УДК 519.672:534.14:62.53

О.Ю. Швець, В.О. Сіренко

РЕГУЛЯРНІ ТА ХАОТИЧНІ АТРАКТОРИ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В БАКУ ПРИ ОБМЕЖЕНОМУ ЗБУДЖЕННІ

Вступ

Багато сучасних машин, механізмів і технічних пристроїв як конструктивні елементи мають циліндричні баки, частково заповнені рідиною. Тому дослідження коливань вільної поверхні рідини в циліндричних баках викликає великий науковий інтерес [1, 2].

Резонансні коливання рідини в циліндричних та сферичних баках досить добре описуються маятниковими моделями [3–6]. Явище резонансу саме по собі як переважні коливання по одній або кількох модах дає змогу звести дослідження континуальних систем до їх маловимірних моделей. Це добре відома процедура [6], при застосуванні якої вдається вилучити з розгляду вплив нерезонансних мод коливань на динаміку резонансних мод. Коли ця процедура застосовується в задачах динаміки рідини в циліндрі або в сфері при резонансі, то вона виділяє, як мінімум, рівняння для двох спряжених мод, які мають однакові власні частоти і відповідають власним функціям по окружній координаті Θ виду $\cos n\Theta$ і $\sin n\Theta$. У випадку близьких власних частот, що відповідають модам з різними хвильовими параметрами, ця процедура [7] зводить задачу до чотирьох рівнянь, причому для резонансних мод враховується їх зв'язок і взаємовплив. Взаємозв'язок мод можна розглядати як шлях до виникнення детермінованого хаосу в досліджуваних динамічних системах [3, 4, 6].

Іншим важливим прикладом взаємозв'язку є взаємодія коливальних систем із джерелами збудження коливань. Якщо джерело збудження коливань має потужність, порівнянну з потужністю, що споживається коливальною системою, то такі системи називаються неідеальними за Зоммерфельдом–Кононенком. Переважна більшість реальних коливальних систем є неідеальними. У цих випадках нехтування зворотним зв'язком коливальної системи на джерело збудження коливань призводить до грубих помилок в описі динаміки системи. Зокрема, може бути повністю втрачена інформація про існуючі детерміновані хаотичні режими усталених коливань [6].

Постановка задачі

Дана стаття присвячена вивченню властивостей усталених режимів взаємодії як регулярних, так і хаотичних коливань вільної поверхні рідини в циліндричних твердих баках і процесу обертання вала електродвигуна обмеженої потужності, що збуджує просторові коливання бака. Проведені дослідження є продовженням і розширенням досліджень праць [6, 8].

Математична модель системи електродвигун–бак з рідиною

Нехай електродвигун D з'єднаний через кривошипно-шатунний механізм із твердим циліндричним баком, частково наповненим рідиною (рис. 1). Обертання вала електродвигуна можна описати, знаючи закон зміни кута обертання $\Psi(t)$. Коли кривошип a повертається на кут $\Psi(t)$, бак одержує переміщення в просторі $u(t) = a\cos\Psi(t)$, яке має складові по осях O^*x^* і O^*z^* абсолютної системи координат відповідно $u_x = a\sin\Psi_0\cos\Psi(t)$ і $u_z = a\cos\Psi_0\cos\Psi(t)$, де Ψ_0 – просторовий кут, який утворюють площина платформи бака та горизонтальна площина

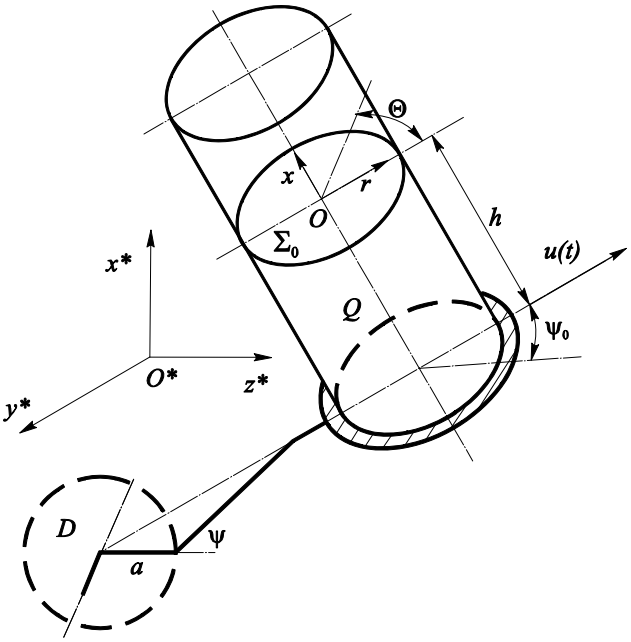

Рис. 1. Схема системи електродвигун–бак з рідиною

$O^*y^*z^*$. При цьому вважаємо, що вісь вала двигуна паралельна осі O^*y^*, тобто горизонтальні переміщення бака мають тільки складову u_z.

Для опису коливань вільної поверхні рідини введемо циліндричну систему координат $Oxr\Theta$ з початком у точці O перетину осі оболонки та незбуреної поверхні рідини. Рівняння вільної поверхні рідини ζ запишемо у вигляді $x = \zeta(r, \Theta, t)$. Вважаємо рідину нев'язкою та нестисливою з щільністю ρ, що заповнює циліндричний бак радіуса R з поперечним перерізом S до глибини $x = -h$. Напрямок осі O^*z^* вважаємо таким, що збігається з напрямком полярної осі Or при $\Theta = 0$.

Для опису руху рідини в баку введемо в розгляд потенціал швидкості рідини $\varphi(x, r, \Theta, t)$, для якого гранична задача відповідно до праць [3, 4, 6, 8] формулюється таким чином:

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (-h < x < \zeta;\ r, \Theta \in S), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=0} < \infty;\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0;\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=-h} = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \nabla\zeta\nabla\varphi = \frac{\partial\zeta}{\partial t}\Big|_{x=\zeta};\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\Big|_{\Theta=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\Big|_{\Theta=2\pi}.$$

Подамо функції $\zeta(r, \Theta, t)$ і $\varphi(x, r, \Theta, t)$ у вигляді рядів по власних модах коливань:

$$\zeta(r, \Theta, t) = \\ = \sum_{ij}\left[\zeta^c_{ij}(t)\frac{J_i\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right)}{N_{ij}}\cos i\Theta + \zeta^s_{ij}(t)\frac{J_i\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right)}{N_{ij}}\sin i\Theta\right],$$

$$\varphi(x, r, \Theta, t) = \\ = \sum_{ij}[\varphi^c_{ij}(t)X_{ij}(x, r)\cos i\Theta + \varphi^s_{ij}(t)X_{ij}(x, r)\sin i\Theta], \tag{2}$$

де ζ^c_{ij}, ζ^s_{ij} і φ^c_{ij}, φ^s_{ij} – невідомі амплітуди нормальних мод; $J_i(\mu_{ij}r/R)N^{-1}_{ij}\cos i\Theta$, $J_i(\mu_{ij}r/R)\times \times N^{-1}_{ij}\sin i\Theta$, $X_{ij}\cos i\Theta$, $X_{ij}\sin i\Theta$ – власні моди в лінійній апроксимації задачі про коливання ідеальної рідини в циліндричній оболонці.

Нехай $\Psi_0 = 0$, тобто коливання бака відбуваються в горизонтальній площині вздовж осі O^*z^*. Крім того, покладемо, що швидкість вала двигуна $\dot\Psi(t)$ в усталеному режимі близька до власної частоти ω_{11} коливань вільної поверхні рідини по перших антисиметричних модах. Отже, реалізуються умови резонансного збудження форм $\zeta^c_{11}(t)J_1(\mu_{11}r/R)N^{-1}_{11}\cos\Theta$, $\zeta^s_{11}(t)J_1 \times \times (\mu_{11}r/R)N^{-1}_{11}\sin\Theta$. Введемо в розгляд малий додатний параметр ε [6, 8]:

$$\varepsilon = \left(\frac{aQ_{11}\mu^2_{11}}{R^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{3}$$

де $Q_{11} = 0{,}4968R$; $\mu_{11} = 1{,}8412$; $N_{11} = 0{,}3455$; $(a/R) = 0{,}16$.

Позначимо β розлагодження частот $\dot\Psi(t)$ і ω_{11}. Припустимо, що виконується співвідношення

$$\dot\Psi - \omega_{11} = \frac{1}{2}\varepsilon^2\beta(t); \tag{4}$$

тут

$$\omega_{11} = \sqrt{g\left(\frac{\mu_{11}}{R}\right)\mathrm{th}\left(\frac{\mu_{11}h}{R}\right)}.$$

Тоді, як встановлено в [6, 8], процес взаємодії між коливаннями вільної поверхні рідини по домінантних резонансних модах та обертання вала електродвигуна обмеженої потужності описується системою п'яти диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_1}{d\tau} = \alpha_1 p_1 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + \\ + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2,$$

$$\frac{dq_1}{d\tau} = \alpha_1 q_1 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + \\ + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 1,$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} = N_3 + N_1\beta - \mu_1 q_1, \tag{5}$$

$$\frac{dp_2}{d\tau} = \alpha_1 p_2 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - \\ - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1,$$

$$\frac{dq_2}{d\tau} = \alpha_1 q_2 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - \\ - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1.$$

Тут p_1, q_1 і p_2, q_2 – коефіцієнти розкладу амплітуд коливань вільної поверхні рідини відповідно по першій та другій основних домінантних модах; α – наведений коефіцієнт сил в'язкого демпфування; μ_1 – коефіцієнт пропорційності вібраційного моменту; N_1 – кут нахилу статичної характеристики електродвигуна [10]. Параметри A, B є константами, що залежать від радіуса бака та висоти налитої в нього рідини [3, 4]. Величина N_3 визначається за формулою

$$N_3 = \frac{1{,}417808R^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\omega_{11}}[N_0 - N_1\omega_{11}],$$

де R – радіус оболонки; a – довжина кривошипа; N_0 – стала складова статичної характеристики електродвигуна.

Система рівнянь (5) використовується як основна математична модель для дослідження сталих резонансних коливань вільної поверхні рідини.

Дослідження усталених режимів системи

Система (5) є істотно нелінійною системою диференціальних рівнянь п'ятого порядку, тому знаходження її аналітичного розв'язку в загальному випадку неможливе. Для подолання цих труднощів використовується комплекс чисельних методів та застосовуються сучасні засоби комп'ютерного моделювання. Загальна методика проведення таких комп'ютерних досліджень детально описана в [6, 8]. Для проведення комп'ютерних досліджень динамічної системи електродвигун–бак з рідиною було створено оригінальний програмний пакет.

При вивченні динамічних систем важливим етапом є побудова карти динамічних режимів, яка являє собою діаграму на площині, по осях координат якої відкладені значення двох довільних параметрів системи та зазначені області різних динамічних режимів. Методика побудови карти динамічних режимів розроблена на підставі практичних критеріїв існування усталеного режиму того чи іншого типу і насамперед базується на побудові та аналізі спектра ляпуновських характеристичних показників (ЛХП) [6]. Особливо ретельно необхідно досліджувати ситуації, при яких абсолютна величина ляпуновських показників досить близька до похибки методу чисельного інтегрування. Такі ситуації можуть виникати на межі областей між різними типами динамічних режимів. У даних ситуаціях для точного визначення типу усталеного режиму проводиться додатковий аналіз фазових портретів, спектральних густин, перерізів і відображень Пуанкаре. Після ідентифікації типу усталеного режиму при заданих значеннях параметрів на карту наноситься точка відповідного кольору.

Нехай параметри системи (5) набувають таких значень: $A = 1{,}12$; $B = -1{,}531$; $\mu_1 = 0{,}5$; $N_3 = -0{,}1$. Як біфуркаційні виберемо параметри α і N_1. На рис. 2, *а* наведено один із листів карти динамічних режимів системи електродвигун–бак з рідиною, який було отримано в результаті аналізу й обробки результатів чисельних розрахунків. Білим областям карти на рис. 2, *а* відповідають положення рівноваги системи,

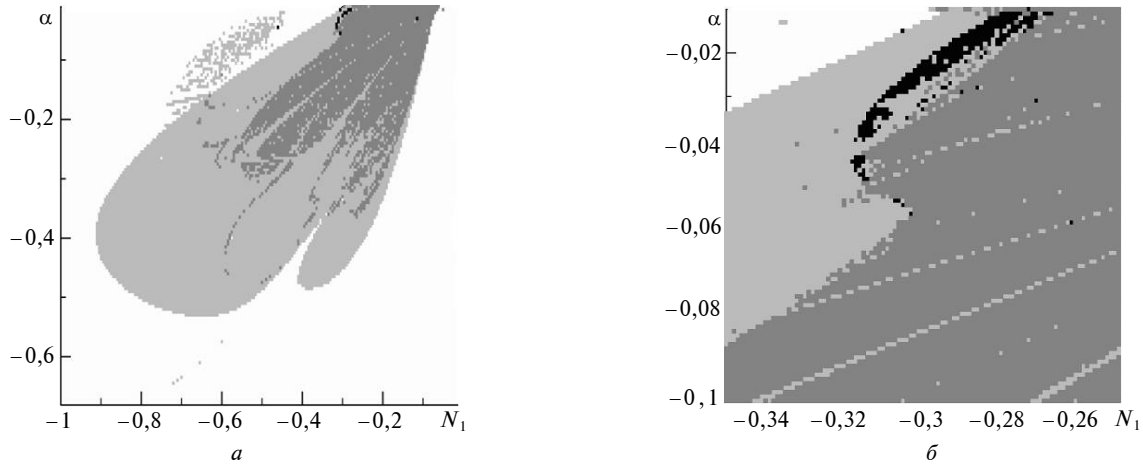

Рис. 2. Карти динамічних режимів системи при зміні параметрів N_1 і α

чорним кольором виділені області існування квазіперіодичних режимів, світло-сірим кольором показані області існування періодичних динамічних режимів, темно-сіра область карти відповідає детермінованим хаотичним режимам. Слід особливо зазначити той факт, що вдалося знайти області існування квазіперіодичних атракторів, які не були знайдені у всіх попередніх дослідженнях цієї системи [3, 4, 6–8]. Для більшої наочності розташування областей динамічних режимів різних типів було додатково побудовано фрагмент карти (рис. 2, *б*) з меншим кроком зміни біфуркаційних параметрів.

На рис. 2, *б* при досить малих α помітна область існування квазіперіодичних атракторів. Також на цьому рисунку видно, що в область існування хаотичних атракторів врізаються невеликі за площею області існування граничних циклів. Такі області отримали назву “вікна періодичності” [6]. Загалом (рис. 2, *а* і *б*) при зміні біфуркаційних параметрів у системі (5) існують чотири типи динамічних режимів: положення рівноваги, сигнатура спектра ЛХП в яких подається у вигляді $\langle -,-,-,-,- \rangle$; граничні цикли з сигнатурою спектра ЛХП $\langle 0,-,-,-,- \rangle$; квазіперіодичні атрактори, в яких сигнатура спектра ЛХП має вигляд $\langle 0,0,-,-,- \rangle$; хаотичні атрактори, що мають сигнатуру спектра ЛХП $\langle +,0,-,-,- \rangle$.

Для більш детального дослідження атракторів системи, які виникають при зміні її біфуркаційних параметрів, розглянемо горизонтальний переріз карти динамічних режимів при значенні параметра $\alpha = -0,018$. Розглянемо можливі типи атракторів системи, а також сценарії переходу від регулярного режиму до хаотичного при зміні параметра N_1.

При $-0,3115 \le N_1 < -0,2937$ в системі (5) існують стійкі граничні цикли 1-тактної структури. Фазовий портрет такого циклу є топологічним інваріантом кола. При збільшенні біфуркаційного параметра до значення $N_1 = -0,2937$ існуючий граничний цикл втрачає стійкість і в результаті біфуркації Неймарка виникає квазіперіодичний атрактор з сигнатурою спектра ЛХП $\langle 0,0,-,-,- \rangle$. На рис. 3, *а* наведено проекцію фазового портрета виниклого квазіперіодичного атрактора, побудовану при $N_1 = -0,2844$. Траєкторії квазіперіодичного атрактора всюди щільно покривають тороїдальну поверхню. Подальше незначне збільшення значення параметра ($N_1 = -0,2843$) призводить до руйнування тора й виникнення резонансного циклу (рис. 3, *б*). Сигнатура спектра ЛХП даного циклу має вигляд $\langle 0,-,-,-,- \rangle$. При руйнуванні тора спостерігається явище синхронізації (ефекту захоплення частоти), внаслідок чого в системі виникає резонанс [9]. Траєкторія, зробивши скінченну кількість обертів по поверхні тора, замикається, при цьому утворюється складний, але періодичний рух – резонансний граничний цикл на торі.

При подальшому зростанні значення N_1 знову відбувається біфуркація Неймарка і знову виникає квазіперіодичний атрактор, проекцію фазового портрета якого побудовано при $N_1 = -0,2831$ і наведено на рис. 3, *в*. Ця тороїдальна поверхня істотно відрізняється за формою від попередньої (рис 3, *а*). Крім того, вона локалізується в меншому об’ємі фазового простору. Але якісно атрактори, зображені на рис. 3, *а* і *в*, належать до одного типу граничних множин – квазіперіодичного атрактора. Далі в системі (5) відбуваються чергові біфуркації типу “цикл-тор-цикл”, в результаті яких виникає граничний цикл, проекцію якого наведено на рис. 3, *г*. При $N_1 = -0,28243$ цей граничний цикл зникає і в системі виникає хаотичний атрактор, проекцію фазового портрета якого наведено на рис. 3, *д*. Сигнатура спектра ЛХП виниклого хаотичного атрактора має вигляд $\langle +,0,-,-,- \rangle$. Перехід від регулярного режиму до хаотичного здійснюється за сценарієм переміжності Помо–Манневілля [9]. Зауважимо, що хаотичний атрактор з рис. 3, *д* дещо нагадує за формою квазіперіодичні атрактори (див. рис. 3, *а*). Але між квазіперіодичним і хаотичним атракторами існує багато принципових відмінностей. Зокрема, старший ляпуновський показник хаотичного атрактора завжди додатний, а відповідний показник квазіперіодичного атрактора – нульовий. Хаотичний атрактор утворює нестійкі за Ляпуновим траєкторії, а квазіперіодичний – стійкі. Для квазіперіодичного атрактора завжди можна передбачити час повернення траєкторії в заданий окіл атрактора, для хаотичного ж атрактора такі повернення принципово непередбачувані.

Далі на рис. 3 наведено проекції існуючих у системі (5) резонансних циклів (рис. 3, *е–ж*), які виникають внаслідок біфуркацій руйнування торів, і хаотичного атрактора, проекція фа-

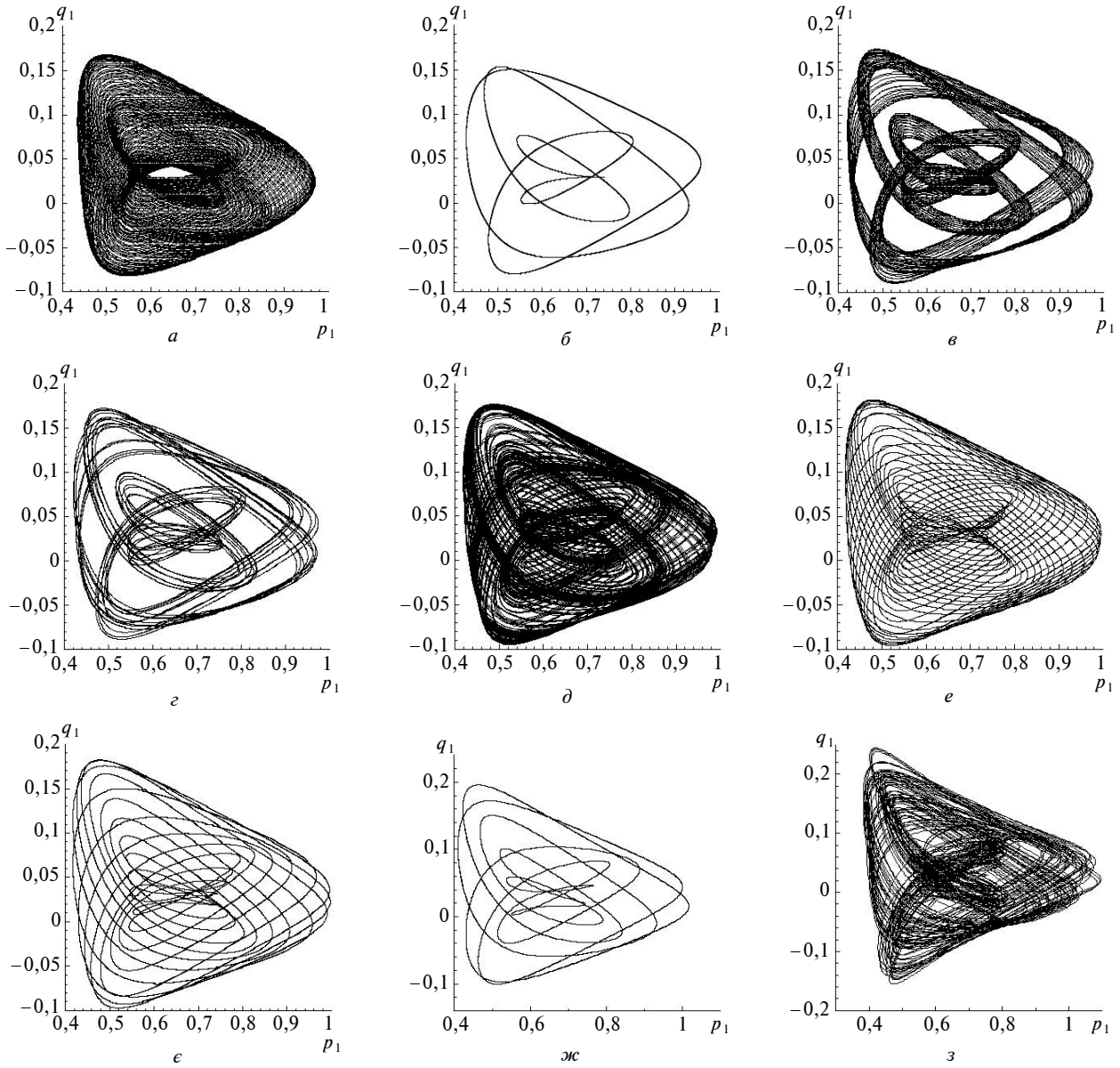

Рис. 3. Проекції фазових портретів граничних циклів: $N_1 = -0,2843$ (*б*), $N_1 = -0,2827$ (*г*), $N_1 = -0,28224$ (*е*), $N_1 = -0,28217$ (*є*), $N_1 = -0,27950$ (*ж*); квазіперіодичних атракторів: $N_1 = -0,2844$ (*а*), $N_1 = -0,2831$ (*в*); хаотичних атракторів: $N_1 = -0,28243$ (*д*), $N_1 = -0,27949$ (*з*)

зового портрету якого побудована при значенні $N_1 = -0,27949$ (рис. 3, *з*). Як і раніше, перехід до хаосу при зростанні N_1 відбувається через переміжність за Помо–Манневіллем. Цікаво, що перехід до хаосу при зменшенні параметра N_1, тобто з правого боку в просторі параметрів, може відбуватися внаслідок руйнування граничних торів (див. рис. 2, *в*).

На рис. 4, *а*–*е* наведено Фур'є-спектри деяких розглянутих вище атракторів. Фур'є-спектри граничних циклів (рис. 4, *а*, *г*) є дискретними та гармонічними. Локальні максимуми за частотою ω рівновіддалені один від одного. Фур'є-спектри квазіперіодичних атракторів (рис. 4, *б*, *в*) є дискретними, але не гармонічними. Вони також мають чіткі локальні максимуми за частотою ω, але ці максимуми не рівновіддалені. Нарешті, Фур'є-спектри хаотичних атракторів (рис. 4, *д*, *е*) будуть неперервними. Наявність в атрактора неперервного Фур'є-спектра може бути ще однією ознакою

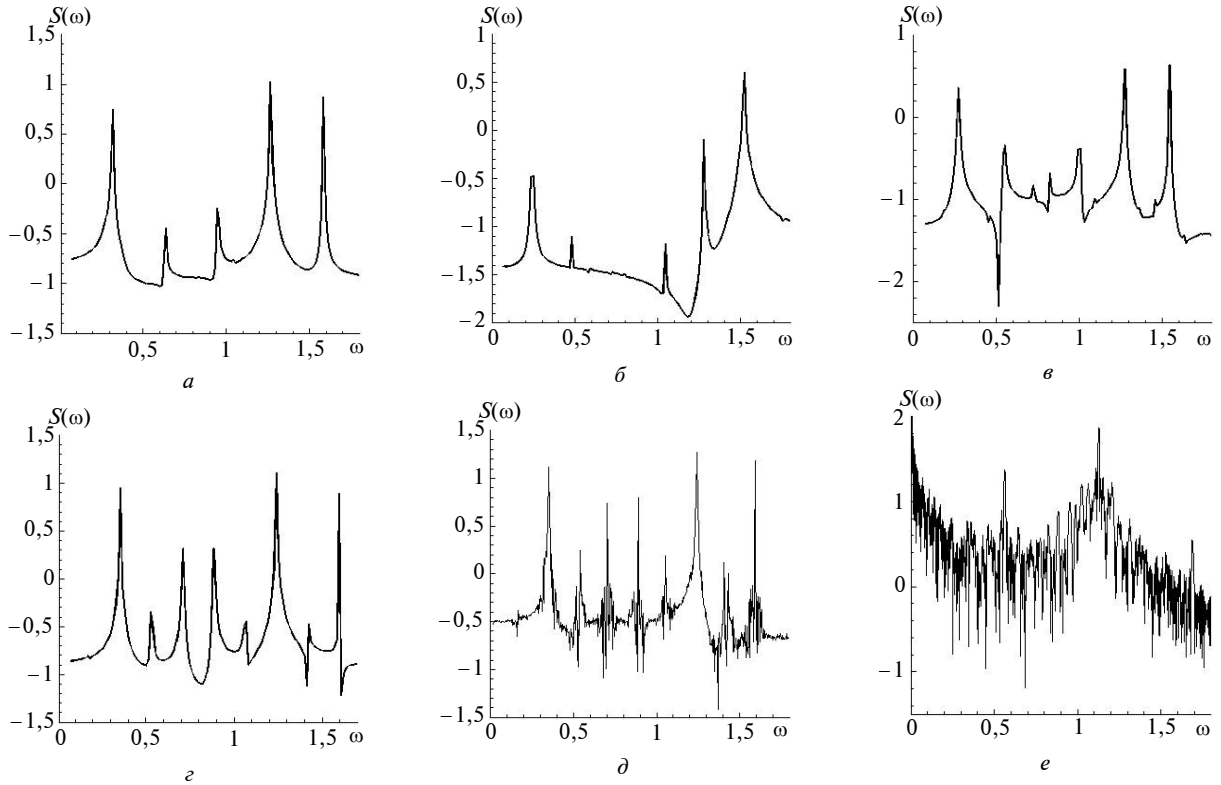

Рис. 4. Фур'є-спектри граничних циклів: $N_1 = -0,2843$ (*а*), $N_1 = -0,27950$ (*г*); квазіперіодичних атракторів: $N_1 = -0,29$ (*б*), $N_1 = -0,2844$ (*в*); хаотичних атракторів $N_1 = -0,27949$ (*д*), $N_1 = -0,2794$ (*е*)

того, що атрактор є хаотичним [9]. Звернемо увагу на одну відмінність наведених Фур'є-спектрів хаотичних атракторів. Хаотичний атрактор, спектр якого наведено на рис. 4, *д*, побудовано біля порога виникнення хаосу. Тому в цілому він є неперервним, але має чіткі піки на частотах, що відповідають гармонікам зниклого граничного циклу. Умовно кажучи, це є "пам'ять" системи про зруйнований граничний цикл в околі якого виник хаотичний атрактор. У свою чергу хаотичний атрактор, спектр якого наведено на рис. 4, *е*, побудований у деякому віддаленні від порога виникнення хаосу. Тому в його Фур'є-спектрі майже не помітно частотних піків.

Як видно з рис. 2, області існування квазіперіодичних атракторів у просторі параметрів системи (5) займають достатньо малі за площинами області. Значно більшими за площами є області, в яких атракторами будуть граничні цикли (світло-сірі області на рис. 2) та хаотичні атрактори (темно-сірі області на рис. 2). Тому розглянемо перехід до хаосу при зміні параметрів, при яких відбувається перетин межі світло-сірої та темно-сірої областей. Як і раніше, припустимо, що $A = 1,12$; $B = -1,531$; $\mu_1 = 0,5$; $N_3 = -0,1$; $\alpha = -0,018$. При $N_1 = -0,2767$ атрактором системи (5) буде граничний цикл, фазовий портрет якого якісно подібний до фазового портрета граничного циклу, наведеного на рис. 3, *ж*. При дуже малому зростанні значення N_1 цей цикл зникає і в системи виникає хаотичний атрактор, фазовий портрет якого наведено на рис. 5, *а*. Перехід до хаосу тут знову відбувається через переміжність. Хаотичні атрактори такого типу існують у дуже тонкій смузі, розташованій біля межі існування області хаосу в просторі параметрів. Вже при $N_1 = -0,2758$ попередній хаотичний атрактор руйнується та в системі виникає хаотичний атрактор нового типу, фазовий портрет якого наведено на рис. 5, *б*. Приблизно в десять разів зростають амплітуди коливань траєкторій, які належать новому атрактору. Втричі зростає значення старшого ляпуновського показника порівняно із старшим ляпуновським показником хаотичного атрактора, наведеного на рис. 5, *а*. Це свідчить про істотне збільшення швидкості розбігання близьких фазових траєкторій атрактора.

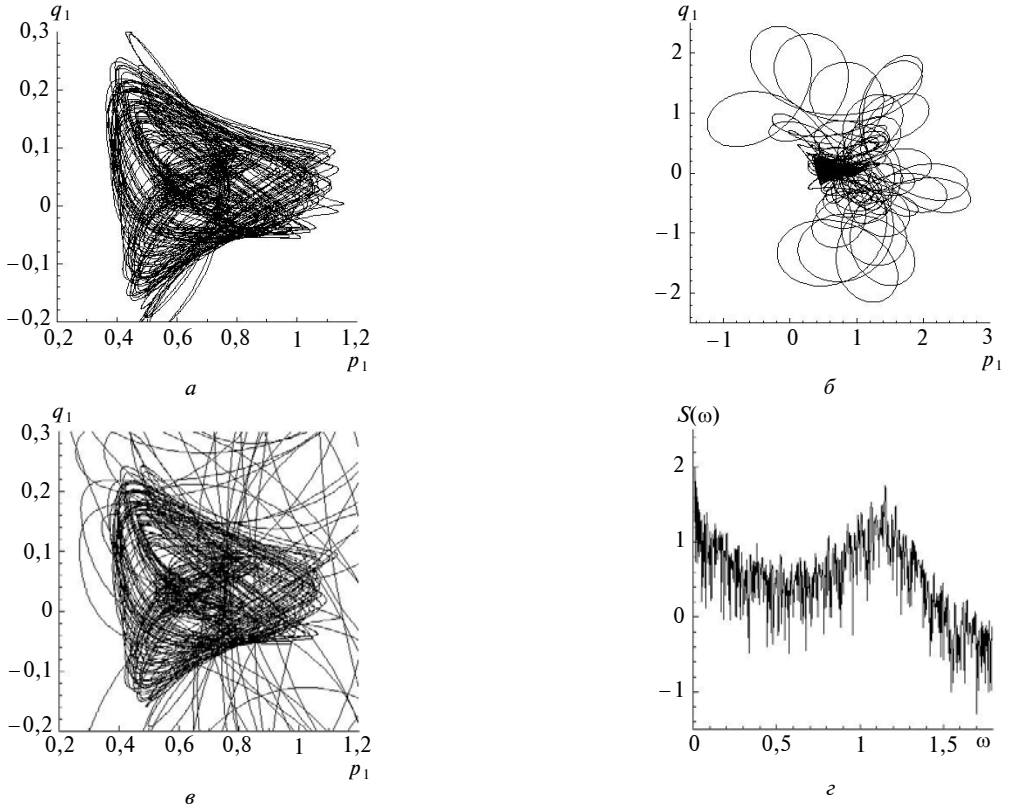

Рис. 5. Проекції фазових портретів хаотичних атракторів $N_1 = -0,2766$ (*а*), $N_1 = -0,2758$ (*б*, *в*); Фур'є-спектр хаотичного атрактора $N_1 = -0,2758$ (*г*)

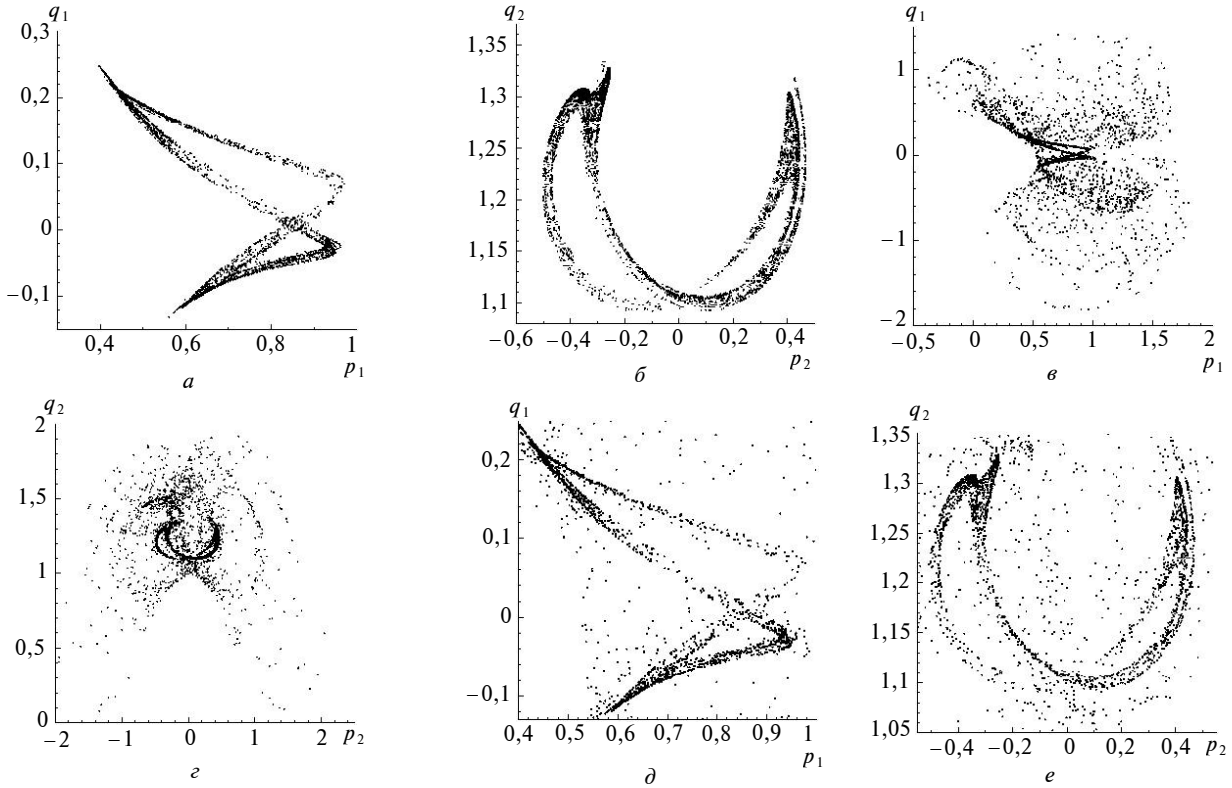

Рис. 6. Проекції перерізу Пуанкаре хаотичних атракторів при $N_1 = -0,2766$ (*а*, *б*); $N_1 = -0,2758$ (*в*–*е*)

На рис. 5, *в* наведено збільшений фрагмент середньої частини хаотичного атрактора, зображеного на рис. 5, *б*. Цей фрагмент за своєю формою та розмірами майже збігається з хаотичним атрактором з рис. 5, *а*. Він прояснює механізм переходу "хаос-хаос", який відбувається в цьому випадку. Цей перехід відбувається за сценарієм узагальненої переміжності, який вперше був описаний у працях [6, 8]. Рух траєкторій по виниклому атрактору складається з двох фаз. Грубо-ламінарною фазою є хаотичний рух траєкторій з невеликою амплітудою в околі зниклого "малого" атрактора (рис. 5, *в*). У турбулентній фазі відбуваються непередбачувані "сплески" та відходи траєкторій у віддалені області фазового простору. Зауважимо, що амплітуди турбулентної фази майже на порядок перевищують амплітуди грубо-ламінарної фази. Навпаки, часова тривалість перебування траєкторій у турбулентній фазі значно менша тривалості перебування в грубо-ламінарній фазі.

На рис. 5, *г* наведено Фур'є-спектр виниклого хаотичного атрактора. Як видно з цього рисунка, спектр є неперервним, причому в ньому відсутні будь-які частотні піки.

Для більш детального опису розглянутого переходу "хаос-хаос" зупинимося ще на деяких характеристиках атракторів. Так, на рис. 6, *а*, *б* наведено проекції перерізів Пуанкаре хаотичного атрактора при $N_1 = -0,2766$, на рис. 6, *в*, *г* – проекції перерізів Пуанкаре хаотичного атрактора при $N_1 = -0,2758$. На рис. 6, *д*, *е* наведено збільшені фрагменти рис. 6, *в*, *г*. Всі ці перерізи Пуанкаре є хаотичними точковими множинами, число точок яких збільшується із зростанням тривалості часу чисельного інтегрування. Уважне вивчення наведених рисунків дає змогу помітити якісну подібність рис. 6, *а* і *д*, а також рис. 6, *б* і *е*. Отже, підмножиною перерізу Пуанкаре хаотичного атрактора, побудованого при $N_1 = -0,2758$, буде переріз Пуанкаре атрактора, побудованого при $N_1 = -0,2766$. Це є ще одним підтвердженням переходу до хаосу за сценарієм узагальненої переміжності.

Аналогічні типи регулярних та хаотичних атракторів можуть бути виявлені в системі (5) при розгляді інших відносно параметра α перерізів карти динамічних режимів. Сценарії переходів "регулярний режим-хаос" та "хаос-хаос" також будуть аналогічні розглянутим вище.

Висновки

Проведені дослідження дали можливість отримати нові закономірності динамічної поведінки системи електродвигун–бак з рідиною. Вперше побудовані карти динамічних режимів, які надають вичерпну інформацію про тип динамічного режиму, який встановлюється в заданій області простору параметрів системи, а також вперше виявлені квазіперіодичні атрактори та резонансні цикли на торах даної динамічної системи. Підтверджено гіпотезу про перехід до хаосу за новим сценарієм узагальненої переміжності. У подальшому буде доцільно визначити клас універсальності системи за Фейгенбаумом і побудувати й проаналізувати фазопараметричні характеристики (біфуркаційні дерева). Відкритим залишається питання про межі басейнів притяжіння як регулярних, так і хаотичних атракторів. Ці питання планується дослідити при подальшому вивченні системи електродвигун–бак з рідиною.

А.Ю. Швец, В.А. Сиренко

РЕГУЛЯРНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКЕ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Рассмотрена неидеальная динамическая система электродвигатель–бак с жидкостью. Построены карты динамических режимов системы. Впервые для этой системы выявлены квазипериодические аттракторы. Подтверждена реализация перехода к детерминированному хаосу по новому сценарию обобщенной перемежаемости.

O.Yu. Shvets, V.O. Sirenko

REGULAR AND CHAOTIC ATTRACTORS OF THE LIQUID RESONANT OSCILLATIONS IN A TANK AT LIMITED EXCITATION

In this paper, we investigate a non-ideal dynamic system – the electric motor-tank with liquid. To that end, we construct the maps of the system's dynamic modes. Crucially, we discover quasi-periodic attractors for this system for the first time ever, and verify the transition to deterministic chaos by a novel scenario of generalized intermittency.

1. *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 206 с.
2. *Рабинович Б.И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1983. – 296 с.
3. *Miles J.W.* Internally resonant surface waves in circular cylinder // J. Fluid Mech. – 1984. – **149**. – P. 1–14.
4. *Miles J.W.* Resonantly forced surface waves in circular cylinder // Ibid. – P. 15–31.
5. *Луковский И.А.* Механические аналоги в задачах нелинейной динамики твердого тела с жидкостью // Вопр. механики и ее приложений: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **44**. – С. 125–160.
6. *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютерных исследований, 2008. – 280 с.
7. *Ciliberto S., Gollub J.P.* Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves //J. Fluid Mech. – 1985. – **158**. – P. 381–398.
8. *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Dynamical chaos for a limited power supply oscillations in cylindrical tanks // J. of Sound and Vibration. – 2009. – **322**. – P. 532–553.
9. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2006.– 356 с.
10. *Kononenko V.O.* Vibrating system with a limited power-supply. – London: Iliffe, 1969. – 236 p.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
02 лютого 2010 року