МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І. В. Веригіна, Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою 111 «Математика»
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»,
142 «Енергетичне машинобудування», 143 «Атомна енергетика»,
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 514.9
В19

Автори: *Веригіна Інга Вячеславівна*, ст. викл.
Єрьоміна Тетяна Олександрівна, канд. ф.-м.наук, доц.
Поварова Олена Андріївна, канд. ф.-м.наук, доц.

Рецензент *Дворник, А.В.,* канд. фіз-мат. наук, науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України

Відповідальний редактор *Дудкін, М. Є.*, д-р фіз-мат. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 20.06.2024 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 7 від 22.05.2024 р.)*

Веригіна І.В.

В19 Вища математика. Числові та функціональні ряди [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Математика» спец. 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології», 142 «Енергетичне машинобудування», 143 «Атомна енергетика», 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / І. В. Веригіна, Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 65 с.

Навчальний посібник викладено для розділу “Числові та функціональні ряди” дисципліни «Вища математика». Містить теоретичні відомості. Приділено увагу різним методам дослідження збіжності числових рядів, застосуванню рядів для знаходження наближених значень функцій та визначених інтегралів. Наведено приклади розв’язання типових задач.

Навчальний посібник «Числові та функціональні ряди» призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями: 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології», 142 «Енергетичне машинобудування», 143 «Атомна енергетика», 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Дане видання буде також корисним не тільки студентам очної та заочної форм навчання, а й викладачам дисципліни «Вища математика».

УДК 514.9

Реєстр. № 23/24-556. Обсяг 1,4 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний посібник з вищої математики «Числові та функціональні ряди» розроблено для допомоги у навчальному процесі студентам технічних спеціальностей. Посібник містить основні теоретичні відомості з даної теми, приклади розв'язання типових задач.

Дане методичне видання допоможе студентам опрацювати тему «Числові та функціональні ряди», виробити уміння та навички дослідження збіжності рядів, застосування рядів до наближених обчислень. Це, в свою чергу, забезпечить успішне засвоєння матеріалу, передбаченого навчальною програмою дисципліни «Вища математика».

Навчальний посібник «Числові та функціональні ряди» може бути рекомендований для використання викладачами вищої математики як допоміжний матеріал у підготовці та проведенні лекцій, практичних занять з теми «Числові та функціональні ряди» для студентів очної та заочної форм навчання.

1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Означення. Основні поняття

Розглянемо деяку послідовність дійсних чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, де $a_i \in R, i = \overline{1,\infty}$, позначимо її $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення 1.1. ***Числовим рядом*** називають вираз вигляду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.1)$$

Тобто, ряд це нескінченна сума. При цьому a_n називається ***загальним членом*** ряду або ***n*** -м ***членом*** ряду.

Означення 1.2. Сума n перших членів ряду (1.1) називається ***частинною сумою ряду*** і позначається S_n: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Утворимо нову числову послідовність – послідовність частинних сум $\{S_n\}$:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \end{aligned}\right\} \{S_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Означення 1.3. Ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя S послідовності частинних сум $\{S_n\}$ при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\,. \qquad (1.2)$$

Число S називається ***сумою ряду*** (1.1) і для збіжного ряду можна записати:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо така границя не існує або є нескінченною, то ряд називається ***розбіжним.***

Зауважимо, що якщо виконується рівність (1.2), то всі наступні границі також існують і їх значення дорівнюють S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{n+m} = S\,.$$
$$\forall\, m \in N$$

Розглянемо приклади.

Приклад 1.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1\ldots-1+1\ldots$$

Побудуємо послідовності частинних сум:

$$\left.\begin{array}{c} S_1 = -1 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = -1+1-1=-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{2n} = 0 \\ S_{2n+1} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} S_n, \text{ ряд розбіжний.}$$

Приклад 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1\ldots+1+\cdots$

Побудуємо послідовності частинних сум:

$$\left.\begin{array}{c} S_1 = 1 \\ S_2 = 1+1=2 \\ S_3 = 1+1+1=3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n = n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow \text{ ряд розбіжний.}$$

Приклад 1.3. ***Геометричний ряд*** – це ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^{n} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad . \tag{1.3}$$

Цей ряд є сумою геометричної прогресії, де $a \neq 0$, $q -$ знаменник геометричної прогресії. З’ясуємо, коли цей ряд є збіжним. Частинна сума ряду

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?, q \neq 1.$$

Розглянемо всі можливі випадки:

1) $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0, n \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} \neq \infty$, тому ряд (1.3) збігається і його сума $S = \frac{a}{1-q}$.

2) $|q| > 1 \Rightarrow q^n \to \infty, \quad n \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, тому ряд (1.3) розбіжний.

3) $q = 1$, ряд (1.3) має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + a + \dots + a + \dots$$

$$S_n = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ раз}} = n \cdot a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty,$$

тому ряд (1.3) розбіжний.

4) $q = -1$, ряд (1.3) має вигляд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a = -a + a - a + \dots - a + \dots$

$$\left.\begin{matrix} S_{2k} = 0 \\ S_{2k+1} = -a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} S_n$$, тому ряд (1.3) розбіжний.

Висновок. Геометричний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$:

при $|q| < 1$ – збіжний і його сума $S = \frac{a}{1-q}$ (це сума нескінченно спадної геометричної прогресії); при $|q| \geq 1$ – геометричний ряд розбіжний.

Приклад 1.4. Гармонічний ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} + \dots$. Доведемо, що цей ряд є розбіжним.

Доведення.

$$\left.\begin{matrix} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \\ S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} \end{matrix}\right\rangle \quad S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Оцінимо цю різницю:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) > \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Припускаючи від супротивного, що ряд збігається, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0.$$

Отже, маємо, що $0 > \frac{1}{2}$ – протиріччя. Отже, ряд розбіжний.

Ряди, що розглянуто у прикладах 1.3 та 1.4, геометричний та гармонічний, називають *еталонними* тому, що вони застосовуються для порівняння при дослідженні збіжності інших рядів.

1.2. Властивості числових рядів

Властивість 1. Якщо ряд (1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до суми S, то ряд, утворений множенням членів цього ряду на одне й те ж саме число, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C a_n$, де $C=const$, теж збіжний і його сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} C a_n = C \cdot S. \tag{1.4}$$

Доведення. Нехай $S_n^{(2)}$ – частинна сума ряду (1.4), S_n – частинна сума ряду (1.1).

$$S_n^{(2)} = Ca_1 + Ca_2 + \ldots + Ca_n = C(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = C \cdot S_n .$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \lim\limits_{n\to\infty} C \cdot S_n = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} S_n = C \cdot S$. Отже, ряд (1.4) збіжний і його сума дорівнює $C \cdot S$.

Зауваження. Якщо ряд (1.1) розбіжний і $C \neq 0$, тоді і ряд (1.4) також розбіжний.

Властивість 2. Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні і мають суми відповідно S_1 і S_2, то збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ і його сума дорівнює $S_1 \pm S_2$.

Доведення. Нехай $S_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$, $S_n^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_n^1 \pm S_n^2$ – частинні суми відповідних рядів.

Оскільки $S_n = S_n^1 \pm S_n^2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n^1 \pm S_n^2) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^1 \pm \lim\limits_{n\to\infty} S_n^2 = S_1 \pm S_2$.

Зауваження. Сума (різниця) двох розбіжних рядів може бути як збіжним так і розбіжним рядом.

Властивість 3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

Доведення. Доведемо для випадку відкидання членів ряду.

Розглянемо ряд (1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$

і відкинемо в ньому k перших членів, $k \in N$. Тоді

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_n + ..., \qquad (1.5)$$

при цьому позначимо суму перших k членів ряду (1.1) як $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = S_0 = const$, k – фіксоване і відповідно частинна сума ряду (1.1) при $n>k$ запишеться у вигляді:

$$S_n^{(1)} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}_{S_0} + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_n}_{S_{n-k}} = S_0 + S_{n-k}^{(5)},$$

де $S_{n-k}^{(5)}$ – частинна сума ряду (1.5). В отриманій рівності перейдемо до границі:

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{(1)} = S_0 + \lim_{n \to \infty} S_{n-k}^{(5)}. \qquad (1.6)$$

Оскільки границі в лівій і правій частині (1.6) одночасно існують або не існують, тобто ряд (1.1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) ряд (1.5) без k його членів.

Аналогічні міркування і у випадку приєднання до ряду скінченного числа членів. Отже, властивість доведено.

Подамо ряд (1.1) у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}_{S_n} + ... + \underbrace{a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ...}_{R_n}.$$

Величину R_n називають ***залишком ряду*** (1.1) ***(k-им залишковим членом ряду)***, її можна розглядати як суму ряду, який утворюється з ряду (1.1) після відкидання перших n його членів.

Має місце наступне твердження, що є наслідком властивості 3.

Твердження. Ряд (1.1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) його залишок.

Дійсно, якщо ряд збіжний і $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то залишок ряду $R_n = S - S_n$ і $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

1.3. Необхідна умова збіжності ряду. Достатня умова розбіжності

Теорема. (Необхідна умова збіжності). Якщо ряд (1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то його загальний член прямує до нуля, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доведення. Нехай S – сума заданого ряду, тоді $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, де $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$.

Враховуючи, що $a_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, отримуємо
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Умова $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ є тільки необхідною для збіжності ряду, але не достатньою. Це означає, що існують розбіжні ряди, для яких ця умова виконується.

Наприклад, ми знаємо, що гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ розбіжний (див. приклад 1.4.) але при цьому загальний його член прямує до 0 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Наслідок. (Достатня умова розбіжності ряду)

Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (або не існує), то ряд (1.1) розбіжний.

Доведення. Дійсно, якби даний ряд був збіжний, то за попередньою теоремою його загальний член прямував би до нуля при $n \to \infty$, що суперечить умові.

Приклади розв'язування типових задач

Задача 1.1. Користуючись означенням збіжності числового ряду, встановити збіжність числового ряду, знайти його суму: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. Розкладемо цей дріб на суму елементарних дробів :

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} = \frac{A(3n+1)+B(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)};$$ тоді

$$A(3n+1)+B(3n-2)=1.$$

Згідно методу окремих значень:

$$n=-\frac{1}{3}:\ \ B\cdot\ (-3)=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{3};$$

$$n=\frac{2}{3}:\ \ 3\cdot\ A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3}.$$

Отже, $u_n = \frac{1/3}{3n-2} - \frac{1/3}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$.

Зокрема, $u_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right)$, $u_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$, $u_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right)$, … .

Відповідно частинна сума ряду запишеться у вигляді:

$$S_n = u_1+u_2+\ldots+u_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{3n-2}}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

Знайдемо границю послідовності частинних сум:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

Отже, оскільки існує границя послідовності частинних сум ряду, то за означенням ряд збігається і його сума

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: Ряд збіжний, його сума $S=\frac{1}{3}$.

Задача 1.2. Довести розбіжність ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член ряду $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)$.

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1+{}^{1}\!/_{n}}{2-{}^{1}\!/_{n}}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$,

тобто, не виконується необхідна умова збіжності ряду. Отже, ряд розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний.

2. Знакододатні ряди. Достатні умови збіжності

Означення 2.1. Знакододатні ряди – це ряди з невід'ємними членами, тобто ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, де $a_n\geq 0,\ \forall\, n\in N$.

Зауваження. Для знакододатних рядів послідовність частинних сум є зростаючою: $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geq S_n \Longrightarrow \{S_n\}\nearrow$.

2.1. Ознаки порівняння (перша та друга)

Дослідження на збіжність знакододатних рядів можна виконати шляхом порівняння його з іншим (еталонним) рядом, про збіжність якого нам вже відомо. При цьому мають місце наступні *ознаки порівняння*.

Теорема 2.1. (Перша ознака порівняння)

Нехай задано два знакододатних ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \ , \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \geq 0 \ . \tag{2.2}$$

і для всіх n виконується нерівність

$$a_n \leq b_n. \tag{2.3}$$

Тоді, якщо ряд (2.2) збіжний, то збіжний і ряд (2.1). Якщо ряд (2.1) розбіжний, то розбіжний і ряд (2.2).

Доведення. **1)** Позначимо частинні суми рядів (2.1), (2.2) відповідно $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$. Враховуючи нерівність (2.3), для частинних сум $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ має місце нерівність:

$$S_n^{(1)} \leq S_n^{(2)} \ . \tag{2.4}$$

Згідно умови існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S_2$. Члени ряду (2.2) додатні, тому $S_n^{(2)} \leq S_2$ і з урахуванням нерівності (2.4) $S_n^{(1)} \leq S_n^{(2)} \leq S_2$. Отже, послідовність частинних сум $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots, S_n^{(1)}, \dots$ ряду (2.1) монотонно зростає (бо $a_n > 0$) та обмежена зверху числом S_2. За необхідною і достатньою умовою збіжності знакододатного ряду, послідовність $\left\{S_n^{(1)}\right\}$ має скінченну границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = S_1$, тобто ряд (2.1) збігається.

2) Згідно умови $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \infty$. Тоді з урахуванням (2.4) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \infty$, тобто ряд (2.2) розбіжний.

Теорему доведено.

Зауваження. Теорема 2.1. справджується і в тому випадку, якщо нерівність (2.3) виконується, починаючи з деякого номера N ($\forall\, n \geq N$). Це є наслідком властивості 3 числових рядів.

Теорема 2.2. (Друга ознака порівняння. Гранична ознака порівняння)

Нехай задано два знакododатні ряди (2.1) і (2.2). Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k,\quad k=const\neq\left\{\begin{matrix}0\\ \infty\end{matrix}\right\},$$

то ряди (2.1) і (2.2) збіжні або розбіжні одночасно.

Доведення. За означенням границі послідовності, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k,$ то

$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, n_0:\ \forall\, n>n_0\ \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\varepsilon.$

Або

$$\begin{cases}-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-k<\varepsilon\\ \quad b_n>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\varepsilon+k\\ \quad b_n>0\end{cases}\Rightarrow b_n(k-\varepsilon)<a_n<b_n(k+\varepsilon).\quad (2.5)$$

- Якщо ряд (2.1) збіжний, то з лівої частини нерівності (2.5) і теореми 2.1. слідує, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(k-\varepsilon)$ також збіжний. Згідно властивості 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ збіжний.
- Якщо ряд (2.1) розбіжний, то з правої частини нерівності (2.5) і теореми 2.1. слідує, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(k+\varepsilon)$ також розбіжний. Згідно властивості 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ розбіжний.

•Аналогічно доводиться, якщо ряд (2.2) збіжний (розбіжний), то збіжним (розбіжним) буде і ряд (2.1).

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо загальні члени рядів (2.1) та (2.2) є еквівалентними величинами, тобто $a_n \sim b_n,\ n\to\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$), тоді ряди (2.1) і (2.2) збіжні або розбіжні одночасно.

2.2. Ознака Даламбера

Теорема 2.3. Нехай для знакододатного ряду (2.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тоді ряд (2.1)

1) збіжний при $l < 1$;

2) розбіжний при $l > 1$;

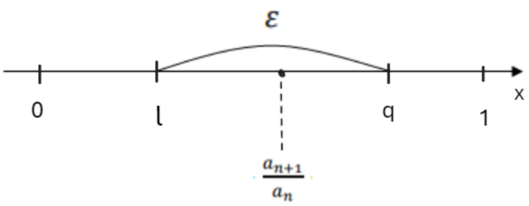
3) при $l = 1$ ознака не дає відповіді: ряд може бути збіжним, або розбіжним. Для дослідження треба використати інші ознаки.

Доведення.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \xRightarrow{\text{За озн.}} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\colon\ \forall\, n > n_0 \ \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow$$

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon, \quad \forall\, n > n_0 \qquad (2.6)$$

1) Оскільки $l < 1$, то $\varepsilon > 0$ можна вибрати так, щоб число $q = l + \varepsilon < 1$.



Тоді з правої частини нерівності (2.6) випливає, що $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \ \Rightarrow a_{n+1} < q a_n$, $\forall\, n > n_0$. Надаючи n значення $N+1,\ N+2, \ldots,$ з останньої нерівності маємо

$$a_{N+2} < a_{N+1} q,$$

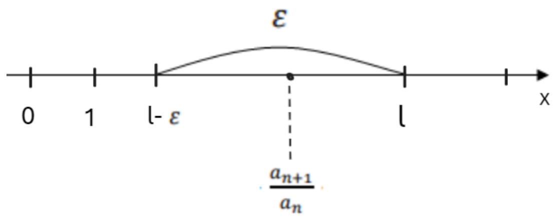
$$a_{N+3} < a_{N+2} q < a_{N+1} q^2,$$

$$a_{N+4} < a_{N+3} q < a_{N+1} q^3,$$

… … … … … … … …

тобто члени ряду $a_{N+2} + a_{N+3} + a_{N+4} + \ldots$ **(2.7)** менші відповідних членів ряду $a_{N+1} q + a_{N+1} q^2 + a_{N+1} q^3 + \ldots = a_{N+1}\left(q + q^2 + q^3 + \ldots\right)$ **(2.8)** – збіжний ряд як геометрична прогресія із знаменником $q < 1$, тому за першою ознакою порівняння ряд (2.7) також збіжний. Ряд (2.1), утворений з ряду (2.7) приєднанням до нього $N+1$ члена $a_1, a_2, ..., a_{N+1}$. Тому за властивістю 3 ряд (2.1) збіжний.

2) Нехай $l > 1$. Підберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб в (2.6) $l - \varepsilon > 1$, тоді з лівої частини (2.6) отримуємо $a_{n+1} > a_n$, $n > N \Leftrightarrow a_n > a_N$, $(N = const > 0), \forall\, n > N$. В останній нерівності перейдемо до границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_N = a_N > 0$. Згідно достатньої умови розбіжності ряду, ряд (2.1) розбіжний.



Зауваження 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l = \infty$, то ряд (2.1) розбіжний, бо існує номер N такий, що $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ при $n > N$.

Зауваження 2. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то ряд (2.1) може бути як збіжним так і розбіжним. У цьому випадку ряд треба дослідити за допомогою інших ознак.

Зауваження 3. Ознаку Даламбера зазвичай застосовують, коли загальний член a_n містить вирази вигляду: $n!, a^n, n^n$.

Приклад 2.1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Розв'язання.

$l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

$l = 0 < 1$, тому за ознакою Даламбера заданий ряд збіжний.

2.3. Радикальна ознака Коші

Теорема 2.4. Нехай для знакододатного ряду (2.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тоді ряд (2.1)

1) збіжний при $l < 1$;

2) розбіжний при $l > 1$;

3) при $l = 1$ ознака не дає відповіді: ряд може бути збіжним, або розбіжним. Для дослідження треба використати інші ознаки.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 2.3.

Зауваження 1. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty,$$

то ряд (2.1) розбіжний.

Зауваження 2. Радикальну ознаку Коші зазвичай використовують, якщо загальний член ряду a_n є n-м степенем деякого виразу або $a_n = n^{\alpha}(\varphi(n))^{kn}$

або $a_n = n^{\alpha}(\varphi(n))^{n^2}$, α, k = const.

При цьому часто зустрічаються такі границі:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{ln^{\alpha} n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a = const > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = 1, \alpha = const$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Приклад 2.2. Порівняємо ознаку Даламбера та радикальну ознаку Коші на прикладі ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}$.

Випишемо загальний член ряду $a_n = \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}} > 0$ і $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}+3}{2^{n+1+1}}$.

За ознакою Даламбера:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}+3}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(-1)^n+3} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{3-(-1)^n}{3+(-1)^n}$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{4}, & n - \text{парне}, \\ 1, & n - \text{непарне} \end{array}\right. => \nexists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Отже, відповіді ознака Даламбера не дає.

За радикальною ознакою Коші:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+3}{2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \cdot 2^0 = \frac{1}{2}, n - \text{парне}, \\ = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, n - \text{непарне} \end{array}\right] = \frac{1}{2} < 1 => \text{ряд збіжний.}$$

Висновок. *Радикальна ознака Коші «сильніша» ніж ознака Даламбера.*

2.4. Інтегральна ознака Коші

Теорема 2.5. Розглянемо функцію $f(x)$, $x \in [1; \infty)$, що задовольняє умови:

1) неперервна $\forall\, x \in [1; \infty)$;

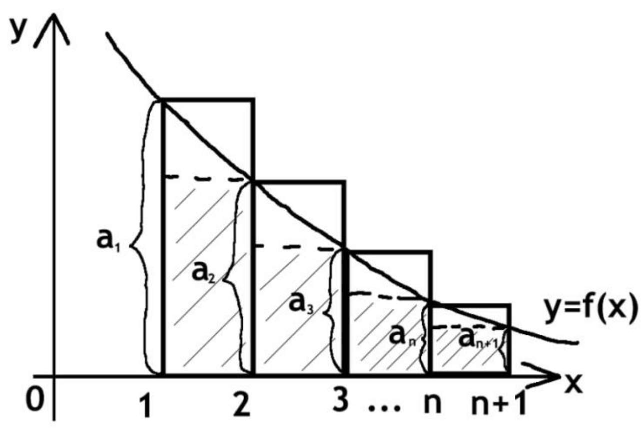
2) додатна $f(x) > 0$, $\forall\, x \in [1; \infty)$;

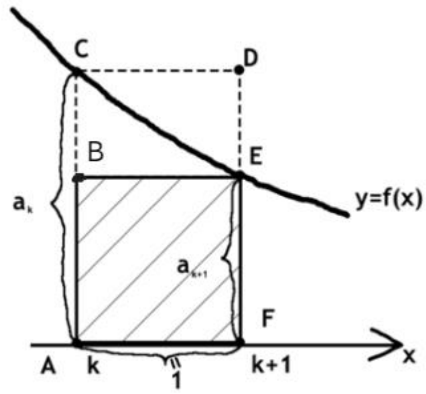
3) монотонно спадна $\forall\, x \in [1; \infty)$;

4) $f(n) = a_n, n \in N$ (члени знакододатного ряду (2.1) представлені як значення функції $f(n)$).

Тоді ряд (2.1) та невласний інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збіжні або розбіжні **одночасно**.

Доведення. Використаємо геометричну інтерпретацію Маклорена:





Побудуємо криволінійну трапецію, обмежену кривою $y = f(x)$, прямими $x = 1$, $x = n+1$, $y = 0$. Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчаті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1;2]$, $[2;3]$, ..., $[n;n+1]$, а висоти дорівнюють a_1, a_2,..., a_{n+1}. При цьому для вказаних площ має оцінка:

$$S_{ABEF} < S_{\text{кр. трап.}} < S_{ACDF}$$

$$a_{k+1} \cdot 1 < \int_k^{k+1} f(x)dx < a_k \cdot 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} < \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$$

Тоді

$$S_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx < S_n \qquad (2.6)$$

Розглянемо два випадки.

1. Невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = A < \infty.$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx$$

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx = A < \infty.$$

З (2.6) випливає:

$$S_{n+1} - a_1 \le \int_1^{n+1} f(x)dx < A$$

$$S_{n+1} - a_1 < A$$

$S_{n+1} < A + a_1$, тобто послідовність $\{S_n\}$ обмежена зверху числом $A + a_1$.

Оскільки $f(x) \ge 0 => a_n \ge 0 =>$

$$\begin{cases} S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \ge S_n => \{S_n\} \nearrow \\ a_n \ge 0 \end{cases}$$

Отже, $\{S_n\} \nearrow$ і обмежена зверху числом $A + a_1$, то в наслідок теореми Вейєрштрасса:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S < A + a_1.$$

Це означає, що ряд збіжний.

2. Невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ розбіжний. Тоді

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \infty.$$

З (2.6) слідує $\int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$

$$\infty = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx \le \lim_{n\to\infty} S_n => \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Отже, ряд розбіжний.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Теорема 2.5. також справджується, якщо функція $f(x)$ є незростаючою на $[1; +\infty)$.

Зауваження 2. Якщо всі умови теореми 2.5 виконуються при $x \in [k; +\infty), k \in N,$ тоді ряд $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$ та інтеграл $\int_k^{\infty} f(x)dx$ збіжний або розбіжний одночасно.

Зауваження 3. Застосування інтегральної ознаки Коші доцільне, якщо легко обчислюється невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 2.3. Узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхлє)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p \in R \qquad \begin{cases} \text{збігається}, & p > 1, \\ \text{розбігається}, & p \leq 1. \end{cases}$$

Цей ряд є *еталонним.*

Дослідимо узагальнений гармонічний ряд на збіжність. Ознака Даламбера і радикальна ознака Коші тут є слабкими, використаємо інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^p}, p > 0$. Ця функція є невід'ємною, неперервною і монотонно спадною на $[1; \infty)$, також $f(n) = \frac{1}{n^p}, n \in N$.

Тому можемо застосувати інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо випадки:

1) $p > 1 => p - 1 > 0$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^p} dx = \lim_{A \to +\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^A$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{-p+1} \left(\frac{1}{A^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{-p+1}(0-1) = \frac{1}{p-1} \neq \infty$$

тому невласний інтеграл збіжний.

Отже, за інтегральною ознакою Коші і узагальнений гармонічний ряд теж збіжний.

2) $0 < p < 1 \;=>\; 1 - p > 0$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{-p+1}(A^{1-p} - 1) = \frac{1}{1-p}(\infty - 1) = \infty$$

тому невласний інтеграл розбіжний. Відповідно за інтегральною ознакою Коші узагальнений гармонічний ряд теж розбіжний.

3) $p = 1$:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to \infty} (\ln|A| - \ln 1) = \infty$$

тому невласний інтеграл розбіжний. Тоді за інтегральною ознакою Коші ряд теж розбіжний.

4) При $p \leq 0$ не виконується необхідна умова збіжності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty \neq 0$$

тому ряд розбіжний.

Домашня самостійна робота.

Приклад 2.4. Довести, що ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n ln^p n} \left[\begin{array}{l} \text{збіжний при } p > 1, \\ \text{розбіжний при } 0 < p \leq 1. \end{array}\right.$

Приклади розв'язування типових задач

Задача 2.1. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\, n}{n^2+3} \quad \textbf{(1)}$$

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{arctg\, n}{n^2+3} > 0$. Ряд знакододатний. Відомо, що $arctg\, n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, оскільки $n > 0$. Таким чином,

$$u_n = \frac{arctg\, n}{n^2+3} < \frac{\pi/2}{n^2+3} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Розглянемо ряд, загальний член якого $v_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \textbf{(2)}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – узагальнений гармонічний ряд, $p = 2 > 1$, є збіжним, тоді ряд (2) є збіжним.Оскільки $u_n < v_n$, $\forall n \in \mathrm{N}$, отже, за **першою ознакою порівняння** ряд (1) є збіжним.

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 2.2. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\right)$ **(1)**

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = 1 - \cos\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} > 0$, ряд є знакододатним.

Застосуємо **граничну ознаку порівняння**. Оскільки, $\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \to 0$ при $n \to \infty$, то $1 - \cos\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

Розглянемо ряд, загальний член якого $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ **(2)**

Ряд (2) є узагальненим гармонійним, $p = \frac{1}{2} < 1$, – розбіжний.

Порівняємо ряди (1) і (2):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}}{1/\sqrt{n}} = \left| \begin{array}{l} \textit{згідно ТЕНМФ} \\ 1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \to 0 \ \textit{при} \ n\to\infty \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n+1}}}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ \infty \end{Bmatrix}.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння, оскільки ряд (2) розбігається, то і ряд (1) також розбігається.

Відповідь: ряд розбіжний.

Задача 2.3. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n\cdot 3^{n+2}}$.

Розв'язання.

1 спосіб.

Загальний член ряду $u_n = \frac{n^2+1}{n\cdot\ 3^{n+2}} > 0$, тобто ряд є знакододатним.

Застосуємо **ознаку Даламбера**. Для цього випишемо член ряду з номером $(n+1)$: $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)\cdot\ 3^{n+3}}$.

Розглянемо границю:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)\cdot 3^{n+3}}\cdot\frac{n\cdot 3^{n+2}}{n^2+1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки, $l=\dfrac{1}{3}<1$, то за ознакою Даламбера ряд збіжний.

2 спосіб.

Застосуємо **радикальну ознаку Коші**. Розглянемо границю:

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n\cdot\ 3^{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2+1}}{\sqrt[n]{n}\cdot\ \sqrt[n]{3^2}\cdot\ 3}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\sqrt[n]{n^2+1}\to 1,\ \text{при}\ n\to\infty\\ \sqrt[n]{n}\to 1,\ \text{при}\ n\to\infty\\ \sqrt[n]{9}\to 1,\ \text{при}\ n\to\infty\end{array}\right|=\frac{1}{3}.$$

Оскільки, $l=\dfrac{1}{3}<1$, то за радикальною ознакою Коші ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 2.4. Дослідити на збіжність ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!\,5^n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n=\dfrac{(n+1)!}{(2n)!\,5^n}>0$, ряд є знакододатним.

Застосуємо ознаку Даламбера. Для цього випишемо член ряду:

$$u_{n+1}=\frac{(n+2)!}{(2(n+1))!\,5^{n+1}}.$$

Розглянемо границю:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(2n+2)!\,5^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{(2n)!\,5^n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot\cancel{(n+1)}!}{\cancel{(n+1)}!}\cdot\frac{\cancel{(2n)}!}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)}!}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{5}\cdot 0=0.$$

$l<1$, тому ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

3. ЗНАКОПОЧЕРГОВІ ТА ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ

3.1. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбніца

Означення 3.1. ***Знакопочерговим рядом*** називається числовий ряд вигляду

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \qquad (3.1)$$

де $a_n>0 \quad \forall n\in N$. Знаки членів ряду строго чергуються. Загальний член ряду: $b_n=(-1)^{n+1}a_n$, його абсолютна величина $|b_n|=a_n$.

Зауваження. Ряд вигляду

$$-a_1+a_2-a_3+a_4+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n>0 \qquad (3.2)$$

теж є знакопочерговим, він може бути утворений з ряду (3.1) множенням кожного члена ряду на (-1).

Теорема 3.1. **Ознака Лейбніца.**

Знакопочерговий ряд (3.1) збіжний, якщо:

1) послідовність абсолютних величин членів ряду $\{a_n\}$, $n\in N$ утворює монотонно спадну послідовність (тобто $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>a_{n+1}>\cdots$);
2) абсолютна величина загального члена ряду прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

При цьому сума S ряду (3.1) задовольняє нерівності $0<S\le a_1$ (є додатною і не перевищує першого члена ряду).

Доведення.

1. Розглянемо частинну суму парного числа $n=2m$ членів ряду (3.1):

$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m}$.

- Згрупуємо члени цієї суми попарно: $S_{2m} = (a_1 - a_2) + \ (a_3 - a_4) + \cdots + +(a_{2m-1} - a_{2m})$. Оскільки $\{a_n\} \searrow$, то $a_{2m-1} - a_{2m} > 0, \forall n \in N$, тоді сума $S_{2m} > 0$ і $\{S_{2m}\} \nearrow,\ m \in N$
- Перегрупуємо члени частинної суми по-іншому: $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - \ a_{2m}$, тоді $S_{2m} < a_1$ тобто $\{S_{2m}\}$ обмежена зверху членом a_1.
- Отже, послідовність $\{S_{2m}\} \nearrow$ і обмежена зверху членом a_1, а тому має границю $\lim\limits_{m \to \infty} S_{2m} = S$, до того ж $0 < S \leq a_1$.

2. Розглянемо тепер частинну суму непарного числа $n = 2m + 1$ членів ряду (3.1):

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} =$$

$$= \left[\text{враховуючи умову} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0\right] = S + 0 = S.$$

Отже, існує границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S,$$

тобто, ряд (3.1) збігається і його сума $0 < S \leq a_1$. Теорему доведено.

Зауваження.

1) Теорема Лейбніца справджується, якщо $\{a_n\} \searrow,\ \ \forall n > n_0$, (тобто послідовність є спадною, починаючи з деякого номера n_0).
2) Якщо умова 2) не виконується, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (3.1) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду.
3) Якщо виконується умова Теореми Лейбніца, то ряд (3.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

збігається і його сума $|S| \leq a_1$.

Ряди (3.1), (3.2), для яких виконуються умови теореми Лейбніца називаються *рядами лейбніцевого типу (ряди Лейбніца)*.

Наслідок з теореми Лейбніца. Залишок ряду

$$R_n = (-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots)$$

у свою чергу є знакопочерговим рядом, тому модуль його суми не перевищує абсолютної величини першого члена. Отже, $|R_n| < a_{n+1}$. Або

$$|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1} \tag{3.3}$$

Це дозволяє отримати просту і зручну оцінку похибки при знаходженні суми знакопочергового ряду, коли ми заміняємо S на суму деякого числа n перших членів S_n. Сума ряду S приблизно дорівнює S_n, при цьому похибка $|S - S_n| \leq a_{n+1}$, тобто, не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду.

Приклад 3.1. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \tag{3.4}$$

Ряд (3.4) – ряд Лейбніца. Перевіримо умови теореми Лейбніца:

1) $a_n = \frac{1}{n}$: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots => \{a_n\} \searrow$, тобто перша умова теореми Лейбніца виконується;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, тобто друга умова теореми Лейбніца виконується.

Отже, ряд (3.4) збігається за теоремою Лейбніца і його сума $0 < S < 1$.

3.2. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність

Означення 3.3. Числовий ряд називається ***знакозмінним,*** якщо він містить нескінченну кількість як від'ємних так і додатних членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{, де } a_n \lesseqgtr 0 \tag{3.5}$$

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ є знакозмінним.

Знакопочергові ряди є окремим випадком знакозмінних рядів.

Теорема 3.2. (Про абсолютну збіжність – достатня ознака збіжності)

Якщо ряд, складений з абсолютних величин членів знакозмінного ряду (3.5):

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (3.6)$$

збіжний, то знакозмінний ряд (3.5) теж збіжний.

Доведення.

Розглянемо додатковий ряд, складений з суми членів рядів (3.5) і (3.6):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots \qquad (3.7)$$

- Для членів ряду (3.7) має місце оцінка $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|, \quad \forall n \in N$.
  Але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збіжний за властивістю 1 збіжних рядів та умовою теореми, тоді за першою теоремою порівняння ряд (3.7) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ теж збіжний.
- Оскільки ряди (3.6) і (3.7) збіжні, то збіжний і ряд, що є різницею рядів (3.7) та (3.6):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{. Доведено.}$$

Зауваження.

1) Обернене твердження не має місця.
   Тобто, якщо знакозмінний ряд (3.5) збіжний, то ряд (3.6), тобто ряд, складений з абсолютних членів ряду (3.5), може як збігатися, так і розбігатися.
2) Якщо ряд (3.6) розбіжний, тоді про збіжність чи розбіжність знакозмінного ряду (3.5) нічого не відомо.

Означення 3.4. Знакозмінний ряд (3.5) називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд (3.6), складений з модулів його членів збіжний.

Означення 3.5. Ряд (3.5) називається ***умовно збіжним***, якщо ряд (3.6), складений з модулів його членів, розбіжний, а ряд (3.5) збіжний.

Приклад 3.2. Ряд Лейбніца: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ умовно збіжний.

Оскільки, ряд з абсолютних величин : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (гармонічний ряд) розбіжний (див. приклад 1.4). А сам ряд Лейбніца збіжний (див. приклад 3.1). Отже, дійсно, ряд Лейбніца умовно збіжний.

Сформулюємо без доведення кілька теорем, що стосуються властивостей знакозмінних рядів.

Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів

Теорема 3.3. В абсолютно збіжному ряді можна переставляти і групувати члени ряду довільним чином. При цьому отримаємо абсолютно збіжний ряд з тією ж сумою, що і початковий ряд.

Теорема 3.4. (Наслідок теореми 3.3) У збіжному знакододатному ряді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (зрозуміло, що такий ряд є абсолютно збіжним) можна переставляти та групувати члени ряду довільним чином. При цьому отримаємо збіжний ряд з тією ж сумою, що і початковий.

Теорема 3.5. (**Рімана про умовно збіжні ряди**). Якщо числовий знакозмінний ряд умовно збіжний, то його члени можна переставляти місцями і групувати так, що утворений ряд буде збіжним, з наперед заданою сумою, або розбіжним.

Приклади розв'язування типових задач

Задача 3.1. Дослідити ряд на абсолютну/умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^3+1},\ \ \alpha \in R.$$

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n^3+1}\right|$. Оцінимо загальний член цього ряду: $|\,a_n| = \left|\frac{\sin(n\alpha)}{n^3+1}\right| < \frac{1}{n^3} = b_n$.

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний як узагальнений гармонічний ряд, у якого *p*=3>1, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний за першою ознакою порівняння.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n^3+1}$ збіжний абсолютно.

Відповідь: ряд абсолютно збіжний.

Задача 3.2. Дослідити ряд на абсолютну/ умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+2n}{n^3+4n^2+n+6}. \qquad \textbf{(1)}$$

Розв'язання. Даний ряд є знакопочерговим, загальний член якого $b_n=(-1)^n \frac{n^2+2n}{n^3+4n^2+n+6}=(-1)^n a_n$, де абсолютна величина загального члена ряду $a_n=|b_n|=\frac{n^2+2n}{n^3+4n^2+n+6}$.

1. Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=\frac{n^2+2n}{n^3+4n^2+n+6} \qquad \textbf{(2)}$$

Порівняємо цей ряд з рядом, загальний член якого $c_n=\frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \qquad \textbf{(3)}$$

Застосуємо граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2n}{n^3+4n^2+n+6}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2}{n^3+4n^2+n+6}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3}}=1\neq\begin{Bmatrix}0\\ \infty\end{Bmatrix}$$

Оскільки, ряд (3) це гармонічний ряд, який є розбіжним, тому і ряд (2) також є розбіжним.

2. Дослідимо ряд (1) на збіжність за допомогою ознаки Лейбніца.

$$a_n=\frac{n^2+2n}{n^3+4n^2+n+6}.$$

а) Перевіримо, що послідовність $\{a_n\}$ є спадною.

Це не очевидно, оскільки, і чисельник, і знаменник дробу є зростаючими при зростанні n. Проте знаменник зростає набагато швидше, ніж чисельник, тому, можна очікувати, що починаючи з деякого номера n_0 послідовність $\{a_n\}$ буде спадною. Порахуємо декілька перших членів:

$$a_1 = \frac{1+2}{1+4+1+6} = \frac{3}{12} = 0,25, \qquad a_2 = \frac{4+4}{8+16+2+6} = \frac{4}{32} \approx 0,25,$$

$$a_3 = \frac{9+6}{27+36+3+6} = \frac{15}{72} \approx 0,21, \quad a_4 = \frac{16+8}{64+64+4+6} = \frac{24}{138} \approx 0,17,$$

маємо $a_1 = a_2 > a_3 > a_4 > \dots$. Дійсно, послідовність $\{a_n\}$ є спадною (Зрозуміло, що ці міркування не можна вважати строгим доведенням).

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n}{n^3+4n^2+n+6} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3}} = 0.$

Умови теореми Лейбніца виконуються, отже, ряд (1) збіжний. А оскільки ряд з абсолютних величин (2) розбіжний, то ряд (1) збіжний умовно.

Відповідь: ряд збіжний умовно.

Задача 3.3. Дослідити ряд на абсолютну/умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Розв'язання. Ряд (1) є знакопочерговим рядом, загальний член якого $u_n = (-1)^n \ln\left(\dfrac{n^3+1}{n^3}\right) = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)$. За абсолютною величиною: $|u_n| = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)$.

а) Розглянемо ряд, складений з модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Ряд (2) є **знакододатним рядом**. Порівняємо цей ряд з рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad \textbf{(3)}$$

Ряд (3), це узагальнений гармонічний ряд, в якому $p=3>1$, тому є збіжним.

За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}}=\left|\begin{array}{l} \textit{згідно ТЕНМФ} \\ \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{1}{n^3} \\ \frac{1}{n^3}\to 0\ \textit{при}\ n\to\infty\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}=1\neq\left\{\begin{array}{c}0\\ \infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

ряди (2) і (3) поводять себе однаково. Отже, якщо ряд (3) збіжний, то і ряд (2) також збіжний.

б) Оскільки ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ збіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ теж збіжний. Ряд (1) є абсолютно збіжним.

Відповідь: ряд абсолютно збіжний.

4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

4.1. Функціональні ряди . Означення, основні поняття

Розглянемо послідовність $\{u_n(x)\}=\{u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x),\dots\}, n\in N$, де $u_n(x)$ – функції змінної x, визначені на множині Е.

Означення 4.1. ***Функціональним рядом*** називається ряд, членами якого є функції від x:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ \dots+u_n(x)+\cdots \qquad (4.1)$$

$u_n(x), n=1,\ 2,\dots$ – визначені і неперервні $\forall\, x\in[a;b]$ функції (зокрема $\forall\, x\in(-\infty;+\infty)$).

Зауважимо, що при підстановці в функціональний ряд фіксованого значення змінної x отримаємо *числовий ряд*, який може бути як збіжним так і розбіжним.

Наприклад, розглянемо функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. Підставимо замість змінної x різні значення. При $x=\frac{1}{2}$ отримаємо числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$, який є збіжним. При $x=\frac{3}{2}$ отримаємо числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$, який розбіжний. При $x=-1$ отримаємо числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, який розбіжний, тощо.

Означення 4.2. Якщо для фіксованого $x_0 \in E$ отриманий числовий ряд збіжний, то точка x_0 називається ***точкою збіжності*** функціонального ряду (4.1).

Аналогічно вводиться поняття ***точки розбіжності*** функціонального ряду, ***точки абсолютної та умовної збіжності***.

Означення 4.3. Множина D всіх точок збіжності функціонального ряду (4.1) називається ***областю збіжності*** цього ряду.

Для наведеного прикладу областю збіжності є проміжок (-1;1).

Означення 4.4. Сума n перших членів функціонального ряду $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ називається ***частинною сумою*** функціонального ряду. Вираз $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ називається ***залишковим*** або ***n-м залишковим членом функціонального ряду***.

Очевидно, що в області збіжності функціонального ряду його сума є деякою функцією від x, яку позначимо $S(x)$, $x \in D$. Визначається вона в області збіжності рівністю $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.

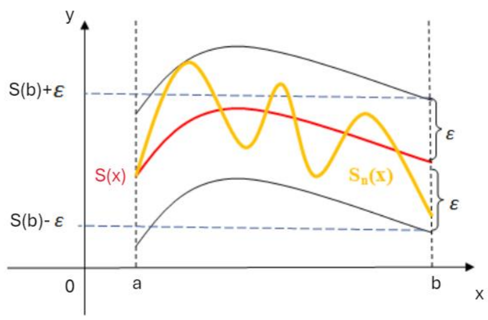
Означення 4.5. Якщо $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_0 = n_0(\varepsilon, x)$: $\forall n > n_0 \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in D$, що означає, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \forall x \in D$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається ***збіжним*** в області D і його сума = $S(x)$.

Твердження. Якщо функціональний ряд (4.1) збіжний при $x \in D$ і його сума дорівнює $S(x)$, $x \in D$, тоді $S(x) = S_n(x) + R_n(x), \forall x \in D$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \forall x \in D$.

Оскільки в області D міститься нескіченна множина значень x, то отримаємо нескінченну множину числових послідовностей $\{S_n(x)\}$, $\forall x \in D$, які збігаються до $S(x)$. Для кожної з них знайдеться своє значення n_0, яке відповідає заданому значенню x. Якщо ж існує такий номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, який підходить для всіх послідовностей $\{S_n(x)\}$, $\forall x \in D$, то говорять про рівномірну збіжність послідовності частинних сум, а отже, і про рівномірну збіжність ряду.

4.2. Рівномірна збіжність функціональних рядів

Означення 4.6. Функціональний ряд (4.1) називається ***рівномірно збіжним*** в області D, якщо $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, який не залежить від x, такий що $\forall n > n_0$ виконується нерівність $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in D$.



Геометрично: $\exists n_0(\varepsilon)$, такий, що графіки функцій $S_n(x), \forall n > n_0$ будуть розташовані всередині ε-трубки графіка функції $S(x)$.

Якщо збіжність не рівномірна, то графіки функцій $S_n(x)$ виходять за межі ε-трубки функції $S(x)$.

Зауваження. Рівномірна збіжність є більш сильним поняттям, ніж просто збіжність. Якщо функціональний ряд рівномірно збіжний в *D*, то він збіжний в цій області *D*. Зворотнє твердження місця не має.

Теорема 4.1. (Ознака Вейєрштрасса)

Нехай виконуються наступні умови:

1) існує числовий знакододатний збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, (4.2)

2) $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n \in N, \forall x \in D$.

Тоді функціональний ряд (4.1) збіжний абсолютно та рівномірно в області D.

У такому випадку функціональний ряд (4.1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *мажорованим* в області D, а числовий ряд (4.2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *мажорантним* (або *мажорантою* ряду (4.1)).

Доведення. 1. Доведемо абсолютну збіжність.

Зафіксуємо деяке $x_0 \in D$, отримаємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. (4.3)

Розглянемо ряд з абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$. (4.4)

Ряд (4.4) – знакододатний числовий ряд.

За умовою теореми $|u_n(x_0)| \leq a_n$, тоді за першою ознакою порівняння, зі збіжності ряду (4.2) випливає збіжність ряду (4.4), отже, ряд (4.3) абсолютно збіжний.

Оскільки точка x_0 - довільна точка області D, то (4.1) абсолютно збіжний $\forall x \in D$.

2. Доведемо рівномірну збіжність.

Оскільки ряд (4.2) збіжний, то залишковий член цього ряду ${R_n}^{(2)}$ прямує до нуля при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} {R_n}^{(2)} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$\forall n > n_0 \Rightarrow \left|{R_n}^{(2)}\right| < \varepsilon$.

Залишок ряду (4.1): ${R_n}^{(1)} = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$,

$\left|{R_n}^{(1)}\right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = {R_n}^{(2)}, \forall x \in D$.

Отримаємо: $\left|{R_n}^{(1)}\right| \leq {R_n}^{(2)} < \varepsilon$, тобто $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$, що не залежить від x, що $\left|{R_n}^{(1)}\right| < \varepsilon \;\; \forall x \in D \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ряд (4.1) рівномірно збіжний в області D.

Теорему доведено.

4.3. Властивості рівномірно збіжних рядів

Сформулюємо без доведення декілька важливих теорем про рівномірно збіжні функціональні ряди.

Теорема 4.2. (Про неперервність суми рівномірно збіжного ряду)

Якщо для функціонального ряду (4.1) виконуються умови:

1) члени $u_n(x), \forall \in N$ є визначеними і неперервними функціями на відрізку $[a;b]((a;b)\ ;\ [a;b))$;

2) ряд (4.1) рівномірно збіжний на $[a;b]$,

то сума $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ряду (4.1) також є неперервною функцією в кожній точці $[a;b]$.

Теорема 4.3. (Про почленне інтегрування рівномірно збіжного ряду)

Якщо для функціонального ряду (4.1) виконуються умови теореми 4.2., то його можна почленно інтегрувати в межах інтервалу $(\alpha;\beta) \in [a;b]$: (тобто сума $S(x)$ є інтегровною на відрізку $[a;b]$).

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\,S(x)\,)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\,\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx).$$

Причому отриманий ряд також є рівномірно збіжним на $[a;b]$. Тобто, рівномірно збіжний ряд можна *почленно інтегрувати*.

Теорема 4.4. (Про диференціювання рівномірно збіжного ряду)

Якщо для функціонального ряду (4.1) виконуються умови:

1) члени ряду $u_n(x)$ неперервно-диференційовні функції $\forall x \in [a;b]$, $\forall n \in N$;

2) функціональний ряд (4.1) збіжний, його сума $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ \forall x \in [a;b]$;

3) ряд, складений із похідних $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ рівномірно збіжний $\forall x \in [a;b]$,

то сума $S(x)$ ряду (4.1) є неперервно-дифренеційовною функцією на $[a;b]$ та

$$S'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} u'(x),\ \forall x \in [a;b].$$

Тобто, ряд можна *почленно диференціювати*.

Приклади розв'язування типових задач

Задача 4.1. Довести рівномірну збіжність на відрізку $[2;4]$ функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3+5}$.

Доведення.

Оскільки $2 \le x \le 4$, то $-1 \le x-3 \le 1$, або $|x-3| \le 1$, тоді для загального члена ряду за абсолютною величиною має місце оцінка:

$$|u_n(x)| \le \frac{|(x-3)^n|}{n^3+5} \le \frac{1}{n^3+5} \le \frac{1}{n^3} = a_n.$$

Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, який збіжний як узагальнений гармонічний ряд, для якого p=3> 1. Тоді за ознакою Вейєрштрасса (теорема 4.1) заданий ряд є абсолютно та рівномірно збіжний на відрізку $[2;4]$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ є мажорантою заданого функціонального ряду.

Задача 4.2. Довести рівномірну збіжність на R функціонального ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{\sqrt{n^3}} \ .$$

Доведення.

Випишемо загальний член ряду $u_n(x) = \frac{sinnx}{\sqrt{n^3}}$ і проведемо його оцінку за абсолютною величиною: $|u_n(x)| = \frac{|sinnx|}{\sqrt{n^3}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = a_n,\ \forall x \in R,\ \forall n \in N.$

Отриманий числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ збіжний як узагальнений гармонічний ряд, для якого p = 3/2 > 1. Отже, за ознакою Вейєрштрасса заданий ряд є абсолютно та рівномірно збіжний на R. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ є мажорантою заданого функціонального ряду.

Задача 4.3. Чи можна почленно інтегрувати функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$?

Члени ряду є функціями $u_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$:

1) кожен член ряду $u_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ є неперервною на R функцією;

2) $|u_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2},\ \forall x \in R,$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, p=2>1, збіжний, тоді за ознакою Вейєрштрасса даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ рівномірно збіжний. За теоремою 4.2 (про

почленне інтегрування функціональних рядів) цей ряд можна інтегрувати на довільному проміжку в його області збіжності, зокрема, на проміжку $[0;x]$:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dx}{x^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} arctg \frac{x}{n}\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} arctg \frac{x}{n}.$$

5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Степеневі ряди є частинним випадком функціональних рядів.

Означення 5.1. ***Степеневим рядом*** називається функціональний ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n + \cdots \quad (5.1)$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = C_0 + C_1(x - x_0) + \cdots + C_n (x - x_0)^n + \cdots, \quad (5.2)$$

де $x_O, C_n \in R$.

При цьому дійсні числа $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ називаються *коефіцієнтами степеневого ряду.*

Ряд (5.1) є частинним випадком ряду (5.2) при $x_0 = 0$. Заміною змінної $t = x - x_0$ ряд (5.2) зводиться до ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$, тобто ряду вигляду (5.1). Тому основні факти і теореми для степеневих рядів наводимо для рядів типу (5.1).

Будь-який ряд (5.1) збіжний в точці x=0 до суми $S = C_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Наступна теорема дає змогу знаходити й інші точки числової осі, в яких ряд (5.1) є збіжний. Ця теорема є важливою в теорії рядів.

5.1. Збіжність степеневих рядів. Теорема Абеля

Теорема 5.1. Теорема Абеля

I. Якщо ряд (5.1) збіжний в точці $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для довільних значень змінної x: $-|x_0| < |x| < |x_0|$ ($\forall\, x \in \left(-|x_0|; |x_0|\right)$).

II. Якщо ряд (5.1) розбіжний в деякій точці $x = x_1$, то він розбіжний і для довільних значень змінної x: $|x| > |x_1|$, ($\forall\, x \in \left(-\infty; -|x_1|\right) \cup \left(|x_1|; +\infty\right)$).

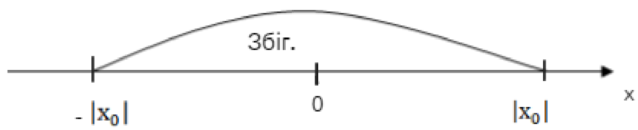
Доведення.

I. За умовою ряд (5.1) збіжний в точці x_0, тобто збіжний числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x_0^n$. За необхідною умовою збіжності числового ряду $\exists \lim\limits_{n\to\infty} C_n x_0 = 0$, тому послідовність $\{C_n x_0^n\}$ обмежена, тобто існує таке число M, що $|C_n x_0^n| \le M$, $\forall n \in N$.

Враховуючи, що для $-|x_0| < |x| < |x_0|$ величина $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, маємо оцінку

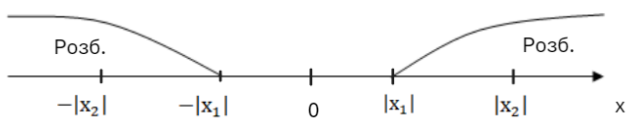
$$|C_n x^n| = \left|C_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \le |C_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M q^n, \quad \forall n \in N \,.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ збіжний як геометричний ряд, для якого q<1, тому за теоремою Вейєрштрасса ряд (5.1) абсолютно та рівномірно збіжний. На рисунку зображено інтервал, в якому, як доведено, степеневий ряд збіжний.



II. За умовою ряд (5.1) розбіжний при $x = x_1$. Треба довести, що степеневий ряд буде також розбіжний при $\forall x$: $|x| > |x_1|$.

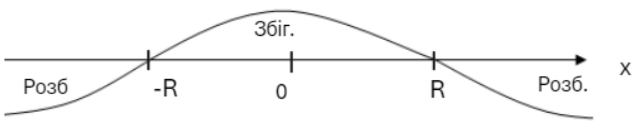
Припустимо протилежне: існує деяка точка x_2: $|x_2|>|x_1|$, така, що ряд (5.1) в цій точці збіжний. З доведення пункту I цієї теореми випливає, що тоді і в точці x_1 ряд збіжний. Отримали протиріччя. Отже, припущення неправильне і дійсно ряд (5.1) розбіжний для всіх x: $|x| > |x_1|$.



5.2. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду

З теореми Абеля випливає, що областю збіжності степеневого ряду (5.1) є симетричний інтервал з центром в початку координат. Можна зробити висновок, що існує таке число $R \geq 0$, що

- при $\forall x$: $|x| < R$ степеневий ряд (5.1) абсолютно збіжний;
- при $\forall x$: $|x| > R$ степеневий ряд (5.1) розбіжний.



Отже, степеневий ряд (5.1) збіжний в деякому інтервалі **(**-*R;R*).

Означення 5.2. ***Інтервалом збіжності*** степеневого ряду (5.1) називається такий інтервал (-*R;R*), що $\forall x \in (-R; R)$ степеневий ряд збіжний, а для всіх значень x: $x \in (-\infty; -R) \cup (R; \infty)$ степеневий ряд розбіжний. Число R називається ***радіусом збіжності степеневого ряду.***

Спосіб знаходження радіуса збіжності степеневого ряду

Складемо ряд з модулів членів ряду (5.1): $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n x^n|$ (5.3)

Надаючи x деяких сталих значень, отримуємо числовий знакододатний ряд. До нього застосуємо ознаку Даламбера, де $a_n = |C_n x^n|$.

$$l(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|.$$

Згідно з ознакою Даламбера, ряд (5.3) збіжний (зокрема ряд (5.1) абсолютно збіжний) при $l(x) < 1$. Тобто, $|x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| < 1$ або $|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}|\frac{C_{n+1}}{C_n}|}$ $<=>$ $|x| < \lim_{n\to\infty}|\frac{C_n}{C_{n+1}}| = R$ і розбіжний при $|x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| > 1$ або $|x| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty}|\frac{C_{n+1}}{C_n}|}$. Отже, для ряду (5.1) інтервал $\left(-\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|}; \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду, а число

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \tag{5.4}$$

є його *радіусом збіжності*.

Аналогічно, якщо до ряду (5.3) застосувати радикальну ознаку Коші, то отримаємо формулу для радіусу збіжності степеневого ряду (5.1):

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} \tag{5.5}$$

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, при $x = R$ або $x = -R$ степеневий ряд (5.1) може бути як збіжним так і розбіжним. Тому степеневий ряд (5.1) потрібно додатково досліджувати на збіжність в крайніх точках інтервалу збіжності. В цих точках ряд (5.1) може бути абсолютно або умовно збіжний або розбіжний.

Зауваження 2.

- Якщо радіус збіжності R=0, то степеневий ряд (5.1) збіжний лише в одній точці x=0, тобто область збіжності є $\{0\}$.

- Якщо $R = \infty$, то степеневий ряд (5.1) абсолютно збіжний $\forall x \in R$, тобто область збіжності є (∞;-∞).

Зауваження 3. Радіус збіжності степеневого ряду (5.2) визначається тими ж формулами (5.4) та (5.5), що і для ряду (5.1). Проте інтервал збіжності у цьому випадку знаходиться з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто має вигляд (x_0-R; x_0+R).

Зауваження 4. Якщо степеневий ряд містить не всі степені x (кажуть, ***неповний*** *степеневий ряд*), то інтервал збіжності знаходять без використання радіуса збіжності, а безпосередньо застосовуючи ознаку Даламбера або радикальну ознаку Коші до ряду, утвореного з модулів членів даного ряду.

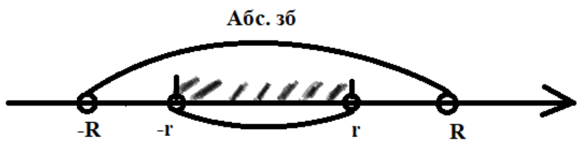
5.3. Властивості степеневих рядів

Розглянемо степеневий ряд (5.1), радіус збіжності якого R. На інтервалі (-R;R) ряд збіжний і його сума $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = S(x)$ для $x \in (-R; R)$.

Теорема 5.2. (Про рівномірну збіжність степеневого ряду)

Степеневий ряд (5.1) рівномірно збіжний на кожному відрізку [-*r*;*r*], де 0<*r*<*R*, *R*>*0*, що знаходиться в середині його інтервала збіжності $(-R;R)$.

Доведення.



$|C_n x^n| \le |C_n| r^n,\ \forall x \in [-r,r]$

Оскільки $[-r,r] \subset (-R;R)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| r^n$ збіжний. Тобто цей ряд є мажорантою для заданого степеневого ряду, отже степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ за теоремою Вейєрштрасса (про рівномірну збіжність функціонального ряду) є рівномірно збіжним на [-*r*;*r*]. **Доведено**.

Теорема 5.3. (Про неперервність суми степеневого ряду)

Сума $S(x)$ степеневого ряду (5.1) є неперервною функцією в середині його інтервала збіжності.

Доведення. Функції $u_n = C_n x^n$ неперервні для $\forall x \in (-R;R)$, а за теоремою 5.1 степеневий ряд рівномірно збіжний на $[-r,r] \subset (-R;R)$. За теоремою про неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду (див. теорему 4.2) сума заданого степеневого ряду є неперервною на $[-r,r] \subset (-R;R)$.

Оскільки довільну точку $x \in (-R;R)$ можна заключити в деякий проміжок [-*r*;*r*], *r*<*R*, то функція *S*(*x*) є неперервною в довільній точці $x \in (-R;R)$.

Доведено.

Зауваження. Можна показати, що:

1) якщо степеневий ряд (5.1) збіжний при *x*=*R*, то в цій точці сума ряду (5.1) неперервна зліва, тобто $\lim_{x \to R-0} S(x) = S(R)$.

2) якщо степеневий ряд (5.1) збіжний при *x*= – *R*, то в цій точці сума ряду (5.1) неперервна справа, тобто $\lim_{x \to -R+0} S(x) = S(-R)$.

Теорема 5.4. (Про інтегрування степеневого ряду)

Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ з сумою *S*(*x*) можна почленно інтегрувати всередині інтервалу збіжності (-*R*;*R*), *R*>0, цього ряду:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n)dx \ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} C_n x^n dx,$$

де -R<α<β<R ([α;β]⊂(-R;R)), при цьому *інтервал збіжності* проінтегрованого ряду залишиться тим самим.

Доведення.

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, $x \in$ (-R;R).

Завжди ∃ r: $\begin{cases} [\alpha;\beta] \subset [-r;r] \subset (-R;R) \\ r < R \end{cases}$

За теоремою 5.2. заданий степеневий ряд буде рівномірно збіжним на [α;β], отже, за теоремою про інтегрування рівномірно збіжного функціонального ряду, степеневий ряд можна почленно інтегрувати. Доведено.

Зауваження. Застосуємо теорему про інтегрування степеневого ряду на відрізку [0;x] ⊂ (-R;R) =>отримаємо ряд, який має той самий радіус збіжності:

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} t^{n+1}|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{5.6}$$

Доведемо незмінність радіуса збіжності. Нехай R – радіус збіжності ряду (5.1). За формулою (5.4):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|.$$

Радіус збіжності (5.6):

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n(n+2)}{(n+1)C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+{}^2/_n}{1+{}^1/_n}\right| = R\,.$$

Теорема 5.5. (Про диференціювання степеневого ряду)

Степеневий ряд (5.1) з сумою $S(x)$ можна почленно диференціювати всередині його інтервалу збіжності:

$S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1}, \forall x \in (-R;R)$, R≠0,

при цьому інтервал збіжності продиференційованого ряду не зміниться.

Доведення.

Перевіримо, чи виконуються умови Т.4.4. (пп.4.3) про диференціювання рівномірно збіжного ряду.

1) $u_n(x) = C_n x^n$ – неперервно диференційовні функції $\forall x \in (-R; R)$;

2) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ є збіжним у довільній фіксованій точці $c \in [-r; r] \subset (-R; R)$.

3) $u_n'(x) = C_n n x^{n-1}$. Покажемо, що ряд, отриманий почленним диференціюванням степеневого ряду (5.1), тобто ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^{n-1} \tag{5.7}$$

є рівномірно збіжним на $[-r; r] \subset (-R; R)$.

Знайдемо радіус збіжності цього ряду:

$$R_2 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{nC_n}{(n+1)C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = 1R = R.$$

Тому за теоремою 5.2 ряд (5.7) рівномірно збіжний на довільному відрізку $[-r; r] \subset (-R; R)$.

Всі умови теореми про почленне диференціювання функціонального ряду на [-*r*;*r*] виконуються, отже, ряд (5.1) можна почленно диференціювати.

Оскільки довільну внутрішню точку x інтервалу (-*R;R*) можна заключити в деякий проміжок [-*r;r*], $r<R$, то ряд (5.1)) можна почленно диференціювати для $\forall x \in (-R; R)$. Доведено.

Наслідок. Степеневі ряди можна почленно інтегрувати та диференціювати нескінченну кількість разів всередині інтервалу збіжності, при цьому радіус збіжності та інтервал збіжності не зміниться (зауважимо, що область збіжності може змінитися, оскільки в крайніх точках інтервалу збіжності характер збіжності отриманих диференціюванням або інтегруванням рядів може бути інший).

Приклади розв'язування типових задач

Задача 5.1. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Розв'язання.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)} - \quad \text{степеневий} \quad \text{ряд}, \qquad (1)$$

коефіцієнти якого $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Відповідно, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.

1) Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду та запишемо інтервал його збіжності.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\ln(n+2)}{(n+1)\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot \ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1\cdot\ 1 = 1,$$

де другу границю можна знайти за правилом Лопіталя. Тоді, $x \in (-1;1) -$ інтервал збіжності степеневого ряду.

2) Дослідимо ряд на збіжність в крайніх точках його інтервала збіжності.

а) $x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ – (2) знакододатний ряд.

Дослідимо цей ряд за інтегральною ознакою Коші. Нехай $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$.

$f(n) = u_n$

1) $f(x) -$ неперервна на $[1;+\infty)$,

2) $f(x) > 0$, $x \in [1;+\infty)$,

3) $f(x) -$ спадна на $[1;+\infty)$.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{A\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{A\to+\infty}\ln(\ln(x+1))\Big|_1^A =$$

$= \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\ln(\ln(A+1)) - \ln(\ln 2)\right) = \infty \Rightarrow$ інтеграл розбіжний, отже, ряд (2) також розбіжний. Відповідно, $x = 1 -$ точка розбіжності.

б) $x=-1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}-$ (3) знакочерговий ряд, $c_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}>0$.

Застосуємо ознаку Лейбніца:

1) послідовність $c_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-$ спадна;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}=0$.

Умови ознаки Лейбніца виконуються, отже, ряд (3) збіжний. Враховуючи 2а) можна стверджувати, що ряд (3)- умовно збіжний. Тому $x=-1-$ точка збіжності (умовної).

Отже, область збіжності $x\in[-1;1)$.

Відповідь: $[-1;1)$. Відмітимо, що при $x\in(-1;1)-$ абсолютна збіжність, при $x=-1-$умовна збіжність.

Задача 5.2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(n^2+3)\cdot 3^n}$.

Розв'язання.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(n^2+3)\cdot\ 3^n}-$ степеневий ряд (1), в якому $x_0=1$ і коефіцієнти $a_n=\dfrac{1}{(n^2+3)\cdot\ 3^n}$.

1) Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду та запишемо інтервал його збіжності.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{(n^2+3)\cdot\ 3^n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+3}\cdot\ 3=3.$$

Тоді $-3<x-1<3$, $\ -2<x-1<4$, $x\in(-2;4)-$інтервал збіжності степеневого ряду.

2) Дослідимо ряд на збіжність в крайніх точках його інтервала збіжності.

а) $x = 4$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(4-1)^n}{(n^2+3)\cdot\ 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n^2+3)\cdot\ 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+3} -$ (2) знакододатний ряд, бо

його загальний член $u_n = \dfrac{1}{n^2+3} > 0$.

Порівняємо його з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} -$ (3) узагальнений гармонічний ряд,

$\alpha = 2 > 1 \Rightarrow$ збіжний.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2+3}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left|\begin{matrix} :n^2 \\ :n^2 \end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{3}{n^2}} = 1 \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ \infty \end{Bmatrix}.$$

За граничною ознакою порівняння ряд (2) також збіжний. Відповідно, $x = 4 -$ точка збіжності.

б) $x = -2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2-1)^n}{(n^2+3)\cdot\ 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\cdot\ 3^n}{(n^2+3)\cdot\ 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+3} -$ (4) знакопочерговий ряд,

$c_n = \dfrac{1}{n^2+3} > 0$.

Звернемо увагу, що ряд з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+3} -$ є рядом (3), що

досліджено у пункті 2а) . Цей ряд збіжний згідно пункта 2а), отже, ряд (4) є абсолютно збіжним. Тому $x = -2 -$ точка збіжності (абсолютної).

Отже, ряд (1) збігається при всіх $x \in [-2; 4]$.

Відповідь: область збіжності $x \in [-2; 4]$ (абсолютної).

Задача 5.3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

Розв'язання.

1 спосіб

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{\left(x-4\right)^{2n-1}}{2n-1}$ – степеневий ряд (1), який є *неповним,* оскільки містить тільки непарні степені $\left(x-4\right)$. Загальний член ряду $u_n(x)=\left(-1\right)^n \frac{\left(x-4\right)^{2n-1}}{2n-1}$.

Застосуємо ознаку Даламбера для ряду, складеного з абсолютних величин:

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(x-4\right)^{2n+1}}{2n+1}}{\left(-1\right)^{n}\frac{\left(x-4\right)^{2n-1}}{2n-1}}\right|=(x-4)^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=(x-4)^2.$$

Ряд збіжний, якщо $l(x)<1$, тобто, при $(x-4)^2<1\Leftrightarrow\left|x-4\right|<1\Leftrightarrow 3<x<5$. Тоді (3;5) – інтервал збіжності. Дослідимо збіжність ряду в крайніх точках інтервалу збіжності.

а) $x=5\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{1^n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{1}{2n-1}$ – (2) знакопочерговий ряд, $c_n=\frac{1}{2n-1}>0$.

Застосуємо ознаку Лейбніца:

1) послідовність $c_n=\frac{1}{2n-1}$ – спадна;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$.

Умови ознаки Лейбніца виконуються, отже, ряд (2) збіжний. Можна уточнити, що збіжний умовно. Тому $x=5$ – точка збіжності ряду (1).

б) $x=3\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{1}{2n-1}$ – (3) знакопочерговий ряд, $c_n=\frac{1}{2n-1}>0$. За ознакою Лейбніца ряд (3) збіжний

Тому $x=3$ – точка збіжності ряду (1).

Отже, область збіжності ряду (1) $x \in [3;5]$. На кінцях інтервалу при $x=3$, $x=5$ ряд є умовно збіжним.

2 спосіб

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$ – степеневий ряд (1), який є *неповним,* оскільки містить тільки непарні степені $(x-4)$.

Перепишемо ряд у вигляді:

$$\frac{1}{x-4}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{2n}}{2n-1},\ x-4 \neq 0.$$ При $x=4$ очевидно ряд збіжний.

Виконаємо заміну $(x-4)^2 = y,\ y \geq 0$. Отримаємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2n-1}$ – (2) це є *повний* степеневий ряд, коефіцієнти якого

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

1) Знайдемо радіус збіжності:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n-1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left|\frac{:n}{:n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Тоді $y \in (-1;1)$ – інтервал збіжності. Але враховуючи, що $y \geq 0$, то для $y \in [0;1)$ ряд (2) збіжний. Дослідити треба тільки у точці $y=1$ (бо при $y=0$, очевидно є збіжність).

2) $y=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1^n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n-1}-$ (3) знакопочерговий ряд,

$c_n=\frac{1}{2n-1}>0$.

Застосуємо ознаку Лейбніца:

1) $c_n=\frac{1}{2n-1}-$ спадна;

2) $\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$.

Умови ознаки Лейбніца виконуються, отже, ряд (3) збіжний. Можна уточнити, що збіжний умовно. Тому $y=1-$ точка збіжності ряду (2). Тобто, область збіжності ряду (2): $y\in[0;1]$.

Повертаємося до заміни:

$(x-4)^2\in[0;1]$

$(x-4)^2\le 1,\quad |x-4|\le 1,\quad -1\le x-4\le 1,\quad 3\le x\le 5.$

Отже, область збіжності ряду (1) $x\in[3;5]$.

Відповідь: область збіжності $x\in[3;5]$. На кінцях інтервалу при $x=3$, $x=5$ ряд є умовно збіжним.

6. РЯДИ ТЕЙЛОРА ТА МАКЛОРЕНА

6.1. Розклад функції в ряд Тейлора

Досі ми вивчали властивості суми заданого степеневого ряду. Тепер з'ясуємо за яких умов задану функцію $f(x)$:

1) можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти цей ряд (його коефіцієнти);

2) при яких умовах отриманий ряд буде збігатись до початкової функції, і в якому інтервалі?

1) Нехай функція $y = f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \ldots + C_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (6.1)$$

$$\forall x \in \left(x_0 - R,\ x_0 + R\right)$$

Запис (6.1) читають, як функція $f(x)$ розкладена в степеневий ряд в околі точки x_0 або функція $f(x)$ розкладена в степеневий ряд за степенями $x - x_0$.

Знайдемо коефіцієнти ряду (6.1). Для цього згідно з теоремою про диференціювання степеневого ряду, диференціюватимемо ряд (6.1) і підставлятимемо в знайдені похідні значення $x = x_0$, $\forall x \in \left(x_0 - R,\ x_0 + R\right)$:

$$f'(x) = C_1 + 2C_2\left(x - x_0\right) + 3C_3(x - x_0)^2 + \ldots + nC_n\left(x - x_0\right)^{n-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2\cdot C_3(x - x_0)^2 + \ldots + n(n-1)C_n\left(x - x_0\right)^{n-2} + \ldots,$$

………………………………

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_n + (n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2C_{n+1}\left(x - x_0\right) + \ldots,$$

……………………………………..

Підставимо $x = x_0$:

$$\left.\begin{array}{c} f\left(x_0\right) = C_0 = 0!C_0 \\ f'\left(x_0\right) = C_1 = 1!C_1 \\ f''\left(x_0\right) = 2C_2 = 2!C_2, \\ f'''\left(x_0\right) = 3\cdot 2\cdot C_3 = 3!C_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}\left(x_0\right) = n!C_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad (6.2)$$

$0! = 1,\ f^{(0)}(x) = f(x)$.

Підставимо (6.2) в (6.1):

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R).
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Ряд (6.3) називається ***рядом Тейлора функції*** $f(x)$ ***в околі точки*** x_0**.**

Якщо в ряді (6.3) $x_0 = 0$, то ряд набуває вигляду:

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad \forall x \in (-R; R).
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Ряд (6.4) називається ***рядом Маклорена***.

Тим самим доведена наступна теорема.

Теорема 6.1. Якщо функція $f(x)$ нескінченно диференційована на інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ і її можна розкласти в степеневий ряд (6.1) на цьому інтервалі, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора (6.3) даної функції.

2) Нехай функція $y = f(x)$ нескінченно диференційовна в деякому околі точки x_0. Складемо для неї ряд (6.3).

Зауваження. Сума ряду (6.3) не завжди збігається з функцією $f(x)$. Інакше кажучи, ряд (6.3) може збігатися до іншої функції, а не до функції $f(x)$, для якої його формально складено.

Встановимо умови, при яких сума ряду (6.3) збігається з функцією $f(x)$.

Відомо, що функцію $y = f(x)$, яка має похідні всіх порядків в точці x_0, можна в околі цієї точки записати у вигляді ряду (формули Тейлора):

$$
f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \tag{6.5}
$$

де $R_n = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – залишковий член ряду у формі Лагранжа, C – середня точка, $C \in (x, x_0)$ *або* $C \in (x_0, x)$. Або ж (6.5) ще можна переписати у вигляді:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x). \tag{6.6}$$

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \tag{6.7}$$

І навпаки, якщо виконується умова (6.7), то з формули (6.6) випливає рівність $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$.

Отже, умова (6.7) є необхідною і достатньою умовою для того, щоб ряд ряд Тейлора, складений для функції $f(x)$, збігався до $f(x)$ (тобто, мав суму $f(x)$). Тим самим, доведена наступна теорема.

Теорема 6.2. (Необхідна і достатня умова розкладу функції в ряд Тейлора)

Для того, щоб ряд Тейлора (6.3) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ необхідно і достатньо:

1) щоб в цьому інтервалі функція $f(x)$ була нескінченно диференційовна;
2) Залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n \to \infty$ *і* $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Безпосередня перевірка умов теореми 6.2 нерідко виявляється непростою задачею. Тому доведемо наступну теорему, яка дає простіші достатні умови розкладу функції в ряд Тейлора.

Теорема 6.3. (Достатні умови розкладу функції в ряд Тейлора)

Нехай виконуються умови:

1) функція $f(x)$ нескінченно диференційовна на інтервалі $(x_0 - H, x_0 + H)$, $\forall\, H > 0$;
2) усі похідні функції на цьому інтервалі обмежені однаковим числом:

$$\exists M > 0: \left| f^{(n)}(x) \right| \le M, \ \forall\, x \in \left(x_0 - H, x_0 + H\right), \ n = 1, 2, \ldots \ .$$

Тоді функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора (6.3) на цьому інтервалі:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x\in(x_0-H,x_0+H).$$

Доведення.

За теоремою 6.2 доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0 =>$

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f^{n+1}(x_2)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}= \\ \qquad = M\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \\ \qquad |f^{(n)}(x)|\le M, \forall\, n=0,1,2\ldots\end{cases}$$

Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0.$

Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad u_n(x)=\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!|x-x_0|^{n+1}}=|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1-\text{збіжний},\ \forall x\in R,$$

=>за необхідною умовою збіжності $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$

$=>\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0, \forall x\in(x_0-R,x_0+R).$

Доведено.

6.2. Розклад деяких елементарних функцій в ряд Маклорена

Схема розвинення функцій в ряд Маклорена:

1. Знайти похідні $f'(x), f''(x),\ldots, f^{(n)}(x),\ldots.$
2. Обчислити значення похідних в точці $x=0$.
3. Записати ряд Маклорена для даної функції і знайти інтервал його збіжності.
4. Визначити інтервал $(-H;H)$, в якому залишковий член ряду Маклорена $R_n(x)\to0,\ n\to\infty$. Якщо такий інтервал існує (він може відрізнятися

від інтервалу збіжності ряду (6.4)), то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума ряду Маклорена збігаються.

Розглянемо ряди Маклорена деяких елементарних функцій.

1. Показникова функція $y=e^x$

$y=e^x$ – нескінченно диференційовна функція $\forall x \in \mathrm{R}$.

Перевіримо виконання пунктів схеми:

1) $f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x, \ldots, f^{(n)}(x)=e^x, \ldots,\ \forall n \in \mathrm{N},\ \forall x \in \mathrm{R}$;

2) $f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=1$;

3) Побудуємо формальний ряд Маклорена:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (6.8)$$

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Отже, ряд (6.8) збігається в інтервалі $x\in(-\infty;+\infty)$.

4) Розглянемо відрізок $x\in(-H;+H), H>0$.

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|e^x\right|\le e^H=M>0,\quad \forall x\in(-H;+H),\ n=1,2,\ldots\ .$$

Тоді згідно теореми 6.3 про достатні умови розкладу функції в ряд Тейлора має місце рівність:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-H;+H), H>0.$$

Враховуючи вільність вибору числа $H, H\to+\infty$:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ \forall x\in\mathrm{R}..$$

2. Гіперболічні функції

а) Синус гіперболічний $y = sh\,x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.

Врахуємо отриманий розклад показникової функції в ряд Маклорена:

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\quad \forall x \in \mathrm{R}.$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots,\ \forall x \in \mathrm{R}.$$

Віднімаємо і множимо на $\frac{1}{2}$:

$$sh\,x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall x \in \mathrm{R}$$

б) Косинус гіперболічний $y = ch\,x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$.

Перший спосіб: аналогічно до $y = shx$.

Другий спосіб: $ch\,x = (sh\,x)' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ \forall x \in \mathrm{R}$

$$ch\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,\ \forall x \in \mathrm{R}.$$

3. Тригонометричні функції

а) $y = \sin x$.

Задана функція є нескінченно диференційовною $\forall x \in \mathrm{R}$.

Перевіримо виконання пунктів схеми:

1) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2} \right)$, $n = 1, 2, \ldots,\ x \in \mathrm{R}$.

2) $f^{(n)}(0) = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ 1, & n = 1, 5, 9, \ldots \\ -1, & n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$

3) Побудуємо формальний ряд Маклорена:

$$\sin x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n!} x^n \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\left| x^2 \right|}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1 \Rightarrow$$

ряд збігається за ознакою Даламбера для $\forall x \in \mathrm{R}$.

4) $\left| f^{(n)}(x) \right| = \left| \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \right| \le 1 = M, \ \forall x \in [-H; H],$ *зокрема* $\forall x \in \mathrm{R}, \ n = 1, 2, \ldots$

за теоремою 6.3 ряд збігається до функції $\sin x$, $\forall x \in \mathrm{R}$. Отже,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \forall x \in \mathrm{R}.$$

б) Розглянемо функцію $y = \cos x$.

Задана функція є нескінченно диференційовною $\forall x \in \mathrm{R}$.

Перевіримо виконання пунктів схеми:

Перший спосіб: аналогічно до $y = \sin x$.

Другий спосіб:

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in \mathrm{R}.$$

Отже, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ \forall x \in \mathrm{R}$.

4. Логарифмічна функція

$y = \ln(1 + x)$

$\left(\ln\left(1+x\right)\right)' = \dfrac{1}{1+x}$

Розглянемо геометричний ряд: $1-x+x^2-x^3+\ldots+\left(-1\right)^n x^n+\ldots$, він збігається при $|x|<1$ і його сума $S(x)=\dfrac{1}{1+x}$, тобто

$$1-x+x^2-x^3+...+x^n+...=\frac{1}{1+x} \qquad (6.9)$$

Ряд (6.9) є степеневим рядом, а тому в середині інтервалу збіжності його можна інтегрувати нескінченну кількість разів, при цьому інтервал збіжності не змінюється. Проінтегруємо на відрізку $[0;x]\subset(-1;1)$:

$$\ln\left(x+1\right)=\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{n+1}}{n+1},\ \forall x\in\left(-1;1\right)$$

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу: $x=\pm1$.

$x=-1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n\cdot\left(-1\right)^{n+1}}{n+1}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ – гармонічний ряд, розбіжний.

$x=1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{n+1}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{\left(-1\right)^n}{n+1}+\ldots-$ ряд Лейбніца, умовно збіжний

$\Rightarrow S\left(1\right)=\lim\limits_{x\to1-0}S\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1-0}\ln\left(1+x\right)=ln2.$

Отже,

$$\ln\left(1+x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{\left(-1\right)^n x^{n+1}}{n+1}+...,\ x\in(-1;1]$$

Зокрема, при x=1: $ln2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{n+1}-$ формула Лейбніца.

5. Обернені тригонометричні функції

$y=\mathrm{arc}tg\ x$

$\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Як було розглянуто вище: $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $\forall x\in(-1;1)$.

Замість x підставимо x^2 :

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,\ x\in(-1;1).$$

Проінтегруємо:

$$arctgx=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1;1).$$

При $x=\pm1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ – за теоремою Лейбніца ряд умовно збіжний.

Отже, $arctg\ x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ \forall x\in[-1;1]$

Зокрема, при $x=1$: $arctg1=\frac{\pi}{4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\ldots$,

звідки отримаємо, що

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right).$$

Історично, це перша формула, яка дала можливість обчислити число π з наперед заданою точністю, застосовуючи наслідок з теореми Лейбніца.

Недолік ряду – він досить "повільно" збігається.

6. Біноміальний ряд

Розглянемо функцію $y=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathrm{R}, \alpha\neq0$. Задана функція є нескінченно диференційовною $\forall x\in\mathrm{R}$.

Перевіримо виконання пунктів схеми:

1) $y'=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$y''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

$y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$

………………………….

$$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))\,(1+x)^{\alpha-n}, \quad \forall n\in\mathrm{N}$$

………………………

2) $y(0)=1,$

$y'(0)=\alpha$

$y''(0)=\alpha(\alpha-1)$

………………………

$y^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))\,, \ \forall n\in\mathrm{N}$

………………………

3) Побудуємо формальний ряд Маклорена:

$$(1+x)^{\alpha}\sim 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ \ldots\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\ldots \tag{6.10}$$

Знайдемо радіус збіжності цього степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdot\ \ldots\cdot\ \big(\alpha-(n-1)\big)(\alpha-n)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{\alpha}{n}-1}\right|=1,$$

$x\in(-1;1)$ – інтервал збіжності ряду (6.10).

4) Можна довести, що $\forall x\in(-1;1)$ залишковий член ряду (6.10) $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, тобто, що ряд (6.10) збігається до функції $(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathrm{R}\setminus\{0\}$.

Отже, $(1+x)^{\alpha}=1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ \ldots\cdot\ \big(\alpha-(n-1)\big)}{n!}x^n+\ldots=$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n,\ \forall x\in(-1;1),\ \alpha\in\mathrm{R}\setminus\{0\}. \tag{6.11}$$

Ряд (6.11) носить назву ***біноміальний ряд***.

У ряді (6.11) покладемо $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, а замість змінної x підставимо x^2:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1-2n}{2}\right)}{n!}(-1)^n\cdot\ x^{2n}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n1\cdot\ 3\cdot\ 5\cdot\ \ldots\cdot\ (2n-1)}{n!2^n}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^{2n},\ \ \forall x\in(-1;1).\quad(6.12)$$

7. Обернені тригонометричні функції (продовження)

Розглянемо функцію $y=\arcsin x$. Задана функція є нескінченно диференційовною.

$y'=(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, тому, інтегруючи ряд (6.12) отримаємо:

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}x^{2n}\right)dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ \ \forall x\in(-1;1).$$

Можна показати, що отриманий ряд збігається при $x=\pm 1$. Тому,

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot\ 3}{2\cdot\ 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot\ 3\cdot\ 5}{2\cdot\ 4\cdot\ 6}\cdot\frac{x^7}{7}+....,\ \ \forall x\in[-1;1]$$

Зокрема, при $x=1$: $\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!}{(2n)!!(2n+1)}$.

Звідки можна отримати ще одну формулу для знаходження числа π:

$$\pi=2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n)!!(2n+1)}\right).$$

Приклади розв'язування типових задач

Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Задача 6.1. Обчислити наближено значення виразу $\sqrt[3]{67}$ з точністю $\varepsilon=0,0001$

Розв'язання.

$$\sqrt[3]{67}=\sqrt[3]{64+3}=\sqrt[3]{64\left(1+\frac{3}{64}\right)}=4\left(1+\frac{3}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Скористаємося розкладом в ряд Маклорена (формула (6.11)):

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots,\quad \forall x\in(-1;1).$$

У даному прикладі $\alpha=\frac{1}{3},\quad x=\frac{3}{64}$.

$$4\left(1+\frac{3}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=4\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{64}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{3}{64}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{3}{64}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=4\left(1+\frac{1}{64}-\frac{1}{64^2}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 2}\cdot\frac{1}{64^3}-\ldots\right)=4+\frac{1}{16}-\frac{1}{1024}+\frac{5}{3\cdot 64^2\cdot 16}-\ldots$$

Отримали знакопочерговий ряд. Ряд такий, що абсолютна величина загального члена $a_n\to 0$, a_n – спадна, тобто, ряд задовольняє умови теореми Лейбніца. За наслідком з теореми Лейбніца $|S-S_n|<a_{n+1}$. Знайдемо член ряду, який за абсолютною величиною менший заданої точності $\varepsilon=0,0001$.

$$a_1=4>\varepsilon,$$

$$a_2=\frac{1}{16}>\varepsilon,$$

$$a_3=\frac{1}{1024}>\varepsilon,$$

$$a_4=\frac{5}{64^2\cdot 48}<\varepsilon.$$

Отже, починаючи з a_4, відкидаємо всі члени ряду.

$$S\approx S_3=4+\frac{1}{16}-\frac{1}{1024}=4,06152\approx 4,0615.$$

Зауважимо, що округлюємо до четвертого знаку після коми.

Відповідь: $\sqrt[3]{67}\approx 4,0615$.

Задача 6.2. Знайти наближене значення інтеграла:

$$\int_0^{0,5} \cos x^2\, dx \text{ з точністю } \varepsilon = 0,0001$$

Розв'язання.

Скористаємося розкладом в ряд Маклорена для *cosx* :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad \forall x \in \mathrm{R}.$$

Тоді $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots, \ \forall x \in \mathrm{R}.$

За теоремою про почленне інтегрування степеневих рядів:

$$\int_0^{0,5} \cos x^2\, dx = \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots \right) dx =$$

$$= x\Big|_0^{0,5} - \frac{x^5}{5 \cdot 2}\Bigg|_0^{0,5} + \frac{x^9}{9 \cdot 24}\Bigg|_0^{0,5} - \dots = 0,5 - \frac{1}{320} + \frac{1}{110592} - \dots -$$

це знакопочерговий ряд, задовольняє умови теореми Лейбніца.

$a_1 = 0,5 > \varepsilon = 0,0001,$

$a_2 = \frac{1}{320} > \varepsilon = 0,0001,$

$a_3 = \frac{1}{110592} < \varepsilon = 0,0001 = \frac{1}{10000},$

За наслідком з теореми Лейбніца $|S - S_2| < a_2 < \varepsilon$.

$$S \approx S_2 = 0,5 - \frac{1}{320} = \frac{159}{320} \approx 0,496875 \approx 0,4969.$$

Відповідь: $I \approx 0,4969$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: – Навчальний посібник-К.: А.С.К., 1993, 2001.
2. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник за редакцією В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К., А.СК. 2001.
3. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Вища математика. Навчальний посібник, Ч. 2. К.: Віпол, 2004. – 400 с.
4. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Збірник завдань з вищої математики.Типові розрахунки. К.: “Політехніка”, 2000.–296с.