МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

БІОМЕТРІЯ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт
галузь знань 15 Автоматизація та приладобудування
спеціальність 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка»

*Рекомендовано вченою радою
приладобудівного факультету
(протокол № 6/17 від 21.09.217 р.)*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2017

Біометрія: Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Біометрія» для студентів галузі знань 15 Автоматизація та приладобудування спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» всіх форм навчання [Текст] / Уклад.: С.П. Вислоух, К.С. Барандич, О.В. Волошко – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 62 с.

Методичні вказівки призначено для студентів галузі знань 15 Автоматизація та приладобудування спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» всіх форм навчання. У методичних вказівках наведено мету, завдання, основні теоретичні відомості практичних робіт, їх зміст та обсяг.

Навчальне електронне мережне видання

БІОМЕТРІЯ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт
для студентів галузі знань 15 Автоматизація та приладобудування спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» всіх форм навчання

Укладачі: *Вислоух Сергій Петрович, к.т.н, доцент*
Барандич Катерина Сергіївна, асистент
Волошко Оксана Вячеславівна, асистент

Відповідальний
редактор: *Тимчик Г.С., д.т.н., професор*

Рецензент: *Гераїмчук Михайло Дем'янович, д.т.н., професор*

За редакцією укладачів

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Метою виконання практичних робіт та комп’ютерного практикуму є отримання практичних навичок розв’язання задач аналізу медико-біологічної інформації з використанням методів багатомірного статистичного аналізу.

Виконання практичних робіт включає ознайомлення з метою кожної роботи, його робочим завданням й вивчення теоретичного матеріалу, які проводяться до початку занять. Під час підготовки до виконання кожної із робіт студентам потрібно визначити порядок розв’язання задачі і підготувати початкові (вихідні) дані для виконання розрахунків згідно з індивідуальним завданням.

У ході практичних занять студенти виконують всі пункти робочого завдання та показують викладачеві, який перевіряє правильність їх виконання За результатами виконання практичної роботи оформляється звіт згідно з вимогами, що зазначені в умові кожної роботи, та надається викладачеві на детальну перевірку на поточному занятті або на наступний день (але не пізніше встановлених строків). Викладач має право повернути недбало оформлену роботу або роботу, що має похибки, або не зарахувати її, якщо теоретична підготовка є недостатньою.

Звіт про практичну роботу має включати мету роботи, умову задачі, що вибрана згідно з варіантом індивідуального завдання, перелік змінних та констант, які використовуються в роботі, результати рішення поставленої задачі, аналіз результатів роботи та висновки за основними пунктами робочого завдання.

Встановлено наступні вимоги до комп’ютерного оформлення матеріалів роботи.

Текст набирається в текстовому редакторі Microsoft Word 2003. Шрифт – Times New Roman. Міжрядковий інтервал – 1,5. Абзац – 1,25 см. Кегль – 14. Вирівнювання основного тексту – по ширині, без переносів. Поля: зліва – 25, справа – 10, зверху та знизу – 20. Рисунки, формули, діаграми, таблиці розміщувати по мірі появи в тексті по центру сторінки. Формули набираються в Microsoft Equation 3.0.

Практична робота №1

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета роботи: отримання практичних навиків визначення основних характеристик випадкових величин з побудовою необхідних графіків та гістограм.

Теоретичні відомості

Величини, точне значення яких невідоме, називаються випадковими.

Незважаючи на випадковий характер величин, при їх дослідженні можливе знаходження певних закономірностей, які і використовуються в практичній діяльності.

Для дослідження закономірностей, що проявляють себе через випадковість, досліджують закони розподілу випадкових величин і їх числові значення.

Ймовірність (вірогідність) p – це відношення кількості сприятливих можливостей до загальної їх кількості (класичне визначення). Змінюється p від 0 до 1: 0 – подія неможлива. 1 – подія достовірна. $0<p<1$ подія може статися, а може і не статися.

Оскільки в більшості випадків теоретичне визначення ймовірності (вірогідності) неможливе, оскільки не можна розрахувати кількість загальних (спільних) і сприятливих можливостей, вводиться статистичне визначення вірогідності. За цим визначенням p дорівнює відношенню кількості випадків, в яких подія спостерігається, до загальної кількості спостережень. Така вірогідність ще називається відносною частотою. Відносна частота ніколи не збігається з теоретичною вірогідністю.

Але, згідно теоремі Бернуллі, при досить великому числі випробувань ймовірність того, що відхилення відносної частоти від теоретичної вірогідності буде скільки завгодно малим, прагне до одиниці:

$$Lim\ P(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon)=1.$$

Випадковою величиною (ВВ) називається величина, яка в результаті експерименту може набувати невідоме заздалегідь значення.

Дискретною випадковою величиною називається величина, яка набуває окремих значень (наприклад кількість дітей, що народилися).

Безперервною випадковою величиною називається величина, можливі значення якої безперервно заповнюють який-небудь інтервал (наприклад, маса тіла, зріст тощо).

Незалежні випадкові величини – величини, які є результатом незалежних випадкових подій. Тобто таких подій, для яких настання однієї події ніяк не впливає на вірогідність настання іншого.

Випадкові величини характеризуються законом розподілу.

Закон розподілу – відповідність між значеннями випадкових величин і вірогідністю їх реалізації. Може бути заданий у вигляді таблиці, формули або графіка.

Для дискретної випадкової величини зазвичай закон розподілу задається рядом розподілу.

Для безперервної випадкової величини табличне її представлення неможливе, тому використовують функцію розподілу(ФР).

Функція розподілу – це функція *F(x)*, яка задає вірогідність того, що випадкова величина *X* у випробуванні набуває значення менше *x*:

$$F(x)=p(X<x).$$

Інколи її називають інтегральною функцією *F(x)*, функцією, що не убуває. Таким чином. якщо $a>b$, то $F(a)>F(b)$. При цьому $F(-\infty)=0$, а $F(+\infty)=1$. Для дискретних випадкових величин функція розподілу є ступінчатою функцією.

Вірогідність того, що випадкова величина потрапляє в інтервал, визначається за формулою:

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a).$$

<u>Іншою характеристикою розподілу випадкових величин є щільність вірогідності</u> (ЩВ), яка визначається як:

$$f(x)=F'(x)$$

При цьому $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Вірогідність попадання випадкової величини в інтервал (*a, b*) дорівнює:

$$P(a<x<b)=\int_a^b f\{x\}dx.$$

До характеристик одновимірного розподілу випадкових величин відносяться:

– міри розташування (середнє, медіана, мода та ін.);

– міри розсіювання (розмах, коефіцієнт варіації, дисперсія, середньоквадратичне відхилення);

– міри форми (асиметрія, ексцес, момент третього та четвертого порядку).

Послідовність розрахунку основних характеристик одновимірного розподілу випадкових величин включає послідовне виконання ряду етапів.

1. Ранжирування вибірки випадкових величин, що представлена в вигляді таблиці 1.1.

Таблиця 1.1. Вибірка випадкових величин.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x	5	7	32	1	6	2	5	4	7	4	11	14	10	15	5	22	5	16	7	13	3

Необхідно виконати впорядкування цієї вибірки за зростанням її елементів. Результати виконання операції ранжирування елементів вибірки наведено в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2. Вибірка випадкових величин після їх ранжирування.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x	1	2	3	4	5	5	5	5	6	6	7	7	7	10	11	13	14	15	16	22	32

2. Поділ отриманої ранжируваної вибірки на ряди приблизно однакових за величиною інтервалів, визначення частот випадкових величин для кожного інтервалу та визначення накопичених частот випадкових величин ранжируваної вибірки.

Результати визначення частот випадкових величин, що надані в таблиці 1.2, та їх накопичених частот наведено в таблиці 1.3, а побудована діаграма частот випадкових величин – представлена на рисунку 1.1.

Таблиця 1.2 Частоти та накопичені частоти ранжируваної вибірки.

Параметр	Інтервали				
x	1-6	7-12	13-19	20-26	27-32
Частота	10	5	4	1	1
Накопчена частота	10	15	19	20	21

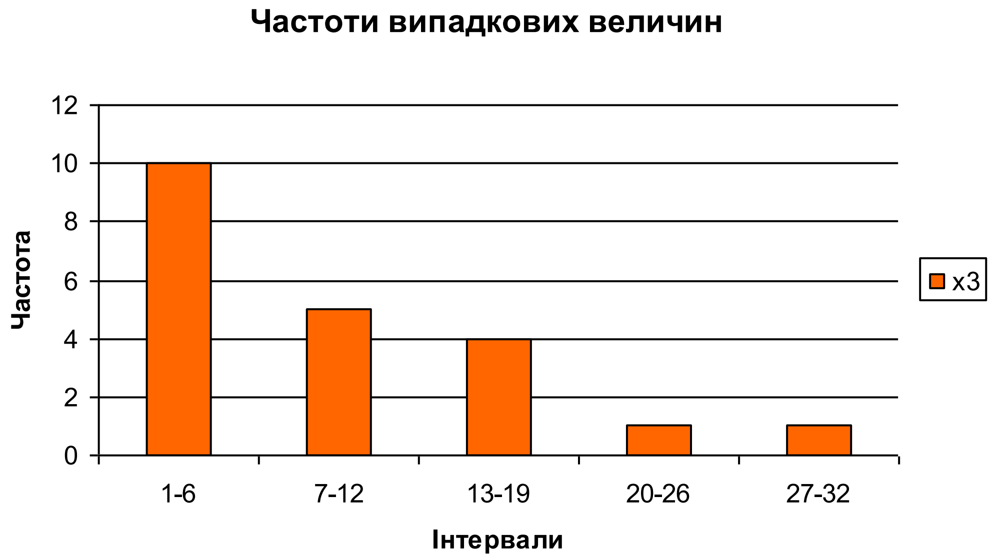

Рис.1.1. Діаграма частот вибірки випадкових величин.

3. Побудова гістограм кривої розподілу та функцій розподілу вибірки випадкових величин.

Для побудови гістограм кривої розподілу та функцій розподілу випадкових величин вибірки необхідно виконати обчислення сукупності ймовірностей $p_i^{'} = P(X = x_i)$, що має назву щільність розподілу змінної *X*:

$$p_i^{'} = \frac{f_i}{f_{\sum}}, \qquad (1.1)$$

де f_i – частота випадкової величини x_i в вибірці; f_{Σ} – сума частот. Значення ймовірності $p_i^{'}$ кожної випадкової величини x_i змінної X є ймовірність того, що x_i дорівнює X, тобто $P(X = x_i)$. Сума ймовірностей $p_i^{'}$ усіх окремих значень x_i змінної X дорівнює одиниці.

Визначені за формулою

$$p_i = \frac{f_i}{f_{\sum}} + p_{i-1}, \qquad (1.2)$$

ймовірності представляють собою функцію розподілу змінної *X*. Розподіл випадкової величини показує ймовірність змінної X, значення якої не перевищує x_i, тобто $P(X \le x_i)$. Кожне значення розподілу є сумою ймовірностей $p_i^{'}$ усіх попередніх елементарних значень x_i.

Результати розрахунків зручно подавати в вигляді таблиці, що представлена як таблиця 1.3.

Таблиця 1.3. Значення ймовірностей розподіл дискретної випадкової величини.

Емпіричні дані			Ймовірність	
№	x_i	f_i	$p_i^{'} = P(X = x_i)$	$p_i = P(X \le x_i)$
1	1	1	0,047619	0,047619
2	2	1	0,047619	0,095238
3	3	1	0,047619	0,142857
4	4	1	0,047619	0,190476
5	5	4	0,190476	0,380952
6	6	2	0,095238	0,47619
7	7	3	0,142857	0,619048
8	10	1	0,047619	0,666667
9	11	1	0,047619	0,714286
10	13	1	0,047619	0,761905
11	14	1	0,047619	0,809524
12	15	1	0,047619	0,857143
13	16	1	0,047619	0,904762
14	22	1	0,047619	0,952381
15	32	1	0,047619	1
	Сума	21	1	

За результатами обчислень ймовірностей (табл. 1.3) будують гістограми кривої розподілу та функцій розподілу вибірки випадкових величин. Ці гістограми наведено на рисунках 1.2 та 1.3 відповідно.

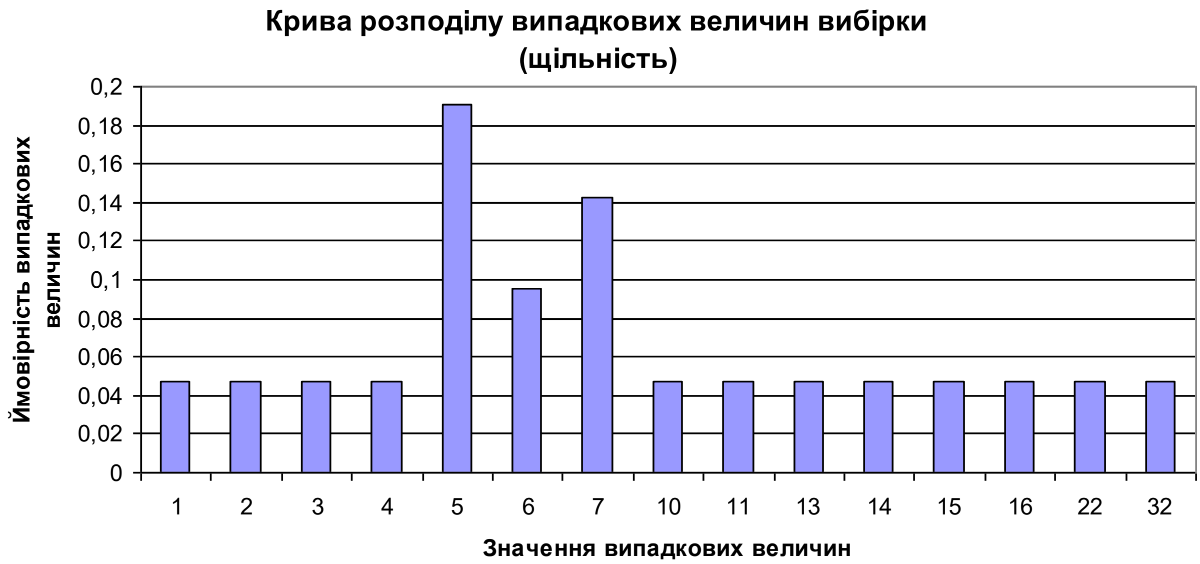

Рис.1.2. Гістограма кривої розподілу вибірки випадкових величин.

Рис.1.3. Гістограма функції розподілу вибірки випадкових величин.

4. Визначення середнього арифметичного вибірки випадкових величин. Для цього використовують формулу:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}. \qquad (1.3)$$

Для ранжируваного ряду, що складається із k груп, середнє арифметичне всього ряду дорівнює зваженому середньому:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i n}{\sum_{i=1}^{k} n_i}, \qquad (1.4)$$

де n_i – розмір i-тої групи, X_i – середнє значення i-тої групи.

5. Визначення середнього геометричного випадкових величин за допомогою формули:

$$\overline{X}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}. \qquad (1.5)$$

6. Визначення середнього гармонійного випадкових величин. Для цього використовують формулу:

$$\overline{X}_f = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}. \qquad (1.6)$$

7. Визначення моди вибірки випадкових величин.

Мода – це значення, яке спостерігається найбільшу кількість раз (найбільш ймовірна величина).

Для інтервального варіаційного ряду мода розраховується за формулою:

$$Mo = X_{Mo} + \frac{h(m_{Mo} - m_{Mo-1})}{2m_{Mo} - m_{Mo+1} - m_{Mo-1}}, \qquad (1.7)$$

де X_{Mo} – початок модального інтервалу (інтервалу, якому відповідає найбільша частота); h – величина модального інтервалу; m_{Mo} – частота модального інтервалу; m_{Mo-1} – частота інтервалу, що передує модальному; m_{Mo+1} – частота інтервалу, що є наступним за модальним.

8. Обчислення медіани.

Медіана – це значення, яке ділить ранжируваний варіаційний ряд на дві рівні за об’ємом групи.

Для інтервального варіаційного ряду медіана розраховується за формулою:

$$Me = X_{Me} + \frac{h\left(\frac{\sum m_x}{2} - m_X^{\max}\right)}{m_m}, \tag{1.8}$$

де X_{Me} – початок медіанного інтервалу; h – величина медіанного інтервалу; m_x – частоти за всіма інтервалами; $m_X^{\max}$ – частота, що накопичена до початку медіанного інтервалу; m_m – частота медіанного інтервалу.

9. Визначення варіаційного розмаху. Для цього використовують формулу:

$$RB = X_{\max} - X_{\min}. \tag{1.9}$$

10. Визначення дисперсії випадкових величин за допомогою формули:

$$D = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N-1}. \tag{1.10}$$

11. Визначення середньоквадричного відхилення випадкових величин за формулою:

$$S = \sqrt{D}. \tag{1.11}$$

12. Визначення коефіцієнта варіації, що виконується за формулою:

$$V = \frac{S}{\overline{X}}100\%. \tag{1.12}$$

13. Обчислення довірчого інтервалу.

Довірчий інтервал – це інтервал, відносно якого з наперед заданою ймовірністю $P = 1-\alpha$ можна стверджувати, що він містить невідоме значення параметра θ:

$$P[\theta_1 < \theta < \theta_2] = 1-\alpha, \tag{1.13}$$

де $1-\alpha$ – довірча ймовірність, α – рівень значимості.

Довірчий інтервал для середнього визначається як:

$$\left[\overline{X}-t_{n,p}\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{n,p}\frac{S}{\sqrt{n}}\right], \tag{1.14}$$

де S – середньоквадратичне відхилення; n – кількість дослідів; $t_{n,p}$ – табличне значення розподілення Стьюдента з числом ступенів свободи n та довірчою ймовірністю p.

14. Визначення коефіцієнта асиметрії.

Коефіцієнт асиметрії – числова характеристика розподілу ймовірностей дійсної випадкової величини. Вона показує ступінь несиметричності в порівнянні з кривою нормального розподілу випадкових величин і є відношенням центрального моменту третього роду μ_3 до куба середньоквадратичного відхилення S^3:

$$As=\frac{\mu_3}{S^3}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i\left(x_i-\overline{X}\right)^3}{S^3 n}. \tag{1.15}$$

15. Визначення коефіцієнта ексцесу.

Коефіцієнт ексцесу – числова характеристика розподілу ймовірностей дійсної випадкової величини, що характеризує «крутість», тобто стрімкість підвищення кривої розподілу в порівнянні кривою нормального розподілу. Вона обчислюється за формулою:

$$Ex=\frac{\mu_4}{S^4}-3=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i\left(x_i-\overline{X}\right)^4}{S^4 n}-3, \tag{1.16}$$

де μ_4 – центральний момент четвертого порядку, S^2 – дисперсія.

Завдання для виконання практичної роботи

Із множини вибірок випадкових величин, що надані в індивідуальному завданні, вибрати три або більше незалежних вибірки та для кожної із них виконати наведені нижче дії.

1. Ранжирувати вибірку за зростанням значень її елементів.
2. Поділити отримана ранжирувану вибірку на ряд приблизно однакових за величиною інтервалів (не менше 5).
3. Визначити частоти випадкових величин для кожного інтервалу.
4. Визначити накопичені частоти випадкових величин ранжируваної вибірки.

5. Побудувати гістограми кривої розподілу та функції розподілу випадкових величин даної вибірки.

6. Визначити середнє арифметичне, середнє геометричне та середнє гармонійне елементів вибірки.

7. Визначити моду і медіану вибірки.

8. Визначити варіаційний розмах, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації.

9. Визначити коефіцієнти асиметрії та ексцесу вибірки.

Порівняти результати обчислень для кожної вибірки випадкових величин.

Зробити висновки за результатами обчислень характеристик випадкових величин.

Контрольні запитання

1. Як здійснюється ранжирування вибірки випадкових величин та поділ її на інтервали?
2. Як визначаються частоти випадкових величин для кожного інтервалу?
3. Як визначити накопичені частоти випадкових величин?
4. Що визначає щільності розподілу випадкових величин? Як її обчислити?
5. Як визначаються значення середнього арифметичного, середнього геометричного та середнього гармонійного елементів вибірки? Який статистичний зміст вказаних характеристик випадкових величин?.
6. Що характеризує мода і медіана вибірки випадкових величин? Як визначаються мода й медіана?
7. Що таке дисперсія та середньоквадратичне відхилення випадкових величин? Як вони визначаються?
8. Як визначити варіаційних розмах та коефіцієнт варіації?
9. Що таке довірчий інтервал? Як визначити довірчий інтервал для середнього?
10. Яка характеристика показує ступінь несиметричності розподілу ймовірностей дійсної випадкової величини в порівнянні з кривою нормальною розподілу?
11. Що характеризує коефіцієнт ексцесу?

Практична робота №2

ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ПРО РОЗТАШУВАННЯ ТА РОЗСІЮВАННЯ

Мета роботи: отримання практичних навиків перевірки гіпотез про розташування та розсіювання випадкових величин.

Теоретичні відомості

Статистичні гіпотези – це гіпотези, які відносяться до виду або окремих параметрів розподілення випадкової величини.

Перевірка гіпотез, зазвичай, включає наступні етапи:

– визначення статистичної моделі, що використовується при перевірці гіпотези. Тут висуваються деякий набір передумов відносно закону розподілу випадкової величини і його параметрів. Наприклад, закон розподілу нормальний, величини незалежні тощо;

– формулювання нульової (H_0) та альтернативної (H_1) гіпотез;

– вибір критерію (критеріальної статистики), який підходить до запропонованої статистичної моделі;

– вибір рівня значущості α в залежності від необхідної надійності висновків;

– визначення критичної області для перевірки нульової гіпотези H_0. Якщо значення критерію попадає в цю область, то нульова гіпотеза відхиляються. При умові, що нульова гіпотеза є вірною, ймовірність потрапляння випадкової величини в критичну область дорівнює α. Вид цієї області (одностороння чи двостороння) залежить від прийнятої H_0;

– розрахунок значення обраного статистичного критерію для наявних даних;

– порівняння розрахованого значення критерію з критичним (інколи його називають табличним) і вирішення про прийняття або відхилення гіпотези H_0.

При виборі критерію необхідно завжди відштовхуватися від прикладної постановки задачі та природи даних.

Короткий довідник з статистичних методів перевірки гіпотез про розташування та розсіювання, що дозволяє вибрати прийнятний метод для конкретної розв’язуваної задачі, представлено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Вибір методу для рішення задачі про порівняння параметрів розподілення вибірок.

Формулювання задачі в прикладній постановці	**Формулювання задачі в статистичній постановці**	**Додаткові умови**		**Метод перевірки гіпотези**
Порівняння показників контрольної та експериментальної вибірок	Перевірка гіпотези про рівність середніх (центрів розподілення) в двох незалежних вибірках	**Нормальний** закон розподілу	**Дисперсії** вибірок **однакові**	t -критерій (Стьюдента) при однкових дисперсіях
			Дисперсії вибірок **не однакові**	t -критерій (Стьюдента) при не однакових дисперсіях
			Без припущень про дисперсії (але при однаковому розмірі вибірок)	t -критерій (Стьюдента) без припущень про дисперсії
		Закон розподілу, що **відрізняється від нормального** або дані вимірюються в **дискретній шкалі**	**Дисперсії** вибірок **однакові**	Манна-Вітні (U -критерій Вілкінсона-Манна-Вітні)
			Без припущень про дисперсії	Двохвибірковий Вілкоксона, медіанний
Порівняння показників вибірок до і після експерименту	Перевірка гіпотези про рівність середніх в двох залежних вибірках	**Нормальний** закон розподілу		t -критерій (Стьюдента) для пов'язаних вибірок
		Закон розподілу **відрізняється від нормального** або дані вимірюються в дискретній шкалі		Знаковий, одно вибірковий критерій Вілкоксона
Чи можна вважати, що середнє значення показника дорівнює деякому номінальному значенню	Перевірка гіпотези про рівність середнього константі	**Нормальний** закон розподілу		t -критерій (Стьюдента)
		Закон розподілу **відрізняється від нормального** або дані вимірюються в дискретній шкалі		Гупта, знаковий
Порівняння розсіювання показника в двох вибірках	Перевірка гіпотези про рівність дисперсій (про належність дисперсій до однієї генеральної сукупності)	**Нормальний** закон розподілу		F -критерій (Фишера)
		Закон розподілу **відрізняється від нормального** або дані вимірюються в дискретній шкалі		Зігеля-Тьюкі-Мозеса
Чи можна вважати, що в декількох вибірках має місце одне и теж значення показника?	Перевірка гіпотези про рівність середніх (про належність до однієї генеральної сукупності)	**Нормальний** закон розподілу		Шефе, Діксона, дисперсійний аналіз, LSD
		Закон розподілу **відрізняється від нормального** або дані вимірюються в дискретній шкалі		Краскела-Уолліса, медіанний, рангових сум Фрідмана
Чи можна вважати, що в декількох вибірках має місце одне и теж значення розсіювання показника?	Перевірка гіпотези про рівність дисперсій (про належність дисперсій до однієї генеральної сукупності)	**Нормальний** закон розподілу		G -критерій (Кохрена) при однаковому розміру вибірок, Бартлета
		Закон розподілу **відрізняється від нормального** або дані вимірюються в дискретній шкалі		Фрідмана

Перевірка гіпотез про розташування та розсіювання з використанням параметричної статистики виконується в такій послідовності.

1. Перевірка гіпотези про відповідність вибірок нормальному закону розподілу

Для перевірки даної гіпотези попередньо визначають середнє абсолютне відхилення вибіркових значень від середнього арифметичного:

$$\Delta_{abs} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\Delta_i}{N} \tag{2.1}$$

Спосіб 1.

Гіпотеза про відповідність елементів вибірки нормальному закону розподілу приймається при виконанні наступних умов :

– кількість додатних і від'ємних відхилень від середнього Δ_{abs} приблизно однакова;

– половина (або трошки більше) відхилень від середніх за абсолютною величиною менше середнього абсолютного відхилення:

$$0{,}5\,\Delta_i < \Delta_{abs} \tag{2.2}$$

– жодне з відхилень не перевищує середнє абсолютне відхилення більш ніж в 3–4 рази:

$$\Delta_{i\,\max} < (3-4)\Delta_{abs} \tag{2.3}$$

Спосіб 2.

Гіпотеза про нормальність закону розподілу вибірки випадкових величин приймається при виконанні наступної умови:

$$\left|\frac{\Delta_{abs}}{\sigma} - 0{,}7979\right| < \frac{0{,}4}{\sqrt{N}}\,. \tag{2.4}$$

Спосіб 3.

Перевірку гіпотези про нормальність закону розподілу випадкових величин можна здійснювати шляхом виконання наступного комплексу умов:

– майже всі (99,7%) відхилення від середнього менше 3σ: $\Delta_i < 3\sigma$;

– 2/3 (68,3%) відхилень менше σ;

– половина відхилень менше 0,625 σ.

При виконанні наведених умов за будь яком способом можна вважати, що випадкові величини розподілені за нормальним законом.

2. Визначення середнього арифметичного та дисперсії елементів кожної вибірки.

Виконується відповідно до формул (1.3) та (1.10), що наведено в теоретичних відомостей до практичної роботи №1.

3. Перевірка гіпотези про належність двох вибірок випадкових величин до однієї генеральної сукупності і отже рівність їх дисперсій за критерієм Фішера.

Передумовами перевірки гіпотез є – дані вибірок незалежні і розподілені за нормальним законом.

Гіпотеза про рівність дисперсій двох вибірок приймається, якщо відношення більшої дисперсії до меншої менше критичного (табличного) значення розподілення Фішера:

$$F_{\text{ðîçð}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \text{ при } F_{\text{ðîçð}} < F_{\alpha, v_1, v_2}, \tag{2.5}$$

де α – рівень значущості, v_1 і v_2 – ступені свободи для дисперсій чисельника і знаменника відповідно ($v_1 = N_1 - 1$; $v_2 = N_2 - 1$, де N_1 і N_2 – розміри вибірок).

4. Перевірка гіпотези про однорідність дисперсій елементів вибірок, тобто належність декількох вибірок до однієї генеральної сукупності за критерієм Кохрена.

Передумовами перевірки гіпотези є незалежність порівнюваних вибірок, що мають однаковий розмір, та їх розподіл за нормальним законом.

Розрахункове значення критерію Кохрена визначається за наступною формулою:

$$G_{розр} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{k} S_i^2}, \tag{2.6}$$

де $S_{\max}^2$ – максимальна дисперсія із k вибірок; S_i^2 – дисперсія i–тої вибірки; k – кількість порівнюваних вибірок.

Результат обчислення порівнюється із табличним значенням критерію, що взяте з рівнем значущості α та кількістю ступенів свободи $v_1 = k$ та $v_2 = N - 1$.

Якщо розрахункове значення критерію не перевищує табличного $G_{\text{ðîçð}} < G_{\alpha,k,n-1}$, то гіпотеза про однорідність дисперсій приймається. Тут n – кількість дослідів, за якими розраховують оцінку дисперсії.

Критерій Кохрена – використовують при порівнянні трьох і більше вибірок однакового розміру n.

5. Перевірка гіпотези про однорідність декількох дисперсій елементів вибірок за критерієм Бартлета.

Критерій Бартлета використовується при перевірці гіпотези про однорідність декількох дисперсій у випадку, коли вибірки, за якими визначаються оцінки дисперсій, мають різний розмір (на відміну від критерію Кохрена). Таким чином, висувається гіпотеза про належність декількох дисперсій до однієї генеральної сукупності.

Критичне значення критерію Бартлета розраховується за формулою:

$$\chi^2_{\text{ðîçð}} = \frac{2}{c}\left(2.3026\left(v \cdot \ln S^2 - \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \ln S_i^2\right)\right), \tag{2.7}$$

де
$$c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{v_i} - \frac{1}{v}}{3(k-1)} + 1; \; S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} v_i S_i^2}{v}.$$

При цьому $v = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i$ – загальна кількість ступенів свободи; k – кількість груп випадкових величин; $v_i = n_i - 1$ – число ступенів свободи в кожній групі (n_i – об’єм i-ї групи); S_i^2 – оцінка дисперсії в кожній групі; S^2 – зважена оцінка дисперсії.

Якщо розраховане значення $\chi^2_{\text{ðîçð}}$ більше або дорівнює критичному (табличному) значенню, що взяте з рівнем значущості α і числом степенів свободи v, то нульова гіпотеза приймається.

6. Перевірка гіпотези про рівність середніх значень вибірок при однакових дисперсіях.

Призначена для перевірки рівності середніх двох генеральних сукупностей, із яких вилучено дві вибірки. Дві вибірки вилучені із сукупності, що має нормальний закон розподілу. Дані незалежні. Дисперсії вибірок однакові.

Критеріальне значення розраховується за формулою:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}\right)\left(S_1^2(N_1 - 1) + S_2^2(N_2 - 1)\right)}{N_1 + N_2 - 2}}}, \tag{2.8}$$

де N_1 і N_2 – розміри першої та другої вибірок; S_1^2 і S_2^2 – емпіричні дисперсії; $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ – середні значення.

Гіпотеза про рівність середніх приймається, якщо за абсолютною величиною критеріальне значення менше t-розподілення, взятого з V ступенями свободи ($V = N_1 + N_2 - 2$) та рівнем значимості $\alpha/2$, тобто при $|t| < t_{v,\alpha/2}$.

7. Перевірка гіпотези про рівність середніх значень вибірок без припущення про дисперсії.

Призначена для перевірки рівності середніх двох генеральних сукупностей, із яких вилучено дві вибірки. Дві вибірки вилучені із сукупності, що має нормальний закон розподілу. Дані незалежні. Розміри вибірок однакові, вибірки незалежні.

Критеріальне значення розраховується за формулою:

$$t = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)\sqrt{N}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(X_{1i} - X_{2i} - (\overline{X}_1 - \overline{X}_2))^2}{N-1}}} \tag{2.9}$$

де N – розмір першої та другої вибірок; $\overline{X}_1$ та $\overline{X}_2$ – середні значення; X_{1i} та X_{2i} – поточні значення змінних.

Гіпотеза про рівність середніх приймається, якщо за абсолютною величиною критеріальне значення менше t-розподілення, взятого з V ступенями свободи ($V = N - 1$) та рівнем значимості $\alpha/2$, тобто при $|t| < t_{v,\alpha/2}$.

8. Перевірка гіпотези про рівність середніх значень вибірок при різних дисперсіях.

Призначена для перевірки рівності середніх двох генеральних сукупностей, із яких вилучено дві вибірки. Дві вибірки вилучені із сукупності, що має нормальний закон розподілу. Дані незалежні, вибірки незалежні, дисперсії вибірок відрізняються.

Критеріальне значення розраховується за формулою:

$$t = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{N_1} + \dfrac{S_2^2}{N_2}}} \tag{2.10}$$

де N_1 та N_2 – розмір першої та другої вибірок; $\overline{X}_1$ та $\overline{X}_2$ – середні значення; S_1^2 та S_2^2 – емпіричні дисперсії.

Гіпотеза про рівність середніх приймається, якщо за абсолютною величиною критеріальне значення менше t-розподілення, взятого з V ступенями свободи ($V = N - 1$) та рівнем значимості $\alpha/2$, тобто при $|t| < t_{v,\alpha/2}$.

9. Перевірка гіпотези про рівність середніх значень вибірок заданому значенню A.

Призначена для перевірки рівності середнього певному значенню.

Вибірка вилучена із сукупності, що має нормальний закон розподілу, дані незалежні.

Критеріальне значення розраховується за формулою:

$$t = \frac{\left(\overline{X} - A\right)\sqrt{N}}{S^2}, \qquad (2.11)$$

де N – розмір вибірки; S^2 – емпірична дисперсія вибірки; A – очікувана величина середнього значення; $\overline{X}$ – середнє значення.

Гіпотеза про рівність середнього заданому значенню A приймається, якщо за абсолютною величиною розраховане критеріальне значення менше t-розподілення, взятого з V ступенями свободи ($V = N - 1$) та рівнем значущості $\alpha/2$, тобто при $|t| < t_{v,\alpha/2}$.

10. Перевірка гіпотези про рівність середніх значень для пов’язаних вибірок.

Перевірка рівності середніх двох генеральних сукупностей, із яких вилучені дві вибірки, при умові, що вибірки пов’язані. Наприклад, значення яких-небудь параметрів до та після лікування, в процесі старіння організму, до та після термічної обробки для матеріалів тощо.

Обидві вибірки вилучені із сукупності, що має нормальний закон розподілу. Данні незалежні. Вибірки зв’язані.

Критеріальне значення розраховується за формулою:

$$t = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - y_i\right)}{N}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - y_i\right)^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - y_i\right)\right)^2}{N}}{N\left(N-1\right)}}} \qquad (2.12)$$

де x_i та y_i – значення зв'язаних рядів спостережень; N – величина вибірки (кожної, так як вони однакові).

Число ступенів свободи для t-критерію $V = N - 1$.

Гіпотеза про рівність середніх значень для зв'язаних вибірок приймається, якщо за абсолютною величиною критеріальне значення менше t-розподілення, взятого з V ступенями свободи та рівнем значимості $\alpha/2$, тобто при $|t| < t_{v,\alpha/2}$.

11. Перевірка гіпотези про рівність середніх значень вибірок шляхом дисперсійного аналізу.

Призначена для перевірки належності декількох середній до однієї генеральної сукупності.

Дані мають нормальний закон розподілу, дані незалежні.

Критеріальне значення розраховується за формулою:

$$F = \frac{\dfrac{SS_a}{k-1}}{\dfrac{SS_b}{n-k}}. \tag{2.13}$$

При цій формулі:

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – загальна кількість експериментів,

де n_i – об'єм *i*-тої вибірки;

k – кількість порівнюваних вибірок;

$SS_a = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}}\right)^2$ – сума квадратів між вибіркового розсіювання,

де $\overline{X}_i$ – середнє значення елементів *i*-тої вибірки; $\overline{\overline{X}}$ – загальне середнє значення об'єднаної вибірки;

$SS_b = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)^2$ – внутрішньо вибіркова сума квадратів,

де X_{ij} – значення змінної в j-му експерименті i-тої вибірки.

Якщо розраховане критеріальне значення більше критичного значення розподілення Фішера, що взяте з деяким рівнем значущості α і ступенями свободи $(k-1)$ і $(n-k)$, то гіпотеза не приймається. Тобто середні значення (принаймні деякі із них) належать різним генеральним сукупностям і є різними.

12. Перевірка гіпотези про рівність середніх значень вибірок методом множинних порівнянь Шефе.

Перевірка гіпотези про належність декількох середніх значень до однієї генеральної сукупності або виділення груп середніх значень, що належать до однієї сукупності.

Передумовами перевірки гіпотези є те, що закони розподілу розподіл вибірок випадкових величин є нормальний , а всі дані – незалежні.

Пояснення: Нехай порівнюються 5 вибірок, середні значення яких є $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_4, \overline{X}_5$. Припустимо, що ці вибірки належать до двох різних генеральних сукупностей A і B, середні значення яких $\overline{X}_A$ та $\overline{X}_B$ відповідно. Тоді нульова гіпотеза може бути сформульована у вигляді $\acute{I}_0:\ \overline{X}_A - \overline{X}_B = 0$. При цьому в залежності від складу вибірок, із яких складаються групи A і B, можливі наступні конкретні варіанти цієї гіпотези:

$$1/2(\overline{X}_1 + \overline{X}_2) - 1/3(\overline{X}_3 + \overline{X}_4 + \overline{X}_5) = 0;$$

$$\overline{X}_1 - 1/4(\overline{X}_2 + \overline{X}_3 + \overline{X}_4 + \overline{X}_5) = 0$$

та інші.

Із наведених груп видно, що коефіцієнти C_i при середніх значеннях вибірок $\overline{X}_i$ для першого варіанту мають значення $1/2,\ 1/2, -1/3, -1/3, -1/3$, а для другого – $1,\ -1/4, -1/4, -1/4, -1/4$. Вони будуть залежати від того, які групи підлягають перевірці. При цьому, найбільш часто перевіряються не групи, а окремо взяті вибірки. Наприклад, при порівнянні першої і четвертої вибірок коефіцієнти C_i матимуть наступні значення 1, 0, 0, -1, 0. Таким чином, змінюючи C_i, можна перевірити будь які комбінації пар вибірок.

Критеріальне значення даного методу розраховується за формулою:

$$S = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} C_i \overline{X}_i\right)^2}{(k-1) S_{BH}^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{C_i^2}{n_i}}. \tag{2.14}$$

При цьому внутрішньо групова дисперсія розраховується як:

$$S_{BH}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \overline{X}_i\right)^2, \tag{2.15}$$

де $\overline{X}_i = \dfrac{\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)}{n_i}$; k – кількість вибірок; n_i – кількість спостережень в кожній вибірці; $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$ – загальна кількість спостережень.

Якщо розраховане значення S буде більше критичного значення розподілення $F_{k-1,n-k,\alpha}$, то гіпотеза про рівність середніх відповідних вибірок або груп вибірок не приймається.

Для того щоб уникнути протиріч в порівняннях, необхідно дотримуватися наступного порядку проведення порівнянь. Спочатку середні значення впорядковуються за зростанням. Потім здійснюється порівняння найбільшого середнього з найменшим, найбільшого з наступним за величиною найменшим і так далі. Після цього найбільше середнє замінюється наступним за величиною і перевірки продовжуються.

Завдання для виконання практичної роботи

Із множини вибірок випадкових величин, що надані в індивідуальному завданні, вибрати змінну, яка складається з трьох вибірок, та виконати наведені нижче дії для кожної із них.

1. Виконати перевірку гіпотези відповідності вибірок нормальному закону розподілу.
2. Визначити середнє арифметичне елементів кожної вибірки.
3. Визначити дисперсію елементів кожної вибірки.
4. Виконати перевірку гіпотез про рівність двох дисперсій елементів вибірок за критерієм Фішера.
5. Виконати перевірку гіпотез про однорідність дисперсій елементів вибірок за критерієм Кохрена.
6. Виконати перевірку гіпотез про однорідність декількох дисперсій елементів вибірок за критерієм Бартлета.
7. Виконати перевірку гіпотез про рівність середніх значень вибірок при однакових дисперсіях.
8. Виконати перевірку гіпотез про рівність середніх вибірок без передбачення про дисперсії.
9. Виконати перевірку гіпотез про рівність середніх вибірок при різних дисперсіях вибірок.
10. Виконати перевірку гіпотез про рівність середнього значення вибірки заданій величині А.
11. Виконати перевірку гіпотез про рівність середніх вибірок шляхом дисперсійного аналізу
12. Виконати перевірку гіпотез про рівність середніх вибірок методом множинних порівнянь Шеффе.

Порівняти результати обчислень для кожної вибірки випадкових величин.

Зробити висновки за результатами перевірки гіпотез про розташування та розсіювання.

Контрольні запитання

1. Що означає «статистична гіпотеза»?
2. Які етапи включає перевірка гіпотез?
3. Як здійснюється вибір критеріїв для перевірки гіпотез про положення і розсіювання?
4. Які є способи перевірки гіпотези відповідності вибірки нормальному закону розподілу?
5. За допомогою якого критерію здійснюється перевірка гіпотези про рівність двох дисперсій елементів вибірок?
6. Як визначається розрахункове значення критерію Фішера?
7. Коли використовується критерій Кохрена, як розраховується критеріальне значення цього критерію?
8. Коли використовується критерій Бартлета, як розраховується критеріальне значення цього критерію?
9. Що таке рівень значущості? Яких значень він може набувати?
10. Як виконується перевірка гіпотези про рівність середніх двох вибірок при рівних їх дисперсіях?
11. Як виконується перевірка гіпотези про рівність середніх двох вибірок при різних їх дисперсіях?
12. Як виконується перевірка гіпотези про рівність середніх двох вибірок без передбачень при їх дисперсії?
13. Як виконується перевірка гіпотези про рівність середнього значення вибірки деякій величині А?
14. Як виконується перевірка гіпотези про рівність середніх кількох вибірок шляхом дисперсійного аналізу?
15. Як виконується перевірка гіпотези про рівність середніх двох пов'язаних вибірок?
16. Як виконується перевірка гіпотези про рівність середніх груп вибірок за методом множинних порівнянь Шеффе?
17. Яке призначення *LSD*- критерію?
18. Які умові використання непараметричних критеріїв перевірки гіпотез про розташування та розвіювання?
19. Які критерії використовуються для перевірки гіпотез про розташування та розсіювання в непараметричній статистиці?
20. Які допущення використовуються при перевірці гіпотез в непараметричній статистиці?
21. В якій послідовності виконується перевірка гіпотез про розташування та розсіювання в непараметричній статистиці?

Практична робота №3

ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ПРО НАЯВНІСТЬ ЗВ’ЯЗКУ МІЖ ЗМІННИМИ

Мета: отримання практичних навиків перевірки гіпотез про наявність зв’язку між змінними.

Теоретичні відомості

У статистичному аналізі зазвичай розрізняють наступні види зв'язків між факторами (змінними): функціональні; стохастичні;статистичні.

Функціональний зв'язок – зв'язок між змінними, при якому кожному значенню однієї величини відповідає суворо певне значення іншої, тобто $Y=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Стохастичний зв'язок відповідає ситуації, коли зміна значення однієї змінної призводить до зміни закону розподілу іншої. Для дискретного випадку це означає, що кожному значенню однієї змінної відповідає набір значень іншої, причому кожне значення має свою ймовірність реалізації. В практичних дослідженнях найбільш відомим видом таких зв'язків є Марківські ланцюги.

Статистичний зв'язок означає, що значення однієї змінної змінюється в середньому залежно від того, яких значень набуває інша. Дуже часто розглядається як функціональна залежність з випадковою похибкою, тобто $Y=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\varepsilon$,

де $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – функція, що описує залежність Y від сукупності незалежних змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$, а ε – деяка випадкова похибка. Відомо, що сума константи і випадкової величини є випадковою величиною. В зв'язку з цим значення Y, що розраховані за вказаною формулою, будуть в наслідок додавання випадкової величини є також випадковими величинами.

В практичній роботі розглядуються методи, що призначені для аналізу статистичних зв'язків.

Використовують такі види статистичного зв’язку між змінними.

Кореляційний аналіз (параметричний та непараметричний) використовують в тих випадках, коли змінні вимірюються в шкалах відношень, інтервалів або порядку.

Дисперсійний аналіз використовують, якщо залежна змінна вимірюється в шкалах відношень, інтервалів або порядку, а змінні, що впливають, мають нечислову природу (шкала найменувань).

Аналіз таблиць зв'язаності використовується, якщо змінні, що впливають, мають нечислову природу (шкала найменувань), а залежна змінна відображає кількість спостережень (% або частку від загальної кількості), для яких ознака присутня або відсутня.

Вибір методу перевірки гіпотези про наявність зв'язків між змінними залежить від шкали вимірювання випадкових величин, закону їх розподілу та кількості змінних. В таблиці 3.1 наведено вибір методу аналізу зв'язків між змінними.

Таблиця 3.1. Вибір методу аналізу зв'язків між змінними.

<table>
<tr><th rowspan="2">Загальна кількість змінних</th><th colspan="2">Шкали виміру</th><th rowspan="2">Закон розподілу</th><th rowspan="2">Метод аналізу</th></tr>
<tr><th>впливаючих змінних</th><th>залежної змінної</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Дві</td><td colspan="2" rowspan="2">Інтервалів або відношень</td><td>Нормальний</td><td>Парам. кореляція Пірсона</td></tr>
<tr><td>Відрізняється від нормального</td><td>Непарам. кореляція Спірмена</td></tr>
<tr><td colspan="2">Хоч би одна шкала порядку</td><td>–</td><td>Непарам. кореляція Спірмена або Кендалла</td></tr>
<tr><td>Три і більше</td><td colspan="2">Порядку</td><td>–</td><td>Конкордація</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Дві і більше</td><td rowspan="6">Найменувань</td><td rowspan="3">Інтервалів або відношень</td><td>Нормальний для залежної змінної</td><td>Парам. дисперсійний аналіз (критерій Фішера)</td></tr>
<tr><td>Порядку для залежної змінної</td><td>Непарам. Дисперсійний аналіз (критерій Мігеля і Тьюкі)</td></tr>
<tr><td>Відрізняється від нормального для залежної змінної</td><td>Непарам. дисперсійний аналіз (критерій Зігеля і Тьюкі)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Три і більше</td><td>Порядку</td><td>–</td><td>Багатовимірний непарам. диспер. аналіз Фрідмана</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Інтервалів або відношень</td><td>Відрізняється від нормального для залежної змінної</td><td>Багатовимірний непарам. дисперсійний аналіз Фрідмана</td></tr>
<tr><td>Нормальний для залежної змінної</td><td>Багатовимірний параметр. дисперсійний аналіз</td></tr>
<tr><td>Дві</td><td colspan="2">Обидві шкали найменувань, одна виду «є/немає», інша має тільки два значення</td><td>–</td><td>Чотирьохліткові таблиці зв'язаності (сполучень)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Дві</td><td colspan="2">Обидві шкали найменування, одна виду «є/немає», інша має K значень</td><td>–</td><td>Таблиці зв'язаності (сполучень) виду $2*K$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обидві найменування, одна має K значень рівнів, інша – L</td><td>–</td><td>Таблиці зв'язаності (сполучень) виду $K*L$</td></tr>
</table>

3.1. Кореляційний аналіз

Кореляційний зв'язок є окремим випадком статистичного зв'язку $M(Y/X=x)=\hat{y}(x)$, тобто математичне очікування змінної Y, за умови, що випадкова величина X набуває значення x.

3.1.1. Параметрична кореляція (коефіцієнт кореляції Пірсона)

Передумовами параметричного кореляційного аналізу є те, що всі спостереження взаємно незалежні, а вибірки мають нормальний закон розподілу.

Значення коефіцієнта кореляції Пірсона r_{ij} між двома вибірками визначається за формулою:

$$r_{i,j} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)\left(y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{Y}\right)^2}} \quad , \tag{3.1}$$

де x_i та y_i – елементи першої та другої порівнювальних вибірок, $\overline{X}$ та $\overline{Y}$ – їх середні значення.

Коефіцієнт кореляції показує тісноту лінійного зв’язку між двома вибірками випадкових величин. Його значення змінюється від -1, що відповідає зворотному зв’язку, до +1, що відповідає прямо пропорційному зв’язку. Значення 0 означає відсутність зв’язку.

Перевірка значущості коефіцієнта парної кореляції здійснюється за критерієм Стьюдента. Фактично тут перевіряється гіпотеза про рівність коефіцієнта кореляції нулю. Для цього розраховується критеріальне значення за формулою:

$$t_{роз} = \frac{r_{ij}\sqrt{(N-2)}}{\sqrt{\left(1-r_{ij}^2\right)}}, \tag{3.2}$$

де r_{ij} – значення коефіцієнта кореляції, а N – кількість спостережень.

Якщо розрахункове значення $t_{δîç}$ більше табличного зі ступенем свободи $(N-2)$ та рівнем значущості α, то коефіцієнт парної кореляції вважається статистично значимим.

Напівширина довірчого інтервалу для коефіцієнта кореляції визначається за формулою:

$$\Delta = \frac{t_{n-2,\alpha}\left(1-r_{ij}{}^2\right)}{\sqrt{N}}, \tag{3.3}$$

де N – кількість спостережень, за яким розраховується коефіцієнт кореляції; r_{ij} – значення коефіцієнта кореляції; $t_{n-2,\alpha}$ – табличне значення критерію Стьюдента, що взятий з $(N-2)$ степенями свободи.

3.1.2. Визначення часткового коефіцієнта кореляції та його значущості

Для того щоб вплив кореляційного зв'язку між двома змінними «очистити» від можливого впливу третьої, введено поняття часткової кореляції.

Коефіцієнт часткової кореляції визначається за формулою:

$$r = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{\left(1-r_{13}^2\right)\left(1-r_{23}^2\right)}}, \tag{3.4}$$

де r_{12}, r_{13} та r_{23} – коефіцієнти парної кореляції між змінними X та Y, X та Z, Y та Z відповідно.

Значущість часткового коефіцієнта кореляції та величина довірчого інтервалу визначається згідно формул 3.2 та 3.3.

3.2. Дисперсійний аналіз

Для підмножини вибірок випадкових величини, що надані в індивідуальному завданні до практичної роботи № 2, виконати дисперсійний аналіз даних.

3.2.1. Однофакторний параметричний дисперсійний аналіз за *F*-критерієм Фішера.

Дисперсійний аналіз однофакторних рівномірних комплексів зручно виконувати за такою схемою:

1. Початкові дані для дисперсійного аналізу представляють у вигляді таблиці, в якій градації фактору *A* зазвичай розташовують по горизонталі в верхній частині таблиці, а числові значення ознаки *X* розміщують відповідно градаціям фактору *A* (табл.3.1).

2. Розраховують допоміжні величини: $\sum_{i=1}^{m} X_{ij}$; $\sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{m} X_{ij}$; $\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\right)^2$; $\sum_{j=1}^{a}\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\right)^2$; $\sum_{i=1}^{m} X_{i2}^2$; $\sum_{j=1}^{a}\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}^2\right)$.

3. Розраховують девіанти:

$$D_y = \sum_{j=1}^{a}\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}^2\right) - H; \tag{3.5}$$

$$D_A = \frac{\sum_{j=1}^{a}\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\right)^2}{n} - H\,, \tag{3.6}$$

де $n = n_1 = n_2 = ... = n_j = ... = n_a$;

$$D_e = D_y - D_A \tag{3.7}$$

При цьому $H = \dfrac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{m} X_{ij}}{N}$.

4. Визначають кількість степенів свободи k для девіант:

$k_y = N - 1$ – для загального варіювання;

$k_A = a - 1$ – для факторіального варіювання;

$k_e = (N-1)-(a-1) = N - a$ – для залишкової варіації,

де a – число градацій фактору A.

5. Визначають вибіркові дисперсії:

$$s_y^2 = \frac{D_y}{k_y} \tag{3.8}$$

$$s_A^2 = \frac{D_A}{k_A} \tag{3.9}$$

$$s_e^2 = \frac{D_e}{k_e}\,, \tag{3.10}$$

де s_y^2 – загальна дисперсія для всього комплексу; s_A^2 – міжгрупова або факторіальна дисперсія; s_e^2 – внутрішньо групова або залишкова дисперсія.

6. Визначають дисперсійне відношення $F_{ф} = \frac{s_A^2}{s_e^2}$ (при $s_A^2 \geq s_e^2$), за значенням якого роблять висновок про дію фактору *А* на ознаку Х. Отримане значення $F_{ф}$- критерію Фішера порівнюють з відповідним табличним значенням критерію F_{st} за рівнем значимості α і кількості степенів свободи k_A та k_e. При цьому число степенів свободи більшої дисперсії відповідає номеру стовпчика, а меншої – номеру рядка таблиці критерію Фішера для відповідного рівня значимості α.

7. Порівнюють значення $F_{ô}$ та F_{st}. Вплив фактору *А* на ознаку *Х* можна вважати статистично достовірним, якщо $F_{ô} \geq F_{st}$. Отже, з заданою ймовірністю *р* можна зробити висновок, що різниця між групами викликана наявністю певного фактору.

Таблиця 3.1. Загальний вид початкових даних для однофакторного дисперсійного аналізу.

Номер елементу сукупності	Градації фактору *A* (варіанти досліду)						Суми
	A_1	A_2	…	A_j	…	Aa	
1	X_{11}	X_{12}		X_{1j}		X_{1a}	
2	X_{21}	X_{22}		X_{2j}		X_{2a}	
…							
i	X_{i1}	X_{i2}		X_{ij}		X_{ia}	
…							
m	X_{m1}	X_{m2}		X_{mj}		X_{ma}	
Чисельність ознаки *X* в кожному варіанті досліду	n_1	n_2		n_j		n_a	$\sum_{j=1}^{a} n_j = N$
	$\sum_{i=1}^{m} X_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} X_{i2}$		$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}$		$\sum_{i=1}^{m} X_{ia}$	$\sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{m} X_{ij}$
	$\left(\sum_{i=1}^{m} X_{i1}\right)^2$	$\left(\sum_{i=1}^{m} X_{i2}\right)^2$		$\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\right)^2$		$\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ia}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{a}\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}\right)^2$
	$\sum_{i=1}^{m} X_{i1}^2$	$\sum_{i=1}^{m} X_{i2}^2$		$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}^2$		$\sum_{i=1}^{m} X_{ia}^2$	$\sum_{j=1}^{a}\left(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}^2\right)$

Тут A_j – градації фактору *A*;
a – кількість градацій фактору *A*;
X_{ij} – значення ознаки *X*;
m – кількість ознак *X* для кожної градації фактору *A*;
n_j – чисельність ознак *X* в j-тому варіанті досліду;
N – загальна кількість дослідів.

3.2.2. Двофакторний параметричний дисперсійний аналіз за *F*-критерієм Фішера.

Загальні схеми двофакторного дисперсійного аналізу в принципі не відрізняються від схем однофакторного дисперсійного аналізу. Аналіз двофакторних комплексів не змінює, а лише дещо ускладнює загальні схеми, оскільки на ряду з дією кожного фактору окремо враховується і їх спільний вплив на ознаку *X*. Так, враховуючи два фактори А і В, можна вплив на ознаку *X* інших факторів представити у вигляді схеми, що представлена на рис. 3.1.

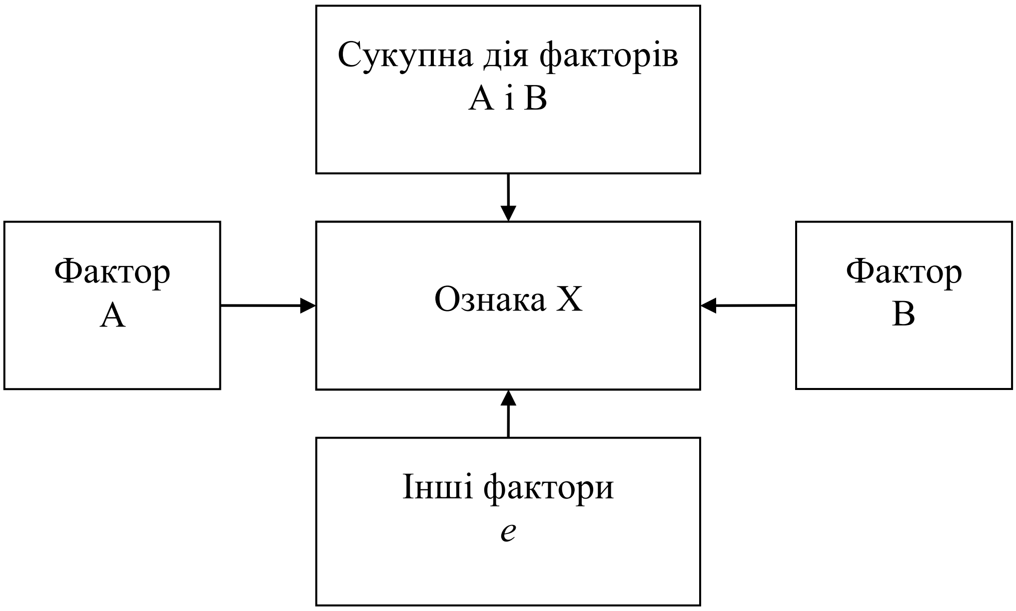

Рис.3.1. Схема впливу факторів А і В на досліджувану ознаку Х, їх сукупної дії та вплив інших факторів.

При цьому фактори мають бути незалежними один від одного. Виконання цієї умови одна із важливіших умов правильного застосування дисперсійного аналізу. Не можна піддавати дисперсійному аналізу кореляційно зв’язані вибірки.

Якщо відомо, що факторами незалежні, то достатньо одного спостереження в комірці таблиці. Загальний вид представлення даних для задачі двофакторного дисперсійного аналізу без повторень (з одним спостереженням в комірці таблиці) наведено в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2. Загальний вигляд представлення даних для двофакторного дисперсійного аналізу без повторень.

В / А	1	2	…	j	…	c	Σ
1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1j}	…	X_{1c}	S_{1*}
2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2j}	…	X_{2c}	S_{2*}
…	…	…	…		…	…	…
i	X_{i1}	X_{i2}	…	X_{ij}	…	X_{ic}	Si_{1*}
…	…	…	…	…	…	…	…
r	X_{r1}	X_{r2}	…	X_{rj}	…	X_{rc}	S_{r*}
Σ	S_{*1}	S_{*2}	…	S_{*j}	…	S_{*c}	S

В таблиці введено такі позначення: S_{i*} – сума елементів *i*-го рядка; S_{*j} – сума елементів *j*-го стовпчика; S – загальна сума елементів.

Розрахункові формули двофакторного дисперсійного аналізу без повторень представлено в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3. Розрахункові формули двофакторного дисперсійного аналізу без повторень.

Джерело варіації	Сума квадратів відхилень	Кількість степенів свободи	Дисперсії
Між r рядками	$\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{S_{i*}^2}{c}\right)-\frac{S^2}{r\cdot c}=Q_r$	$r-1$	$\frac{Q_r}{r-1}$
Між c стовпчиками	$\sum_{i=1}^{c}\left(\frac{S_{*j}^2}{r}\right)-\frac{S^2}{r\cdot c}=Q_c$	$c-1$	$\frac{Q_c}{c-1}$
Залишок або похибка експерименту	$Q_G-Q_r-Q_{ñ}=Q_{çàë.}$	$(c-1)(r-1)$	$\frac{Q_{зал.}}{(c-1)(\kappa-1)}$
Загальна варіація	$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}x_{ij}^2-\frac{S^2}{r\cdot c}=Q_G$	$r\cdot c-1$	

В таблиці: S_A^2 – характеризує вплив фактору *A*; S_B^2 – вплив фактору *B*; $S_{çàë}^2$ – вплив випадкових факторів, які неможливо віднести ні до *A*, ні до *B*.

Для перевірки значимості дисперсій S_A^2 і $S_{çàë}^2$, S_B^2 і $S_{çàë}^2$ визначають розрахункові значення *F*-критерію Фішера:

$$F_A=\frac{S_A^2}{S_{зал}^2};\ F_B=\frac{S_B^2}{S_{зал}^2}. \qquad (3.11)$$

Якщо виконуються умови:

$$F_A>F_{\alpha,n-1,nm(k-1)};$$
$$F_B>F_{\alpha,m-1,nm(k-1)}, \qquad (3.12)$$

то вплив факторів *A, B* вважається значимим.

3.3. Непараметричний дисперсійний аналіз даних за критерієм χ^2 (аналіз Фрідмана).

В випадку, якщо закон розподілу випадкових величин не є нормальним, використовується непараметричний дисперсійних (аналіз Фрідмана). Початкові дані для однофакторного дисперсійного аналізу представляються аналогічно параметричному аналізу, в вигляді таблиці 3.1.

При цьому значення X в кожному стовпчику таблиці замінюються їх рангами, тобто замість значень змінних ставиться їх номер в ряду, що впорядкований за зростанням.

Розрахункове значення критерію визначається за формулою:

$$\chi^2 = \frac{12\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} R_{ij}\right)^2}{mn(n+1)} - 3m(n+1), \qquad (3.13)$$

де R_{ij} – відповідне значення рангів.

Якщо розрахункове значення χ^2 більше критичного, що взяте з заданим рівнем значимості α і $(n-1)$ степенем свободи, то гіпотеза про відмінність між сукупностями випадкових величин приймається.

При розрахунках можна перевірити правильність розстановки рангів і розрахунків, використовуючи таке співвідношення:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} R_{ij} = \frac{nm(m+1)}{2}. \qquad (3.14)$$

Завдання для виконання практичної роботи

1. Для підмножини вибірок випадкових величин, що надані в індивідуальному завданні до практичної роботи №1, виконати наступні дії:

– визначити коефіцієнти кореляції Пірсона між змінними вибірок;

– визначити значимість отриманих коефіцієнтів кореляції;

– визначити довірчі інтервали для коефіцієнтів кореляції;

– визначити часткові коефіцієнти кореляції та їх значимість.

2. Для підмножини вибірок випадкових величин, що надані в індивідуальному завданні до практичної роботи №2, виконати такі дії:

– розв’язати задачу однофакторного параметричного дисперсійного аналізу даних за F–критерієм Фішера;

– розв’язати задачу двофакторного параметричного дисперсійного аналізу даних за F–критерієм Фішера;

– розв’язати задачу непараметричного дисперсійного аналізу даних (Фрідмана) за критерієм хі-квадрат.

Порівняти результати обчислень для різних вибірок випадкових величин.

Зробити висновки за результатами обчислень параметрів, що характеризують наявність зв’язку між змінними.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення кореляції.
2. Що показує коефіцієнт кореляції Пірсона?
3. Як визначаються коефіцієнти кореляції Пірсона? Як визначається їх значимість?
4. Визначення довірчих інтервалів для коефіцієнтів кореляції.

5. Частковий коефіцієнт кореляції. Його призначення, розрахунок та визначення значимості.
6. Сформулюйте задачу однофакторного параметричного дисперсійного аналізу за *F*-критерієм Фішера.
7. Як визначається наявність впливу фактору *A* на ознаку *X* статистично достовірним?
8. Задача двохфакторного параметричного дисперсійного аналізу за *F*-критерієм Фішера.
9. Як визначити значимість двох факторів на змінну при розв'язанні двохфакторного параметричного дисперсійного аналізу?
10. В чому полягає розв'язання задачі непараметричного дисперсійного аналізу даних (Фрідмана) за критерієм χ^2?

Практична робота №4

ПОВНИЙ ФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Мета роботи: отримання практичних навичок побудови планів повного факторного експерименту та обробки його результатів методами регресійного аналізу даних з метою отримання математичної моделі, що адекватно описує досліджуваний процес.

Теоретичні відомості

Повний факторний експеримент – це керований експеримент, в якому всі фактори комбінуються на всіх можливих рівнях. Тут використовуються два рівні: нижчий, який має кодоване значення – –1, та верхній – +1. Тоді загальна кількість дослідів дорівнює $N = 2^k$, k – кількість факторів, що використовуються в експерименті.

План проведення експерименту зручно представити в вигляді матриці, розмірності $(N \times k)$, N – кількість дослідів, k – кількість факторів.

Для підвищення точності математичної моделі доцільно повторювати експеримент кілька раз на кожному із рівнів.

З метою зменшення впливу на результати моделювання, експерименти необхідно виконувати в випадковій послідовності.

Процес організації випадкової послідовності виконання експериментів називається *рандомізацією.*

Як приклад в таблиці 4.1 наведено план повного факторного експерименту для $k=3$ – *ПФЕ* 2^3.

Таблиця 4.1. План проведення експериментів ПФЕ 2^3.

Номер досліду U	x_1	x_2	x_3	y_{U1}	y_{U2}	…	y_{Un}
1	-1	-1	-1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1n}
2	+1	-1	-1	y_{21}	y_{22}	…	y_{2n}
3	-1	+1	-1	y_{31}	y_{32}	…	y_{3n}
4	+1	+1	-1	y_{41}	y_{42}	…	y_{4n}
5	-1	-1	+1	y_{51}	y_{52}	…	y_{5n}
6	+1	-1	+1	y_{61}	y_{62}	…	y_{6n}
7	-1	+1	+1	y_{71}	y_{72}	…	y_{7n}
8	+1	+1	+1	y_{81}	y_{82}	…	y_{8n}

В таблиці 4.1 введено такі позначення: n – кількість повторень дослідів на кожному із рівнів; U – номер досліду в експерименті.

Покажемо приклад отримання коефіцієнтів рівняння регресії (математичної моделі) для випадку двох факторів, тобто $k=2$. Тоді це рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 . \tag{4.1}$$

План проведення експериментальних досліджень *ПФЕ* 2^2 для отримання коефіцієнтів моделі буде мати такий вигляд (таблиця 4.2):

Таблиця 4.2. План проведення експериментів плану *ПФЕ* 2^2**.**

Номер	x_0	x_1	x_2	y_U
1	+1	-1	-1	y_1
2	+1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4

В цей план введено додатковий стовпчик з фактором x_0 **,** який у всіх експериментах приймає значення +1.

Тоді рівняння регресії буде мати такий вигляд:

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \tag{4.2}$$

Згідно з методом найменших квадратів визначають :

$$E = \sum_{U=1}^{N} \left(y_U - \tilde{y}_u \right)^2 = \sum_{U=1}^{N} \left(y_U - (b_0 x_{0U} + b_1 x_{1U} + b_2 x_{2U}) \right)^2 \tag{4.3}$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів ми розв’язуємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial b_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial b_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial b_2} = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Якщо взяти часткові похідні, ми отримали таку систему:

$$\begin{cases} b_0 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{0U}^2 + b_1 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{1U} x_{0U} + b_2 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{2U} x_{0U} = \sum\limits_{U=1}^{N} y_U x_{0U} \\ b_0 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{0U} x_{1U} + b_1 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{1U}^2 + b_2 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{1U} x_{2U} = \sum\limits_{U=1}^{N} y_U x_{1U} \\ b_0 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{0U} x_{2U} + b_1 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{1U} x_{2U} + b_2 \sum\limits_{U=1}^{N} x_{2U}^2 = \sum\limits_{U=1}^{N} y_U x_{2U} \end{cases} \tag{4.5}$$

Перевагою використання планів повного фактичного експерименту є те, що вони мають такі властивості:

1) *ортогональність* – це сума рядкових добутків елементів будь-яких стовпчиків матриці дорівнює 0:

$$\sum_{U=1}^{N} x_{Ui} x_{Uj}, i,\ j = \overline{0,k}; \tag{4.6}$$

2) *нормування* – сума квадратів елементів будь-якого стовпчика дорівнює кількості дослідів:

$$\sum_{U=1}^{N} x_{Ui}^{2} = N, i = \overline{0,k}; \tag{4.7}$$

3) *симетрія* – алгебраїчна сума елементів реального стовпчика дорівнює 0:

$$\sum_{U=1}^{N} x_{Ui} 0; \tag{4.8}$$

4) *ротатабельність* – дисперсії значень вихідної величини на різних відстанях від центру плану є постійні і мінімальні:

$$\begin{cases} b_0 N + b_1 \cdot O + b_2 \cdot O + \sum_{U=1}^{N} y_U x_{0U} \\ b_0 \cdot O + b_1 N + b_2 \cdot O + \sum_{U=1}^{N} y_U x_{1U} \\ b_0 \cdot O + b_1 \cdot O + b_2 N + \sum_{U=1}^{N} y_U x_{2U} \end{cases} \tag{4.9}$$

тоді:

$$b_0 = \frac{\sum_{U=1}^{N} y_U}{N},\ b_1 = \frac{\sum_{U=1}^{N} y_U x_{1U}}{N},\ b_2 = \frac{\sum_{U=1}^{N} y_U x_{2U}}{N},\ \ldots,\ b_i = \frac{\sum_{U=1}^{N} y_U x_{iU}}{N} \tag{4.10}$$

Використовуючи план ПФЕ можна отримати рівняння регресії:

$$\tilde{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{i,j} x_i x_j\ , \tag{4.11}$$

що враховують нелінійність добутку факторів

Для отримання коефіцієнта такої моделі план повного факторного експерименту (ПФЕ) доповнюється додатковими стовпчиками.

Нехай k=2, тоді матриця планового експерименту буде мати такий вигляд (таблиця 4.3) :

Таблиця 4.3. План планового експерименту *ПФЕ* 2^2 з врахуванням нелінійності добутку факторів.

Номер	x_0	x_{1U}	x_{2U}	$x_{1U}\,x_{2U}$	y_U
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Отриманий план відповідає раніш вказаним властивостям плану повного факторного експерименту (ПФЕ):

$$b_{ij}=\frac{\sum_{U=1}^{N} y_U x_{iU} x_{jU}}{N},\ i,\ j=\overline{1,k} \qquad (4.11)$$

тоді

$$b_{ije}=\frac{\sum_{U=1}^{N} y_U x_{iU} x_{jU} x_{1U}}{N},$$

$$i\neq j\neq e \qquad (4.12)$$

$$i,\ j, e=\overline{1,k}.$$

План проведення експериментальних досліджень *ПФЕ* 2^3 з врахуванням добутку факторів наведено в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4. План проведення експериментів *ПФЕ* 2^3 з врахуванням добутку факторів.

Номер досліду	x_0	x_{1U}	x_{2U}	x_{3U}	$x_{1U}\,x_{2U}$	$x_{1U}\,x_{3U}$	$x_{2U}\,x_{3U}$	y_U
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	y_4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Обробка і оцінка експериментальних даних

<u>*Етап 1.*</u> **Виключення грубих похибок**

Нехай в результаті проведення експериментальних досліджень згідно з планом ПФЕ 2^3 отримано значення вихідної величини y_{Ui}, де кількість повторень експериментів на кожному рівні однакова і дорівнює n.

План проведення експериментів та значення вихідної величини наведено в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5. План *ПФЕ* 2^3 та результати його проведення.

Номер досліду	x_0	x_{1U}	x_{2U}	x_{3U}	$x_{1U}\,x_{2U}$	y_{Ui}			
						y_{U1}	y_{U2}	…	y_{Un}
1	+1	-1	-1	-1	+1	30	30,9	28,5	27,6
2	+1	+1	-1	-1	-1	39	42,4	40,7	43,5
3	+1	-1	+1	-1	-1	26,7	28,5	27,9	25,8
4	+1	+1	+1	-1	+1	27	30	30,5	28,1
5	+1	-1	-1	+1	+1	12,6	15,6	14	13,8
6	+1	+1	-1	+1	-1	3,5	5,9	6,1	4,9
7	+1	-1	+1	+1	-1	36,8	38,2	39,7	40,1
8	+1	+1	+1	+1	+1	33,5	37,2	35,1	34,8

Для включення явно поганих результатів експериментальних досліджень, які можуть в подальшому негативно позначитись на отриманому рівнянні регресії, в кожному рядку планів здійснюється перевірка однорідності рішень y_{Ui} за допомогою критерію Стьюдента, значення якого визначають за формулою:

$$t_p = \frac{\left| y_U^* - \tilde{y}_U \right|}{S_U}, \tag{4.13}$$

де y_U^* – найменше або найбільше значення вихідної величини y в u-му рядку плану досліджень;

$\tilde{y}_U = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} y_{Ui}}{n-1}$ – середнє значення в u –му рядку без врахування y_U^*;

S_U – оцінка середнього квадратичного відхилення в u –му рядку:

$$S_U = \sqrt{\frac{1}{n_U - 1} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{Ui} - \tilde{y}_U)^2}\,, \tag{4.14}$$

де n_U – кількість повторень в u –му рядку.

Якщо розрахункове значення $t_p > t_{табл.,\alpha,f}$, де α – рівень значущості, а $f=n_u-1$ – кількість степенів свободи, то вважається, що y_U^* є грубою похибкою і її треба виключити із таблиці результатів експериментальних досліджень. Для спрощення подальшої обробки результатів доцільно повторити дослід на цьому ж рівні, для того щоб забезпечити однакову кількість повторень на кожному із рядків плану.

Так як, $n_u=4 \rightarrow f=4-1=3$, тоді для α=0,05 $t_{табл.,\alpha,f}=3,18$. Розрахункові значення критерію Стьюдента та результат перевірки з табличним значенням показано в табл. 4.6.

Таблиця 4.6. Перевірка результатів експериментальних досліджень за допомогою критерію Стьюдента.

Номер досліду	$\tilde{y}_U$	S_U	t_p	Наявність грубих помилок
1	29,25	1,479865	1,114967	грубих помилок немає
2	41,4	1,971463	1,21737	грубих помилок немає
3	27,225	1,209339	1,17833	грубих помилок немає
4	28,9	1,635033	1,162056	грубих помилок немає
5	14	1,232883	1,13555	грубих помилок немає
6	5,1	1,188837	1,345853	грубих помилок немає
7	38,7	1,507758	1,260149	грубих помилок немає
8	35,15	1,532971	1,076341	грубих помилок немає

Етап 2. **Перевірка однорідності вимірів**

Із всіх середніх значень визначаємо найбільше і найменше значення, а потім обчислюємо розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою:

$$t_p = \frac{\tilde{y}_{U\max} - \tilde{y}_{U\min}}{S_y\sqrt{\frac{1}{n_{\max}} + \frac{1}{n_{\min}}}}, \tag{4.15}$$

де n_{max} , n_{min} – кількість повторень дослідів в рядках з максимальним ($\tilde{y}_{U\max}$) та мінімальним ($\tilde{y}_{U\min}$) середніми значеннями відповідно;
S_y – оцінка дисперсії відтворюваності, що визначається за формулою:

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{N(n-1)}\sum_{U=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{Ui} - \tilde{y}_U\right)^2}\ . \tag{4.16}$$

Якщо $t_p > t_{табл.,\alpha,f}$, де α – рівень значущості, а $f=n_{max}+n_{min}$ – кількість степенів свободи, то вважають, що значення вихідної величини в різних точках плану сильно відрізняється. Тому ці результати експерименту можна вважати результативними і можна перейти до наступного етапу обробки результатів експерименту.

Відповідно до представлених в табл. 8.5 початкових даних S_y=1,49, а t_p = 34,45. Для рівня значимості α=0,05 та кількості ступенів свободи f=8 табличне значення t-критерію Стьюдента дорівнює 2,31. Таким чином, $t_p > t_{табл.,\alpha,f}$, і результати експерименту можна вважати результативними.

Етап 3. **Визначення однорідності дисперсій**

При однаковій кількості повторень дослідів на кожному рівні в кожному рядку плану, тобто: $n_U = n = const, U = 1, N$, перевірка однорідності дисперсій здійснюється за G-критерієм Кохрена, розрахункове значення якого визначається за формулою:

$$G_p = \frac{S_{U\max}^2}{\sum_{U=1}^{N} S_U^2} \tag{4.17}$$

де S_U^2 – дисперсія в u-му рядку плану, що визначається за формулою

$$S_U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{U=1}^{N}\left(y_{Ui} - \tilde{y}_U\right)^2; \tag{4.18}$$

$S_{U\max}^2$ – максимальне значення дисперсії із всіх визначених.

Визначене розрахункове значення G_p порівнюється з табличним $G_{табл}$, що взяте з кількістю степенів свободи $f_1 = n–1$ і $f_2 = N$ та рівнем значущості α.

Якщо $G_p \le G_{табл}$, то гіпотеза про однорідність дисперсії приймається, а це означає, що в дослідах немає дисперсій, що сильно відрізняються від інших, тобто в дослідах немає систематичних похибок.

Інакше, якщо $G_p > G_{табл}$, то вважають, що виміри не є однорідними і потрібно виконати деякі неформальні дії, а саме: перейти до іншої функції, а бо ж виключити грубі похибки серед вимірів, або ж зменшити інтервал варіювання вхідних факторів.

Для нашого набору даних значення дисперсій представлені в табл.4.7.

Таблиця 4.7. Розрахункові значення дисперсії в u-му рядку плану.

Номер досліду	S_U^2
1	2,19
2	3,886667
3	1,4625
4	2,673333
5	1,52
6	1,413333
7	2,273333
8	2,35

Тоді G_p=0,219, а критичне значення для рівня значимості α=0,05 та кількості ступенів свободи f_1=n-1=3 та f_2=N=8 дорівнює 0,4377. Отже, G_p<$G_{табл.}$ і гіпотеза про однорідність дисперсій приймається.

Етап 4. **Визначення коефіцієнтів рівняння регресії та їх статистичної значимості**

Відповідно до формул (4.9) та (4.10) розраховуємо значення коефіцієнтів регресії (див. табл. 8.8).

Таблиця 4.8. Значення коефіцієнтів регресії.

Коефіцієнт	Значення
b0	27,46563
b1	0,171875
b2	5,028125
b3	-4,22813
b12	-0,64063
b13	-3,28438
b23	8,659375
b123	1,978125

Після визначення значень коефіцієнтів рівняння регресії необхідно перевірити їх значимість за *t*-критерієм Стьюдента, розрахункове значення обчислюється за формулами:

$$t_p = \frac{|b_i|}{S_b}, \tag{4.19}$$

$$S_b = \frac{S_y}{\sqrt{nN}}, \tag{4.20}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{N(n-1)}\sum_{U=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}(y_{Ui} - \tilde{y}_U)^2}\ . \tag{4.21}$$

Визначене розрахункове значення t - критерію Стьюдента порівнюється з $t_{табл.}$, що взяте з рівнем значущості α та кількістю степенів свободи $f=N(n-1)$.

Якщо виконується умова, що $t_p > t_{табл,\alpha,f}$, то вважається, що відповідний коефіцієнт рівняння регресії є статистично значимим і його можна використовувати в моделі, яка відповідає рівнянню регресії, інакше його порівнюють нулю і його не включають в отриману модель.

Для даного прикладу при $\alpha = 0{,}05$ та $f = N(n-1) = 8(4-1) = 24$ $t_{òàáë.} = 2{,}06$. В табл. 4.9 представлено результати визначення значимості коефіцієнтів рівняння регресії. Відповідно до них лише коефіцієнт b_1 є не значимим.

Таблиця 4.9. Значимість коефіцієнтів регресії за *t*-критерієм Стьюдента

t_p для коефіцієнтів регресії	Значення t_p	Значимість коефіцієнтів
tp0	104,25	значимий
tp1	0,652378	не значимий
tp2	19,08502	значимий
tp3	16,04849	значимий
tp12	2,43159	значимий
tp13	12,46635	значимий
tp23	32,86798	значимий
tp123	7,508275	значимий

Значимість коефіцієнта сильно залежить від кількості дослідів N та кількості повторень дослідів n на кожному рівні плану. При їх збільшенні точність моделі зростає.

<u>Етап 5.</u> **Перевірка адекватності отриманої математичної моделі, що представлена в вигляді рівняння регресії**

Перевірка адекватності отриманої моделі, описуваному ним об’єкту дослідження здійснюється за F-критерієм Фішера.

Розрахункове значення цього критерію визначається за формулою:

$$F_p = \frac{S^2_{àä}}{S^2_y},$$

$$S^2_{àä} = \frac{n}{N-l}\sum_{U=1}^{n}\left(\bar{y}_U - \tilde{y}_U\right)^2,$$

де $S^2_{àä}$ – дисперсія адекватності отриманої моделі, що характеризує розкид середніх значень $\bar{y}_U$, що отримане в результаті проведення експериментів і значень вихідної величини $\tilde{y}_U$, які отримані за допомогою рівняння регресії.
l – кількість значимих коефіцієнтів в рівнянні регресії.

Розрахункове значення критерію порівнюється з $F_{òàáë\,.\,\alpha,\, f_1,\, f_2}$, що взяте з рівнем значущості α та кількістю степенів свободи f_1 та f_2:

$$f_1 = N - l,$$

$$f_2 = N(n-1).$$

Якщо виконується умова, що $F \le F_{òàáë\,.\,\alpha,\, f_1,\, f_2}$, то гіпотеза про адекватність опису досліджуваного об’єкта отриманою математичною моделлю приймається.

Таким чином, визначено без врахування не значимого коефіцієнта b_1 розрахункове значення $\tilde{y}_U$ та обчислено $\left(\bar{y}_U - \tilde{y}_U\right)^2$, як це показано в табл. 4.10.

Таблиця 4.10. Розрахункові значення $\tilde{y}_U$ та $\left(\bar{y}_U - \tilde{y}_U\right)^2$.

Номер досліду	$\bar{y}_U$	$\tilde{y}_U$	$\left(\bar{y}_U - \tilde{y}_U\right)^2$
1	29,25	29,42188	0,029541016
2	41,4	41,22813	0,029541016
3	27,225	27,39688	0,029541016
4	28,9	28,72813	0,029541016
5	14	14,17188	0,029541016
6	5,1	4,928125	0,029541016
7	38,7	38,87188	0,029541016
8	35,15	34,97813	0,029541016

Відповідно до цих даних визначено $S^2_{\text{àä}} = 0{,}945313$ при $l = 7$, а $F_p = 0{,}425597$. $F_{\text{òàáë}.\alpha,\, f_1,\, f_2}$ з рівнем значимості $\alpha = 0{,}05$ та ступенями свободи $f_1 = N - l = 1$ та $f_2 = N(n-1) = 24$ дорівнює 4,26. Отже, $F \le F_{\text{òàáë}.\alpha,\, f_1,\, f_2}$ і отримана математична модель є адекватною.

Якщо вказана умова не виконується, то дана модель не адекватно описує досліджуваний об’єкт.

Для отримання адекватної моделі, дослідник може виконати такі неформальні дії для отримання адекватної математичної моделі:

– збільшити кількість повторень дослідів по кожному рівні плану;

– зменшити інтервал варіювання факторів;

– змінити шкалу виміру вихідної величини y, тобто представити її в математичній моделі як y^2, y^3, $\sqrt{y}$, $\sqrt[3]{y}$, $\ln(y)$, e^x тощо;

– перейти до отримання моделі нелінійного вигляду:

$$\tilde{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$$

або

$$\tilde{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_u x_i^2 .$$

Завдання для виконання практичної роботи

Для даних, що надані в індивідуальному завданні до практичної роботи, побудувати план ПФЕ$2^к$ при $к$=3, які є значеннями функції відгуку проведених експериментальних досліджень, виконати послідовну їх обробку за наведеними в теоретичних відомостях до даної роботи етапами. Для цього необхідно виконати таку послідовність дій.

1. Побудувати план проведення дробового факторного експерименту для наданої кількості факторів.
2. Виконати переведення початкових факторів із натуральної в кодовану шкалу вимірювання.
3. Реалізувати процес статистичної обробки результатів планового експерименту в такій послідовності:
   – виконати перевірку значень вихідної величини на наявність грубих похибок за t - критерієм Стьюдента:
   – виконати перевірку отриманих результатів експерименту на однорідність вимірів за G- критерієм Кохрена;
   – виконати перевірку гіпотези про однорідність дисперсій;
   – визначити коефіцієнти рівняння регресії;
   – виконати перевірку статистичної значимості отриманих коефіцієнтів рівняння регресії ;за t - критерієм Стьюдента;
   – виконати перевірку отриманої математичної моделі на адекватність опису досліджуваного об’єкта за F- критерієм Фішера.
4. Навести результати обчислень за кожним етапом та зробити відповідні висновки.
5. Представити отриману математичну модель, де початкові фактори в натуральній шкалі вимірювання.
6. Зробити висновки за результатами виконання практичної роботи.

Контрольні запитання

1. Що означає планування експерименту?
2. Якими властивостями має володіти об’єкт дослідження при плануванні експерименту?
3. Які експерименти є активними?
4. Чим відрізняється багатофакторний плановий експеримент від класичного?
5. Що дозволяє одержати багатофакторний експеримент?
6. Які змінні називаються факторами?
7. Яка функція називається відгуком?
8. Якими властивостями має область дослідження?
9. Який експеримент називається повним факторним?
10. Як вибираються фактори при плануванні експериментів?
11. Як визначається інтервал варіювання факторів?

12. Яким повинен бути інтервал варіювання факторів?
13. Як виконується кодування факторів?
14. Натуральна та кодована шкали виміру факторів. Як перейти від однієї шкали виміру до другої?
15. Як будується план повного факторного експерименту?
16. Що таке рандомізація? Для чого вона виконується?
17. Як визначити коефіцієнти моделі повного факторного експерименту?
18. Де використовуються елементи регресійного аналізу при плануванні експерименту?
19. Які припущення допускаються при використанні регресійного аналізу?
20. Якими властивості має план ПФЕ 2^n?
21. Як визначається ортогональність плану?
22. Що дає властивість нормування плану?
23. Як перевірити властивість симетрії плану?
24. З яких етапів складається обробка та оцінка експериментальних даних?
25. Як користуватися статистичними таблицями при оцінюванні параметрів по різноманітних критеріях?
26. Степені свободи. Як вони визначаються?
27. Рівень значимості критерію, довірча ймовірність.
28. Як визначити грубі похибки експерименту?
29. Як визначається оцінка середнього квадратичного відхилення вимірів?
30. Як враховується однородність вимірів в різних точках факторного простору?
31. Що таке дисперсія відтворення дослідів?
32. Як визначаються рядкові дисперсії?
33. По якому критерію оцінюється однородність дисперсій?
34. Як визначити статистичну значимість коефіцієнтів рівняння регресії?
35. Що таке диперсія адекватности?
36. Як визначається адекватність моделі? Які критерії при цьому використовуються?
37. Які дії може виконати експериментатор, якщо одержана модель не буде адекватно описувати досліджуваний процес (об’єкт)?

Практична робота №5

ДРОБОВИЙ ФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Мета роботи: отримання практичних навичок побудови планів дробового факторного експерименту та обробки його результатів методами регресійного аналізу даних з метою отримання математичної моделі, що адекватно описує досліджуваний процес.

Теоретичні відомості

Дробовий факторний експеримент (ДФЕ) Відрізняється від ПФЕ тим, що дозволяє суттєво зменшити кількість дослідів. В теорії планування експериментів є методи побудови частин планів ПФЕ, які мають властивості планів ПФЕ.

Такі плани називаються *дробовими.* Якщо використовується половина плану $\frac{1}{2}\,ПФЕ\,2^k$, то такий план називається $ДФЕ\,2^{k-1}$, називається *напівреплікою* ПФЕ. Якщо – $\frac{1}{4}\,ДФЕ\,2^{k-2}$ називається четвертною реплікою ПФЕ.

Будь які дробові репліки повинні мати властивості ортогональності, нормування, симетрія та ротатабельність.

При створенні планів ДФЕ спочатку будується план ПФЕ, але для меншої кількості факторів. А потім несуттєве: взаємодія факторів представляє відсутній фактор.

На прикладі побудови $ДФЕ\ 2^{4-1}$ будуємо план для меншої кількості $ПФЕ\ 2^3$ (табл. 5.1).

В результаті обробки експерименту отримаємо рівняння регресії:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3\,.$$

Таблиця 5.1. План експерименту з меншою кількістю факторів – $ПФЕ\ 2^3$.

Номер досліду	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
2	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
3	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
5	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
7	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Нехай взаємодія першого і третього факторів буде не суттєвою, тобто x_1x_3 приблизно дорівнює нулю. Тоді для реалізації плану *ДФЕ 2^4-1^* замінюємо відсутній фактор x_4 цією несуттєвою взаємодією – $x_4 = x_1x_3$. В результаті цього отримаємо такий план проведення експерименту, який матиме назву дробовий факторний експеримент *ДФЕ* 2^{4-1}, а вираз – $x_4 = x_1x_3$ називають його генеруючим співвідношенням.

План його проведення *ДФЕ* 2^{4-1} наведено в табл.5.2.

Таблиця 5.2. План проведення експериментів *ДФЕ* 2^{4-1}.

Номер досліду	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4=x_1x_2x_3$	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3	x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3x_4$
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	-1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Тоді математична модель буде представлятись рівнянням регресії такого виду:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3$$

Недоліком цього плану є те, що деякі із стовпчиків співпадають, тому їх треба викреслити, а це означає, наприклад, що b_1 є оцінкою коефіцієнтів $a_1 + a_{34}$:

$$b_3 \to a_1 + a_{14}$$
$$b_1 \to a_4 + a_{13}$$

Для виявлення цього ефекту змішування оцінок введено поняття визначального контрасту, який отримано шляхом множення лівої та правої частин генеруючого співвідношення на введену змінну (в нашому випадку це x_4).

Тоді визначальний контраст матиме такий вигляд:

$$1 = x_1x_3x_4$$

Визначальний контраст дозволяє визначити всі змішування оцінок коефіцієнтів математичної моделі шляхом множення лівої та правої частин його виразу на відповідні змінні або їх комбінації, наприклад:

$$x_3 = x_1 x_4$$

$$x_2 = x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$x_1 = x_3 x_4$$

Тобто можна визначити змішування оцінок, що для наведених виразів має такий вигляд:

$$b_1 \to a_1 + a_{34}$$

$$b_2 \to a_2 + a_{1234}$$

$$b_3 \to a_3 + a_{14}$$

$$x_1 x_2 = x_2 x_3 x_4$$

$$b_3 \to a_{12} + a_{234}$$

Дробові репліки дозволяють значно зменшити кількість дослідів. Можна зменшити кількість дослідів до такого рівня, коли вона буде

дорівнювати кількості факторів.

План в якому кількість дослідів дорівнює кількості факторів називається *насиченим.*

Завдання для виконання практичної роботи

Для набору вихідних даних, що отримані в результаті проведення експериментальних досліджень (таблиця 5.1), побудувати план ПФЕ$2^{к-1}$ при *к*=4 та *к*=5, які є значеннями функції відгуку проведених експериментальних досліджень, та виконати послідовну їх обробку методами регресійного аналізу даних за наведеними в практичній роботі № 4 етапами. Для цього необхідно виконати таку послідовність дій.

1. Побудувати план проведення дробового факторного експерименту для наданої кількості факторів з врахуванням генеруючого співвідношення.
2. Видалити з плану проведення експерименту дублювання стовпців та визначити взаємний вплив факторів на коефіцієнти рівняння регресії.
3. Виконати переведення початкових факторів із натуральної в кодовану шкалу вимірювання.
4. Реалізувати процес статистичної обробки результатів планового експерименту в такій послідовності:

– виконати перевірку значень вихідної величини на наявність грубих похибок за t - критерієм Стьюдента:

– виконати перевірку отриманих результатів експерименту на однорідність вимірів за G- критерієм Кохрена;

– виконати перевірку гіпотези про однорідність дисперсій;

– визначити коефіцієнти рівняння регресії для заданого виду математичної моделі;

– виконати перевірку статистичної значимості отриманих коефіцієнтів рівняння регресії ;за t - критерієм Стьюдента;

– виконати перевірку отриманої математичної моделі на адекватність опису досліджуваного об'єкта за F- критерієм Фішера.

5. Навести результати обчислень за кожним етапом та зробити відповідні висновки.

6. Представити отриману математичну модель, де початкові фактори надано в натуральній шкалі вимірювання.

7. Зробити висновки за результатами виконання практичної роботи.

Контрольні запитання

7. Що означає планування експерименту?
8. Якими властивостями має володіти об'єкт дослідження при плануванні експерименту?
9. Що дозволяє одержати багатофакторний експеримент?
10. Які змінні називаються факторами?
11. Яка функція називається відгуком?
12. Якими властивостями має область дослідження?
13. Який експеримент називається повним факторним?
14. Як вибираються фактори при плануванні експериментів?
15. Як визначається інтервал варіювання факторів?
16. Яким повинен бути інтервал варіювання факторів?
17. Як виконується кодування факторів?
18. Натуральна та кодована шкали виміру факторів. Як перейти від однієї шкали виміру до другої?
19. Як будується план повного факторного експерименту?
20. Що таке рандомізація? Для чого вона виконується?
21. Як визначити коефіцієнти моделі повного факторного експерименту?
22. Де використовуються елементи регресійного аналізу при плануванні експерименту?
23. Які припущення допускаються при використанні регресійного аналізу?
24. Якими властивості має план ПФЕ 2^n?
25. Як визначається ортогональність плану?
26. Що дає властивість нормування плану?
27. Як перевірити властивість симетрії плану?
28. З яких етапів складається обробка та оцінка експериментальних даних?
29. Як користуватися статистичними таблицями при оцінюванні параметрів по різноманітних критеріях?
30. Степені свободи. Як вони визначаються?
31. Рівень значимості критерію, довірча ймовірність.
32. Як визначити грубі похибки експерименту?
33. Як визначається оцінка середнього квадратичного відхилення вимірів?
34. Як вираховується однородність вимірів в різних точках факторного простору?
35. Що таке дисперсія відтворення дослідів?
36. Як визначаються рядкові дисперсії?

37. По якому критерію оцінюється однорідність дисперсій?
38. Як визначити статистичну значимість коефіцієнтів рівняння регресії?
39. Що таке диперсія адекватности?
40. Як визначається адекватність моделі? Які критерії при цьому використовуються?
41. Які дії може виконати експериментатор, якщо одержана модель не буде адекватно описувати досліджуваний процес (об'єкт)?
42. Який експеримент називається дробовим?
43. Що таке напіврепліка, четвертна репліка і т.д.?
44. Які властивості мають плани дробового факторного експерименту (ДФЕ)?
45. Як будується план ДФЕ?
46. Що називається генеруючим свіввідношенням?
47. Як вибирається генеруюче співвідношення?
48. Що таке визначаючий контраст, на що він вказує?
49. Як визначити змішування оцінок коефіцієнтів у моделі, що одержана в результаті ДФЕ?
50. Який план ДФЕ називається насиченим?
51. Які переваги та недоліки має ДФЕ і коли його рекомендується використовувати?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лакин Г.Ф. Биометрия: Учеб. пособие для биол. спец. вузов – 4-е изд., перераб. и доп.– М.: Высш. шк., 1990. – 352 с.: ил.
2. Плохинский Н.А. Биометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1970. –366 с.
3. Плохинский Н.А. Алгоритмы биометрии. – М.: МГУ, 1980. – 150 с.
4. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика в задачах и упражнениях. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2001. – 270 с.
2. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. –М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
3. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ: Пер. с англ. / Дж.О. Ким, Ч.У. Мьюллер, У.Р. Клекка и др.; Под. ред. И.С. Енюкова. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 215 с.
4. Статистические методы для ЭВМ. / Под ред. К. Энслейна, Э. Релстона, Г.С. Уилфа. – М.: Наука, 1986. – 464 с.
5. Лапач С.Н., Чубенко А.В., Бабич П.Н. Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием Excel. – 2-е изд., перераб. и дон. – К: МОРИОН, 2001. – 408 с.
10. Дьюк В., Эмануэль В. Информационные технологии в медико-биологических исследованиях. – СПб.: Питер, 2003. – 528 с.
11. Барсегян А. А. Анализ данных и процессов: учеб. пособие / А. А. Барсегян, М. С. Куприянов, И. И. Холод, М. Д. Тесс, С. И. Елизаров. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.: ил.
12. Мінцер О.П. та ін. Інформаційні технології в охороні здоров’я і практичній медицині: У 10 кн. Кн. 5. Оброблення клінічних і експериментальних даних в медицині: Навч. посіб. / О.П. Мінцер, Ю.В. Вороненко, В.В. Власов. – К.: Вищ. шк., 2003. – 350 с.
13. Мандель И.Д. Кластерный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1988. –176 с.
14. Петрович М.Л., Давыдович М.И. Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 191 с.
15. Каримов Р.Н. Обработка экспериментальной информации. Многомерный анализ. Сарат. техн. ун-т, – Саратов, 2000. –104 с.
16. Благуш П. Факторный анализ с обобщениями. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 248 с.
17. Закс Л. Статистическое оценивание. Пер. с нем. В.Н. Варыгина. Под ред. Ю.П. Адлера, В.Г. Горского. – М.: «Статистика», 1976. – 598 с.

18. Вислоух С.П. Інформаційні технології в задачах технологічної підготовки приладо- та машинобудівного виробництва: моногр. / С.П. Вислоух. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 488 с.

19. Antonyuk V.S. Information technology in deciding of technological problems in instrument making and machine engineering./ V.S. Antonyuk , S.P. Vysloukh // Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні: [збірник наукових праць] / відповідальний редактор З.А. Стоцько. – Лівів : Видавництво Львівської політехніки. – 2013. – №760. – С.101-105.

20. Налимов В. В., Чернова А.А. Статистические методы планирования эксперимента. – М.: Наука,1965. – 340 с.

21. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. – М.: Металлургия, 1968. –155с.

22. Винарский М.С., Лурьє М.В. Планирование эксперимента в технологических исследованиях. – К.: Техника,1975. – 168с.

23. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.:,1976. – 279 с.

24. Хартман К., Лецкий Э., Шеффер В. и др. Планирование эксперимента в исследованиях технологических процессов / Под ред. Э.К.Лецкого. – М.:, Мир, 1977. – 552 с.

25. Душинский В.В., Пуховский Б.В., Радченко С.Г. Оптимизация технологических процессов в машиностроении. – К.: Техника, 1977. – 175 с.

26. Петрович М.Л. Регрессионный анализ и его математическое обеспечение на ЕС ЭВМ. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 199 с.

27. Математическая теория планирования эксперимента / Под ред. С.М. Ермакова. – М.: Наука, 1983. – 391 с.

28. Егоров А. С., Азаров Г. Н. Коваль А. В. Исследование устройств и систем автоматики методом планирований эксперимента. – Харьков: Вища шк..,1986. – 240 с.

29. Душинский В.В., Кравченко С.Г. Моделирование и оптимизация в машиностроении.– К.: НМК ВО, 1992. – 304 с.

30. Душинський В.В., Кравченко С.Г. Моделювання та оптимізація в машинобудуванні: Навч. посібник для студ. машинобуд. спец./ КПІ. – К.: НМКВО, 1993. – 290 с.

31. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 192с.

32. Володарский Е.Т., Малиновский Б.Н., Туз Ю.М. Планирование и организация измерительного эксперимента. – К.: Вища школа, 1987. – 279 с.

ДОДАТОК. ФРАГМЕНТИ СТАТИСТИЧНИХ ТАБЛИЦЬ

Таблиця Д1. Значення t-критерію Стьюдента при рівні значимості α.

Число ступенів свободи ν	Рівень значимості α (двохстороння критична область)					
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
41	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544
42	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538
43	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532
44	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526
45	1.679	2.014	2.412	2.69	3.281	3.520
46	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
47	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510
48	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
49	1.677	2.010	2.405	2.68	3.265	3.500
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496

Таблиця Д1. Продовження.

Число ступенів свободи ν	Рівень значимості α (двохстороння критична область)					
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
51	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258	3.492
52	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255	3.488
53	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251	3.484
54	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248	3.480
55	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245	3.476
56	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242	3.473
57	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239	3.470
58	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237	3.466
59	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234	3.463
60	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
61	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229	3.457
62	1.670	1.999	2.388	2.657	3.227	3.454
63	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225	3.452
64	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223	3.449
65	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220	3.447
66	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218	3.444
67	1.668	1.996	2.383	2.651	3.216	3.442
68	1.668	1.995	2.382	2.650	3.214	3.439
69	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213	3.437
70	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
71	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209	3.433
72	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207	3.431
73	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206	3.429
74	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204	3.427
75	1.665	1.992	2.377	2.643	3.202	3.425
76	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201	3.423
77	1.665	1.991	2.376	2.641	3.199	3.421
78	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198	3.420
79	1.664	1.990	2.374	2.640	3.197	3.418
80	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
81	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194	3.415
82	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193	3.413
83	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191	3.412
84	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190	3.410
85	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189	3.409
86	1.663	1.988	2.370	2.634	3.188	3.407
87	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187	3.406
88	1.662	1.987	2.369	2.633	3.185	3.405
89	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184	3.403
90	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
91	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182	3.401
92	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181	3.399
93	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180	3.398
94	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179	3.397
95	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178	3.396
96	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177	3.395
97	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176	3.394
98	1.661	1.984	2.365	2.627	3.175	3.393
99	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175	3.392
100	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.39
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значимості α (одностороння критична область)					

Таблиця Д2. Значення F-критерію Фішера для рівня значимості α=0,01.

v_2									v_1										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**INF**
1	4052.181	4999.5	5403.4	5624.6	5763.7	5858.9	5928.4	5981.1	6022.5	6055.9	6106.3	6157.3	6208.7	6234.6	6260.7	6286.8	6313.0	6339.4	6365.9
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.416	99.433	99.449	99.458	99.466	99.474	99.482	99.491	99.499
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.888	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.859
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.909
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.602
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.155	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.361
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.868
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.653
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.421
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.360
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.121	2.978	2.827	2.749	2.667	2.583	2.495	2.403	2.305
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.535	2.447	2.354	2.256
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.403	2.310	2.211
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.169
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.131
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.097
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.064
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005	2.868	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.034
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.006
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.805
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.496	2.352	2.198	2.115	2.028	1.936	1.836	1.726	1.601
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.336	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.381
inf	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.473	1.325	1.000

Примітка: v_1 і v_2 – ступені свободи для дисперсій в чисельнику і знаменнику відповідно.

Таблиця Д3. Значення F-критерію Фішера для рівня значимості α=0,025.

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	647.7890	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.29	968.63	976.71	984.87	993.10	997.25	1001.4	1005.6	1009.8	1014.0	1018.3
2	38.5063	39.000	39.166	39.248	39.298	39.332	39.355	39.373	39.387	39.398	39.415	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.4434	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.54	14.473	14.419	14.337	14.253	14.167	14.124	14.081	14.037	13.992	13.947	13.902
4	12.2179	10.649	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.461	8.411	8.360	8.309	8.257
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5245	6.4277	6.3286	6.2780	6.227	6.175	6.123	6.069	6.015
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.065	5.012	4.959	4.904	4.849
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.362	4.309	4.254	4.199	4.142
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.894	3.840	3.784	3.728	3.670
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.560	3.505	3.449	3.392	3.333
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.311	3.255	3.198	3.140	3.080
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.118	3.061	3.004	2.944	2.883
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.963	2.906	2.848	2.787	2.725
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.837	2.780	2.720	2.659	2.595
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.732	2.674	2.614	2.552	2.487
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.644	2.585	2.524	2.461	2.395
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.568	2.509	2.447	2.383	2.316
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.502	2.442	2.380	2.315	2.247
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.445	2.384	2.321	2.256	2.187
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.394	2.333	2.270	2.203	2.133
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.349	2.287	2.223	2.156	2.085
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.308	2.246	2.182	2.114	2.042
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.272	2.210	2.145	2.076	2.003
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.239	2.176	2.111	2.041	1.968
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.209	2.146	2.080	2.010	1.935
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.182	2.118	2.052	1.981	1.906
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.157	2.093	2.026	1.954	1.878
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.133	2.069	2.002	1.930	1.853
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.112	2.048	1.980	1.907	1.829
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5919	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	2.1540	2.092	2.028	1.959	1.886	1.807
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.074	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.943	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.815	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.690	1.614	1.530	1.433	1.310
inf	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2875	2.1918	2.1136	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.566	1.484	1.388	1.268	1.000

Примітка: v_1 і v_2 – ступені свободи для дисперсій в чисельнику і знаменнику відповідно.

Таблиця Д4. Значення F-критерію Фішера для рівня значимості α=0,05.

v_2	v_1: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.4476	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.1	251.14	252.2	253.25	254.31
2	18.5128	19.000	19.164	19.247	19.297	19.33	19.353	19.371	19.385	19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

Примітка: v_1 і v_2 – ступені свободи для дисперсій в чисельнику і знаменнику відповідно.

Таблиця Д5. Значення F-критерію Фішера для рівня значимості α=0,10.

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	39.86346	49.5000	53.5932	55.8329	57.2401	58.2044	58.906	59.439	59.8576	60.195	60.7052	61.2203	61.7403	62.0021	62.265	62.5291	62.7943	63.0606	63.3281
2	8.52632	9.00000	9.16179	9.24342	9.29263	9.32553	9.34908	9.36677	9.38054	9.39157	9.40813	9.42471	9.44131	9.44962	9.45793	9.46624	9.47456	9.48289	9.49122
3	5.53832	5.46238	5.39077	5.34264	5.30916	5.28473	5.26619	5.25167	5.24000	5.23041	5.21562	5.20031	5.18448	5.17636	5.16811	5.15972	5.15119	5.14251	5.13370
4	4.54477	4.32456	4.19086	4.10725	4.05058	4.00975	3.97897	3.95494	3.93567	3.91988	3.89553	3.87036	3.84434	3.83099	3.81742	3.80361	3.78957	3.77527	3.76073
5	4.06042	3.77972	3.61948	3.52020	3.45298	3.40451	3.36790	3.33928	3.31628	3.29740	3.26824	3.23801	3.20665	3.19052	3.17408	3.15732	3.14023	3.12279	3.10500
6	3.77595	3.46330	3.28876	3.18076	3.10751	3.05455	3.01446	2.98304	2.95774	2.93693	2.90472	2.87122	2.83634	2.81834	2.79996	2.78117	2.76195	2.74229	2.72216
7	3.58943	3.25744	3.07407	2.96053	2.88334	2.82739	2.78493	2.75158	2.72468	2.70251	2.66811	2.63223	2.59473	2.57533	2.55546	2.53510	2.51422	2.49279	2.47079
8	3.45792	3.11312	2.92380	2.80643	2.72645	2.66833	2.62413	2.58935	2.56124	2.53804	2.50196	2.46422	2.42464	2.40410	2.38302	2.36136	2.33910	2.31618	2.29257
9	3.36030	3.00645	2.81286	2.69268	2.61061	2.55086	2.50531	2.46941	2.44034	2.41632	2.37888	2.33962	2.29832	2.27683	2.25472	2.23196	2.20849	2.18427	2.15923
10	3.28502	2.92447	2.72767	2.60534	2.52164	2.46058	2.41397	2.37715	2.34731	2.32260	2.28405	2.24351	2.20074	2.17843	2.15543	2.13169	2.10716	2.08176	2.05542
11	3.22520	2.85951	2.66023	2.53619	2.45118	2.38907	2.34157	2.30400	2.27350	2.24823	2.20873	2.16709	2.12305	2.10001	2.07621	2.05161	2.02612	1.99965	1.97211
12	3.17655	2.80680	2.60552	2.48010	2.39402	2.33102	2.28278	2.24457	2.21352	2.18776	2.14744	2.10485	2.05968	2.03599	2.01149	1.98610	1.95973	1.93228	1.90361
13	3.13621	2.76317	2.56027	2.43371	2.34672	2.28298	2.23410	2.19535	2.16382	2.13763	2.09659	2.05316	2.00698	1.98272	1.95757	1.93147	1.90429	1.87591	1.84620
14	3.10221	2.72647	2.52222	2.39469	2.30694	2.24256	2.19313	2.15390	2.12195	2.09540	2.05371	2.00953	1.96245	1.93766	1.91193	1.88516	1.85723	1.82800	1.79728
15	3.07319	2.69517	2.48979	2.36143	2.27302	2.20808	2.15818	2.11853	2.08621	2.05932	2.01707	1.97222	1.92431	1.89904	1.87277	1.84539	1.81676	1.78672	1.75505
16	3.04811	2.66817	2.46181	2.33274	2.24376	2.17833	2.12800	2.08798	2.05533	2.02815	1.98539	1.93992	1.89127	1.86556	1.83879	1.81084	1.78156	1.75075	1.71817
17	3.02623	2.64464	2.43743	2.30775	2.21825	2.15239	2.10169	2.06134	2.02839	2.00094	1.95772	1.91169	1.86236	1.83624	1.80901	1.78053	1.75063	1.71909	1.68564
18	3.00698	2.62395	2.41601	2.28577	2.19583	2.12958	2.07854	2.03789	2.00467	1.97698	1.93334	1.88681	1.83685	1.81035	1.78269	1.75371	1.72322	1.69099	1.65671
19	2.98990	2.60561	2.39702	2.26630	2.17596	2.10936	2.05802	2.01710	1.98364	1.95573	1.91170	1.86471	1.81416	1.78731	1.75924	1.72979	1.69876	1.66587	1.63077
20	2.97465	2.58925	2.38009	2.24893	2.15823	2.09132	2.03970	1.99853	1.96485	1.93674	1.89236	1.84494	1.79384	1.76667	1.73822	1.70833	1.67678	1.64326	1.60738
21	2.96096	2.57457	2.36489	2.23334	2.14231	2.07512	2.02325	1.98186	1.94797	1.91967	1.87497	1.82715	1.77555	1.74807	1.71927	1.68896	1.65691	1.62278	1.58615
22	2.94858	2.56131	2.35117	2.21927	2.12794	2.06050	2.00840	1.96680	1.93273	1.90425	1.85925	1.81106	1.75899	1.73122	1.70208	1.67138	1.63885	1.60415	1.56678
23	2.93736	2.54929	2.33873	2.20651	2.11491	2.04723	1.99492	1.95312	1.91888	1.89025	1.84497	1.79643	1.74392	1.71588	1.68643	1.65535	1.62237	1.58711	1.54903
24	2.92712	2.53833	2.32739	2.19488	2.10303	2.03513	1.98263	1.94066	1.90625	1.87748	1.83194	1.78308	1.73015	1.70185	1.67210	1.64067	1.60726	1.57146	1.53270
25	2.91774	2.52831	2.31702	2.18424	2.09216	2.02406	1.97138	1.92925	1.89469	1.86578	1.82000	1.77083	1.71752	1.68898	1.65895	1.62718	1.59335	1.55703	1.51760
26	2.90913	2.51910	2.30749	2.17447	2.08218	2.01389	1.96104	1.91876	1.88407	1.85503	1.80902	1.75957	1.70589	1.67712	1.64682	1.61472	1.58050	1.54368	1.50360
27	2.90119	2.51061	2.29871	2.16546	2.07298	2.00452	1.95151	1.90909	1.87427	1.84511	1.79889	1.74917	1.69514	1.66616	1.63560	1.60320	1.56859	1.53129	1.49057
28	2.89385	2.50276	2.29060	2.15714	2.06447	1.99585	1.94270	1.90014	1.86520	1.83593	1.78951	1.73954	1.68519	1.65600	1.62519	1.59250	1.55753	1.51976	1.47841
29	2.88703	2.49548	2.28307	2.14941	2.05658	1.98781	1.93452	1.89184	1.85679	1.82741	1.78081	1.73060	1.67593	1.64655	1.61551	1.58253	1.54721	1.50899	1.46704
30	2.88069	2.48872	2.27607	2.14223	2.04925	1.98033	1.92692	1.88412	1.84896	1.81949	1.77270	1.72227	1.66731	1.63774	1.60648	1.57323	1.53757	1.49891	1.45636
40	2.83535	2.44037	2.22609	2.09095	1.99682	1.92688	1.87252	1.82886	1.79290	1.76269	1.71456	1.66241	1.60515	1.57411	1.54108	1.50562	1.46716	1.42476	1.37691
60	2.79107	2.39325	2.17741	2.04099	1.94571	1.87472	1.81939	1.77483	1.73802	1.70701	1.65743	1.60337	1.54349	1.51072	1.47554	1.43734	1.39520	1.34757	1.29146
120	2.74781	2.34734	2.12999	1.99230	1.89587	1.82381	1.76748	1.72196	1.68425	1.65238	1.60120	1.54500	1.48207	1.44723	1.40938	1.36760	1.32034	1.26457	1.19256
∞	2.70554	2.30259	2.08380	1.94486	1.84727	1.77411	1.71672	1.67020	1.63152	1.59872	1.54578	1.48714	1.42060	1.38318	1.34187	1.29513	1.23995	1.16860	1.00000

Примітка: v_1 і v_2 – ступені свободи для дисперсій в чисельнику і знаменнику відповідно.

Таблиця Д6. Значення коефіцієнту Кохрена (G-критерію)
для довірчої ймовірності *p*=99% і числі ступенів свободи *k*.

Кількість дослідів, *n*	Число степенів свободи, *k*													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**16**	**36**	**144**	∞
2	0.9999	0.9950	0.9794	0.9586	0.9373	0.9172	0.8988	0.8823	0.8674	0.8539	0.7949	0.7067	0.6062	0.5000
3	0.9933	0.9423	0.8831	0.8335	0.7933	0.7606	0.7335	0.7107	0.6912	0.6743	0.6059	0.5153	0.4230	0.3333
4	0.9676	0.8643	0.7814	0.7212	0.6761	0.6410	0.6129	0.5897	0.5702	0.5536	0.4884	0.4057	0.3251	0.2500
5	0.9279	0.7885	0.6957	0.6329	0.5875	0.5531	0.5259	0.5037	0.4854	0.4697	0.4094	0.3351	0.2644	0.2000
6	0.8828	0.7218	0.6258	0.5635	0.5195	0.4866	0.4608	0.4401	0.4229	0.4084	0.3529	0.2858	0.2229	0.1667
7	0.8376	0.6644	0.5685	0.5080	0.4659	0.4347	0.4105	0.3911	0.3751	0.3616	0.3105	0.2494	0.1929	0.1429
8	0.7945	0.6152	0.5209	0.4627	0.4226	0.3932	0.3704	0.3522	0.3373	0.3248	0.2779	0.2214	0.1700	0.1250
9	0.7544	0.5727	0.4810	0.4251	0.3870	0.3592	0.3378	0.3207	0.3067	0.2950	0.2514	0.1992	0.1521	0.1111
10	0.7175	0.5358	0.4469	0.3934	0.3572	0.3308	0.3106	0.2945	0.2813	0.2704	0.2297	0.1811	0.1376	0.1000
12	0.6528	0.4751	0.3919	0.3428	0.3099	0.2861	0.2680	0.2535	0.2419	0.2320	0.1961	0.1535	0.1157	0.0833
15	0.5747	0.4069	0.3317	0.2882	0.2593	0.2386	0.2228	0.2104	0.2002	0.1918	0.1612	0.1251	0.0934	0.0667
20	0.4799	0.3297	0.2654	0.2288	0.2048	0.1877	0.1748	0.1646	0.1567	0.1501	0.1248	0.0960	0.0709	0.0500
24	0.4247	0.2871	0.2295	0.1970	0.1759	0.1608	0.1495	0.1406	0.1338	0.1283	0.1060	0.0810	0.0595	0.0417
30	0.3632	0.2412	0.1913	0.1635	0.1454	0.1327	0.1232	0.1157	0.1100	0.1054	0.0867	0.0658	0.0480	0.0333
40	0.2940	0.1915	0.1508	0.1281	0.1135	0.1033	0.0957	0.0898	0.0853	0.0816	0.0668	0.0503	0.0363	0.0250
60	0.2151	0.1371	0.1069	0.0902	0.0796	0.0722	0.0668	0.0625	0.0594	0.0567	0.0461	0.0344	0.0245	0.0167
120	0.1225	0.0759	0.0585	0.0489	0.0429	0.0387	0.0357	0.0334	0.0316	0.0302	0.0242	0.0178	0.0125	0.0083
∞	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблиця Д7. Значення коефіцієнту Кохрена (G-критерію) для довірчої ймовірності p=95% і числі ступенів свободи k.

Кількість дослідів, *n*	**Число ступенів свободи, *k***													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**16**	**36**	**144**	∞
2	0.9985	0.9750	0.9392	0.9057	0.8772	0.8534	0.8332	0.8159	0.8010	0.7880	0.7341	0.6602	0.5813	0.5000
3	0.9669	0.8709	0.7977	0.7457	0.7071	0.6771	0.6530	0.6333	0.6167	0.6025	0.5466	0.4748	0.4031	0.3333
4	0.9065	0.7679	0.6841	0.6287	0.5895	0.5598	0.5365	0.5175	0.5017	0.4884	0.4366	0.3720	0.3093	0.2500
5	0.8412	0.6338	0.5981	0.5440	0.5063	0.4783	0.4564	0.4387	0.4241	0.4118	0.3645	0.3066	0.2013	0.2000
6	0.7808	0.6161	0.5321	0.4803	0.4447	0.4184	0.3980	0.3817	0.3682	0.3568	0.3135	0.2612	0.2119	0.1667
7	0.7271	0.5612	0.4800	0.4307	0.3974	0.3726	0.3535	0.3384	0.3259	0.3154	0.2756	0.2278	0.1833	0.1429
8	0.6798	0.5157	0.4377	0.3910	0.3595	0.3362	0.3185	0.3043	0.2926	0.2829	0.2462	0.2022	0.1616	0.1250
9	0.6385	0.4775	0.4027	0.3584	0.3286	0.3067	0.2901	0.2768	0.2659	0.2568	0.2226	0.1820	0.1446	0.1111
10	0.6020	0.4450	0.3733	0.3311	0.3029	0.2823	0.2666	0.2541	0.2439	0.2353	0.2032	0.1655	0.1308	0.1000
12	0.5410	0.3924	0.3624	0.2880	0.2624	0.2439	0.2299	0.2187	0.2098	0.2020	0.1737	0.1403	0.1100	0.0833
15	0.4709	0.3346	0.2758	0.2419	0.2195	0.2034	0.1911	0.1815	0.1736	0.1671	0.1429	0.1144	0.0889	0.0667
20	0.3894	0.2705	0.2205	0.1921	0.1735	0.1602	0.1501	0.1422	0.1357	0.1303	0.1108	0.0879	0.0675	0.0500
24	0.3434	0.2354	0.1907	0.1656	0.1493	0.1374	0.1286	0.1216	0.1160	0.1113	0.0942	0.0743	0.0567	0.0417
30	0.2929	0.1980	0.1593	0.1377	0.1237	0.1137	0.1061	0.1002	0.0958	0.0921	0.0771	0.0604	0.0457	0.0333
40	0.2370	0.1576	0.1259	0.1082	0.0968	0.0887	0.0827	0.0780	0.0745	0.0713	0.0595	0.0462	0.0347	0.0250
60	0.1737	0.1131	0.0895	0.0765	0.0682	0.0623	0.0583	0.0552	0.0520	0.0497	0.0411	0.0316	0.0234	0.0167
120	0.0998	0.0632	0.0495	0.0419	0.0371	0.0337	0.0312	0.0292	0.0279	0.0266	0.0218	0.0165	0.0120	0.0083
∞	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблиця Д8. Значення χ^2-розподілення для рівнів значимості α <0,05 і α<0,01.

k	α		k	α		k	α	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
1	3,84	6,64	**31**	45,0	52,2	**72**	92,8	103
2	5,99	9,21	**32**	46,2	53,5	**74**	95,1	105
3	7,82	11,3	**33**	47,4	54,8	**76**	97,4	108
4	9,49	13,3	**34**	48,6	56,1	**78**	99,6	110
5	11,1	15,1	**35**	49,8	57,3	**80**	102	112
6	12,6	16,8	**36**	51,0	58,6	**82**	104	115
7	14,1	18,5	**37**	52,2	59,9	**84**	106	117
8	15,5	20,1	**38**	53,4	61,2	**86**	109	119
9	16,9	21,7	**39**	54,6	62,4	**88**	111	122
10	18,3	23,2	**40**	55,8	63,7	**90**	113	124
11	19,7	24,7	**41**	56,9	65,0	**92**	115	126
12	21,0	26,2	**42**	58,1	66,2	**94**	118	129
13	22,4	27,7	**43**	59,3	67,5	**96**	120	131
14	23,7	29,1	**44**	60,5	68,7	**98**	122	133
15	25,0	30,6	**45**	61,7	70,0	**100**	124	136
16	26,3	32,0	**46**	62,8	71,2	**110**	135	147
17	27,6	33,4	**47**	64,0	72,4	**120**	147	159
18	28,9	34,8	**48**	65,2	73,7	**130**	158	170
19	30,1	36,2	**49**	66,3	74,9	**140**	169	182
20	31,4	37,6	**50**	67,5	76,2	**150**	180	193
21	32,7	38,9	**52**	69,8	78,6	**200**	234	249
22	33,9	40,3	**54**	72,2	81,1	**250**	288	305
23	35,2	41,6	**56**	74,5	83,5	**300**	341	360
24	36,4	43,0	**58**	76,8	86,0	**400**	448	469
25	37,6	44,3	**60**	79,1	88,4	**500**	553	576
26	38,9	45,6	**62**	81,4	90,8	**600**	658	683
27	40,1	47,0	**64**	83,7	93,2	**700**	763	790
28	41,3	48,3	**66**	86,0	95,6	**800**	867	896
29	42,6	49,6	**68**	88,2	98,0	**900**	971	1002
30	43,8	50,9	**70**	90,5	100	**1000**	1075	1107

Примітка: k – число ступенів свободи.