функція (4.31), що фігурує в правій частині нерівності (4.27), строго монотонно зростає та прямує до $\lambda P^{*(m_1)}(1 - P^{*(m_2)})$, а функція (4.30), що фігурує в лівій частині нерівності (4.27), строго монотонно спадає та прямує до $P^{*(m_2)}(1 - P^{*(m_1)})$, то завжди знайдеться таке значення $n_0 > n^*$, що

$$Z^c(n_0) + r_Z(n_0) = W^c(n_0) - r_W(n_0)\,, \tag{4.39}$$

а значить для $n > n_0$ буде виконуватись умова (4.15).

Теорема доведена.

Важливим для практики наслідком теореми 4.2 є можливість числової оцінки необхідного об'єму n експериментальної вибірки для вирішення ситуацій протиріччя особистих рішень експертів.

Наслідок 4.1. Субоптимальна модель колективних рішень за умовами теореми 4.2 може бути реалізована для довільних $P(V_i)$ і β, якщо оцінки частот помилок експертів $P^{*(i)}(n)$, $i = 1, 2$, отримано за експериментальною вибіркою об'ємом

$$n_0 = \left\lfloor t_\beta^2 \frac{\sqrt{\lambda}(P^{*(2)} + \sqrt{\lambda} P^{*(1)})(\sqrt{\lambda}(1 - P^{*(2)}) + (1 - P^{*(1)}))}{(P^{*(2)}(1 - P^{*(1)}) - \lambda P^{*(1)}(1 - P^{*(2)}))^2} + 1 \right\rfloor, \tag{4.40}$$

де $\lambda = [1 - P(V_1)] / P(V_1)$, а $[\eta]$ – ціла частина числа η.

Число n_0 отримано після алгебраїчних перетворень виразу, який визначає найбільший з коренів, що задовольняють рівнянням (4.38) і (4.39).

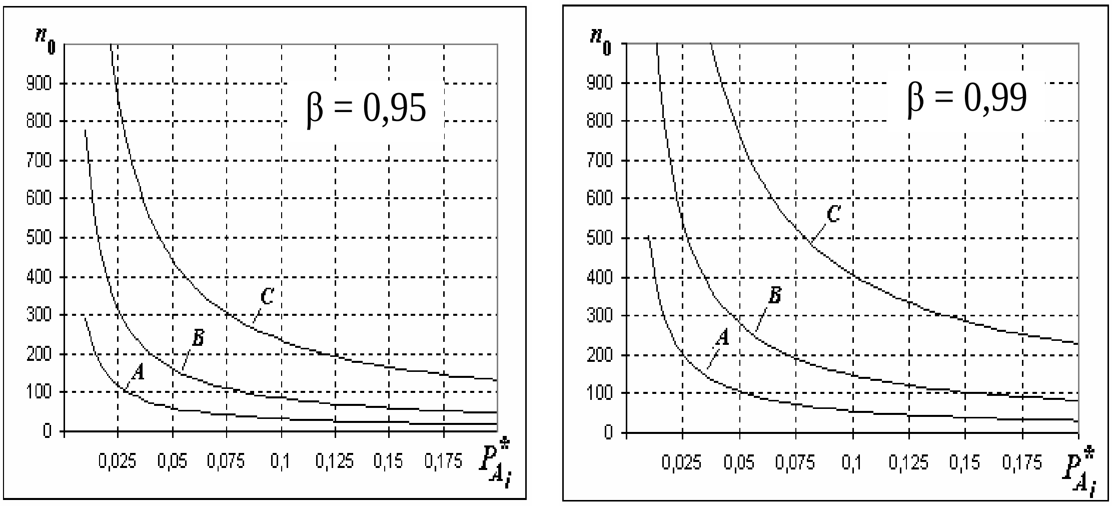

Рис. 4.2. Залежності n_0 від P^* при різних значеннях λ:
λ = 0,11 і λ = 9 (A); λ = 0,25 і λ = 4 (B); λ = 0,43 і λ = 2,33 (C).

На рис. 4.2 наведені графіки залежності об'єму вибірки n_0 від значень частот помилок експертів $P^* = P^{*(1)} = P^{*(2)}$ для фіксованих значень λ при довірчих імовірностях $\beta = 0{,}95$ і $\beta = 0{,}99$.

Зауважимо, що необхідне число спостережень n зростає при підвищенні «кваліфікації» експертів (зменшенні частот $P^{*(i)}(n)$), а також при $\lambda \to 1$.

Таким чином, з вище сказаного випливає такий ***алгоритм розв'язання задачі прийняття колективних рішень в умовах ризику:***

Крок 1. За експериментальною вибіркою об'ємом n спостережень з відомими станами об'єкта обчислюємо частоти помилок експертів $P^{*(i)}(n)$, $i = 1, 2$.

Крок 2. Використовуючи обчислені значення $P^{*(i)}(n)$ при фіксованій довірчій імовірності β та відомому параметрі $\lambda = \dfrac{P(V_2)}{P(V_1)}$ обчислюємо n_0 за формулою (4.40).

Крок 3. Якщо $n \le n_0$, то проводимо деяку кількість $\Delta n > n_0 - n$ додаткових спостережень, тобто визначаємо нове $n = n + \Delta n$ і повертаємось до кроку 1.

Крок 4. Обчислюємо значення центрів та радіусів $P^{c(i)}(n)$, $r^{(i)}(n)$ і приймаємо колективне рішення згідно з умовами теореми 4.1.

Приклад 4.1. Нехай за вибіркою $n = 100$ спостережень з відомими станами об'єкта обчислені значення помилок експертів $P^{*(1)} = 0{,}04$, $P^{*(2)} = 0{,}06$, також відомо, що $P(V_1) = 0{,}2$, $P(V_2) = 0{,}8$, отже $\lambda = 4$. Припустимо, що експерт A_1 відніс об'єкт до класу V_1, а експерт A_2 – до класу V_2, тобто маємо ситуацію S_{12} суперечливих рішень. Зауважимо, що перший експерт більш кваліфікований, оскільки $P^{*(1)} < P^{*(2)}$.

За формулою (4.40) при фіксованій довірчій імовірності $\beta = 0{,}99$ та відомому параметрі $\lambda = 4$ обчислюємо $n_0 = 614$. Оскільки $n_0 > n$, проведемо $\Delta n = 600$ додаткових експериментів та визначимо за вибіркою $n = 700$ нові значення частот помилок експертів. Нехай нові значення частот такі: $P^{*(1)} = 0{,}038$, $P^{*(2)} = 0{,}058$. Тепер, згідно з (4.40), значення $n_0 = 664$, тобто $n > n_0$ і ситуація S_{12} може бути вирішена згідно з умовами теореми 4.1.

Дійсно, при $n = 700$ і $\beta = 0{,}99$ довірчий інтервал імовірності помилки першого експерта дорівнює $\mathbf{I}_1 = \langle 0.043, 0.019\rangle$, а довірчий інтервал імовірності помилки другого експерта дорівнює $\mathbf{I}_2 = \langle 0.062, 0.024\rangle$. Тому, за умовою (4.15) колективне рішення слід прийняти на користь стану V_2.

Важливо підкреслити, що в даному випадку експерт A_2 прийняв правильне рішення, а більш кваліфікований експерт A_1 помилився.

Формальна модель прийняття колективних рішень, що ґрунтується на точкових значеннях імовірностей помилок експертів, істотно спрощується при колективній оцінці стану об'єкта з однаковими апріорними імовірностями [28, 61].

Як видно з співвідношень (2.4), (2.5), в ситуаціях $S_{m_1 m_2}$, $m_1 \neq m_2$ оптимальне колективне рішення завжди співпадає з рішенням найбільш кваліфікованого експерта, якщо $\lambda = 1$.

На цьому факті може ґрунтуватися спрощена інтервальна модель прийняття колективного рішення.

Теорема 4.3. Нехай два експерта A_1, A_2 незалежно один від одного приймають рішення відносно поточного стану об'єкту $V_j \in \{V_1, V_2\}$ з однаковими апріорними імовірностями, тобто $P(V_1) = P(V_2)$.

Тоді колективне рішення $\tilde{D} = m$, $m = 1,2$ є субоптимальним з точки зору мінімуму середньої імовірності помилки на множині можливих ситуацій (2.2), якщо в ситуаціях $S_{m_1 m_2}$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 = 1,2$ приймати остаточне рішення $\tilde{D} = 1$ на користь V_1, коли

$$P^{c(m_2)} - r^{(m_2)} > P^{c(m_1)} + r^{(m_1)}$$

та рішення $\tilde{D} = 2$ на користь V_2, коли

$$P^{c(m_2)} + r^{(m_2)} < P^{c(m_1)} - r^{(m_1)}.$$

Доведення теореми аналогічно доведенню теореми 4.1.

Для ілюстрації на рис. 4.3 побудовані області 1, 2, де можливе прийняття оптимальних колективних рішень в ситуаціях протиріччя особистих рішень експертів згідно з умовами теореми 4.3. Легко бачити, що і в даному випадку області невизначеності колективного рішення (виділені сірим кольором на рис.4.3) звужуються по мірі збільшення об'єму n вибірки і зменшення довірчої імовірності β, наближуючись до діагоналі $P^{(2)} = P^{(1)}$ при $n \to 1$.

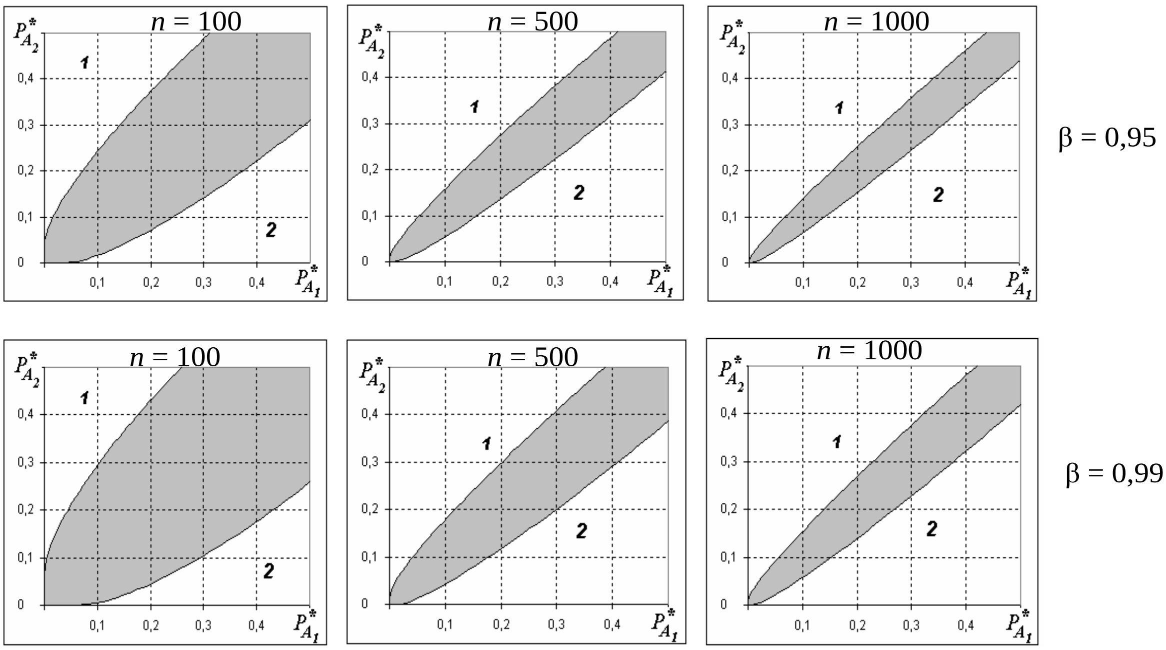

Рис.4.3. Області оптимальних колективних рішень при $\lambda = 1$:
область 1 – рішення на користь стану V_1;
область 2 – рішення на користь стану V_2.

Для практичної реалізації моделі за умовами теореми 4.3 потрібно при заданій довірчої імовірності β визначити необхідний об'єм n_0 експериментальної вибірки, за яким обчислити частоти помилок $P^{*(i)}(n)$. Використовуючи техніку доведення теореми 4.2 легко показати, що в даному випадку для визначення n_0 достатньо знайти найбільший з коренів рівнянь

$$P^{c^{(2)}} \pm r^{(2)} = P^{c^{(1)}} \mp r^{(1)},$$

які після підстановки співвідношень (4.2), (4.3) мають остаточний вигляд

$$P^{*(2)} \pm t_\beta \sqrt{\frac{P^{*(2)}(1-P^{*(2)})}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2}} = P^{*(1)} \mp t_\beta \sqrt{\frac{P^{*(1)}(1-P^{*(1)})}{n} + \frac{t_\beta^2}{4n^2}} .$$

Субоптимальна модель (4.14), (4.15) прийняття колективного рішення побудована у припущені незалежності помилок експертів від знаходження об'єкту у деякому стані, а саме

$$P(\delta_i = 1 \,|\, V_2) = P(\delta_i = 2 \,|\, V_1) = P^{(i)},\ \ i = 1,2 .$$

Якщо ж таке припущення не виконується, то, як було показано в розділі 2, оптимальні колективні рішення повинні прийматися відповідно до умов (2.10), (2.11), в яких фігурують вже значення умовних імовірностей

$$P^{(i)}(E|V_k) = P(\delta_i = j \,|\, V_k),\ \ j,k = 1,2,\ \ j \neq k$$

помилок першого та другого роду i-го експерта.

Ґрунтуючись на умовах (2.10), (2.11), доведемо таку теорему, що є інтервальним узагальненням леми 2.2.

Теорема 4.4. Нехай два експерта A_1, A_2 незалежно один від одного приймають рішення відносно поточного стану об'єкту $V_j \in \{V_1, V_2\}$, причому за вибіркою з n спостережень попередньо оцінені частоти $P_{jk}^{*(i)}$, $j,k = 1,2$, $j \neq k$ помилок першого та другого роду i-го експерта ($i = 1,2$) та частота $P_{V_1}^*$ знаходження об'єкту в першому стані.

Тоді колективне рішення $\tilde{D} = m$, $m = 1,2$ є субоптимальним з точки зору мінімуму середньої імовірності помилки на множині можливих ситуацій (2.2), якщо в ситуації $S_{m_1 m_2}$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 = 1,2$ приймати колективне рішення $\tilde{D} = 1$ на користь V_1, коли виконується умова

$$(P_{V_1}^c - r_{V_1})(P_{21}^{c^{(m_2)}} - r_{21}^{(m_2)})(1 - P_{21}^{c^{(m_1)}} - r_{21}^{(m_1)}) >$$
$$> (1 - P_{V_1}^c + r_{V_1})(P_{12}^{c^{(m_1)}} + r_{12}^{(m_1)})(1 - P_{12}^{c^{(m_2)}} + r_{12}^{(m_2)}) \qquad (4.41)$$

і рішення $\widetilde{D} = 2$ на користь V_2, коли виконується умова

$$(P_{V_1}^c + r_{V_1})(P_{21}^{c^{(m_2)}} + r_{21}^{(m_2)})(1 - P_{21}^{c^{(m_1)}} + r_{21}^{(m_1)}) <$$
$$< (1 - P_{V_1}^c - r_{V_1})(P_{12}^{c^{(m_1)}} - r_{12}^{(m_1)})(1 - P_{12}^{c^{(m_2)}} - r_{12}^{(m_2)}). \qquad (4.42)$$

Доведення теореми аналогічно доведенню теореми 4.1.

Для практичної реалізації моделі (4.41), (4.42) згідно з умовами теореми 4.4 потрібно визначити частоти помилок $P_{jk}^{*(i)}$, $i = 1, 2$ та частоту $P_{V_1}^*$ за вибіркою необхідного об'єму n_0. Аналогічно теоремі 4.2 можна показати, що в даному випадку для визначення n_0 достатньо знайти найбільший з коренів рівнянь

$$(P_{V_1}^c(n) \pm r_{V_1}(n))(P_{21}^{c^{(2)}}(n) \pm r_{21}^{(2)}(n))(1 - P_{21}^{c^{(1)}}(n) \pm r_{21}^{(1)}(n)) =$$

$$= (1 - P_{V_1}^c(n) \mp r_{V_1}(n))(P_{12}^{c^{(1)}}(n) \mp r_{12}^{(1)}(n))(1 - P_{12}^{c^{(2)}}(n) \mp r_{12}^{(2)}(n)),$$

де

$P_{V_1}^c(n)$, $r_{V_1}(n)$, $P_{21}^{c^{(i)}}(n)$, $r_{21}^{(i)}(n)$, $i = 1, 2$ – центри та радіуси відповідних довірчих інтервалів, що визначаються за формулами (4.2), (4.3) при фіксованому значенні β.

Подальшим узагальненням отриманих результатів є модель прийняття колективного рішення $\widetilde{D} = m$, $m = \overline{1, M}$ при оцінці поточного стану об'єкта $M > 2$ з можливими станами $V_1, ..., V_M$ на основі особистих рішень $\delta_1, ..., \delta_N$ групи $N > 2$ незалежних експертів.

Нехай за експериментальною вибіркою попередньо оцінені частоти

$$P^{*(i)}_{E|V_k} = \frac{n^{(i)}_{E_k}}{n_k}, \; i = 1,\dots, N, \; k = 1,\dots, M \,,$$

де

$n^{(i)}_{E_k}$ – число допущених помилок i-м експертом серед n_k досліджень, в яких об’єкт заздалегідь знаходився в k-му стані. Нехай також оцінена частота $P^*_{V_k}$ знаходження об’єкту в k-му стані.

При такій апріорній інформації також може бути побудована [27] субоптимальна модель прийняття колективного рішення, що є інтервальним узагальненням умови (2.19).

Теорема 4.5. Колективне рішення $\widetilde{D} = k$, $k = \overline{1, M}$ є субоптимальним з точки зору мінімуму середньої імовірності помилки на множині можливих ситуацій (2.12), якщо в ситуаціях протиріч особистих рішень експертів приймати остаточне рішення на користь k-го стану, коли $\forall m = \overline{1, M}, m \neq k$ виконується умова

$$(P^c_{V_k} - r_{V_k}) \prod_{i \in J_k} (1 - P^{c^{(i)}}_{E|V_k} - r^{(i)}_{E|V_k}) \prod_{i \notin J_k} (P^{c^{(i)}}_{E|V_k} - r^{(i)}_{E|V_k}) >$$

$$> (P^c_{V_m} + r_{V_m}) \prod_{i \in J_m} (1 - P^{c^{(i)}}_{E|V_m} + r^{(i)}_{E|V_m}) \prod_{i \notin J_m} (P^{c^{(i)}}_{E|V_m} + r^{(i)}_{E|V_m}) \,,$$

де

J_m – множина номерів експертів, що прийняли особисті рішення на користь m-го стану об’єкту ($m = \overline{1, M}$),

$P^c_{V_m}, r_{V_m}$ – відповідно центри і радіуси довірчих інтервалів $\mathbf{I}_{V_m}(\beta, n)$ апріорної імовірності m-го стану об’єкту ($m = \overline{1, M}$),

$P^{c^{(i)}}_{E|V_m}, r^{(i)}_{E|V_m}$ – відповідно центри і радіуси довірчих інтервалів $\mathbf{I}_{P_{E|V_m}}(\beta, n)$ умовних імовірностей помилок особистих рішень i-го експерта, $i = \overline{1, N}$.

Техніка доведення цієї теореми ґрунтується на використанні інтервальних операцій над відповідними довірчими інтервалами з урахуванням властивостей (4.4), (4.5) та обґрунтувань аналогічних тим, що були застосовані при доведенні теореми 4.1.

4.2. Моделі прийняття колективних рішень за критерієм мінімуму середнього ризику

Як показано у другому розділі при відомих точкових значеннях апріорних імовірностей $P(V_k)$, $P(\delta_i = m | V_k)$, згідно з (2.13), мінімум середнього ризику (2.16) буде забезпеченим, якщо у кожній спостережуваній ситуації S приймати колективне рішення $\widetilde{D} = l$, $l = \overline{1, M}$ при виконанні нерівності

$$\widetilde{R}_S(l) < \widetilde{R}_S(m), \ \forall m = \overline{1, M}, m \neq l, \tag{4.43}$$

де

$$\widetilde{R}_S(l) = \sum_{k=1}^{M} L_{kl} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = l | V_k), \tag{4.44}$$

$$\widetilde{R}_S(m) = \sum_{k=1}^{M} L_{km} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(\delta_i = m | V_k). \tag{4.45}$$

Ґрунтуючись на співвідношеннях (4.43) – (4.45) побудуємо модель прийняття субоптимальних рішень колективу експертів в ситуаціях протиріч їх особистих рішень за критерієм мінімуму середнього ризику [27, 60].

Нехай за репрезентативною вибіркою обмеженого об’єму n з відомими станами об’єкта заздалегідь оцінені:

а) частота $P^*_{V_k} = \dfrac{n_k}{n}$, де n_k – число випадків знаходження об’єкту в k-му стані, $k = \overline{1, M}$;

б) частоти $P_{mk}^{*(i)} = \dfrac{n_{m_i}}{n_k}$ особистих рішень кожного i-го експерта $i = \overline{1, N}$ на користь стану об'єкта V_m при істинному стані об'єкта V_k, $m, k = \overline{1, M}$.

Частоти $P_{V_k}^* = \dfrac{n_k}{n}$, $P_{mk}^{*(i)} = \dfrac{n_{m_i}}{n_k}$ з довірчою імовірністю β визначають довірчі інтервали (4.1) імовірностей $P(V_k)$, $P(\delta_i = m \,|\, V_k)$:

$$\mathbf{I}_{P(V_k)}(n, \beta) = \langle P_{V_k}^c(n, \beta), r_{V_k}(n, \beta) \rangle, \tag{4.46}$$

$$\mathbf{I}_{P(\delta_i = m \,|\, V_k)}(n, \beta) = \langle P_{mk}^c(n, \beta), r_{mk}(n, \beta) \rangle, \tag{4.47}$$

центри та радіуси яких залежать відповідно від частот $P_{V_k}^*$, $P_{mk}^{*(i)}$, довірчої імовірності β, числа спостережень n та обчислюються за формулами (4.2), (4.3).

Будемо характеризувати можливі втрати від колективного рішення $\widetilde{D} = m$, $m = \overline{1, M}$ при істинному стані об'єкта V_k інтервальною платіжною матрицею $\mathbf{L} = \|\mathbf{L}_{km}\|$, де

$$\mathbf{L}_{km} = \langle L_{km}^c, r_{L_{km}} \rangle. \tag{4.48}$$

Враховуючи (4.46) – (4.48), перейдемо від співвідношень (4.44), (4.45) до їх інтервальних аналогів

$$\widetilde{\mathbf{R}}_S(l) = \sum_{k=1}^{M} \langle L_{kl}^c, r_{L_{kl}} \rangle \langle P_{V_k}^c, r_{V_k} \rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P_{lk}^c, r_{lk} \rangle, \tag{4.49}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_S(m) = \sum_{k=1}^{M} \langle L_{km}^c, r_{L_{km}} \rangle \langle P_{V_k}^c, r_{V_k} \rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P_{mk}^c, r_{mk} \rangle. \tag{4.50}$$

Згідно з умовою (4.43) оптимальне колективне рішення повинно прийматися ґрунтуючись на порівнянні точкових величин $\tilde{R}_S(l) \in \tilde{\mathbf{R}}_S(l)$, $\tilde{R}_S(m) \in \tilde{\mathbf{R}}_S(m)$, $\forall m = \overline{1, M}$, $m \neq l$, що стає можливим тільки у випадку: $\tilde{\mathbf{R}}_S(l) \cap \tilde{\mathbf{R}}_S(m) = \varnothing$.

Теорема 4.6. Колективне рішення $\tilde{D} = l$, $l = \overline{1, M}$ є субоптимальним з точки зору мінімуму середнього ризику помилки на множині (2.12) можливих ситуацій S, якщо це рішення приймається на користь l-го стану $l = \overline{1, M}$ за умови

$$\tilde{R}_l^c + r_{\tilde{R}_l} < \tilde{R}_m^c - r_{\tilde{R}_m},\ \forall m = \overline{1, M}, m \neq l, \tag{4.51}$$

де

$$\tilde{R}_l^c + r_{\tilde{R}_l} = \sum_{\substack{k \in [1, M] \\ k \neq l}} (L_{kl}^c + r_{L_{kl}})(P_{V_k}^c + r_{V_k}) \prod_{i=1}^{N} (P_{lk}^c + r_{lk}) +$$

$$+ \begin{cases} (L_{ll}^c + r_{L_{ll}})(P_{V_l}^c + r_{V_l}) \prod\limits_{i=1}^{N} (P_{ll}^c + r_{ll}), & \text{якщо} \quad (L_{ll}^c \geq r_{L_{ll}}) \vee (|L_{ll}^c| < r_{L_{ll}}), \\ \\ (L_{ll}^c + r_{L_{ll}})(P_{V_l}^c - r_{V_l}) \prod\limits_{i=1}^{N} (P_{ll}^c - r_{ll}), & \text{якщо} \quad L_{ll}^c \leq -r_{L_{ll}}, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_m^c - r_{\tilde{R}_m} = \sum_{\substack{k \in [1, M] \\ k \neq m}} (L_{km}^c - r_{L_{km}})(P_{V_k}^c - r_{V_k}) \prod_{i=1}^{N} (P_{mk}^c - r_{mk}) +$$

$$+ \begin{cases} (L_{mm}^c - r_{L_{mm}})(P_{V_m}^c - r_{V_m}) \prod\limits_{i=1}^{N} (P_{mm}^c - r_{mm}), & \text{якщо} \quad L_{mm}^c \geq r_{L_{mm}}, \\ \\ (L_{mm}^c - r_{L_{mm}})(P_{V_m}^c + r_{V_m}) \prod\limits_{i=1}^{N} (P_{mm}^c + r_{mm}), & \text{якщо} \quad (L_{mm}^c \leq -r_{L_{mm}}) \vee (|L_{mm}^c| < r_{L_{mm}}). \end{cases}$$

Доведення. Оскільки за означенням довірчого інтервалу з довірчою імовірністю β виконуються умови

$$P(V_k) \in \langle P^c_{V_k}(n,\beta), r_{V_k}(n,\beta) \rangle,$$

$$P(\delta_i = m \,|\, V_k) \in \langle P^c_{mk}(n,\beta), r_{mk}(n,\beta) \rangle,$$

а $L_{km} \in \langle L^c_{km}, r_{L_{km}} \rangle$, то з довірчою імовірністю β^{i+1} точкові значення $\widetilde{R}_S(l),\ \widetilde{R}_S(m),\ \ \forall m = \overline{1,M},\ m \neq l$, що визначаються співвідношеннями (4.44), (4.45), належать відповідно до інтервалів $\widetilde{\mathbf{R}}_S(l)$, $\widetilde{\mathbf{R}}_S(m)$, що визначаються співвідношеннями (4.49), (4.50), тобто $\widetilde{R}_S(l) \in \widetilde{\mathbf{R}}_S(l),\ \ \widetilde{R}_S(m) \in \widetilde{\mathbf{R}}_S(m)$.

Звідси безпосередньо випливає, що при виконанні умови (4.51) з довірчою імовірністю β^{i+1} виконується умова (4.43), яка, згідно з лемою 2.3, гарантує оптимальність колективного рішення з точки зору мінімуму середнього ризику на множині (2.12) можливих ситуацій S.

Для визначення $\widetilde{R}^c_l, r_{\widetilde{R}_l}, \widetilde{R}^c_m, r_{\widetilde{R}_m}$ необхідно виконати відповідні арифметичні операції над інтервалами, що фігурують у (4.49), (4.50), зокрема операцію множення. Для цього скористаємося результатами третього розділу.

Із співвідношень (4.4), (4.5), випливає, що

$$\frac{P^c_{V_k}}{r_{V_k}} > 1, \qquad \frac{P^c_{lk}}{r_{lk}} > 1, \qquad \frac{P^c_{mk}}{r_{mk}} > 1. \tag{4.52}$$

Відносно інтервальних елементів $\mathbf{L}_{km} = \langle L^c_{km}, r_{L_{km}} \rangle$ платіжної матриці будемо вважати лише те, що втрати від помилкових рішень завжди додатні і заздалегідь більше ніж «втрати» від правильних рішень, тобто

$$L^c_{km} - r_{L_{km}} > 0; \quad L^c_{km} - r_{L_{km}} > L^c_{kk} + r_{L_{kk}},\ \forall m \neq k, \tag{4.53}$$

припускаючи, що центр L^c_{kk} може бути як додатним, так і від'ємним. В останньому випадку «втрати» будуть характеризувати виграш від правильних рішень.

Враховуючи ці обмеження, запишемо (4.49) у вигляді

$$\tilde{\mathbf{R}}_S(l) = \sum_{\substack{k\in[1,M]\\ k\neq l}} \langle L^c_{kl}, r_{L_{kl}}\rangle \langle P^c_{V_k}, r_{V_k}\rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P^c_{lk}, r_{lk}\rangle + \langle L^c_{ll}, r_{L_{ll}}\rangle \langle P^c_{V_l}, r_{V_l}\rangle \prod_{i=1}^{N} \langle P^c_{ll}, r_{ll}\rangle. \tag{4.54}$$

Використовуючи формули (3.3), (3.8) для добутку інтервалів, що фігурують в (4.54), з урахуванням (4.52), (4.53), маємо ліву частину (4.51). Аналогічним чином з (4.50) можна знайти і праву частину (4.51).

Теорема доведена.

4.3. Моделі оцінювання кваліфікації експертів

Побудуємо тепер формальні умови оцінки особистої кваліфікації експерта [28], які є інтервальним узагальненням точкових моделей, наведених в розділі 2.

Нехай на основі попередніх досліджень оцінено частоти P^*_{jk} помилкових рішень експерта на користь стану об'єкта V_j при істинному стані об'єкта V_k, $j,k = 1,2$, $j \neq k$. Тоді при відомих апріорних імовірностях $P(V_1)$, $P(V_2) = 1 - P(V_1)$ та елементів L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21} матриці втрат підтвердити або спростувати кваліфікацію експерта можна за умовами такої теореми.

Теорема 4.7. З імовірністю β^2 експерт є кваліфікований в сенсі означення 2.1, якщо виконується одна з умов

$$P_{12}^c + r_{12} < \theta(1 - P_{21}^c - r_{21}) \;\text{ при }\; \theta \le 1, \tag{4.55}$$

$$P_{12}^c + r_{12} < 1 - \theta(P_{21}^c + r_{21}) \;\text{ при }\; \theta > 1, \tag{4.56}$$

і некваліфікований, якщо виконується одна з умов

$$P_{12}^c - r_{12} > \theta(1 - P_{21}^c + r_{21}) \;\text{ при }\; \theta \le 1, \tag{4.57}$$

$$P_{12}^c - r_{12} > 1 - \theta(P_{21}^c - r_{21}) \;\text{ при }\; \theta > 1, \tag{4.58}$$

де $\theta = \dfrac{(L_{21} - L_{11})P(V_1)}{(L_{12} - L_{22})[1 - P(V_1)]}$, а P_{12}^c, P_{21}^c і r_{12}, r_{21} – відповідно центри і радіуси довірчих інтервалів $\mathbf{I}_{12} = \langle P_{12}^c, r_{12} \rangle$, $\mathbf{I}_{21} = \langle P_{21}^c, r_{21} \rangle$ імовірностей $P_{12} = P\{\delta = 1 \,|\, V_2\}$, $P_{21} = P\{\delta = 2 \,|\, V_1\}$ помилок першого та другого роду, допущених експертом на обмеженій екзаменаційній вибірці спостережень з відомими станами об'єкту.

Доведення. Оскільки точкові значення імовірностей P_{12}, P_{21} з довірчою імовірністю β належать відповідним довірчим інтервалам

$$P_{12} \in \langle P_{12}^c, r_{12} \rangle, \qquad P_{21} \in \langle P_{21}^c, r_{21} \rangle,$$

то справедливі нерівності

$$P_{12}^c - r_{12} \le P_{12} \le P_{12}^c + r_{12}, \tag{4.59}$$

$$P_{21}^c - r_{21} \le P_{21} \le P_{21}^c + r_{21}.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$1 - P_{21}^c - r_{21} \le 1 - P_{21} \le 1 - P_{21}^c + r_{21}$$

або, враховуючи, що $\theta > 0$,

$$\theta(1-P_{21}^{c}-r_{21}) \le \theta(1-P_{21}) \le \theta(1-P_{21}^{c}+r_{21})\,. \qquad (4.60)$$

Нехай виконується умова (4.55). Тоді, з урахуванням (4.59) і (4.60), маємо, що з довірчою імовірністю β^2 виконується умова

$$P_{12} \le P_{12}^{c}+r_{12} < \theta(1-P_{21}^{c}-r_{21}) \le \theta(1-P_{21}) \text{ при } \theta \le 1.$$

Звідси випливає, що при виконанні умови (4.55) з довірчою імовірністю β^2 імовірності P_{12}, P_{21} задовольняють умову (2.38), яка згідно з лемою 2.4 для випадку $\theta \le 1$ гарантує кваліфікацію експерта з точки зору означення 2.1.

Аналогічно доводиться, що при виконанні умови (4.56) з довірчою імовірністю β^2 гарантовано виконується умова (2.39), яка згідно з лемою 2.4 підтверджує кваліфікацію експерта для випадку $\theta > 1$.

Нехай тепер виконується умова (4.57). Тоді, враховуючи нерівності (4.59) і (4.60), маємо, що з довірчою імовірністю β^2 виконується умова

$$P_{12} \ge P_{12}^{c}-r_{12} > \theta(1-P_{21}^{c}+r_{21}) \ge \theta(1-P_{21}) \text{ при } \theta \le 1.$$

Отже, показано, що при виконані умови (4.57) з довірчою імовірністю β^2 не буде виконуватись умова (2.38), яка згідно з лемою 2.4 є необхідною умовою визначення експерта кваліфікованим. Тобто, при виконані умови (4.57) з довірчою імовірністю β^2 кваліфікація експерта може бути спростована для випадку $\theta \le 1$.

Аналогічним чином доводиться справедливість умови (4.58), що з довірчою імовірністю β^2 спростовує кваліфікацію експерта для випадку $\theta > 1$.

Теорема доведена.

Слід зауважити, що за відсутності апріорних знань про точкові значення умовних імовірностей P_{12}, P_{21} та наявності лише значень частот P_{12}^*, P_{21}^* помилкових рішень експерта, його кваліфікація залишається невизначеною, якщо не виконується жодна з умов теореми 4.6.

Така ситуація відбувається, коли інтервали $\langle P_{12}^c, r_{12}\rangle$, $\theta\langle 1-P_{21}^c, r_{21}\rangle$ перетинаються, а саме

$$\langle P_{12}^c, r_{12}\rangle \cap \theta\langle 1-P_{21}^c, r_{21}\rangle \neq \varnothing .$$

Для ілюстрації на рис.4.1 наведено області значень частот P_{12}^*, P_{21}^* помилкових рішень експерта, які з довірчою імовірністю $\beta = 0{,}99$ підтверджують (область А) або спростовують (область В) особисту кваліфікацію експерта. Ці області побудовані за таких умов: $P(V_1) = 0{,}15$, $L_{12} = 5$, $L_{21} = 1$, $L_{11} = L_{22} = 0$.

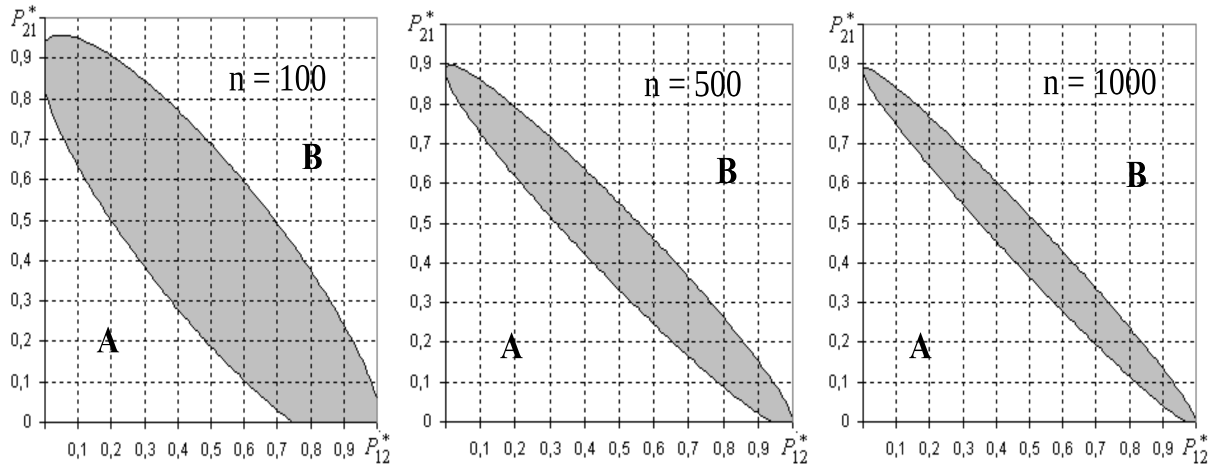

Рис.4.4. Звуження області невизначеної кваліфікації експерта з ростом об'єму вибірки *n*

З наведеного прикладу видно, що область невизначеної кваліфікації експерта $\langle P_{12}^c, r_{12}\rangle \cap \theta\langle 1-P_{21}^c, r_{21}\rangle \neq \varnothing$ (на рис. 4.4 виділена сірим кольором) звужується зі зростанням об'єму експериментальної вибірки. Цей факт випливає з властивості звуження довірчих інтервалів при збільшенні кількості експериментів n для обчислення частот помилок експерта P_{12}^* та P_{21}^*.

Таким чином, природно виникає питання, чи завжди існує достатній для використання формальних умов теореми 4.6 об'єм експериментальної вибірки.

Теорема 4.8. $\exists n_0 > 0$, що $\forall\beta$, $\theta = const$ після оцінки частот P^*_{jk}, $j,k = 1, 2$, $j \neq k$ особистих помилок експерта за репрезентативною вибіркою об'ємом $n > n_0$ можна підтвердити або спростувати його кваліфікацію згідно з умовами теореми 4.6.

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що незалежно від значень θ і β для будь-яких P^*_{jk}, $j,k = 1, 2$, $j \neq k$ завжди можливо при збільшенні кількості досліджень забезпечити виконання однієї з умов (4.55), (4.57) при $\theta \leq 1$, або однієї з умов (4.56), (4.58) при $\theta > 1$.

Нехай при деякому значенні $n^* > 0$ отримані оцінки частот P^*_{jk} такі, що для заданих значень $\theta \leq 1$ і β маємо

$$\langle P^c_{12}, r_{12}\rangle \cap \theta\langle 1 - P^c_{21}, r_{21}\rangle \neq \varnothing,$$

тобто одночасно виконуються умови

$$P^c_{12} + r_{12} > \theta(1 - P^c_{21} - r_{21}), \qquad (4.61)$$

$$P^c_{12} - r_{12} < \theta(1 - P^c_{21} + r_{21}) \qquad (4.62)$$

і кваліфікація експерта залишається невизначеною.

Оскільки $\theta > 0$, то, відповідно до леми 4.1, при збільшенні числа досліджень n функції $P^c_{12}(n) - r_{12}(n)$ і $\theta[1 - P^c_{21}(n) - r_{21}(n)]$ строго монотонно зростають, а функції $P^c_{12}(n) + r_{12}(n)$ і $\theta[1 - P^c_{21}(n) + r_{21}(n)]$ строго монотонно спадають.

Визначимо границі функцій, що визначають центри та радіуси інтервалів $\langle P^c_{12}, r_{12}\rangle$, $\theta\langle 1 - P^c_{21}, r_{21}\rangle$ при $n \to \infty$. Враховуючи (4.2), (4.3) маємо, що при $n \to \infty$ інтервали $\langle P^c_{12}, r_{12}\rangle$, $\theta\langle 1 - P^c_{21}, r_{21}\rangle$ відповідно збігаються до значень

$$\lim_{n\to\infty} P_{12}^c = P_{12}^*, \qquad \lim_{n\to\infty} \theta(1-P_{21}^c) = \theta(1-P_{21}^*),$$

оскільки їх радіуси прямують до нуля

$$\lim_{n\to\infty} r_{12} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} r_{21} = 0.$$

Залежно від значень P_{12}^*, $\theta(1-P_{21}^*)$ може виконуватись одна з нерівностей

$$P_{12}^* < \theta(1-P_{21}^*), \tag{4.63}$$

$$P_{12}^* > \theta(1-P_{21}^*). \tag{4.64}$$

Спочатку припустимо, що виконується (4.63). Покажемо, що в такому випадку при збільшенні кількості досліджень n на деякому кроці порушується умова (4.61), тобто інтервали $\langle P_{12}^c, r_{12}\rangle$, $\theta\langle 1-P_{21}^c, r_{21}\rangle$ не будуть перетинатися. Оскільки функція $\theta[1-P_{21}^c(n)-r_{21}(n)]$, що фігурує в правій частині нерівності (4.61), строго монотонно зростає та прямує до $\theta(1-P_{21}^*)$, а функція $P_{12}^c(n)+r_{12}(n)$, що фігурує в лівій частині нерівності (4.62), строго монотонно спадає та прямує до P_{12}^*, то завжди знайдеться таке значення $n_0 > n^*$, при якому нерівність (4.61) не буде виконуватись, тобто

$$P_{12}^c + r_{12} \le \theta(1-P_{21}^c - r_{21}).$$

Звідси випливає, що для всіх $n > n_0$ виконується умова (4.55), яка відповідно до теореми 4.6 гарантує кваліфікацію експерта при $\theta \le 1$.

Нехай виконується (4.64). Покажемо, що в такому випадку при $n \to \infty$ на деякому кроці порушується умова (4.62), тобто інтервали $\langle P_{12}^c, r_{12} \rangle$, $\theta\langle 1 - P_{21}^c, r_{21} \rangle$ не будуть перетинатися. Оскільки функція $P_{12}^c(n) - r_{12}(n)$, що фігурує в лівій частині нерівності (4.62), строго монотонно зростає та прямує до P_{12}^*, а функція $\theta[1 - P_{21}^c(n) + r_{21}(n)]$, що фігурує в правій частині нерівності (4.62), строго монотонно спадає та прямує до $\theta(1 - P_{21}^*)$, то завжди знайдеться таке значення $n_0 > n^*$, при якому нерівність (4.62) не буде виконуватись

$$P_{12}^c - r_{12} \geq \theta(1 - P_{21}^c + r_{21}).$$

Звідси випливає, що для всіх $n > n_0$ буде виконуватись умова (4.57), що згідно з теоремою 4.6 спростовує кваліфікацію експерта при $\theta \leq 1$.

Аналогічні міркування дозволяють довести справедливість теореми 4.6 і для випадку $\theta > 1$.

Теорема доведена.

Важливим наслідком теореми 4.8 є можливість чисельної оцінки необхідного об'єму n експериментальної вибірки для формальної оцінки кваліфікації експерта.

Наслідок 4.2. Числова оцінка необхідного об'єму n_0 вибірки досліджень для формальної оцінки кваліфікації експерта, визначається з рівнянь

$$P_{12}^c(n) \pm r_{12}(n) = \theta[1 - P_{21}^c(n) \mp r_{21}(n)], \quad \text{якщо } \theta \leq 1,$$

$$P_{12}^c(n) \mp r_{12}(n) = 1 - \theta[P_{21}^c(n) \pm r_{21}(n)], \quad \text{якщо } \theta > 1.$$

4.4. Моделі порівняння кваліфікацій експертів

Ґрунтуючись на означенні 2.2, сформулюємо [28] формальні умови порівняння кваліфікацій двох експертів. Спочатку розглянемо частковий випадок, коли відомі точні значення елементів платіжної матриці (2.34), апріорні імовірності станів об'єкта $P(V_1)$, $P(V_2)=1-P(V_1)$ та за екзаменаційною вибіркою оцінені частоти $P_{12}^{*(i)}$, $P_{21}^{*(i)}$ особистих помилок першого та другого роду i-го експерта A_i, $i=1,2$.

Теорема 4.9. З імовірністю β^2 експерт A_1 більш кваліфікований, ніж експерт A_2, якщо

$$\theta(P_{21}^{c\,(1)}+r_{21}^{(1)}-P_{21}^{c\,(2)}+r_{21}^{(2)})<P_{12}^{c\,(2)}-r_{12}^{(2)}-P_{12}^{c\,(1)}-r_{12}^{(1)}\ , \qquad (4.65)$$

і менш кваліфікований, ніж експерт A_2, якщо

$$\theta(P_{21}^{c\,(1)}-r_{21}^{(1)}-P_{21}^{c\,(2)}-r_{21}^{(2)})>P_{12}^{c\,(2)}+r_{12}^{(2)}-P_{12}^{c\,(1)}+r_{12}^{(1)}, \qquad (4.66)$$

де $P_{12}^{c\,(i)}, P_{21}^{c\,(i)}$ і $r_{12}^{(i)}, r_{21}^{(i)}$ – відповідно центри та радіуси довірчих інтервалів умовних імовірностей особистих помилок i-го експерта ($i=1,\,2$), які, згідно з (4.2) – (4.3), залежать виключно від довірчої імовірності β і частот $P_{12}^{*(i)}$, $P_{21}^{*(i)}$ помилок, допущених відповідним експертом на екзаменаційній вибірці відомого об'єму n.

Доведення. За означенням довірчого інтервалу з довірчою імовірністю β виконуються умови

$$P_{12}^{(i)}\in\left\langle P_{12}^{c\,(i)},r_{12}^{(i)}\right\rangle \text{ і } P_{21}^{(i)}\in\left\langle P_{21}^{c\,(i)},r_{21}^{(i)}\right\rangle,$$

або

$$P_{21}^{(1)} < P_{21}^{c\,(1)} + r_{21}^{(1)}, \quad P_{21}^{(2)} > P_{21}^{c\,(2)} - r_{21}^{(2)},$$

тобто з імовірністю β^2 маємо

$$P_{21}^{(1)} - P_{21}^{(2)} < P_{21}^{c\,(1)} + r_{21}^{(1)} - P_{21}^{c\,(2)} + r_{21}^{(2)}. \qquad (4.67)$$

Аналогічно можна показати, що з імовірністю β^2 виконується умова

$$P_{12}^{(2)} - P_{12}^{(1)} > P_{12}^{c\,(2)} - r_{12}^{(2)} - P_{12}^{c\,(1)} - r_{12}^{(1)}. \qquad (4.68)$$

Отже, якщо справедлива умова (4.65), то, ґрунтуючись на (4.67), (4.68), і враховуючи, що за означенням

$$\theta = \frac{(L_{21} - L_{11})P(V_1)}{(L_{12} - L_{22})[1 - P(V_1)]} > 0, \qquad (4.69)$$

маємо

$$\theta(P_{21}^{(1)} - P_{21}^{(2)}) < P_{12}^{(2)} - P_{12}^{(1)}. \qquad (4.70)$$

Нерівність (4.70), з урахуванням (4.69), можна записати в еквівалентній формі

$$P(V_1)(P_{21}^{(1)} - P_{21}^{(2)})(L_{21} - L_{11}) < (1 - P(V_1))(P_{12}^{(2)} - P_{12}^{(1)})(L_{12} - L_{22}).$$

Звідси, після елементарних перетворень, отримаємо

$$L_{11}P(V_1)(1 - P_{21}^{(1)}) + L_{22}(1 - P(V_1))(1 - P_{12}^{(1)}) +$$

$$+ L_{21}P(V_1)P_{21}^{(1)} + L_{12}(1 - P(V_1))P_{12}^{(1)} <$$

$$< L_{11}P(V_1)(1 - P_{21}^{(2)}) + L_{22}(1 - P(V_1))(1 - P_{12}^{(2)}) +$$

$$+L_{21}P(V_1)P_{21}^{(2)}+L_{12}(1-P(V_1))P_{12}^{(2)}.$$

Таким чином, при виконані умови (4.65) з довірчою імовірністю β^2 для середніх ризиків помилкових рішень експертів виконується строга нерівність $R_1 < R_2$.

Аналогічним чином можна показати, що при виконанні умови (4.66) з довірчою імовірністю β^2 виконується строга нерівність $R_1 > R_2$.

Теорема доведена.

Порівняти кваліфікації експертів неможливо [60, 61], якщо не виконується жодна з умов теореми 4.9. Тому необхідно визначити умови, що повинні накладатись на об'єм експериментальної вибірки, за якою мають бути оцінені частоти $P_{12}^{*(i)}$, $P_{21}^{*(i)}$ помилок експертів для того, щоб з заданою імовірністю β порівнювати їх кваліфікації.

Для доведення існування скінченого об'єму вибірки, достатнього для використання умов теореми 4.9, знадобиться така допоміжна лема.

Лема 4.2. Функція

$$\varphi_1(n)=P_{X_1}^c(n)-r_{X_1}(n)-P_{X_2}^c(n)-r_{X_2}(n), \qquad (4.71)$$

строго монотонно зростає з ростом n, а функція

$$\varphi_2(n)=P_{X_2}^c(n)+r_{X_2}(n)-P_{X_1}^c(n)+r_{X_1}(n), \qquad (4.72)$$

строго монотонно спадає з ростом n.

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi_1(n)=f_1(n)-f_2(n)$$

від неперервного аргументу n, де

$$f_1(n) = P_{X_1}^c(n) - r_{X_1}(n),$$

$$f_2(n) = P_{X_2}^c(n) + r_{X_2}(n).$$

Оскільки, згідно з лемою 4.1, $f_1' > 0$, а $f_2' < 0$, то $\varphi_1'(n) = f_1'(n) - f_2'(n) > 0$. Отже, функція $\varphi_1(n)$ строго монотонно зростає з ростом n.

Аналогічно можна показати, що функція $\varphi_2(n)$ строго монотонно спадає при будь-яких неперервних $n > 0$. Очевидно, що твердження леми 4.2 справедливі і при дискретних значеннях $n > 0$.

Лема доведена.

Теорема 4.10. $\exists n_0 > 0$, що $\forall \beta$, $\theta = const$ після оцінки за вибіркою об'ємом $n > n_0$ частот $P_{12}^{*(i)}, P_{21}^{*(i)}$ помилок експертів A_i, $i = 1,2$ можна визначити найбільш кваліфікованого експерта згідно з умовами теореми 4.8.

Доведення. Нехай за вибіркою n^* досліджень оцінені частоти $P_{12}^{*(i)}$, $P_{21}^{*(i)}$ помилок першого і другого роду кожного з експертів, та для заданих значень θ і β одночасно виконуються умови

$$\theta(P_{21}^{c(1)} + r_{21}^{(1)} - P_{21}^{c(2)} + r_{21}^{(2)}) > P_{12}^{c(2)} - r_{12}^{(2)} - P_{12}^{c(1)} - r_{12}^{(1)}, \tag{4.73}$$

$$P_{12}^{c(2)} + r_{12}^{(2)} - P_{12}^{c(1)} + r_{12}^{(1)} > \theta(P_{21}^{c(1)} - r_{21}^{(1)} - P_{21}^{c(2)} - r_{21}^{(2)}), \tag{4.74}$$

тобто не виконується жодна з умов теореми 4.9 і неможливо визначити найбільш кваліфікованого експерта. Така ситуація відбувається при перетині інтервалів:

$$\langle P_{12}^{c(2)} - P_{12}^{c(1)}, r_{12}^{(1)} + r_{12}^{(2)} \rangle \cap \theta \langle P_{21}^{c(1)} - P_{21}^{c(2)}, \; r_{21}^{(2)} + r_{21}^{(1)} \rangle \neq \varnothing.$$

Визначимо значення, до яких збігаються ці інтервали при збільшенні кількості досліджень $n \to \infty$.

Враховуючи (4.2), (4.3) маємо, що при $n \to \infty$ інтервали

$$\langle P_{12}^{c\,(2)} - P_{12}^{c\,(1)},\, r_{12}^{(1)} + r_{12}^{(2)} \rangle \ ,\ \theta\langle P_{21}^{c\,(1)} - P_{21}^{c\,(2)},\ r_{21}^{(2)} + r_{21}^{(1)} \rangle$$

відповідно збігаються до значень

$$\lim_{n\to\infty} \theta(P_{21}^{c\,(1)} - P_{21}^{c\,(2)}) = \theta(P_{21}^{*\,(1)} - P_{21}^{*\,(2)}),$$

$$\lim_{n\to\infty} (P_{12}^{c\,(2)} - P_{12}^{c\,(1)}) = P_{12}^{*\,(2)} - P_{12}^{*\,(1)},$$

оскільки їх радіуси прямують до нуля

$$\lim_{n\to\infty} \theta(r_{21}^{(2)} + r_{21}^{(1)}) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (r_{12}^{(1)} + r_{12}^{(2)}) = 0.$$

Залежно від значень $P_{12}^{*\,(2)} - P_{12}^{*\,(1)}$, $\theta(P_{21}^{*\,(1)} - P_{21}^{*\,(2)})$ може виконуватись одна з нерівностей:

$$P_{12}^{*\,(2)} - P_{12}^{*\,(1)} < \theta(P_{21}^{*\,(1)} - P_{21}^{*\,(2)}), \tag{4.75}$$

$$P_{12}^{*\,(2)} - P_{12}^{*\,(1)} > \theta(P_{21}^{*\,(1)} - P_{21}^{*\,(2)}). \tag{4.76}$$

Спочатку припустимо справедливість нерівності (4.75). Покажемо, що в такому випадку при збільшенні кількості досліджень n на деякому кроці порушується умова (4.74), тобто інтервали

$$\langle P_{12}^{c\,(2)} - P_{12}^{c\,(1)},\, r_{12}^{(1)} + r_{12}^{(2)} \rangle,\ \theta\langle P_{21}^{c\,(1)} - P_{21}^{c\,(2)},\ r_{21}^{(2)} + r_{21}^{(1)} \rangle$$

не будуть перетинатися.

Оскільки $\theta > 0$ та функція $\theta(P_{21}^{c\,(1)} - r_{21}^{(1)} - P_{21}^{c\,(2)} - r_{21}^{(2)})$, що фігурує в правій частині нерівності (4.74), за лемою 4.2 строго монотонно зростає та прямує до $\theta(P_{21}^{*\,(1)} - P_{21}^{*\,(2)})$, а функція $P_{12}^{c\,(2)} + r_{12}^{(2)} - P_{12}^{c\,(1)} + r_{12}^{(1)}$, що фігурує в лівій частині нерівності (4.74), строго монотонно спадає (лема 4.2) та прямує до $P_{12}^{*\,(2)} - P_{12}^{*\,(1)}$, то завжди знайдеться таке значення $n_0 > n^*$, при якому нерівність (4.74) не буде виконуватись, тобто

$$P_{12}^{c\,(2)} + r_{12}^{(2)} - P_{12}^{c\,(1)} + r_{12}^{(1)} \le \theta(P_{21}^{c\,(1)} - r_{21}^{(1)} - P_{21}^{c\,(2)} - r_{21}^{(2)}),$$

Звідси випливає, що для всіх $n > n_0$ буде виконуватись умова (4.66) теореми 4.9.

Нехай тепер виконується (4.76). Покажемо, що в такому випадку при збільшенні кількості спостережень n на деякому кроці порушується умова (4.73), тобто інтервали

$$\langle P_{12}^{c\,(2)} - P_{12}^{c\,(1)},\, r_{12}^{(1)} + r_{12}^{(2)} \rangle,\ \theta\langle P_{21}^{c\,(1)} - P_{21}^{c\,(2)},\ r_{21}^{(2)} + r_{21}^{(1)} \rangle$$

не будуть перетинатися. Оскільки $\theta > 0$ та функція $P_{12}^{c\,(2)} - r_{12}^{(2)} - P_{12}^{c\,(1)} - r_{12}^{(1)}$, що фігурує в правій частині нерівності (4.73), за лемою 4.2 строго монотонно зростає та прямує до $P_{12}^{*\,(2)} - P_{12}^{*\,(1)}$, а функція $\theta(P_{21}^{c\,(1)} + r_{21}^{(1)} - P_{21}^{c\,(2)} + r_{21}^{(2)})$, що фігурує в лівій частині нерівності (4.74), строго монотонно спадає (лема 4.2) та прямує до $\theta(P_{21}^{*\,(1)} - P_{21}^{*\,(2)})$, то завжди знайдеться таке значення $n_0 > n^*$, при якому нерівність (4.73) не буде виконуватись, тобто

$$\theta(P_{21}^{c\,(1)} + r_{21}^{(1)} - P_{21}^{c\,(2)} + r_{21}^{(2)}) \le P_{12}^{c\,(2)} - r_{12}^{(2)} - P_{12}^{c\,(1)} - r_{12}^{(1)}.$$

Таким чином, при числі спостережень $n > n_0$ буде виконуватись умова (4.65) теореми 4.9.

Теорема доведена.

Для ілюстрації на рисунку 4.5 наведені графіки функцій, що представляють залежності від числа спостережень n лівої (крива 1) та правої (крива 2) частин нерівності (4.73), а також лівої (крива 3) та правої (крива 4) частин нерівності (4.74).

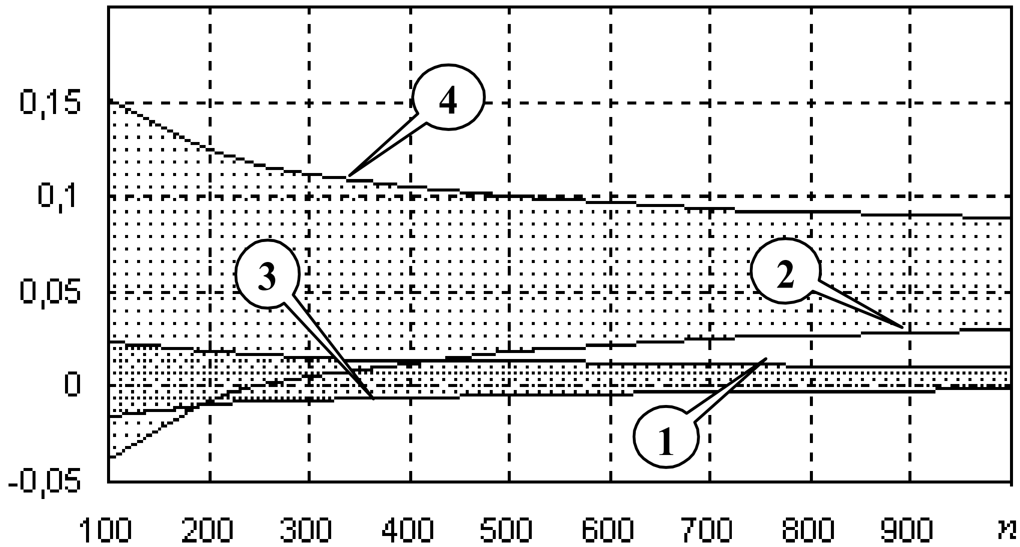

Рис. 4.5. Звуження інтервалів, що відповідають умовам порівняння кваліфікацій експертів, з ростом числа спостережень

Вказані залежності побудовані для значень довірчої імовірності $\beta = 0{,}99$ при частотах помилок експертів $P_{12}^{*(1)} = 0{,}01$, $P_{12}^{*(2)} = 0{,}07$, $P_{21}^{*(1)} = 0{,}04$, $P_{21}^{*(2)} = 0{,}02$, апріорній імовірності $P(V_1) = 0{,}1$ та значеннях елементів матриці втрат $L_{11} = L_{22} = 0$, $L_{21} = 2$, $L_{12} = 1$, тобто при $\theta \approx 0{,}22$.

Легко бачити, що в даному випадку порівняння кваліфікацій експертів можливо тільки у випадку, коли частоти їх помилок оцінені більш ніж за 430 спостереженнями та визначити, що за таких умов з довірчою імовірністю $\beta^2 = 0{,}98$ експерт A_1 більш кваліфікований, ніж експерт A_2.

Величина θ, що фігурує в умовах (4.65), (4.66), є константою лише в тому випадку, коли відомі значення елементів платіжної матриці та точкові значення апріорних імовірностей станів об'єкта. Тому в загальному випадку доцільно перейти від точкових значень L_{ij} і $P(V_1)$ до їх інтервальних аналогів $\left\langle L_{ij}^c, r_{ij} \right\rangle$ та $\left\langle P_{V_1}^c, r_{V_1} \right\rangle$ [58, 61].

Ґрунтуючись на результатах розділів 2 і 3, отримаємо формальні умови порівняння кваліфікацій експертів з точки зору мінімуму середнього ризику їх помилок в цьому загальному випадку.

Нехай задані інтервальні значення елементів платіжної матриці $L_{ij} \in \left\langle L_{ij}^c, r_{ij} \right\rangle$ та за репрезентативною вибіркою спостережень n з відомими станами об'єкта заздалегідь оцінені:

а) частота $P_{V_k}^* = \dfrac{n_k}{n}$, де n_k – число випадків знаходження об'єкту в k-му стані, $k = 1, 2$;

б) частоти $P_{jk}^{*(i)} = \dfrac{n_j}{n_k}$ особистих рішень i-го експерту $i = 1, 2$ на користь стану об'єкта V_j при істинному стані об'єкта V_k, $j, k = 1, 2$, $j \neq k$.

Приймаючи до уваги (4.70) представимо умову (2.44) у вигляді

$$Q_1 < Q_2, \tag{4.77}$$

де

$$Q_1 = (P_{21}^{(1)} - P_{21}^{(2)})P(V_1)(L_{21} - L_{11}), \tag{4.78}$$

$$Q_2 = (P_{12}^{(2)} - P_{12}^{(1)})(1 - P(V_1))(L_{12} - L_{22}). \tag{4.79}$$

Частоти $P_{V_k}^* = \dfrac{n_k}{n}$, $P_{jk}^{*(i)} = \dfrac{n_j}{n_k}$ з довірчою імовірністю β визначають довірчі інтервали (4.1) імовірностей $P(V_k)$, $P_{jk}^{(i)}$:

$$\mathbf{I}_{P(V_k)}(n,\beta) = \langle P^c_{V_k}(n,\beta), r_{V_k}(n,\beta)\rangle,$$

$$\mathbf{I}_{P_{jk}}(n,\beta) = \langle P^c_{P_{jk}}(n,\beta), r_{P_{jk}}(n,\beta)\rangle,$$

центри та радіуси яких залежать відповідно від частот $P^*_{V_k}$, $P^{*(i)}_{jk}$, довірчою імовірності β і вибірки об'ємом n та обчислюються за формулами (4.2), (4.3).

Таким чином, інтервальні аналоги точкових величин Q_1, Q_2 ((4.78), (4.79)) визначаються добутком відповідних довірчих інтервалів та інтервально заданих елементів платіжної матриці:

$$\mathbf{Q}_1 = \left\langle P^{c\,(1)}_{21} - P^{c\,(2)}_{21}, r_{P^{(1)}_{21}} + r_{P^{(2)}_{21}} \right\rangle \left\langle P^c_{V_1}, r_{V_1} \right\rangle \left\langle L^c_{21} - L^c_{11}, r_{L_{21}} + r_{L_{11}} \right\rangle, \quad (4.80)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left\langle P^{c\,(2)}_{12} - P^{c\,(1)}_{12}, r_{P^{(2)}_{12}} + r_{P^{(1)}_{12}} \right\rangle \left\langle 1 - P^c_{V_1}, r_{V_1} \right\rangle \left\langle L^c_{12} - L^c_{22}, r_{L_{12}} + r_{L_{22}} \right\rangle. \quad (4.81)$$

Так як результат добутку інтервальних величин залежить від наявності у них нуля, то виникає необхідність у додатковому аналізі.

Зі співвідношень (4.2), (4.3) випливає, що при будь-яких n і β центр $P^c_{V_1}$ та радіус r_{V_1} довірчого інтервалу імовірності $P(V_1)$ задовольняють умови

$$r_{V_1} < P^c_{V_1}, \;\; r_{V_1} < 1 - P^c_{V_1}. \quad (4.82)$$

Так як припускається, що втрати від помилкових рішень набагато більше втрат від правильних рішень, можна допустити, що центри L^c_{jk} і радіуси r_{jk} довірчих інтервалів елементів платіжної матриці задовольняють умови

$$L^c_{21} - r_{L_{21}} > L^c_{11} + r_{L_{11}}, \;\; L^c_{12} - r_{L_{12}} > L^c_{22} + r_{L_{22}}. \quad (4.83)$$

З (4.82) і (4.83) випливає, що

$$0 \notin \left\langle P_{V_1}^c, r_{V_1} \right\rangle,\ 0 \notin \left\langle 1 - P_{V_1}^c, r_{V_1} \right\rangle,$$

$$0 \notin \left\langle L_{21}^c - L_{11}^c, r_{L_{21}} + r_{L_{11}} \right\rangle,\ \ 0 \notin \left\langle L_{12}^c - L_{22}^c, r_{L_{12}} + r_{L_{22}} \right\rangle,$$

тобто другі та треті співмножники в (4.80) і (4.81) не містять нуль.

Проте перші співмножники в (4.80) і (4.81) в загальному випадку містять нуль, тобто

$$0 \in \left\langle P_{21}^{c(1)} - P_{21}^{c(2)}, r_{P_{21}^{(1)}} + r_{P_{21}^{(2)}} \right\rangle,$$
$$0 \in \left\langle P_{12}^{c(2)} - P_{12}^{c(1)}, r_{P_{12}^{(2)}} + r_{P_{12}^{(1)}} \right\rangle.$$

Тому для визначення значень центрів Q_j^c та радіусів r_{Q_j} цих інтервалів скористаємося результатами обчислення добутку інтервалів у формі центр-радіус для загального випадку, що отримані у розділі 3.

Введемо позначення

$$\mu_1 = \frac{P_{21}^{c(1)} - P_{21}^{c(2)}}{r_{P_{21}^{(1)}} + r_{P_{21}^{(2)}}}, \qquad \mu_2 = \frac{P_{12}^{c(2)} - P_{12}^{c(1)}}{r_{P_{12}^{(2)}} + r_{P_{12}^{(1)}}}.$$

та, приймаючи до уваги обмеження (4.82) і (4.83), окремо розглядатимемо два можливих випадки: $|\mu_i| \ge 1,\ i = 1{,}2$ та $|\mu_i| < 1$, використовуючи формулу (3.18). В результаті маємо

$$Q_1^c - r_{Q_1} = \begin{cases} (P_{21}^{c(1)} - P_{21}^{c(2)} - r_{P_{21}^{(1)}} - r_{P_{21}^{(2)}})(P_{V_1}^c - r_{V_1})(L_{21}^c - L_{11}^c - r_{L_{21}} - r_{L_{11}}), & \mu_1 \ge 1, \\ (P_{V_1}^c + r_{V_1})(L_{21}^c - L_{11}^c + r_{L_{21}} + r_{L_{11}})(P_{21}^{c(1)} - P_{21}^{c(2)} - r_{P_{21}^{(1)}} - r_{P_{21}^{(2)}}), & \mu_1 < 1, \end{cases}$$

$$Q_1^c + r_{Q_1} = \begin{cases} (P_{V_1}^c + r_{V_1})(L_{21}^c - L_{11}^c + r_{L_{21}} + r_{L_{11}})(P_{21}^{c(1)} - P_{21}^{c(2)} + r_{P_{21}^{(1)}} + r_{P_{21}^{(2)}})\ , \mu_1 > -1, \\ (P_{21}^{c(1)} - P_{21}^{c(2)} + r_{P_{21}^{(1)}} + r_{P_{21}^{(2)}})(P_{V_1}^c - r_{V_1})(L_{21}^c - L_{11}^c - r_{L_{21}} - r_{L_{11}}), \ \mu_1 \le -1, \end{cases}$$

$$Q_2^c - r_{Q_2} =$$

$$= \begin{cases} (P_{12}^{c(2)} - P_{12}^{c(1)} - r_{P_{12}^{(1)}} - r_{P_{12}^{(2)}})(1 - P_{V_1}^c - r_{V_1})(L_{12}^c - L_{22}^c - r_{L_{12}} - r_{L_{22}}), \ \mu_2 \ge 1, \\ (P_{12}^{c(2)} - P_{12}^{c(1)} - r_{P_{12}^{(1)}} - r_{P_{12}^{(2)}})(1 - P_{V_1}^c + r_{V_1})(L_{12}^c - L_{22}^c + r_{L_{12}} + r_{L_{22}}), \ \mu_2 < 1, \end{cases}$$

$$Q_2^c + r_{Q_2} =$$

$$= \begin{cases} (P_{12}^{c(2)} - P_{12}^{c(1)} + r_{P_{12}^{(1)}} + r_{P_{12}^{(2)}})(1 - P_{V_1}^c - r_{V_1})(L_{12}^c - L_{22}^c - r_{L_{12}} - r_{L_{22}}), \ \mu_2 \le -1, \\ (1 - P_{V_1}^c + r_{V_1})(L_{12}^c - L_{22}^c + r_{L_{12}} + r_{L_{22}})(P_{12}^{c(2)} - P_{12}^{c(1)} + r_{P_{12}^{(2)}} + r_{P_{12}^{(1)}}), \ \mu_2 > -1. \end{cases}$$

Отримані співвідношення дозволяють на основі лише обмежених апріорних даних сформулювати умови визначення з заданою довірчою імовірністю найбільш кваліфікованого експерта.

Теорема 4.11. З імовірністю β^3 експерт A_1 більш кваліфікований, ніж експерт A_2, якщо

$$Q_1^c + r_{Q_1} < Q_2^c - r_{Q_2}, \tag{4.84}$$

і менш кваліфікований, ніж експерт A_2, якщо

$$Q_1^c - r_{Q_1} > Q_2^c + r_{Q_2}. \tag{4.85}$$

де Q_1^c, Q_2^c, r_{Q_1}, r_{Q_2} – відповідно центри та радіуси інтервалів $\mathbf{Q_1}, \mathbf{Q}_2$, які залежать виключно від довірчої імовірності β, частот

$P_{12}^{*(i)}$, $P_{21}^{*(i)}$ помилок, допущених відповідним експертом на екзаменаційній вибірці відомого об'єму n, та частоти $P_{V_1}^{*}$.

Доведення. Оскільки за означенням довірчого інтервалу з довірчою імовірністю β виконуються умови

$$P_{12}^{(i)} \in \left\langle P_{12}^{c\,(i)}, r_{12}^{(i)} \right\rangle, \;\; P_{21}^{(i)} \in \left\langle P_{21}^{c\,(i)}, r_{21}^{(i)} \right\rangle, \;\; P(V_1) \in \left\langle P_{V_1}^{c}, r_{V_1} \right\rangle,$$

а $L_{ij} \in \left\langle L_{ij}^{c}, r_{ij} \right\rangle$, то з довірчою імовірністю β^3 точкові значення Q_1, Q_2 належать відповідно до інтервалів $\mathbf{Q_1}, \mathbf{Q}_2$:

$$Q_1 \in \mathbf{Q_1} \text{ і } Q_2 \in \mathbf{Q}_2 .$$

Тобто при виконанні умови (4.84) з довірчою імовірністю β^3 виконується умова (4.77), яка згідно з лемою 2.5 гарантує, що експерт A_1 більш кваліфікований, ніж експерт A_2.

З іншого боку, при виконанні умови (4.85) умова (4.77) не буде виконуватись з довірчою імовірністю β^3. Звідси, згідно з лемою 2.5, з довірчою імовірністю β^3 може бути спростовано те, що експерт A_1 більш кваліфікований, ніж експерт A_2.

Теорема доведена.

Приклад 4.2. Чисельне моделювання при довірчої імовірності $\beta = 0{,}99$, частотах $P_{12}^{*(1)} = 0{,}01$, $P_{12}^{*(2)} = 0{,}07$, $P_{21}^{*(1)} = 0{,}04$, $P_{21}^{*(2)} = 0{,}02$, $P_{V_1}^{*} = 0{,}1$ та значеннях $L_{11} \in \langle 1;\, 0{,}1 \rangle$, $L_{22} \in \langle 1;\, 0{,}1 \rangle$, $L_{21} \in \langle 5;\, 0{,}5 \rangle$, $L_{12} \in \langle 3;\, 0{,}3 \rangle$ показує, що за таких умов порівняння кваліфікацій експертів буде обґрунтованим лише за вибіркою $n > 710$ досліджень (рис. 4.6), причому, згідно з (4.81), експерт A_1 більш кваліфікований, ніж експерт A_2.

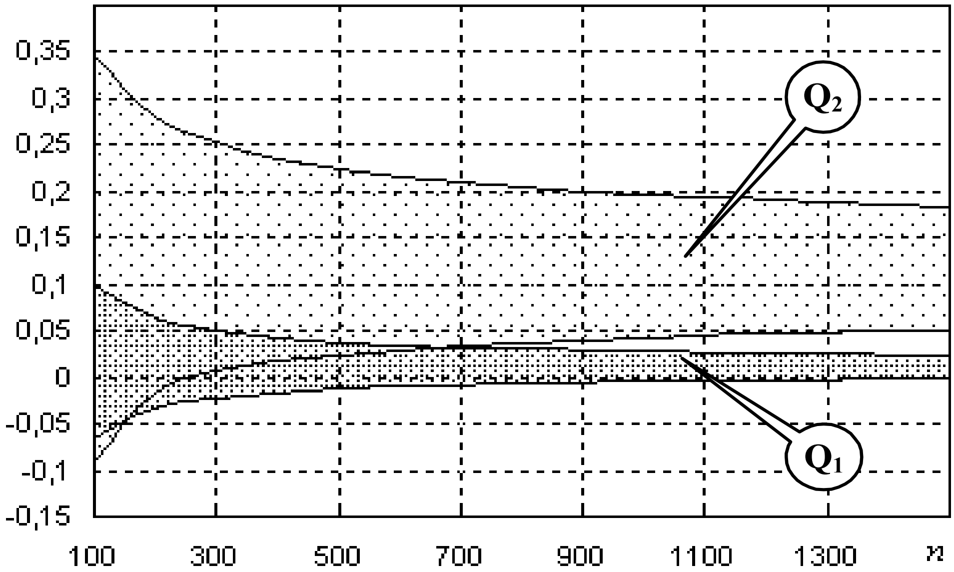

Рис.4.6. Графіки залежності границь інтервалів Q_1 і Q_2 від об'єму *n* досліджень

Зауважимо, що інтервальне узагальнення байєсівських моделей отримано у припущенні, що для розглянутих явищ (станів досліджуваних об'єктів і помилок експертів, що беруть участь у формуванні колективного рішення), існує імовірнісна міра, а вибірка спостережень, за якій оцінюється довірчий інтервал – однорідна.

Якщо такі припущення не вірні, то інтервальне узагальнення запропонованих моделей можна спробувати шукати вже в рамках теорії гіпервипадкових явищ [11]. Однак розгляд такого більш загального випадку виходить за рамки монографії і може бути предметом подальших досліджень.

ВИСНОВКИ

Проведений аналіз сучасного стану теорії прийняття рішень свідчить про наявність широкого спектру методів та інформаційних технологій, які виконані на високому науковому рівні та спрямовані на розв’язування практичних задач в різних сферах застосування. В той же час відмічені недоліки відомих методів прийняття колективних рішень, які інтегрують індивідуальні рішення групи експертних оцінок, стимулюють продовження наукових досліджень в цьому напрямку.

Монографія за винятком першого розділу носить оригінальний характер. В ній представлено результати розроблення та дослідження оптимальних та субоптимальних стратегій колективних рішень в рамках байєсівського підходу. Головна перевага розроблених моделей перед відомими полягає в тому, що інтеграція індивідуальних рішень незалежних експертів здійснюється на основі формального критерію – мінімуму середньої імовірності колективної помилки або, в загальному випадку, середнього ризику на множині можливих ситуацій. При цьому самі процедури інтеграції не використовують жодних евристичних процедур і тому дозволяють отримати математично обґрунтоване оптимальне (субоптимальне) рішення за конкретними даними.

В монографії відображено нові наукові результати, зокрема:

1. Показано, що за відомими апріорними імовірностями станів об’єкту та імовірностями особистих помилок окремих експертів може бути побудована формальна модель колективного рішення, яка забезпечує мінімум середньої імовірності або, в загальному випадку, мінімум середнього ризику колективного рішення на множині можливих ситуацій.

2. Доведено, що оптимальне колективне рішення може не співпадати з особистим рішенням найбільш кваліфікованого експерта.

3. Для практичної реалізації моделі прийняття колективного рішення запропонована схема, яка навчається та за вказівками зо-

зовнішнього «вчителя» корегує оцінки імовірнісних характеристик, що фігурують в формальній моделі.

4. Для переходу від точкових характеристик імовірностей до їх довірчих інтервалів досліджується можливість застосування методів інтервального аналізу з використанням запропонованих авторами модифікацій здійснення арифметичних операцій над інтервальними величинами, в тому числі, добутків інтервалів у формі центр-радіус.

5. Доведено, що оригінальна процедура обчислення добутку інтервальних величин у формі центр-радіус розвиває існуючи раніш результати інших дослідників та усуває відомий недолік надмірної похибки при визначенні добутку інтервалів.

6. Запропонована формальна постановка задачі прийняття субоптимальних колективних рішень, які з заданою довірчою імовірністю забезпечують критерії оптимальності на множині можливих ситуацій.

7. Показано, що для будь-якої великої довірчої імовірності існує таке скінчене число спостережень, за якими можуть бути визначені оцінки імовірнісних характеристик, що забезпечують однозначне прийняття субоптимального колективного рішення.

8. На конкретних модельних прикладах продемонстрована конструктивність запропонованих математичних моделях прийняття колективних рішень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Авдулов П.В., Гойзман Э.И., Кутузов В.А. Экономико – математические методы и модели для руководителя. – М.: Экономика, 2008. – 232 с.
2. Айзерман М.А., Алексеров Ф.Т. Выбор вариантов. Основы теории. – М.: Наука, 1990. – 210 с.
3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
4. Барабаш Ю.Л. Коллективные статистические решения при распознавании. – М: Радио и связь, 1983. – 224 с.
5. Бідюк П.І., Кузнєцова Н.В., Терентьєв О.М. Система підтримки прийняття рішень для аналізу фінансових даних // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2011. – № 1. – С. 48–61.
6. Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н., Дробот Е.В. Метод косвенного определения интервалов весовых коэффициентов параметров для метризированных отношений между объектами // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 2. – С. 34–41.
7. Волошин А., Антосяк П. О задаче нахождения строгой результирующей ранжировки в виде медианы Кемени – Снелла // International Book Series "Information Science & Computing". – 2008. – № 7. – P. 91–98.
8. Волошин А., Маляр Н., Швалагин О. Нечеткий алгоритм последовательного анализа вариантов // International Book Series "Information Science&Computing". – 2009. – Vol. 3. – № 15. – P. 189–195.
9. Вожаков А.В., Гитман М.Б., Столбов В.Ю., Елисеев А.С. Алгоритм принятия коллективных решений в рамках ситуационного центра промышленного предприятия // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 2. – С. 63–74.
10. Гнатієнко Г.М., Снитюк В.Є. Експертні технології прийняття рішень. – К.: ТОВ «Маклаут», 2008. – 444 с.
11. Горбань И.И. Точечный и интервальный методы оценки параметров гиперслучайных величин // Математические машины и системы. – 2006. – № 2. – С. 3–14.

12. Городецкий В. И., Серебряков С. В. Методы и алгоритмы коллективного распознавания // Труды СПИИРАН. – 2006. – Вып. 3. – Том. 1. – С. 139–171.

13. Гупал А.М., Вагис А.А. Обучение на байесовских сетях // Проблемы управления и автоматики. – 2002. – № 3. – С. 106–111.

14. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974. – 491 с.

15. Дивак М.П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216 с.

16. Дивак М.П. Особливості побудови інтервальної системи алгебричних рівнянь та методу її розв’язку в задачах ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора // Індуктивне моделювання складних систем. – 2009. – Вип. 1. – С. 35–43.

17. Жуковська О.А., Дослідження інтервальних арифметичних операцій в класичному та розширеному просторах // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2008. – Т. 5. – № 5. – С.85–110.

18. Жуковська О.А. Дослідження закону дистрибутивності в розширеному інтервальному просторі // Журнал “Наукові вісті НТУУ КПІ”. – 2014. – № 4. – С. 53–59.

19. Жуковська О.А. Исследование нестандартных интервальных арифметических операций. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. – № 2. – С. 106–116.

20. Жуковская О.А. Интервальные вычисления в задачах оценки экспертных решений // Управляющие системы и машины. – 2012. – № 1 – С. 13–20.

21. Жуковская О.А. Исследование процедуры возведения в целую положительную степень направленного интервала в форме центр-радиус // Вопросы аналитической механики и ее применения. – К.: Ін-т математики НАН України. – 2004. – Т.1. – № 2. – С. 69–76.

22. Жуковська О.А. Метод обчислення добутку спрямованих інтервалів у формі центр-радіус в розширеному інтервальному просторі // Наукові вісті НТУУ КПІ”. – 2003. – № 6. – С. 144–149.

23. Жуковська О.А., Новицький В.В. Прямий метод обчислення добутку інтервалів у формі центр–радіус // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2003. – № 1. – С. 138–144.

24. Жуковська О.А., Одінцова К.О. Моделювання процесу прийняття кредитного рішення для подальшого інвестування в

нерухомість в умовах інтервальної невизначеності/ Журнал "Економічний вісник".– 2012. – № 9. – С. 471-477.

25. Жуковська О.А., Титаренко А.О. Дослідження випадків дистрибутивності в класичній інтервальній арифметиці // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2012. – Т. 9. – № 1. – С. 136–145.

26. Жуковська О.А., Титаренко А.О. Дослідження закону дистрибутивності в класичній інтервальній арифметиці для загального випадку // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2013. – № 4. – С. 38–45.

27. Жуковская О.А., Файнзильберг Л.С. Интервальное обобщение байесовской модели принятия коллективного решения в конфликтных ситуациях // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №3. – С. 133–144.

28. Жуковская О.А., Файнзильберг Л.С. Формальная оценка квалификации эксперта на основе байесовской модели и методов интервального анализа // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 103–115.

29. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процесов принятия решений // Математика сегодня. – М.: Знание, 1974. – С. 5–49.

30. Зайченко Ю.П. Оценка кредитных банковских рисков с использованием нечеткой логики // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2010. – № 2 . – С. 37–54.

31. Зайченко Е. Ю., Зайченко Ю.П. Многокритериальные задачи принятия решений в нечетких условиях // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2016. – № 4. – С. 79–87.

32. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. – К.: Слово, 2008. – 344 с.

33. Згуровский М.З., Зайченко Ю.П. Модели и методы принятия решений в нечетких условиях. – К.: Наук. думка, 2011. – 275 с.

34. Згуровский М.З, Палов А.А., Штанькевич А.С. Модифицированный метод анализа иерархий // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2010. – № 1. – С. 7–25.

35. Згуровский М.З., Панкратова Н.Д. Системный анализ. Проблемы Методология Приложения. – К.: Наук. думка, 2011. – 725 с.

36. Згуровский М.З., Бидюк П.И., Терентьев А.Н. Методы построения байесовских сетей на основе оценочных функций // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – Т. 44. – № 2. – С. 81–88.

37. Іваненко В.І., Дідук М.М. Прийняття рішення в умовах невизначеності // Енциклопедія кібернетики. – Київ: Головна редакція української радянської енциклопедії, 1973. – Т. 2. – С. 292–294.

38. Иванова-Швец Л.Н., Борисова Н.Н. Инновационно-ориентированное управление человеческими ресурсами: сущность, принципы, модель // Креативная экономика. – 2014. – № 3 (87). – С. 1–12.

39. Коваленко И.И., Швед А.В. Экспертные технологии принятия решений. – Николаев: Илион, 2013. – 216 с.

40. Крянев А.В., Тихомирова А.Н., Сидоренко Е.В. Групповая экспертиза инновационных проектов с использованием байесовского подхода // Экономика и математические методы. – 2013. – Том 49. – № 2. – С. 134–139.

41. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. – М: Наука, 1979. – 200 с.

42. Мащенко С.О. Исследование стабильности равновесий на основе принципа индивидуальной оптимальности // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 4. – С. 162–169.

43. Мащенко С.О. Индивидуально-оптимальные равновесия некооперативных игр в отношениях предпочтения // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 1. – С. 171–179.

44. Мащенко С.О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 73–81.

45. Миркин Б.Г. Проблемы группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.

46. Мулен Э. Корпоративное принятие решений. Аксиомы и модели: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

47. Муромцев Д.Ю., Орлова Л.П., Козлов А.И. Принятие решений с использованием байесовского подхода и экспертных оценок // Вестник ТГТУ. – 2003. – Том 9. – № 1. – С. 15–23.

48. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 107 с.

49. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 228 с.

50. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

51. Растригин Л.А., Эренштейн Р.Х. Метод коллективного распознавания. – М.: Энергоиздат, 1981. – 79 с.

52. Рязанов В.В., Ткачев Ю.И. Восстановление зависимости на основе байесовской коррекции коллектива распознающих алгоритмов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Том 50. – № 9. – С. 1687–1696.

53. Саати Т. Принятие решений: Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.

54. Тоценко В.Г. Метод підтримки прийняття рішень на основі цільового динамічного оцінювання альтернатив з урахуванням ймовірностей їх реалізації // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2001. – Т. 3. – № 4. – С. 102–109.

55. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. – Киев: Наукова думка, 2002. – 381 с.

56. Файнзильберг Л.С. Байєсова схема принятия коллективных решений в условиях противоречий // Проблемы управления и информатики. – 2002. – №3. – С.112–122.

57. Файнзильберг Л.С. Обучаемая система поддержки принятия коллективного решения группы независимых экспертов // Управляющие системы и машины. – 2003. – № 4. – С. 62–67.

58. Файнзильберг Л.С., Жуковская О.А. Формализованная оценка квалификации экспертов в задачах диагностики // Матеріали VII Міжнародної науково-технічної конференції “Системний аналіз та інформаційні технології”. – Київ: ІПСА НТУУ “КПІ”, 2005. – С. 85.

59. Файнзильберг Л.С., Жуковская О.А. Интервальная модель принятия решений коллективом независимых экспертов // Управляющие системы и машины. – 2007. – № 4. – С. 74–80.

60. Файнзильберг Л.С., Жуковская О.А. Интервальная модель принятия коллективного решения в условиях риска // Системи підтримки прийняття рішень. Теорія і практика: Збірник доповідей науково-практичної конференції з міжнародною участтю. – Київ: ІПММС НАНУ, 2006. – С.113–115.

61. Файнзильберг Л.С., Жуковская О.А. Гарантированная оценка квалификации экспертов в задачах принятия решений // Системи підтримки прийняття рішень. Теорія і практика: Збірник доповідей науково-практичної конференції з міжнародною участю. – К.: ІПММС НАНУ, 2005. – С. 59–62.

62. Файнзильберг Л.С. Информационные технологии обработки сигналов сложной формы. Теория и практика. – Киев: Наукова Думка, 2008. – 333 с.

63. Файнзильберг Л.С. Математические методы оценки полезности диагностических признаков. – Киев: Освита Украины, 2010. – 152 с.

64. Файнзильберг Л.С., Жук Т.Н. Гарантированная оценка эффективности диагностических тестов на основе усиленного ROC-анализа // Управляющие системы и машины. – 2009. – № 5. – С.3–13.

65. Файнзильберг Л.С. Основы фазаграфии. – Киев: Освита Украины, 2017. – 264 с.

66. Харшаньи Д., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. – С.Пб.: Экономическая школа, 2001. – 424 с.

67. Шлезингер М.И., Главач В. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. – К.: Наукова думка, 2004. – 545 с.

68. Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004. – 204 с.

69. Asan G., Sanver R. Another Characterization of the Majority Rule // Economics Letters. – 2002. – Vol. 75. – No.3. – P. 409–413

70. Ashtiani B., Haghighirad F., Montazer G.A. Extension of Fuzzy TOPSIS Method based on Interval-valued Fuzzy Sets // Applied Soft Computing. – 2009. – No. 9. – P. 457–461.

71. Bagui S.C., Pal N.R. A Multistage Generalization of the Rank Nearest Neighbor Classification Rule// Pattern Recognition Letters, 1995. – V.16. – No. 6. – P. 614–801.

72. Balinski M., Laraki R. A Theory of Measuring, Electing and Ranking // Proceeding of the National Academy of Sciences. – 2007. – Vol. 104. – No. 21. – P. 8720–8725.

73. Banathy, B.H., Jenlink P.M. Dialogue as a Means of Collective Communication. – New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2005. – 162 p.

74. Barsade S. The Ripple Effect: Emotional Contagion and its Influence on Group Behavior // Administrative Science Quarterly. – 2002. – Vol. 47. –No. 4. – P. 644–675.

75. Barsade S., Gibson D. Why does Affect Matter in Organizations? Academy of Management Perspectives. – 2007. –Vol. 21. – No.1. – P. 36–59.

76. Boran F.E., Gen S., Kurt M., Akay D. A Multi-criteria Intuitionistic Fuzzy Group Decision Making for Supplier Selection with TOPSIS method // Expert System with Application. – 2009. –Vol. 36. – No. 8. – P.11363–11368.

77. Brams S., Fishburn P. Voting Procedures // In Handbook of Social Choice and Welfare. –Amsterdam: Elsevier, 2002. – P. 173–236.

78. Branke J., Deb K., Miettinen K., Slowinski R. Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches. – Germany: Springer-Verlag, 2008. – 470 p.

79. Brodbeck F.C., Kerschreiter R., Mojzisch A., Schulz-Hardt S. Group Decision Making under Conditions of Distributed Knowledge: The Information Asymmetries Model // Academy of Management Review. – 2007. – Vol. 32. – P. 459–479.

80. Chen S.M. Extensions of the TOPSIS for Group Decision-making under Fuzzy Environment // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – No. 114. – P.1–9.

81. Chen S.M., Lee L.W. Fuzzy Multiple Attributes Group Decision-making based on the Ranking Values and the Arithmetic Operations of Interval Type-2 Fuzzy Sets // Expert Systems with applications. – 2010. – No. 37. – P. 824–833.

82. Conitzer V., Sandholm T., Lang J. When are Elections with Few Candidates Hard to Manipulate? // Journal of the ACM. – 2007. – Vol. 54. – No. 3. – Article 14. – 33 p.

83. Conitzer V., Sandholm T. Common Voting Rules as Maximum Likelihood Estimators // Proceedings of the 21st Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-05). – 2005. – P. 145–152.

84. Davenport A., Kalagnanam J. A computational study of the Kemeny rule for preference aggregation. In Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI) – 2004. – San Jose, CA. – P. 697–702.

85. Dietrich, F. The premises of Condorcet's Jury Theorem are not Simultaneously Justified // Journal of Social Epistemology. – 2008. – Vol. 5. – No. 1. – P. 56–73.

86. Dijkstra J., Assen M.A., Stokman F.N. Outcomes of Collective Decisions with Externalities Predicted // Journal of Theoretical Politics. – 2008. – No. 20. – P. 415–442

87. Dowding K., Van Hees M. In Praise of Manipulation // British Journal of Political Science. – 2007. – Vol. 38. – No.1. – P. 1–15.

88. Druzdzel M.K., Gaag L.C. Building Probabilistic Networks: Where do the Numbers Come From // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. – 2000. – Vol. 12. – No. 4. – P. 481–486.

89. Fainzilberg L.S. Conditions of Utility of Diagnostic Tests from the Point of View of the Statistical Theory of Decision Making // Journal of Automation and Information Sciences. – 2003. – Vol. 35. – Issue 4. – P. 63–73.

90. Faliszewski P., Procaccia A. AI's War on Manipulation: Are We Winning? // AI Magazine. – 2010. – Vol 31. – No. 4. P. 53–64.

91. Fenton N. Neil M. Comparing Risks of Alternative Medical Diagnosis using Bayesian Arguments // Journal of Biomedical Informatics. – 2010. – Vol. 43. – P. 485–495.

92. Govindan K., Jepsen M.B. ELECTRE: A Comprehensive Literature Review on Methodologies and Applications // Europien Journal of Operation Research. – 2016. – Vol. 250. – Issue 1. – P. 1–29.

93. Grzegorzewski P. Distances between Intuitionistic Fuzzy Sets and/or Interval-valued Fuzzy Sets based on the Hausdorff metric // Fuzzy Set and Systems. – 2004. – No. 148. – P. 319–328.

94. Hayes B. A Lucid Interval // American Scientist. – 2003. – Vol. 91. – No. 6. – P. 484–488.

95. Hickey T., Ju Q., van Emden H. Interval arithmetic: From Principles to Implementation // Journal of the ACM (JACM). – 2001. – Vol. 48. – Issue 5. – P. 1038–1068.

96. Hijazi Y., Hagen H., Hansen C.D., Joy K.I. Why Interval Arithmetic is so Useful // Second workshop of the DFG's International Research Training Group “Visualization of Large and Unstructured Data Sets” (Kaiserslautern, Germany). – 2007. – P. 148–163.

97. Hinsz V.B., Nickell G.S. Positive Reactions to Working in Groups in a Study of Group and Individual Goal Decision-Making. – 2004. – Group Dynamics: Theory, Research, and Practice. – 2004. – Vol. 8. – No. 4. – 253–264.

98. Ho T.K., Hull J.J., Srihari S.N. Decision Combination in Multiple Classifier Systems//IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994. – V.16. – No. 1. – P. 66–75.

99. Hong D.H., Lee S. Some Algebraic Properties and a Distance Measure for Interval-valued Fuzzy Numbers // Information Sciences. 2002. – No. 148. – P. 1–10.

100. Hsu C.C., Standford B.A. The Delphi Technique: Making Sense of Consensus // Practical Assessment, Research & Evaluation. – 2007. – Vol. 12. – No. 10. – P. 1–8.

101. Ivanenko V.I. Decision Systems and Nonstochastic Randomness. – Springer, 2010. – 272 p.

102. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied Interval Analysis. – Berlin: Springer, 2001. – 373 p.

103. Jensen F.V., Nielsen T.D. Bayesian Networks and Decision Graphs. – Berlin: Springer, 2007. – 457 p.

104. Kittler J., Hatef M., Duin R.P.W., Matas J. On combining classifiers // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1998. – No. 20. – P. 226–239.

105. Kittler J., Hatef M., Duin R. P. W., Matas J. On Combining Classifiers // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1998. – No. 20(3). – P. 226–239.

106. Kittler J., Roli F. (Eds.). Multiple Classifier Systems // Lecture Notes in Computer Science. – 2000. – No. 1857.

107. Kittler J., Roli F. (Eds.). Multiple Classifier Systems // Lecture Notes in Computer Science. 2001. – No. 2096.

108. Lima Junior F.R., Osiro L., Carpinettia L.C.R. A Comparison between Fuzzy AHP and Fuzzy TOPSIS Methods to Supplier Selection Applied // Soft Computing. – 2014. – No. 21. – P. 194–209.

109. Lu L., Yuan Y.C., McLeod P.L. Twenty-Five Years of Hidden Profiles in Group Decision Making A Meta-Analysis // Personality and Social Psychology Review. – 2012. – Vol. 16. – No. 1. – P. 54–75.

110. Lu J., Zhang G., Ruan Da, Wu Fengjie Multi-Objective Group Decision Making. Methods, Software and Applications with Fuzzy Set Techniques // Series in Electrical and Computer Engineering. – London: Imperial College Press, 2007. – 387 p.

111. Maheswari U.A., Kumari P. A Fuzzy Mathematical Model for Multi Criteria Group Decision Making-An Application in Supply Chain Management // International Journal of Computer Applications. – 2012. – Vol. 54. – No. 7. – P. 5–10.

112. Malinas, G. Simpson's Paradox: A logically benign, empirically treacherous hydra // The Monist. – 2001. – Vol. 84. – No. 2. – P. 265–284.

113. Markov S.M. Extended Interval Arithmetic Involving Infinite Intervals // Mathematica Balkanika, New Series. – 1992. – Vol. 6. – P. 269–304.

114. Markov S.M. On directed interval arithmetic and its applications // J.UCS. – 1995. – Vol. 1. – No. 7. – P.510–521.

115. Mendel J.M., John R.I., Liu F. Interval Type-2 Fuzzy Logical Systems Made Simple // IEEE Transactions on fuzzy systems. – 2006. – No. 14. – P. 808–821.

116. Moore R.E., Kearfott R. B., Cloud M. J. Introduction to Interval Analysis. – Philadelphia:SIAM, 2009. – 223 p.

117. Napel S., Widgran M. The Possibility of a Preference-Based Power Index // Journal of Theoretical Politics. – 2005. – Vol. 17. – No. 3. – P. 377–387.

118. Nasab F.G., Rostamy-Malkhalifeh M. Extension of TOPSIS for Group Decision-Making Based on the Type-2 Fuzzy Positive and Negative Ideal Solutions // International Journal Industrial Mathematics. – 2010. – Vol. 2. – No. 3. – P. 199–213.

119. Nurmi, H. Voting Theory // E-Democracy: A Group Decision and Negotiation Perspective. – Berlin: Springer, 2010. – P. 101–124.

120. Pattanaik P.K. Voting and collective choice. Some aspects of the theory of group decision making. – Cambridge: Univ. Press, 1975. – 265 p.

121. Pigozzi G. Two aggregation paradoxes in social decision making: the Ostrogorski paradox and the discursive dilemma // Episteme: A Journal of Social Epistemology. – 2005. – Vol. 2. – No. 2. – P. 33–42.

122. Pranke J., Mandler E. A Comparison of Two Approaches for Combining the Votes of Cooperating Classifiers // Proceedings 11-th IAPR International Conference on Pattern Recognition, 1992. – Vol. 2. – P. 611–614.

123. Rasmusen E. Games and Information: An Introduction to Game Theory, 4th Edition. – Oxford: Wiley-Blackwell, 2006. – 445 p.

124. Rathi K., Balamohan S. A Mathematical Model for Subjective Evaluation of Alternatives in Fuzzy Multi-Criteria Group Decision Making Using COPRAS Method // International Journal of Fuzzy Systems. – 2017. – Vol. 19. – Issue 5. – P. 1290–1299.

125. Rothwell, E.J., Cloud, M.J. Automatic error analysis using intervals // IEEE Trans. Educ. – 2012. – Vol. 55. – No. 1. – P. 9–15.

126. Saari D. Mathematical Structure of Voting Paradoxes: II. Positional Voting // Economic Theory. – 2000. – Vol. 15. – No. 1. – P.55–102.

127. Sadi E.S. Computerized Argument Delphi Technique // IEEE Journals & Magazines. – 2015. – Vol. 3. – P. 368–380.

128. Suchan C., Heidhues P. A Group Bargaining Solution // Mathematocal Social Sciences. – 2004. – Vo. 48. – Issue 1. – P. 37–53.

129. Sunaga T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. – 1958. – № 2. – P. 547–564.

130. Todorovski L., Dzeroski S. Combining Multiple Models Classifiers with Meta Decision Trees // Machine Learning Journal. – 2003. – Vol. 50. – No. 3. – P. 223–249.

131. Totsenko V.G. On Problem of Reversal of Alternatives Ranks while Multicriteria Estimating // Journal of Automation and Information Sciences. – 2006. – Vol. 38. – Issue 6. – P. 1–11.

132. Uma Maheswari A., Kumari P. A Fuzzy Mathematical Model for Multi Criteria Group Decision Making-An Application in Supply Chain Management // International Journal of Computer Applications. – 2012. – Vol. 54. – No. 7. – P. 5–10.

133. Wang Y.J., Lee H.S. Generalizing TOPSIS for Fuzzy Multiple-criteria Group Decisionmaking // An international computing and mathematics with applications. – 2007. – No. 53. – P. 1762–1772.

134. Woeginger G. A new characterization of the majority rule // Economic Letters. – 2003. – Vol. 81. – No. 1. – P.89–94.

135. Woods K.S., Bowyer K., Kergelmeyer W.P. Combination of multiple classifiers using local accuracy estimates // Proc. of CVPR98, 1996. – P. 391–396.

136. Wu Z., Ahmad J., Xu J. A group decision making framework based on fuzzy VIKOR approach for machine tool selection with linguistic information // Applied Soft Computing. – 2016. – Vol. 42. – P. 314–324.

137. Xu L., Krzyzak A., Suen C.Y. Methods of combining multiple classifiers and their applications to handwriting recognition// IEEE Trans. SMC. –1992. – Vol. 22. – No. 3. – P. 418–435.

138. Xu Z. Group Decision Making based on Multiple Types of Linguistic Preference Relations // Information Science. – 2008. – Vol 178. – No. 15. – P. 452–467.

139. Yousuf M.I. Using Experts’ Opinions through Delphi Technique // Practical Assessment Research & Evaluation. – Vol. 12. – No. 4. – P. 1–8.

140. Zanakis S.H., Solomon A., Wishart N., Dublish D. Multi-Attribute Decision Making: A Simulation of Select Methods // European Journal of Operational Research. –1998. –Vol.107. – No. 3. – P.507–529.

141. Zgurovsky M.Z., Totsenko V.G., Tsyganok V.V. Group Incomplete Paired Comparisons with Account of Expert Competence // Mathematical and Computer Modelling. – 2004. – Vol. 39. – № 4(5). – P. 349–361.

142. Zhang G., Lu J. An Integrated Group Decision Making Method with Fuzzy Preference for Alternatives and Individual Judgments of Selection Criteria // Group Decision and Negotiation. – 2003. –Vol. 12. – Issue 6. – P. 501–515.

Наукове видання

О.А.Жуковська, Л.С.Файнзільберг

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ КОЛЕКТИВНИХ РІШЕНЬ

Підписано до друку 26.12.2017 р.
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 10,1.
Наклад 500 прим.

ВД «Освіта України»
ФО-П Маслаков Руслан Олексійович
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК №4726 від 29.05.2014 р.
Тел. (095) 699-25-20, (098) 366-48-27.
E-mail: osvita2005@gmail.com, www.rambook.com.ua

ЖУКОВСЬКА Ольга Анатоліївна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичного моделювання
економічних систем факультету
менеджменту та маркетингу
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського».

Автор 50 наукових та науково-методичних
праць, зокрема, 3 навчальних посібників.

E-mail: zhukovskaya71@gmail.com

ФАЙНЗІЛЬБЕРГ Леонід Соломонович,
доктор технічних наук, головний науковий
співробітник Міжнародного
науково-навчального центру інформаційних
технологій та систем
НАН України і МОН України.

Автор 350 наукових праць, зокрема,
6 монографій

E-mail: fainzilberg@gmail.com
http://fainzilberg.irtc.org.ua/
http://fainzilberg.simplesite.com/