

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою
програмою «Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних
систем і веб-технологій» спеціальності 121 «Інженерія програмного
забезпечення»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О.В. Барабаш, А.П. Мусієнко, О.В. Свинчук. – Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 193 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 24.06.2021 р.)
за поданням Вченої ради Теплоенергетичного факультету (протокол № 12 від 31.05.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Укладачі: *Барабаш Олег Володимирович*, д-р техн. наук, проф.
Мусієнко Андрій Петрович, д-р техн. наук, доц.
Свинчук Ольга Василівна, канд. фіз.-мат. наук.

Відповідальний редактор *Коваль О.В.*, канд.тех.наук, доц., в.о. завідучого кафедри АПЕПС

Рецензент *Дичка І.А.* – д-р техн. наук, проф., декан факультету прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Шидліч А.Л. – д-р. фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій Інституту математики НАН України

Посібник розроблений на підставі робочої програми кредитного модуля з дисципліни “Теорія ймовірностей” та призначений для якісного засвоєння матеріалу студентами.

Призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних систем і веб-технологій» спеціальності 121«Інженерія програмного забезпечення» денної (заочної) форми навчання.

Спрямований на формування у студентів системи знань та умінь для застосування ймовірнісно-статистичного апарату при розв’язуванні теоретичних і практичних задач у професійній діяльності, а також при дослідженні закономірностей, яким підпорядковуються реальні процеси в сфері програмування. Посібник містить основні теоретичні положення, методичні рекомендації для розв’язання задач, питання та завдання для самоперевірки, запланованих протягом семестру.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ	11
1.1. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ	11
1.1.1. Основні поняття: подія та випробування.....	11
1.1.2. Алгебра випадкових подій.....	14
1.1.3. Поняття ймовірності випадкової події.....	17
1.1.4. Класичне визначення ймовірності.....	18
1.1.5. Геометрична ймовірність.....	19
1.1.6. Статистична ймовірність.....	21
Питання для самоперевірки.....	22
Задачі для самостійної роботи.....	23
Індивідуальні завдання.....	26
1.2. ЙМОВІРНІСТЬ СКЛАДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ	27
1.2.1. Елементи комбінаторики. Обчислення ймовірностей випадкових подій з використанням комбінаторики.....	27
1.2.2. Основні теореми суми та добутку випадкових подій.....	30
Питання для самоперевірки.....	33
Задачі для самостійної роботи.....	34
Індивідуальні завдання.....	35
1.3. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА ФОРМУЛА БАЙЄСА	38
1.3.1. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.....	38
1.3.2. Ймовірність появи хоча б однієї події.....	41
Питання для самоперевірки.....	43
Задачі для самостійної роботи.....	44
Індивідуальні завдання.....	46
1.4. ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ	48
1.4.1. Формула Бернуллі.....	48
1.4.2. Найімовірніше число появи події в незалежних випробуваннях.....	49
1.4.3. Граничні теореми для схеми Бернуллі.....	51
1.4.4. Теорема Пуассона.....	52

1.4.5. Найпростіший (пуассонівський) потік подій.....	54
Питання для самоперевірки	55
Задачі для самостійної роботи.....	56
Індивідуальні завдання.....	58
РОЗДІЛ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ	60
2.1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	60
2.1.1. Класифікація випадкових величин	60
2.1.2. Дії над випадковими величинами	62
2.1.3. Функція розподілу дискретної випадкової величини	65
2.1.4. Числові характеристики дискретних випадкових величин та їх властивості.....	68
Математичне сподівання випадкової величини	69
Дисперсія випадкової величини	70
Середнє квадратичне відхилення випадкової величини.....	71
Мода випадкової величини	72
Питання для самоперевірки	72
Задачі для самостійної роботи.....	73
Індивідуальні завдання.....	75
2.2. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	77
2.2.1. Функції розподілу неперервної випадкових величин	77
2.2.2. Щільність розподілу неперервної випадкової величини.....	78
2.2.3. Числові характеристики НВВ та їх характеристики.	82
Математичне сподівання випадкової величини	82
Дисперсія випадкової величини	83
Середнє квадратичне відхилення випадкової величини.....	84
Мода та медіана випадкової величини	84
Початкові й центральні моменти випадкової величини	85
Асиметрія й ексцес випадкової величини	85
Питання для самоперевірки	89

Задачі для самостійної роботи	90
Індивідуальні завдання	92
2.3. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	93
2.3.1. Рівномірний закон розподілу	93
2.3.2. Біноміальний закон розподілу	94
2.3.3. Закон розподілу Пуассона	94
2.3.4. Геометричний закон розподілу	95
2.3.5. Гіпергеометричний закон розподілу	96
2.3.6. Числові характеристики законів розподілу	97
Питання для самоперевірки	97
Задачі для самостійної роботи	98
Індивідуальні завдання	101
2.4. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	105
2.4.1. Рівномірний закон розподілу	105
2.4.2. Показниковий закон розподілу	107
2.4.3. Нормальний закон розподілу	109
Питання для самоперевірки	111
Задачі для самостійної роботи	112
Індивідуальні завдання	115
2.5. СИСТЕМИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	118
2.5.1. Поняття про систему випадкових величин	118
2.5.2. Система двох дискретних випадкових величин, її способи задання та основні числові характеристики	119
2.5.3. Основні числові характеристики для випадкових величин X, Y , що утворюють систему	124
2.5.4. Умовний закон розподілу	128
Питання для самоперевірки	130
Задачі для самостійної роботи	131
Індивідуальні завдання	133
2.6. СИСТЕМИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	135

2.6.1. Щільність ймовірності.....	135
2.6.2. Основні числові характеристики для випадкових величин X, Y , що утворюють систему.....	136
2.6.3. Умовний закон розподілу	138
Питання для самоперевірки	144
Задачі для самостійної роботи.....	145
Індивідуальні завдання.....	146
2.7. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ	148
2.7.1. Функція однієї випадкової величини.....	148
Функція дискретної випадкової величини	148
Функція неперервної випадкової величини	151
2.7.2. Функція двох випадкових величин	155
Питання для самоперевірки	159
Задачі для самостійної роботи.....	159
Індивідуальні завдання.....	162
2.8. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....	163
2.8.1. Нерівність Чебишова	163
2.8.2. Важливі граничні теореми	164
Питання для самоперевірки	167
Задачі для самостійної роботи.....	168
Індивідуальні завдання.....	170
ПРИКЛАД МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	172
Варіант 1.....	172
Варіант 2.....	174
ДОДАТКИ.....	182
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ...	191

ВСТУП

Вірогідне нам завжди здається неймовірним...

Еріх Марія Ремарк

Усі процеси, що відбуваються у природі чи людському суспільстві, є наслідком взаємодії багатьох факторів. Для того щоб вивчити ці процеси і надалі керувати ними, необхідно з'ясувати, яку роль у досліджуваному процесі відіграє кожний фактор окремо. Для застосування математичних методів при вивченні взаємодії тих чи інших факторів, слід уміти виражати дію кожного з них кількісно. Щоб отримати потрібні числові дані, необхідно провести серію спостережень, але кожне спостереження дає нам лише наслідок взаємодії основних факторів, які нас цікавлять, з багатьма сторонніми другорядними факторами. Деякі з них потрібно й можна враховувати в дослідженнях. Урахування решти факторів або в принципі неможливе, або недоцільне з якихось міркувань. Тому за реальних умов при дослідженні будь-якого процесу застосовують метод його формалізації, беручи до уваги лише ті фактори, які істотно впливають на зазначений процес. Водночас усі ті фактори, якими експериментатор нехтує, загалом відбиваються на наслідках експерименту, надаючи їм неоднозначності. Так настають непередбачувані *випадкові* явища.

Теорія ймовірностей не має за мету передбачити, відбудеться чи не відбудеться одиначне випадкове явище. Така постановка задачі була б нерозумною через практичну неможливість урахування впливу на це випадкове явище величезної кількості факторів. Разом з тим, із життєвого досвіду відомо, що в *багатократно повторюваних однорідних випадкових явищах*, назвемо їх **масовими випадковими подіями**, проявляються деякі закономірності. Наприклад, поява герба при однократному підкиданні монети із його зображенням на одній із сторін монети, є *випадковою подією*, передбачити яку неможливо. Проводячи експерименти із монетою, переконуємось, що з більшим числом підкидань можна передбачити число, яке близьке величині відношення кількості появи герба до загальної кількості підкидань монети.

*Математична наука, що дозволяє виявляти і досліджувати закономірності, притаманні масовим випадковим подіям, при абстрагуванні від фізичної природи подій, називається **теорією ймовірностей**. Методи теорії ймовірностей якраз і надають можливість прогнозувати результати масових випадкових явищ.*

*Із теорією ймовірностей тісно пов'язана **математична статистика** – розділ математики, в якому за допомогою математичних методів систематизують, опрацьовують і використовують статистичні дані для наукових і практичних висновків. Сучасну математичну статистику, що базується на методах теорії ймовірностей, називають **наукою про прийняття рішень в умовах невизначеності**.*

Теорія ймовірностей та математична статистика є важливими складовими фундаментальної підготовки фахівців з інформаційних технологій.

*Теорія ймовірностей зародилася в середині XVII століття зі спроб вчених (Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс) обґрунтувати теорію азартних ігор. З останньої запозичено терміни «ймовірність», «математичне очікування». До цього часу було накоплено великі статистичні дані на теренах страхування та демографії (науки про склад і переміщення населення і закономірності його розвитку). Першим теоретичним обґрунтуванням цих фактів стала доведена Я. Бернуллі *теорема Бернуллі*, що носить назву «*закону великих чисел*» (кінець XVII ст.). У XVIII столітті А. Муавр і П. Лаплас, а згодом також і К. Гаус, відкрили *нормальний закон*, якому підпорядковується широке коло існуючих в реальному житті випадкових явищ. Методи теорії ймовірностей плідно застосовуються в теорії стрільби, тут особливе місце займають роботи Пуассона (XVIII-XIX ст.). Виключно важливу роль у розвитку теорії ймовірностей мали відкриття П.Л.Чебишова та його учнів А.А. Маркова і О.М. Ляпунова (XIX ст.). Великий внесок в теорію ймовірностей зроблено також і видатними математиками XX століття – С.Н. Бернштейном, О.Я. Хінчином, А.М. Колмогоровим, Б.В. Гнєденком, Р.А. Фішером, Р.Е. Мізесом, К. Пірсоном та іншими.*

Історія Київської школи теорії ймовірностей починається в середині XIX століття. Першу лекцію з цієї математичної дисципліни в Київському університеті

Святого Володимира прочитав у 1863 р. *Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко* (1825 –1912) при вступі на посаду доцента. Перший в Україні підручник з теорії ймовірностей опублікував у 1878 р. його учень та колега професор *Василь Петрович Єрмаков* (1845–1922). Тоді це був один з найсучасніших підручників, у якому були викладені нові результати російського математика П.Л. Чебишова про закон великих чисел. У 1905 р. вийшов друком посібник В.П. Єрмакова «*Метод найменших квадратів*», що сприяло широкому застосуванню описаного в ньому ймовірнісного інструменту в багатьох галузях науки. Визначний внесок у розвиток української, зокрема, київської школи теорії ймовірностей зробив *Борис Володимирович Гнеденко* – у 1930-х рр. аспірант Московського державного університету, учень О.Я. Хінчина і А.М. Колмогорова. У 1944-1945 навчальному році він прочитав у Києві невеликий курс теорії ймовірностей і вів студентський семінар «Перетворення Фур'є в теорії ймовірностей та аналізі». Під впливом Б.В. Гнеденка почав наукову діяльність *Анатолій Володимирович Скороход* (1930–2011). З 1964 р. він читав в КДУ основні та спеціальні курси: «Процеси з незалежними приростами», «Процеси Маркова», «Стохастичні диференціальні рівняння», «Випадкові оператори» та ін., написав багато монографій, серед яких «Дослідження з теорії випадкових процесів» (1961), «Випадкові процеси з незалежними приростами» (1964), «Теорія випадкових процесів» у 3-х т. (1971–1975). У 1964 р. А.В. Скороход та Й.І. Гіхман завершили роботу над першим в СРСР підручником з теорії випадкових процесів «Введение в теорию случайных процессов».

З ініціативи Б.В. Гнеденка на механіко-математичному факультеті КДУ на початку 1958 р. було відкрито спеціалізацію «Теорія ймовірностей і математична статистика». У 1962 році було створено окрему кафедру теорії ймовірностей і математичної статистики, завідувачем якої став професор *Й.І. Гіхман*. У 1966 р. кафедру доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України *Михайло Йосипович Ядренко* (1932–2004). М.Й. Ядренко створив новий напрям в теорії ймовірностей – *спектральну теорію однорідних і ізотропних випадкових полів*. Засновану Б.В. Гнеденком у КДУ спеціалізацію закінчив у 1970

році *Валерій Володимирович Булдігін* (1946–2012) – один з кращих ймовірнісників КПІ, широко відомий у світі доктор фізико-математичних наук, професор. Валерій Володимирович отримав вагомі результати в теорії випадкових рядів у топологічних векторних просторах, теорії граничних теорем для випадкових векторів, теорії гауссових та субгауссових процесів, статистиці випадкових процесів, теорії відновлення. Багато років разом з В.В. Булдігіним в КПІ плідно працювали, розвиваючи напрям теорії ймовірностей, професори *О.І. Клесов*, *О.В. Іванов*, *А.Ю. Пилипенко*, доцент *А.Б. Ільєнко*.

Сучасний розвиток теорії ймовірностей характеризується значним розширенням кола досліджуваних задач. Це задачі радіотехніки, загальної теорії зв'язку, автоматичного регулювання, електроенергетичних систем, астрономії, метеорології, військової справи тощо. Без методів теорії ймовірностей немислимі планування та організація виробництва, аналіз технологічних процесів. Теорія ймовірностей допомагає кількісно оцінити масштаби інформації, яку несе в собі та чи інша система, що підлягає дії випадкових сил, оцінити параметри, якими визначається система, і оволодіти методами роботи з даними (а інформація фактично визначається через ці дані), в тому числі методами роботи з великими масивами даних. Той, хто оволодіє запропонованими ймовірнісними і статистичними методами, отримає ключі до багатьох напрямів сфери програмування. Також зараз існує тенденція до появи нових дисциплін, таких як «Економетрія», «Теорія масового обслуговування», «Теорія ризику», «Теорія надійності», «Надійність електричних мереж» тощо, котрі тісно пов'язані з теорією ймовірностей.

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1.1. Основні поняття: подія та випробування

Теорія ймовірностей як один із розділів математики досліджує певний вид математичних моделей – моделі випадкових подій, а не фізичних подій. Для математичного опису випадкових подій застосовують такі точні поняття: *елементарні (прості) та складні випадкові події, простір елементарних подій*.

Означення. Експеримент (випробування, спостереження) – це здійснення певного комплексу умов, що призводить до одного з можливих наслідків. *Наприклад*, контролер перевіряє партію із 100 деталей на якість.

Експеримент може бути реальним або мисленим (уявлюваним).

Означення. Наслідок – можливий результат експерименту (*первинне поняття в теорії ймовірностей*). *Наприклад*, після перевірки 100 деталей на якість виявилось 95 якісних і 5 бракованих.

Означення. Подія – один або сукупність наслідків експерименту. *Наприклад*, подія «Під час перевірки 100 деталей контролер виявив парну кількість якісних деталей» об'єднує 50 можливих наслідків.

Означення. Випадкова подія – подія, яка може відбутись або не відбутись у результаті експерименту.

Всі випадкові події поділяють на елементарні (прості) і складні. **Елементарні події** мають один можливий наслідок експерименту, **складні** – сукупність всіх можливих наслідків.

Кажуть, що *подія відбулась*, якщо в експерименті мав місце один з можливих наслідків для цієї події. Можливі наслідки позначають ω_i . Наслідки, при яких відбувається дана подія, називають **сприятливими** наслідками. Множину усіх можливих наслідків експерименту називають **простором елементарних подій (повною групою подій в даному експерименті або простором елементарних наслідків)**. Позначають Ω . *Наприклад*, при одному підкиданні грального кубика

можливими є 6 елементарних подій : ω_1 – випадає число 1, ω_2 – випадає число 2, ω_3 – випадає число 3, ω_4 – випадає число 4, ω_5 – випадає число 5, ω_6 – випадає число 6, тобто простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Означення. Неможлива подія – подія, що не має жодного наслідку експерименту (вона не відбудеться за жодних умов). Позначається \emptyset (символом порожньої множини).

Означення. Достовірна подія – подія, яка відбудеться за будь-яких умов, так як вона полягає в реалізації якогось одного з усіх елементарних наслідків простору елементарних наслідків. Позначається Ω . Її ототожнюють з простором елементарних подій. Наприклад, при підкиданні грального кубика подія, яка полягає у тому, що випаде одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6, є достовірною, а подія, яка полягає в тому, що випаде число 7 або 8, є неможливою.

Означення. Несумісні події – події, які не можуть відбуватись разом в одному і тому самому експерименті. Наприклад, події «Студент Коваленко склав іспит з теорії ймовірностей на 5» та «Студент Коваленко склав іспит з теорії ймовірностей на 3» – несумісні, тому що не можуть відбутись разом, оскільки йдеться про того ж самого студента і ту ж саму дисципліну. А ось події «У магазин зайшла людина старша за 60 років» та «У магазин зайшла жінка» – сумісні, тому що в магазин може зайти жінка віком старша за 60 років.

Отже, події простору елементарних подій Ω є несумісними.

Означення. Незалежні події – це такі події, для яких поява однієї з них не змінює можливості появи іншої. У протилежному випадку події називають **залежними**. Наприклад, по одному разу кинули монету і гральний кубик. Випали «герб» і «число 6». Результати обох подій не впливають одна на одну, тому ці події є незалежними. Якщо з коробки, у якій лежать червоні та фіолетові повітряні кульки, першого разу взяли червону кульку (подія A), то ймовірність витягти червону кульку наступного разу (подія B) зменшилась. Отже, ці події є залежними.

Означення. Рівноможливі події – це такі події, для яких немає жодної підстави стверджувати, що будь-яка з них можливіша за іншу. Наприклад, при підкиданні грального кубика всі шість можливих наслідків є рівноможливими.

Якщо з ящика, у якому десять стандартних і три браковані деталі, вийняли одну, то події «З ящика вийнято стандартну деталь» і «З ящика вийнято браковану деталь» не є рівноможливими.

У теорії ймовірностей випадкові події прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, \dots або великою латинською літерою з нижніми індексами A_1, A_2, \dots .

Отже, випадкова подія A є деякою непорожньою підмножиною множини Ω простору елементарних подій, тобто $A \subset \Omega$.

Приклад 1.1. Гральний кубик підкидають один раз. На кожній грані випадає одне з чисел від 1 до 6. Побудувати простір елементарних подій для цього випробування (множину Ω) і випадкові події:

- 1) A – випаде число, кратне 2;
- 2) B – випаде число, кратне 3.

Розв’язання. Оскільки кубик має шість граней, то в результаті випробування може випасти одне з чисел від 1 до 6. Отже, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- 1) $A = \{2; 4; 6\}$;
- 2) $B = \{3; 6\}$.

При цьому події A, B є складними, оскільки становлять собою сукупність елементарних подій. ♦

Означення. Якщо множина елементарних подій є зліченною, тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати (кожній елементарній події поставити у відповідність один і тільки один елемент послідовності натуральних чисел $1, 2, 3, \dots$), то **простір елементарних подій Ω називають дискретним**. Він може бути обмеженим (за скінченної кількості можливих елементарних подій) і необмеженим.

Означення. Якщо кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число, **простір елементарних подій є неперервним**. Для неперервного простору множина елементарних подій є незліченною множиною.

Можливі елементарні події, у випадку їхнього дискретного простору позначаються ω_i ($i=1,2,3,\dots$), тоді простір елементарних подій записується у вигляді $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\omega_3;\dots\}$.

1.1.2. Алгебра випадкових подій

Означення. *Сума подій A і B ($A+B$ або $A\cup B$) – подія, яка полягає у появі в даному випробуванні принаймні однієї з двох подій A, B , тобто у появі лише події A або події B , або в сумісній появі подій A і B .*

Множину елементарних подій, що становлять подію $A\cup B$, отримують **об'єднанням** множин елементарних подій, одна з яких становить подію A , а інша – подію B .

Зауваження. Спільні елементи множин елементарних подій для A та B у множині $A\cup B$ враховуються лише один раз.

Аналогічно визначається **сума n подій** при $n>2$ – це подія, яка полягає в появі принаймні однієї із n подій, що входять в суму.

Означення. *Добуток подій A і B (AB або $A\cap B$) – подія, яка полягає в сумісній появі в даному випробуванні події A і події B .*

Множина елементарних подій, що становлять подію $A\cap B$, визначається як **переріз** множин елементарних подій, одна з яких становить подію A , а інша – подію B .

Аналогічно визначається **добуток n подій** при $n>2$ – це подія, яка полягає в сумісній появі всіх n подій, що входять в добуток.

На рис.1.1 геометрично зображено множину елементарних подій, що становлять кожен з подій A та B , і відповідну множину для їхнього **перерізу $A\cap B$** (добуток подій),

На рис.1.2 геометрично зображено множину елементарних подій, що становлять **об'єднання $A\cup B$** (сума подій) у випадку наявності спільних елементів просторів елементарних подій для A та B .

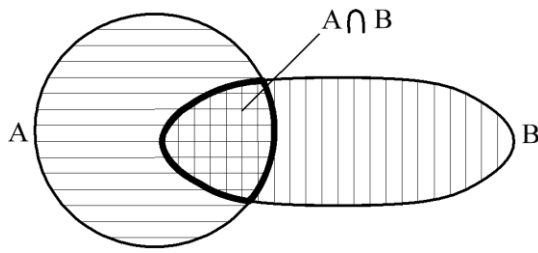


Рис.1.1. Сума подій.

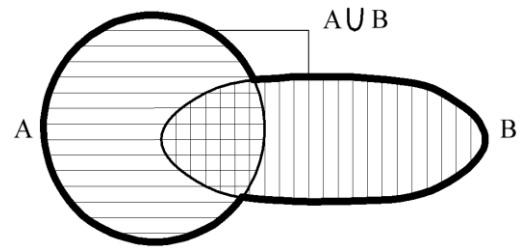


Рис.1.2. Добуток подій.

Означення. *Різниця подій A і B ($A-B$ або $A \setminus B$, тобто A без B) – подія, що полягає в появі в даному випробуванні події A і не появі події B .*

Множина елементарних подій, що становлять подію $A \setminus B$, містить елементарні події, що становлять A , виключаючи ті, які становлять подію B .

На рис.1.3 геометрично зображено множину елементарних подій, що становлять кожну з подій A та B , і відповідну множину для їхньої *різниці* $A \setminus B$.

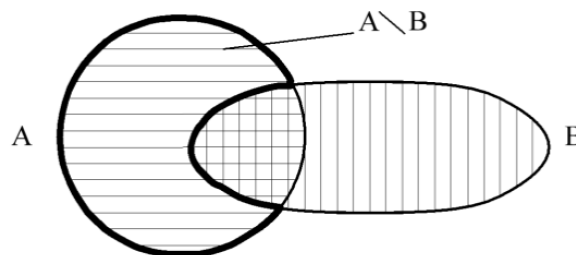


Рис.1.3. Різниця подій.

Події A і B у даному випробуванні називаються *несумісними*, якщо відповідні їм множини елементарних подій не містять однакових елементів, тобто $A \cap B = \emptyset$.

Це означає, що коли одна з цих подій відбувається, то інша подія неможлива в даному випробуванні.

Події A_1, A_2, \dots, A_n у даному випробуванні утворюють *повну групу подій*, якщо в результаті випробування неодмінно *відбудеться принаймні одна з них*, а отже,

їхня сума є *достовірною* подією: $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Отже, простір елементарних подій даного випробування є множиною несумісних подій, що складають повну групу. Позначення Ω простору елементарних подій співпадає з позначенням достовірної події.

Означення. *Події A та \bar{A} називаються *протилежними*, якщо вони несумісні*

та утворюють повну групу подій, тобто $A \cap \bar{A} = \emptyset$ та $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Приклад 1.2. Стрілець стріляє двічі по мішені. Описати простір елементарних подій цього випробування. Записати подію, яка полягає в тому, що:

- 1) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (**подія C**);
- 2) стрілець влучив у мішень лише один раз (**подія D**);
- 3) стрілець промахнувся (**подія E**).

Розв'язання. Позначимо:

подія A – влучення при 1-му пострілі;

подія B – влучення при 2-му пострілі.

Простір елементарних випадків цього випробування складається з 4-х подій:

$$\Omega = \{AB; A\bar{B}; \bar{A}B; \bar{A}\bar{B}\}.$$

$$1) C = \{AB; A\bar{B}; \bar{A}B\} = AB \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B;$$

$$2) D = \{A\bar{B}; \bar{A}B\} = A\bar{B} \cup \bar{A}B;$$

$$3) E = \{\bar{A}\bar{B}\} = \bar{A} \cap \bar{B}. \blacklozenge$$

Алгебраїчні операції над випадковими подіями

Події A, B, C ($A \subset \Omega, B \subset \Omega, C \subset \Omega$) мають такі властивості:

$$1) A \cup A = A; A \cap A = A; A \cup \Omega = \Omega; A \cap \Omega = A; A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset; \bar{\bar{A}} = \Omega \setminus A;$$

Комутативний закон для операцій додавання та множення:

$$2) A \cup B = B \cup A;$$

$$3) A \cap B = B \cap A;$$

Асоціативний (сполучний) закон для операцій додавання та множення:

$$4) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$5) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

Дистрибутивний (розподільний) закон:

$$6) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

1.1.3. Поняття ймовірності випадкової події

Сучасна теорія ймовірностей базується на теоретико-множинному підході. Поняття ймовірності вважають основним поняттям, що задовольняє певним аксіомам, які приведемо тут у формулюванні А.Н. Колмогорова:

Означення. *Ймовірністю події A називається визначена на множині елементарних подій Ω однозначна дійсна функція $P(A) \geq 0$, яка задовольняє наступним трьом аксіомам:*

Аксіома 1. Функція додатна, тобто $P(A) > 0$.

Аксіома 2. Ймовірність достовірної події дорівнює 1, тобто $P(\Omega) = 1$.

Аксіома 3 (адитивності). Якщо A_1, A_2, \dots, A_k – *попарно несумісні події* в даному випробуванні, тобто $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) \quad (1.1)$$

Наслідки з аксіом:

1) *Ймовірність неможливої події дорівнює нулю, тобто $P(\emptyset) = 0$.*

Зауваження. Обернене твердження не завжди вірне, тобто, якщо ймовірність деякої події дорівнює 0, це ще не означає, що ця подія *неможлива* (див. нижче поняття *геометричної ймовірності*). Те саме можна зазначити стосовно достовірної події: якщо ймовірність деякої події дорівнює 1, ця подія не обов'язково буде *достовірною*.

2) *Ймовірність події задовольняє подвійну нерівність $0 \leq P(A) \leq 1$.*

3) *Ймовірності протилежних подій пов'язані співвідношенням:*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (1.2)$$

4) *Ймовірність настання принаймні однієї події з групи подій:*

виділимо групу n подій A_1, A_2, \dots, A_n серед інших можливих подій даного випробування і знайдемо ймовірність події A , яка полягає в тому, що відбудеться принаймні одна з подій цієї групи. Тоді протилежною буде подія \bar{A} , яка полягає в тому, що в результаті випробування не відбудеться жодна з подій групи, отже:

$\bar{A} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$. Знайдемо ймовірність події A через ймовірність протилежної події,

застосувавши (1.2):

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \quad (1.3)$$

5) Сума ймовірностей попарно несумісних подій, що складають повну групу, тобто

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (1.4)$$

6) Для довільних випадкових подій даного випробування (**не обов'язково попарно незалежних**), A_1, A_2, \dots, A_k , має місце **нерівність**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) \quad (1.5)$$

З використанням аксіом та властивостей ймовірностей, які з них випливають, доводять **основні теореми** стосовно ймовірностей.

1.1.4. Класичне визначення ймовірності

Теорію ймовірності для випробувань, елементарні події в яких є *дискретною* (зліченною) *обмеженою* множиною *рівноможливих* подій (шансів), розробляв П. Лаплас (XVIII ст.).

Означення. *Ймовірністю випадкової події A називається величина $P(A)$, яка є числовою мірою об'єктивної можливості настання події A в даному випробуванні, і дорівнює відношенню кількості елементарних подій m , які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості n рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω випробування:*

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.6)$$

Щоб обчислити ймовірність події A за цією формулою, потрібно знайти загальну кількість *рівноможливих* елементарних подій у просторі Ω , а також кількість їх у підпросторі, який відповідає події A .

Приклад 1.3. Підкидають два гральні кубики, на гранях кожного з яких позначені числа від 1 до 6. Знайти ймовірність:

- 1) події A – сума чисел, які випадають на верхніх гранях кубиків, дорівнює 5;
- 2) події B – сума чисел дорівнює 12.

Розв'язання. Побудуємо простір елементарних подій для цього випробування:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6); (2;1);(2;2);(2;3);\dots; \\ (6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6) \end{array} \right\}.$$

Отже, кількість n всіх **рівноможливих** елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω , дорівнює числу $6 \cdot 6 = 36$. Із них елементарним подіям, які **сприяють появі події A** , відповідає підмножина простору Ω : $A = \{(1;4);(2;3);(3;2);(4;1)\}$, число елементів якої дорівнює $m = 4$; елементарним подіям, які **сприяють появі події B** , відповідає підмножина простору Ω : $B = \{(6;6)\}$, кількість елементів якої дорівнює числу $m = 1$.

Отже,

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(B) = \frac{1}{36}. \quad \blacklozenge$$

1.1.5. Геометрична ймовірність

Класичне означення ймовірності можна використовувати лише для випробувань з обмеженим числом **рівноможливих** елементарних подій. При цьому побудова простору Ω **рівноможливих** елементарних подій затрудняється, особливо за відсутності певної симетрії у моделі випробування. Окрім того, із формули (1.6) випливає: *якщо ймовірність події дорівнює 0*, то відсутні елементарні події, що сприяють події A , тому *ця подія є неможливою*, $P(A) = 0$. Це твердження має місце лише у випадку *дискретного і обмеженого простору елементарних подій*.

У випадку множини Ω , яка не є дискретною, за певних умов, ймовірність події A можна обчислити, застосувавши **поняття геометричної ймовірності**.

Означення. *Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу*, а множину елементарних подій, що сприяють події

A , можна подати як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається величиною відношення **мір** (μ) відповідних множин:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \quad (1.7)$$

При цьому вважають, що *ймовірність попадання випадкової події* (випадкової точки) *в деяку частину* геометричного образу *пропорційна до міри цієї його частини* (довжини, площі, об'єму тощо) і *не залежить від місця її розташування і форми*. Цим забезпечується вимога рівноможливості попадання випадкової точки в різні частини геометричного образу, що мають однакові міри.

Зауваження. *Ймовірність попадання випадкової точки в окрему ізольовану точку дорівнює нулю* (за граничного переходу у формулі (1.7) геометричної ймовірності чисельник прямує до нуля), але ця подія можлива.

Приклад 1.4. Двоє осіб домовились зустрітися в певному місці у *проміжку часу від t_1 години до t_2 години*. Хто прийде першим, *чекатиме на іншого протягом t годин*. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти в довільний момент часу від t_1 до t_2 .

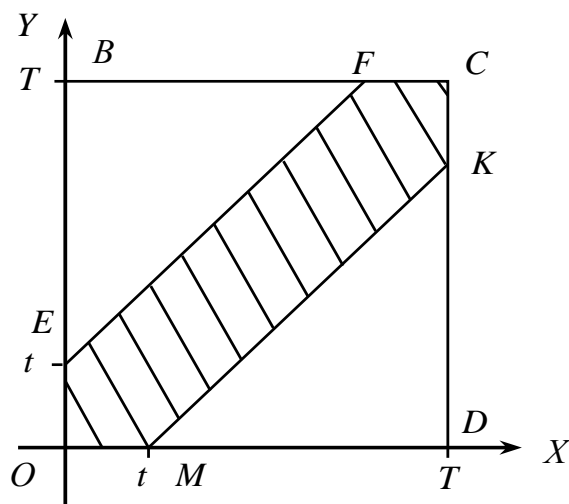


Рис.1.4. Зустріч.

Розв'язання. *Подія A* – «зустріч відбудеться». Позначимо *величину часового проміжку* від t_1 до t_2 через $T = t_2 - t_1$, а моменти приходу кожної з осіб (відносно нульової початкової точки відліку) – через x та y .

Зобразимо x та y як декартові координати точки на площині, взявши за одиницю масштабу на координатних осях – одиницю часу (рис.1.4). Тоді *множині Ω простору елементарних подій випробування* відповідає *множина точок $(x; y)$ квадрата $OBCD$* , зображеного на площині координат OXY , разом з межовими

точками квадрата.

Подія A відбудеться за умови $|x - y| \leq t$, де $0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T$. Розв'язками нерівності з модулем є сукупність 2-х областей:

$$\begin{cases} x - y \leq t, \\ x \geq y; \end{cases} \cup \begin{cases} -(x - y) \leq t, \\ x < y. \end{cases}$$

Межові лінії для першої з цих областей: пряма MK , $y = x - t$ і бісектриса першого квадранта – координати $(x; y)$ точок між цими прямими задовольняють першій системі нерівностей. Для перевірки досить взяти контрольну точку з координатами $\left(t; \frac{t}{3}\right)$. Межові лінії для іншої області: пряма EF , $y = x + t$ і бісектриса першого квадранта – координати $(x; y)$ точок між цими прямими задовольняють другій системі нерівностей. Для перевірки досить взяти контрольну точку з координатами $\left(\frac{t}{3}; t\right)$. Отже, записаній сукупності нерівностей відповідає множина точок *необмеженої смуги* між прямими MK та EF .

Події A (зустріч відбудеться) відповідає множина точок *шестикутника* $OEFCKM$ – переріз смуги між прямими MK та EF і квадрата $OBCD$ (множини Ω простору елементарних подій випробування), рис.1.4. Скористаємось геометричним означенням ймовірності:

$$P(A) = \frac{S_{OEFCKM}}{S_{OBCD}} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$

Для прикладу, якщо *кожна з осіб чекатиме на іншу півгодини*, $t=0,5$ год, а домовлено про зустріч на протязі години, $T = t_2 - t_1 = 1$ год, то для *ймовірності зустрічі* отримаємо: $P(A) = 1 - (1 - 0,5/1)^2 = 0,75$. ♦

1.1.6. Статистична ймовірність

На практиці обчислити ймовірності випадкових подій можна лише для обмеженого класу задач як для дискретних, так і для недискретних просторів Ω елементарних подій. Для більшості практичних задач обчислити ймовірності «на

кінчику пера» практично неможливо. У цьому разі використовується статистична ймовірність.

Статистичною ймовірністю події A називається відношення кількості m' випробувань, в яких подія A відбулась, до загальної кількості виконаних випробувань n' :

$$W(A) = \frac{m'}{n'}. \quad (1.8)$$

Знаходження статистичної ймовірності пов'язане з проведенням n випробувань, тому вона називається **відносною частотою події A** . Як і для ймовірності випадкової події, для відносної частоти виконується нерівність

$$0 \leq W(A) \leq 1.$$

Теорія ймовірностей вивчає лише такі випадкові події, в яких спостерігається **стабільність відносних частот**, а саме: у разі проведення k **серій** експериментів по n_k експериментів в кожній серії, існує така константа $P(A)$, навколо якої групуватимуться відносні частоти досліджуваної випадкової події A , тобто відносні частоти $W_i(A)$ для кожної із k **серій**, $i=1,2,\dots,k$. І таке групування буде тим ближчим до цієї константи, чим більшим буде число n_k експериментів в кожній серії.

Статистична ймовірність має назву **апостеріорної** (знайденої після досліду), на відміну від класичної чи геометричної, яку обчислюють **апріорі** (до досліду, тобто знайденої «на кінчику пера»).

Питання для самоперевірки

1. Що називається експериментом?
2. Яка подія називається випадковою?
3. Як позначаються події?
4. Яка подія називається вірогідною; неможливою?
5. Яка подія називається елементарною; складеною випадковою подією?
6. Що називається простором елементарних подій? Як позначається даний простір?
7. Що називається сумою двох випадкових подій A і B ?

8. Що називається добутком двох випадкових подій A і B ?
9. Що називається різницею двох випадкових подій A і B ?
10. Які події називаються сумісними; несумісними?
11. Які події утворюють повну групу?
12. Які події називаються протилежними?
13. Назви властивості операцій над подіями.
14. У чому полягає класичний спосіб визначення ймовірності? Наведіть приклади.
15. Чому дорівнює ймовірність неможливої події? Вірогідної події?
16. Що називається геометричною ймовірністю?
17. Що називається відносною частотою випадкової події?
18. Що називається статистичною ймовірністю?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Чи є несумісними наступні події:

- 1) випробування – одне підкидання монети, A_1 – поява герба, A_2 – поява цифри;
- 2) випробування – підкидання двох монет, B_1 – поява герба на першій монеті, B_2 – поява цифри на другій монеті;
- 3) випробування – два постріли по мішені, C_1 – жодного попадання, C_2 – одне попадання, C_3 – два попадання.

Задача 2. Чи утворюють повну групу наступні події:

- 1) випробування – одне підкидання монети, A_1 – поява герба, A_2 – поява цифри;
- 2) випробування – підкидання двох монет, B_1 – поява 2 цифр, B_2 – поява 2 гербів;
- 3) випробування – виймання карти з колоди, E_1 – поява карти червоної масті, E_2 – поява карти бубнової масті, E_3 – поява карти пікової масті.

Задача 3. Підкидають двічі гральний кубик. Нехай A_i – випадіння числа i при

першому підкиданні, B_i – випадіння числа i при другому підкиданні. Виразити через A_i, B_i такі події:

C – два рази (на кожному кубуку окремо) випаде парне число;

D – сума чисел при двох підкиданнях дорівнює 6;

E – сума чисел при двох підкиданнях більше 8;

F – два рази випадуть однакові числа.

Задача 4. Студент на екзамені відповідає на білет, у якому три питання. Нехай подія A_i – студент відповів на i -те питання. Виразити через A_i наступні події:

B – студент відповів принаймні на 2 питання;

C – студент не відповів на жодне питання;

D – студент відповів тільки на 1 питання.

Задача 5. Стрілець виконує чотири постріли в мішень. Нехай подія A_i – влучення в мішень при i -му пострілі. Виразити через A_i наступні події:

B – три влучення;

C – хоча б один промах;

D – не більше одного влучення;

E – хоча б одне влучення.

Задача 6. Гральний кубик підкидають один раз. Описати простір елементарних подій і наступні події:

A – випало парне число;

B – випало непарне число;

C – випало число, кратне 3;

D – випало число, менше 4.

Описати події, які є результатом різних дій над заданими подіями A і B , A і C , A і D .

Задача 7. Назвати протилежні події до наступних подій:

A – випадіння 2 гербів при підкиданні 2 монет;

B – поява білої кульки при вийманні однієї кульки з урни, в якій 2 білих, 3 чорних і 4 червоних кульок;

C – три попадання при 3 пострілах;

D – хоча б одне попадання при 5 пострілах;

E – не більше двох попадань при 5 пострілах;

F – виграш першого гравця у грі в шахи.

Задача 8. Зроблено 3 постріли по мішені. Нехай подія A_i – мішень уражена при i -му пострілі. Що означають такі висловлювання:

1) $A_1 + A_2 + A_3$;

2) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

3) $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$.

Задача 9. Нехай події A , B , C означають успішне складання іспиту з «Теорій ймовірностей» першим, другим і третім студентом відповідно. Описати події:

1) $D = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$;

2) $E = A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$.

Задача 10. Задано дві множини цілих чисел:

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Із кожної множини навмання беруть по одному числу. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту та такі випадкові події: A – сума цифр буде кратною 3; B – сума цифр буде кратною 7. Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Задача 11. У мішень, яка має вигляд кола, вписано квадрат. По ній здійснюється один постріл. Вважається при цьому, що влучення в коло мішені є подією вірогідною. Яка ймовірність того, що куля влучить у квадрат.

Задача 12. Абонент протягом години чекає телефонного дзвінка. Яка ймовірність того, що йому зателефонують протягом перших 20 хв?

Задача 13. На площині проведено прямі на однаковій відстані 13 см. На цю площину кидають монету діаметром 5 см. Знайти ймовірність того, що монета перетне одну з паралельних прямих.

Задача 14. Точку навмання вибирають на відрізку $[1, 20]$. Знайти ймовірність того, що ця точка належатиме відрізку $[14, 17]$?

Задача 15. В колі радіуса $R=30$ см міститься менше коло радіуса $r = 6$ см. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у велике коло, влучить також і в мале.

Задача 16. При перевірці готової продукції було виявлено 14 бракованих одиниць товару із 140 перевірених. Знайти відносну частоту бракованих одиниць товару.

Задача 17. При стрільбі по мішені було виявлено, що відносна частота влучень дорівнює 0,86. Проведено 100 пострілів. Скільки пострілів були влучними?

Індивідуальні завдання

Задача 1. У квадрат з вершинами $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$ навмання кинули точку M . Нехай (α, β) її координати. Знайти ймовірність того, що рівняння $Nx^2 + \alpha x + \beta = 0$ має дійсні корені (N – номер варіанту).

Задача 2. У ящику знаходяться кульки пронумеровані від 1 до 200. Навмання дістають одну кульку. Яка ймовірність того, що дане число буде кратне числам a та b (N – номер варіанту).

1-10 варіанти: $a = 15 - N$, $b = 22 - N$;

11-20 варіанти: $a = N - 7$, $b = N$;

21-30 варіанти: $a = N - 13$, $b = 7$.

1.2. ЙМОВІРНІСТЬ СКЛАДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

Часто для знаходження чисел m та n , що входять у класичне означення ймовірності події, потрібно знати кількість різноманітних варіантів, які можна одержати з n елементарних наслідків.

1.2.1. Елементи комбінаторики. Обчислення ймовірностей випадкових подій з використанням комбінаторики

В комбінаториці розглядаються три основних об'єкта:

- *перестановки* – $P_n = n!$;
- *розміщення* – $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$;
- *комбінації* – $C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Означення. *Перестановками з n елементів називаються різні сукупності всіх цих елементів по n елементів у кожній, які (сукупності) відрізняються одна від одної тільки **послідовністю** розташування елементів у сукупності.*

Кількість усіх можливих перестановок із n різних елементів позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!. \quad (1.9)$$

Вважається, що $P_0 = 0! = 1$.

Приклад 1.5.

1. При $n = 2$ позначимо елементи сукупності цифрами 1 і 2. Тоді з двох елементів можна одержати дві перестановки 12 і 21. За формулою (1.9) знаходимо:

$$P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2.$$

2. При $n = 3$ позначимо елементи сукупності цифрами 1, 2 і 3. Тоді з трьох елементів можна одержати шість перестановок: 123, 213, 312, 132, 321, 231. За формулою (1.9) знаходимо:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6. \blacklozenge$$

Означення. *Розміщеннями з n елементів по m елементів* називають різні сукупності m елементів із цих n елементів, які (сукупності) відрізняються одна від іншої або самими елементами, або послідовністю розташування елементів.

Кількість усіх різних розміщень із n різних елементів по m елементів позначається A_n^m .

У загальному випадку кількість усіх розміщень із n різних елементів по m обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m+1)}_{m \text{ множників}} = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.10)$$

Приклад 1.5.

1. При $n=2$ позначимо елементи сукупності цифрами 1 і 2. Тоді з двох елементів по одному елементу можна одержати два розміщення, тобто $A_2^1 = 2$: 1 і 2; по два елементи одержимо два розміщення 12 і 21.

За формулою (1.10) знаходимо:

$$A_2^2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

3. При $n=3$ позначимо елементи сукупності цифрами 1, 2 і 3. Тоді з трьох елементів по одному елементу можна одержати три розміщення: 1, 2 і 3, тобто $A_3^1 = 3$; по два елементи одержимо шість розміщень: 12, 21, 13, 31, 23, 32. За формулою (1.10) знаходимо:

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6. \blacklozenge$$

Означення. *Комбінаціями з n елементів по m* називаються будь-які сукупності по m елементів у кожній сукупності із цих n елементів, які відрізняються один від одного хоча б одним елементом. Відмінності порядку проходження елементів у сукупності не враховуються.

Кількість усіх різних комбінацій із n елементів по m позначається C_n^m .

Відзначимо, що сукупності, які мають однакові елементи, але відрізняються послідовністю цих елементів, у такому випадку уважаються як та сама послідовність, тобто із загальної кількості такі сукупності виключаються.

Тому кількість сполучень буде меншою за кількість розміщень у $m!$ разів:

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}. \quad (1.11)$$

Із формули (1.11) для обчислення кількості сполучень випливають їх властивості:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Приклади 1.6. Студенти групи складають на сесії екзамени з п'яти дисциплін, які умовно позначимо буквами: A, B, C, D, E . Скількома способами можна встановити послідовність складання випробувань у розкладі?

Розв'язання. У сесію потрібно скласти всі іспити, тому будь-який варіант розкладу буде відрізнятися один від одного тільки порядком проходження випробувань. Тому кількість варіантів розкладу буде збігатися з числом можливих перестановок:

$$P_5 = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120. \blacklozenge$$

Приклад 1.7. Студенти вивчають вісім дисциплін. Щодня в них по три пари різних занять. Скількома способами може бути складений розклад занять на один день?

Розв'язання. Розклад на один день може відрізнятися один від одного або самими дисциплінами, або порядком їх розташування. Тому загальна кількість варіантів побудови трьох пар дисциплін дорівнюватиме кількості розміщень із восьми дисциплін на трьох парах:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336. \blacklozenge$$

Приклад 1.8. Із шести вибіркового дисциплін студент зобов'язаний скласти екзамени з трьох дисциплін, які він вибирає на свій розсуд. Скільки різних варіантів вибору має студент?

Розв'язання. Так як кожний варіант вибору відрізняється один від одного хоча б одним елементом, тому кількість варіантів дорівнюватиме кількості комбінацій:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20. \blacklozenge$$

Приклади задач на знаходження ймовірності з використанням формул комбінаторики

Приклад 1.9. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що він набрав потрібні цифри?

Розв'язання. Нехай подія A – абонент набрав потрібні цифри.

Число різних за складом або послідовністю набору пар цифр не менше за число розміщень із 10 елементів за двома, що складає загальне число елементарних випадків $n = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$, із яких лише один набір цифр є сприятливим для події A . Відзначимо, що не врахованими залишилися десять пар однакових чисел: 00, 11, 22, ..., 99. Тому загальне число n дорівнюватиме 100 і шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{1}{100} = 0,01. \blacklozenge$$

Приклад 1.10. Обчислити ймовірність того, що володар однієї картки спортлото угадає шість виграшних номерів із 49 (подія A).

Розв'язання. Для вгадування всіх шести виграшних номерів сприятливим є тільки один випадок ($m = 1$), а загальне число випадків дорівнює числу комбінацій із 49 по 6:

$$n = C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{10068347520}{720} = 13983816.$$

Тоді ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \frac{1}{13983816} = 0,000000072. \blacklozenge$$

1.2.2. Основні теореми суми та добутку випадкових подій

Нехай подія A – це влучення довільної точки в плоску область A в результаті деякого випробування (див. рис. 1.5), подія B – влучення точки в плоску область B і в такій геометричній інтерпретації розглянемо ймовірність події $A + B$, тобто

влучення точки *або* в область *A* або в область *B*.

Теорема додавання ймовірностей. *Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності добутку цих подій* (див. рис. 5, а):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.12)$$

Ймовірність суми двох несумісних подій, тобто ймовірність появи або першої або другої події, дорівнює сумі ймовірностей цих подій (див. рис. 5, б):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1.13)$$

Для несумісних подій *теорема додавання ймовірностей* узагальнюється на будь-яке число *n* подій A_i і може бути записана у вигляді:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

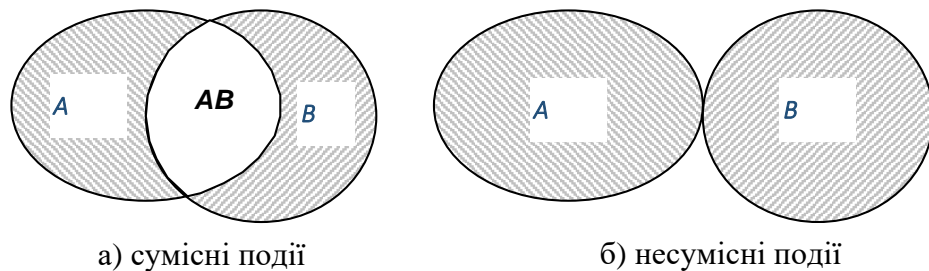


Рис. 5. Сума і добуток подій

Означення. *Подію A називають незалежною від події B , якщо ймовірність події A не залежить (не змінюється) від того, відбулася подія B чи ні, у протилежному випадку подія A називається залежною від події B .*

Приклад 1.11. Підкидаються дві монети, розглядаються події:

A – поява герба на першій монеті;

B – поява герба на другій монеті.

У даному випадку ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B або ні, тобто подія A незалежна від події B . ♦

Приклад 1.12. В урні дві білих кулі і одна чорна. Дві людини витягають по одній кулі з цієї урни, розглядаються події:

A – поява білої кулі у першої особи;

B – поява білої кулі у другої особи.

Початкова ймовірність події B дорівнює $\frac{2}{3}$. Проте якщо стало відомо, що подія A відбулася, то ймовірність події B дорівнює $\frac{1}{2}$. ♦

Означення. *Умовною ймовірністю події B називають ймовірність події B , обчислену за умови, що інша подія – A відбулася.*

Умовна ймовірність події B позначається $P(B / A)$.

Для умов останнього прикладу $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(B / A) = \frac{1}{2}$.

Умова незалежності події B від події A має вигляд:

$$P(B / A) = P(B).$$

Теорема множення ймовірностей. *Ймовірність добутку двох подій A і B , тобто такої події, яка полягає в одночасній появі i першої події A , i другої події B , дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія відбулася:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A), \quad P(AB) = P(B) \cdot P(A / B) \quad (1.14)$$

Для умов останнього прикладу ймовірність $P(AB)$ того, що обидві особи витягнуть з урни по однієї білій кулі, знайдемо:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Висновок 1. Якщо подія B не залежить від події A , то і подія A не залежить від події B , тобто *залежність* або *незалежність* подій *завжди взаємна*.

Висновок 2. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Для випадку n залежних подій формула (1.14) набуде вигляду:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Правило визначення ймовірності складної події. *Якщо складна подія комбінується з несумісних простих із використанням сполучника “або”, то ймовірності простих подій варто складати, якщо з використанням сполучника*

«і», то – множити.

Приклад 1.13. Обчислити ймовірність того, що володар однієї картки спортлото угадає три виграшних номери із 49 (подія A).

Розв’язання. Подія A складається в одночасній появі рівно трьох виграшних і рівно трьох невигаших номерів в одному квитку, тобто є складною подією. Число сприятливих випадків m для виникнення події A буде збігатися з числом випадків, коли в картці виявилися **рівно три номери** із шести *виграшних* номерів (число таких випадків дорівнює C_6^3), і одночасно – **рівно три номери** із 43 *невигаших* номерів, що залишилися (число таких випадків дорівнює C_{43}^3), тобто:

$$m = C_6^3 \cdot C_{43}^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \cdot 12341 = 246820.$$

Загальне число n випадків дорівнює числу сполучень із 49 по 6:

$$n = C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{10068347520}{720} = 13983816.$$

Тоді шукана ймовірність дорівнюватиме:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{246820}{13983816} = 0,0176. \blacklozenge$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається перестановками із n елементів без повторень?
2. Що називається розміщенням із n елементів по m без повторень?
3. Що називається комбінацією із n елементів по m без повторень?
4. Вкажіть обмеження на n та m в основних формулах комбінаторики при розв’язуванні рівнянь. У чому полягає класичний спосіб визначення ймовірності? Наведіть приклади.
5. Чому дорівнює ймовірність неможливої події? Вірогідної події?
6. Що називається геометричною ймовірністю?
7. Що називається відносною частотою випадкової події?
8. Що називається статистичною ймовірністю?
9. Які події називаються сумісними? Несумісними? Наведіть приклади.

10. Сформулюйте теорему додавання для двох сумісних подій.
11. Сформулюйте теорему додавання для двох несумісних подій.
12. Які події називаються залежними? Незалежними? Наведіть приклади.
13. Яка ймовірність називається умовною?
14. Сформулюйте теорему множення для двох залежних подій.
15. Сформулюйте теорему множення для двох незалежних подій.
16. Формула для обчислення ймовірності появи принаймні однієї з групи несумісних подій.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. У студентську раду інституту обрано 8 студентів. Скількома способами можна обрати керівну групу у складі голови, заступника і секретаря?

Задача 2. Із цифр 0, 5, 6 складають числа. Скільки можна скласти: 1) трицифрових чисел, щоб цифри не повторювались; 2) трицифрових чисел; 3) двоцифрових чисел, щоб цифри не повторювались; 4) двоцифрових чисел?

Задача 3. Правління фірми складається з 9 осіб. Скількома способами можна вибрати серед них: 1) 3 особи у відрядження; 2) президента, директора та комерційного директора?

Задача 4. На складі є 10 телевізорів. Скільки існує способів розділити їх між трьома магазинами, якщо відомо, що в 1-й магазин має бути доставлено 5 телевізорів, у 2-й магазин – 2 телевізора, у 3-й магазин – 3 телевізори?

Задача 5. В студентській їдальні продають пиріжки з яблуками, сиром і м'ясом. Скількома способами можна купити 5 пиріжків?

Задача 6. Скільки існує чотиризначних пін-кодів?

Задача 7. Перший стрілець може влучити в ціль з ймовірністю 0,8, другий – з ймовірністю 0,9, а третій – з ймовірністю 0,85. Яка ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить у ціль?

Задача 8. Робітник обслуговує одночасно 3 верстати. Ймовірність порушення роботи протягом години для першого дорівнює 0,1, для другого – 0,15, для третього – 0,2. Яка ймовірність того, що: 1) усі 3 верстати працюватимуть

протягом години; 2) хоча б один з них вийде з ладу?

Задача 9. Ймовірність того, що студент складе перший іспит дорівнює 0,6, другий – 0,9, третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе: 1) тільки перший іспит; 2) тільки один іспит; 3) всі три іспити; 4) хоча б один іспит; 5) не менше ніж два іспити.

Задача 10. В ательє приготували для видачі клієнтам 25 костюмів, з яких 15 жіночих та 10 чоловічих. Для перевірки їх якості контролер навмання обирає 4 із них. Яка ймовірність того, що серед них: а) буде 2 жіночих і 2 чоловічих костюми; б) всі костюми однієї належності?

Задача 11. Знайти ймовірність того, що навмання взяте двозначне натуральне число буд кратно 2 або 5.

Індивідуальні завдання

Задача 1. Податкові інспектори здійснюють перевірку діяльності підприємств: перший обслуговує a підприємств, серед яких c % не мають заборгованості, другий – b підприємств, із них d % – без заборгованості. Яка ймовірність того, що: а) навмання обране підприємство не має заборгованості; б) підприємство, що не має заборгованості, перевіряв перший інспектор?

Задача 2. У рекламному агентстві працює три групи дизайнерів. Перша обслуговує l фірм, друга – k , третя – m . Протягом одного місяця кошти, витрачені на рекламу дизайнерами першої групи, повертаються до z % фірм, другої – до h %, третьої – до v %. Яка ймовірність того, що:

а) навмання вибрана фірма окупила витрачені на рекламу кошти протягом місяця;

б) фірма, що окупила протягом місяця витрачені на рекламу кошти, обслуговувалася першою групою дизайнерів?

Задача 3. У першій групі 40- N студентів, у другій 18 студентів. В кожній з груп по два студенти, що не підготувалися до семінару. З кожної групи викликають по одному студенту. Яка ймовірність того, що:

а) обидва студенти підготувалися до семінару;

- б) один студент підготувався до семінару;
- в) хоча б один студент підготувався до семінару;
- г) обидва студенти не підготувалися до семінару.

Задача 4. Ймовірність своєчасної сплати податків для першого підприємства дорівнює p , для другого – q , для третього – w . Визначити ймовірність своєчасної сплати податків:

- а) не більше ніж одним підприємством;
- б) лише одним підприємством;
- в) двома підприємствами;
- г) жодним підприємством;
- д) хоча б одним підприємством.

Варіант	Задача 1				Задача 2						Задача 4		
	a	c	b	d	l	k	m	z	h	V	p	q	w
1	40	25	60	40	20	35	45	20	30	40	0,6	0,8	0,55
2	30	18	70	34	25	32	43	45	48	24	0,75	0,63	0,6
3	25	22	75	50	40	50	10	50	25	30	0,5	0,8	0,6
4	60	43	40	21	30	28	42	32	44	52	0,58	0,6	0,75
5	35	48	65	19	15	40	45	24	38	42	0,55	0,65	0,8
6	45	20	55	35	23	44	33	36	18	21	0,82	0,68	0,5
7	70	65	30	15	38	32	30	25	35	15	0,84	0,8	0,65
8	55	24	45	32	42	38	20	44	32	24	0,7	0,62	0,8
9	75	18	25	25	50	23	27	18	28	42	0,72	0,84	0,66
10	65	35	35	20	25	31	44	23	25	32	0,75	0,78	0,82
11	43	25	57	18	45	20	35	40	25	30	0,55	0,6	0,8
12	54	15	46	45	32	43	25	24	45	48	0,6	0,75	0,63
13	48	25	52	40	10	40	50	30	50	25	0,6	0,5	0,8
14	29	18	71	34	42	30	28	52	32	44	0,8	0,6	0,5
15	38	22	62	50	45	15	40	42	24	38	0,75	0,58	0,6

Вариант	Задача 1				Задача 2						Задача 4		
	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>m</i>	<i>z</i>	<i>h</i>	<i>V</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>w</i>
16	58	43	42	21	33	23	44	21	36	18	0,8	0,55	0,65
17	32	20	68	32	30	38	32	15	25	35	0,5	0,82	0,68
18	41	35	59	25	20	42	38	24	44	32	0,65	0,84	0,8
19	36	40	64	15	35	45	20	42	18	28	0,8	0,7	0,62
20	28	22	72	35	43	25	32	32	23	25	0,66	0,72	0,84
21	57	40	43	20	50	10	40	30	20	40	0,8	0,55	0,6
22	52	24	48	35	28	42	30	48	24	45	0,63	0,6	0,75
23	68	35	32	20	40	45	15	25	30	50	0,8	0,6	0,5
24	72	38	28	48	44	33	23	44	52	32	0,6	0,58	0,8
25	46	24	54	31	32	30	38	38	42	24	0,65	0,55	0,8
26	29	45	71	20	38	20	42	18	21	36	0,68	0,5	0,82
27	62	35	38	22	27	50	23	35	15	25	0,8	0,65	0,84
28	42	22	58	48	18	26	56	32	24	44	0,62	0,8	0,7
29	59	30	41	35	44	25	31	28	42	18	0,84	0,66	0,72
30	64	45	36	20	23	24	43	32	25	23	0,78	0,75	0,82

1.3. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА ФОРМУЛА БАЙЄСА

При розрахунку практичних задач часто необхідно знайти повну ймовірність події, яка може трапитись разом із однією із сукупності несумісних подій. Ми розглянемо формулу повної ймовірності, теорему Байєса для обчислення апостеріорних ймовірностей гіпотез, вивчимо теорему про ймовірність настання хоча б однієї події, а також розглянемо питання розрахунку надійності (тобто ймовірності відмови та ймовірності безвідмовної роботи) складних систем, які складаються із сукупності елементів, що можуть поєднуватись або паралельно або послідовно.

1.3.1. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай подія A може відбутись тільки за умови настання однієї із несумісних подій B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A подається формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i), \quad (1.15)$$

де $P(B_i)$ — ймовірність події B_i ;

$P(A/B_i)$ — умовні ймовірності настання події A .

Формула (1.15) називається **формулою повної ймовірності**.

Розглянемо події B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які утворюють повну групу подій і попарно несумісні. Ці події називатимемо **гіпотезами**. Подія A може відбутись одночасно з деякою із подій B_i . Відомі ймовірності подій B_i та умовні ймовірності того, що подія A відбудеться. Відомо, що в результаті випробування подія A відбулась. Потрібно з огляду на це переоцінити ймовірності гіпотез B_i . Для цього застосовують формулу Байєса:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)}, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.16)$$

Приклад 1.14. Маємо N партій деталей, по n_i деталей у кожній. Відомо, що серед n_i деталей m_i стандартних ($i=1, 2, \dots, N$). Із навмання взятої партії беремо одну деталь. Знайти ймовірність того, що вибрана деталь: а) стандартна; б) нестандартна.

Розв'язання. Позначимо події: B_i ($i=1, 2, \dots, N$) — «деталь узятa з i -ї партії»; A — «узятa деталь стандартна». Події B_i попарно несумісні й утворюють повну групу. Подія A може настати одночасно з деякою подією B_i . Задача розв'язується за формулою повної ймовірності:

$$P(B_i) = \frac{1}{N},$$

$$P(A/B_i) = \frac{m_i}{n_i}, \quad (i=1, 2, \dots, N).$$

$$P(A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{n_i}. \quad \blacklozenge$$

Ймовірність події \bar{A} можна визначити відніманням від одиниці ймовірності події A , яку щойно знайдено.

Приклад 1.15. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з ймовірністю 0,15, а другий — з ймовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 — «деталь виготовлено на першому верстаті»; B_2 — «деталь виготовлено на другому верстаті»; A — «вибрана деталь стандартна». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу, що ж до події A , то вона може відбутись одночасно з кожною із цих подій. Умовні ймовірності настання події A відомі. Згідно з умовою, що продуктивність першого верстата

утричі більша, ніж другого, знаходимо $P(B_1)=0,75$, $P(B_2)=0,25$. За формулою повної ймовірності (1.15) маємо:

$$P(A)=0,75 \cdot 0,85 + 0,25 \cdot 0,8 = 0,8375. \blacklozenge$$

Приклад 1.16. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевіряв 45 %, а другий — 55 % деталей. Ймовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого — 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Оцінити ймовірність помилки для кожного контролера.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 — «деталь перевіряв перший контролер»; B_2 — «деталь перевіряв другий контролер»; A — «виявлено браковану деталь». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу. Подія A відбулась одночасно з однією із цих подій, імовірності яких потрібно переоцінити. Застосуємо формулу Байеса (1.16):

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{j=1}^2 P(B_j)P(A/B_j)} = \frac{0,45 \cdot 0,15}{0,45 \cdot 0,15 + 0,55 \cdot 0,1} \approx 0,551;$$

$$P(B_2 / A) = 1 - P(B_1 / A) = 1 - 0,551 = 0,449.$$

Отже, більш ймовірно, що помилки припустився перший контролер. \blacklozenge

Приклад 1.17. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга – із 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб також буде стандартним.

Розв'язання. Розглянемо події:

B_1 – «перший виріб взято з першої партії»;

B_2 – «перший виріб узят з другої партії»;

A – «перший узятий виріб стандартний»;

C – «другий узятий виріб стандартний».

За формулою повної ймовірності (1.15) знаходимо ймовірність події A :

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19} + \frac{1}{21} \cdot \frac{18}{23} = \frac{587}{874}.$$

За формулою Байєса (1.16) обчислюємо умовні ймовірності $P(B_1/A)$ та $P(B_2/A)$:

$$P(B_1/A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19}}{\frac{587}{874}} = \frac{115}{229}; \quad P(B_2/A) = 1 - \frac{115}{229} = \frac{114}{229}.$$

Ймовірність події C знаходимо за формулою:

$$P(C/A) = P(B_1/A)P(C/A \cap B_1) + P(B_2/A)P(C/A \cap B_2).$$

Умовні ймовірності:

$$P(C/A \cap B_1) = \frac{7}{9}, \quad P(C/A \cap B_2) = \frac{17}{22}.$$

Отже,

$$P(C/A) = \frac{115}{229} \cdot \frac{7}{9} + \frac{114}{229} \cdot \frac{17}{22} \approx 0,775. \blacklozenge$$

1.3.2. Ймовірність появи хоча б однієї події

Ймовірність того, що настане хоча б одна подія із сукупності

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$$

визначається за формулою:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) \quad (1.17)$$

Теорема про ймовірність появи хоча б однієї події. Ймовірність появи хоча б однієї події із подій A_1, A_2, \dots, A_n , які є незалежними, дорівнює різниці між одиницею та добутком ймовірностей протилежних подій.

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n \quad (1.18)$$

Приклад 1.18. Студент здає два екзамени в сесію. Ймовірність здати перший екзамен $p_1 = 0,8$. Ймовірність здати другий екзамен $p_2 = 0,7$. Яка ймовірність, що студент здасть хоча б один екзамен в сесію.

Розв'язання. Ймовірність події «студент не здасть перший екзамен»:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Ймовірність події «студент не здасть другий екзамен»:

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Обидві події незалежні. Ймовірність події A – «студент здасть хоча б один екзамен», обчислюється за формулою (1.18):

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 = 1 - 0,06 = 0,94. \blacklozenge$$

Приклад 1.19. Три стрілка стріляють 1 раз в ціль незалежно один від одного. Ймовірність влучення в ціль для першого стрілка дорівнює 0,6, для другого 0,7, та для третього 0,75. Знайти ймовірність:

- 1) хоча б одного влучення в ціль, якщо кожний стрілок робить по одному пострілу;
- 2) рівно одного влучення в ціль;
- 3) влучення в ціль рівно 2 стрілків;
- 4) влучення в ціль всіх стрілків одночасно;
- 5) жодного влучення в ціль.

Розв'язання. Нехай A, B, C – події, що полягають в тому, що в ціль влучив перший, другий, третій стрілки. З умови задачі відомо, що ймовірності влучення в ціль:

$$P(A) = 0,6, \quad P(B) = 0,7, \quad P(C) = 0,75.$$

Ймовірність того, що стрілки не влучають в ціль:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4,$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3,$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,75 = 0,25.$$

- 1) Ймовірність хоча б одного влучення в ціль дорівнює за формулою (1.18):

$$P(D) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}),$$

$$P(D) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,25 = 0,97$$

2) Ймовірність *рівно одного влучення* в ціль.

Нехай E – подія, яка полягає в тому, що в ціль влучив тільки один стрілок.

Події «хоча б одне влучення» та «рівно одне влучення» – різні події.

Ймовірність події E може бути визначена за формулою:

$$P(E) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) + P(B) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{C}) + P(C) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}),$$

$$P(E) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,25 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,25 + 0,75 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,202$$

3) Ймовірність того, що влучать в ціль рівно два стрілка.

Нехай K – подія, яка полягає в тому, що в ціль попали тільки два стрілка.

Тоді:

$$P(K) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}),$$

$$P(K) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,75 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,75 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,25 = 0,45$$

4) Ймовірність того, що влучать в ціль всі стрілки одночасно.

Подія L – всі стрілки влучили в ціль. Тоді:

$$P(L) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

$$P(L) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,75 = 0,315.$$

5) Ймовірність промаху всіх стрілків одночасно.

Подія M – всі стрілки промахнулись. Ймовірність цієї події:

$$P(M) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}),$$

$$P(M) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,25 = 0,03.$$

Для перевірки правильності рішення можна скористатись формулою для повної групи подій (сума ймовірностей дорівнює одиниці):

$$P(E) + P(K) + P(L) + P(M) = 0,205 + 0,45 + 0,315 + 0,03 = 1. \blacklozenge$$

Питання для самоперевірки

1. Які події називаються сумісними? Несумісними? Наведіть приклади.
2. Сформулюйте теорему додавання для двох сумісних подій.

3. Сформулюйте теорему додавання для двох несумісних подій.
4. Які події називаються залежними? Незалежними? Наведіть приклади.
5. Яка ймовірність називається умовною?
6. Сформулюйте теорему множення для двох залежних подій.
7. Сформулюйте теорему множення для двох незалежних подій.
8. Формула для обчислення ймовірності появи принаймні однієї з групи несумісних подій.
9. Які події називаються гіпотезами?
10. Які події утворюють повну групу?
11. Сформулюйте теорему для обчислення повної ймовірності.
12. Формула Байєса та її застосування.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. У партії деталей, що надійшли в продаж, 50% виготовлені першим заводом, 30% – другим, 20% – третім. Ймовірність дефекту для виробів першого заводу – 0,1, другого – 0,05, третього – 0,15. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб виявився з дефектом?

Задача 2. Є 4 урни. У першій урні 1 біла і 1 чорна кульки, у другій – 2 білі і 3 чорні кульки, у третій – 3 білі і 5 чорних кульки, у четвертій – 4 білих і 7 чорних кульки. Відомо, що ймовірність вибору першої урни дорівнює 0,1, другої – 0,2, третьої – 0,3, четвертої – 0,4. Навмання вибирають одну з урн і виймають кульку. Знайти ймовірність того, що вона біла.

Задача 3. На двох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі: на першій – 30%, на другій – 70%. Ймовірність виготовлення стандартної деталі на першій лінії дорівнює 0,9, а на другій – 0,5. Усі виготовлені на цих лініях деталі надходять на склад. 1) Знайти ймовірність того, що навмання вибрана зі складу деталь стандартна. 2) Навмання вибрана деталь, що виготовлена на одній з ліній, виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на першій лінії.

Задача 4. Із 30 студентів групи, що прийшли на екзамен, 8 підготовлені на

відмінно, 10 – добре, 8 – задовільно, а решта – незадовільно. Програма екзамену включає 50 питань. Білет містить 3 питання. Студент, підготовлений на відмінно, знає всі питання, добре – 40 питань, задовільно – 25 питань і незадовільно – 10 питань. 1) Знайти ймовірність того, що навмання викликаний студент відповість на всі 3 питання білета. 2) Студент відповів на всі питання. Знайти ймовірність того, що студент підготовлений: добре, задовільно, незадовільно.

Задача 5. Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність зробити помилку для першого дорівнює 0,1, для другого – 0,2. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Під час перевірки навмання взятий із папки документ виявився з помилкою. Знайти ймовірність того, що його склав перший економіст.

Задача 6. Ймовірності того, що під час роботи комп'ютера станеться збій в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті або в пристрої введення співвідносяться як 2:1:3. Ймовірності знайти збій у цих пристроях дорівнює відповідно 0,9, 0,75, 0,7. Знайти ймовірність знаходження збою в роботі комп'ютера.

Задача 7. Подія A може з'явитись при умові появи однієї із несумісних подій B_1, B_2, B_3 , які утворюють повну групу подій. Були знайдені умовні імовірності $P_A(B_1) = 0,6$ та $P_A(B_2) = 0,3$ після появи події A . Чому дорівнює умовна імовірність $P_A(B_3)$ гіпотези B_3 ?

Задача 8. Серед студентів IV курсу $2/5$ одружені та $3/5$ не одружені. Серед неодружених студентів $1/2$ молодші 22 років, а $2/3$ одружених старші 22 років. Знайти імовірність того, що довільно обраний студент цього курсу: а) старший 22 років; б) одружений та старший 22 років.

Задача 9. Система має два незалежно працюючих елемента. Імовірність їх відмови дорівнює 0,05 та 0,08 відповідно. Знайти імовірність відмови системи, якщо для цього достатньо відмови хоча б одного з елементів.

Задача 10. Ймовірність хоча б одного влучення в ціль при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти імовірність влучення при одному пострілі.

Задача 11. Із 100 виробів 5 є бракованими. Якою є ймовірність взяти навмання

два стандартні вироби?

Задача 12. Ймовірність відмови мікросхеми дорівнює 0,4. Для підвищення надійності приладу мікросхему дублюють, тобто замість однієї беруть n . Яким повинно бути n , щоб імовірність безвідмовної роботи дорівнювала 0,99?

Індивідуальні завдання

Задача 1. Робітник обслуговує n верстатів-автоматів. Ймовірність того, що протягом години верстат-автомат потребує уваги робітника, є величиною сталою і дорівнює p . Яка імовірність того, що за годину уваги робітника потребують:

- 1) k верстатів;
- 2) від k_1 до k_2 верстати;
- 3) не менше ніж m верстатів;
- 4) не більше ніж m_1 верстат;
- 5) принаймні один верстат.

Задача 2. Ймовірність того, що студент складе іспит з теорії ймовірностей, є величиною сталою і дорівнює в середньому p_1 . У групі n студентів. Знайти найімовірнішу кількість членів цієї групи котрі складуть іспит, і обчислити відповідну ймовірність.

Варіант	n	p	k	k_1	k_2	m	m_1	P_1
1	11	0,31	5	3	6	3	9	0,8
2	11	0,32	4	2	4	4	8	0,81
3	11	0,33	5	3	5	6	7	0,82
4	11	0,34	4	4	6	7	6	0,83
5	11	0,35	2	2	5	8	5	0,84
6	11	0,36	4	1	3	3	4	0,85
7	11	0,37	6	4	5	7	3	0,86
8	11	0,38	8	3	5	5	5	0,87
9	11	0,39	5	4	7	6	4	0,88
10	11	0,4	5	2	6	3	6	0,89

11	10	0,41	7	3	5	4	7	0,9
12	10	0,42	5	2	6	5	8	0,91
13	10	0,43	6	3	6	2	9	0,92
14	10	0,44	5	2	5	6	5	0,93
15	10	0,45	4	2	4	7	6	0,94
16	10	0,46	6	2	7	5	4	0,95
17	10	0,47	3	3	4	4	3	0,96
18	10	0,48	4	3	5	3	2	0,97
19	10	0,49	5	3	6	6	1	0,98
20	10	0,5	6	3	8	5	0	0,87
21	9	0,51	7	3	7	7	3	0,88
22	9	0,52	8	4	5	3	4	0,89
23	9	0,53	3	4	6	2	5	0,91
24	9	0,54	4	4	7	4	0	0,92
25	9	0,55	5	5	8	5	2	0,93
26	9	0,56	5	1	5	6	3	0,94
27	9	0,57	4	2	5	4	4	0,79
28	9	0,58	8	2	6	5	0	0,78
29	9	0,59	5	3	7	6	2	0,8
30	9	0,6	4	2	4	3	1	0,81

1.4. ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ

Послідовність повторень дослідів, якщо результатом кожного дослідів може настати або не настати визначена подія, називається *схемою дослідів Бернуллі*. За цією схемою за визначеними формулами можна розрахувати появу m подій за результатами проведення n дослідів.

1.4.1. Формула Бернуллі

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може як відбутись, так і не відбутись. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються *незалежними* щодо *події* A . Згідно з означенням випробування також незалежні, якщо в кожному з них ймовірність настання події A однакова, тобто дорівнює тому самому числу. Ймовірність того, що подія A відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають $P(A) = p$, а ймовірність настання протилежної події $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність $P(A) = p = \text{const}$ ($0 < p < 1$), подія A відбудеться m раз, обчислюється за формулою:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (1.19)$$

Дана формула застосовується при будь-яких значеннях n, p, q . Зрозуміло, що для $n > 10$ аналітичні розрахунки робити незручно. Тому розроблені методи наближених обчислень.

Наслідок. Ймовірність того, що у n випробуваннях подія настане:

- 1) n разів – $P_n(n) = p^n$ ($P_n(n) = C_n^n p^n q^{n-n}$);
- 2) нуль разів – $P_n(0) = q^n$ ($P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0}$);
- 3) менше k разів – $P_n(m < k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$;

- 4) більше k разів – $P_n(m > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$;
- 5) не менше k разів – $P_n(m \geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$;
- 6) не більше k разів – $P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$;
- 7) від k_1 до k_2 разів – $P_n(k_1 \leq m \leq k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + \dots + P_n(k_2)$.

Приклад 1.19. Ймовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9. Обчислити ймовірність того, що з 5 електролампочок, увімкнених у електромережу, не перегорять: 1) дві; 2) не більш як дві; 3) не менш як дві.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $p = 0,9$; $q = 0,1$; $n = 5$; $m = 2$.

$$1) P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2! 3!} \cdot (0,9)^2 \cdot (0,1)^3 = 10 \cdot 0,81 \cdot 0,001 = 0,0081.$$

$$2) P_5(0 \leq m \leq 2) = q^5 + C_5^1 \cdot p \cdot q^4 + C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3,$$

$$\begin{aligned} P_5(0 \leq k \leq 2) &= 0,1^5 + 5 \cdot 0,9 \cdot 0,1^4 + 10 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = \\ &= 0,00001 + 5 \cdot 0,9 \cdot 0,0001 + 10 \cdot 0,81^2 \cdot 0,001 = 0,009. \end{aligned}$$

$$3) P_5(2 \leq m \leq 5) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 1 - P_5(0) + P_5(1),$$

$$\begin{aligned} P_5(2 \leq m \leq 5) &= 1 - q^5 - C_5^1 \cdot p \cdot q^4 = 1 - 0,1^5 - 5 \cdot 0,9 \cdot 0,1^4 = \\ &= 1 - 0,00001 - 5 \cdot 0,9 \cdot 0,0001 = 0,99954. \blacklozenge \end{aligned}$$

1.4.2. Найімовірніше число появи події в незалежних випробуваннях

Число k_0 (настання події в незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події рівна p) називають **найімовірнішим**, якщо ймовірність того, що подія настане в цих випробуваннях k_0 раз, перевищує (або, принаймні, не менше) ймовірності інших можливих наслідків випробувань.

Найімовірніше число k_0 визначають із подвійної нерівності:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p. \quad (1.20)$$

а) якщо число $np - q$ – дробове, то існує одне найімовірніше число k_0 ;

б) якщо число $np - q$ – ціле, то існує два найімовірніших числа k_0 й $k_0 + 1$;

в) якщо число np – ціле, те найімовірніше число $k_0 = np$.

Число k_0 називають також *модю*.

Зауваження. Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p , то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A з'явиться хоча б один раз, знаходять за формулою:

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}. \quad (1.21)$$

Приклад 1.20. У разі додержання певної технології 90% усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 200$, $p = 0,9$, $q = 1 - p = 0,1$. Тоді:

$$\begin{aligned} np - q &\leq k_0 \leq np + p, \\ 200 \cdot 0,9 - 0,1 &\leq k_0 \leq 200 \cdot 0,9 + 0,9, \\ 179,9 &\leq k_0 \leq 180,9, \\ k_0 &= 180. \blacklozenge \end{aligned}$$

Приклад 1.21. За одну годину автомат виготовляє 20 деталей. За скільки годин ймовірність виготовлення хоч би однієї бракованої деталі буде менше 0,952, якщо ймовірність браку будь-якої деталі дорівнює 0,01?

Розв'язання. Застосовуємо формулу (1.21) і знайдемо кількість виготовлених деталей, щоб з ймовірністю $P=0,952$ можна було стверджувати про наявність хоч би однієї бракованої деталі, якщо ймовірність браку за умовою $p=0,01$:

$$n \geq \frac{\ln(1-0,952)}{\ln(1-0,01)} = \frac{\ln 0,048}{\ln 0,99} \approx 300.$$

Отже, за час $t = \frac{300}{20} = 15$ годин автомат виготовить хоч би одну браковану деталь. \blacklozenge

1.4.3. Граничні теореми для схеми Бернуллі

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких $P(A) = p$, подія A відбудеться m раз, подається такою наближеною залежністю:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \quad (1.22)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функція Гауса, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція Гауса парна, то для від'ємних значень $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для $|x| \geq 4$ вважають, що $\varphi(x) = 0$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p , подається формулою:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (1.23)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функція Лапласа, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція Лапласа непарна, то для від'ємних значень $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для $x \geq 4$ вважають, що $\Phi(x) = 0,5$.

Значення функції Гауса та Лапласа протабульовані та наводяться у спеціальних таблицях (додатки 1,2).

Локальна та інтегральна теореми дають змогу обчислювати ймовірності $P_n(m)$, якщо $n > 10$, $p > 0,1$.

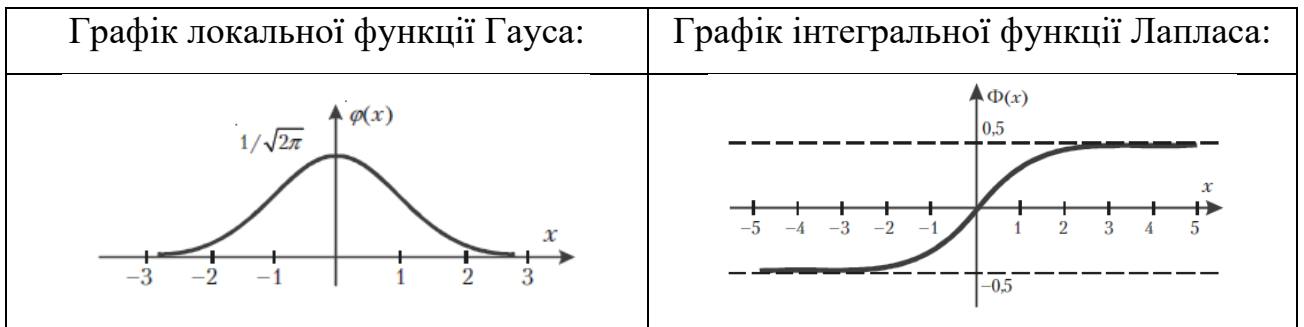
Відхилення відносної частоти від ймовірності. Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить ε , визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (1.24)$$

Властивості функції Гауса та Лапласа.

- $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – локальна функція Гауса.
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – інтегральна функція Лапласа.

Взаємозв'язок між ними: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$.



1.4.4. Теорема Пуассона

Якщо ймовірність p появи події A в окремому експерименті достатньо мала $p \leq 0,1$, то навіть при великих значеннях n , ймовірність, що обчислюється за локальною теоремою Муавра-Лапласа, виявляється недостатньо точною. В таких випадках використовують формулу, яка виведена Пуассоном та називається *теоремою Пуассона*.

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність p появи події A в кожному окремому експерименті постійна та достатньо мала, число незалежних експериментів n достатньо велике, при цьому $\lambda = np < 10$, то ймовірність того, що подія A наступить рівно k раз приблизно дорівнює:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda = np. \quad (1.25)$$

Значення функції Пуассона протабульовано і наведені в спеціальній таблиці (додаток 3).

Приклад 1.22. Фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірність того, що виробів 1-го

сорту виявиться 290 шт.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 400$, $p = 0,75$, $q = 0,25$; $m = 290$.

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25} = \sqrt{75} \approx 8,7, \quad np = 400 \cdot 0,75 = 300,$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{290 - 300}{8,7} = -1,15,$$

$$P_{400}(290) \approx \frac{\varphi(-1,15)}{8,7} = \frac{\varphi(1,15)}{8,7} = \frac{0,2059}{8,7} \approx 0,0237 - \text{ймовірність того, що виробів 1-}$$

го сорту виявиться 290 шт.♦

Приклад 1.23. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Ймовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде від 720 до 780 шт.

Розв'язання. За умовою задачі: $n = 800$, $p = 0,95$, $q = 0,05$, $720 \leq m \leq 780$.

$$\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0,95 \cdot 0,05} = \sqrt{38} \approx 6,2, \quad np = 800 \cdot 0,95 = 760.$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{780 - 760}{6,2} = \frac{20}{6,2} \approx 3,23, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{720 - 760}{6,2} = -\frac{40}{6,2} \approx -6,5,$$

$$P_{800}(720 \leq m \leq 780) \approx \Phi(3,23) - \Phi(-6,5) = \Phi(3,23) + \Phi(6,5) = \\ = 0,49931 + 0,5 = 0,99931. \blacklozenge$$

Приклад 1.24. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Подія A — виготовлено нестандартну деталь. Маємо схему з n незалежними випробуваннями, в якій $P(A) = p = 0,1$. Скористаємося формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,9973; \quad \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,49865.$$

За таблицями знаходимо $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 3$; $n = \frac{9pq}{\varepsilon^2} = 900$.

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії за даних умов, розв'язавши нерівність:

$$\left|\frac{m}{900} - 0,1\right| < 0,03; \quad -0,03 < \frac{m}{900} - 0,1 < 0,03; \quad 0,07 < \frac{m}{900} < 0,13; \quad 63 < m < 117.$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.♦

Приклад 1.25. На факультеті навчаються 1825 студентів. Яка ймовірність того, що 8 березня є днем народження одночасно чотирьох студентів факультету?

Розв'язання. Ймовірність того, що день народження 1 студента 8 березня (припустимо, що рік не високосний), дорівнює $p = \frac{1}{365} = 0,0027 < 0,1$, $n = 1825$ і

$a = np = 1825 \cdot \frac{1}{365} = 5$. За формулою Пуассона маємо:

$$P_{1825}(4) \approx \frac{5^4}{4!} e^{-5} = 0,1755. \diamond$$

Зауваження. Використовувати формулу Пуассона потрібно в тих задачах, де вона більш доцільна. Завжди перевіряйте виконання умов теореми Пуассона, при значеннях які не задовольняють умову $\lambda = np < 10$ формула дає велику похибку при обчисленні імовірності. Для перевірки результату застосовуйте формулу Бернуллі, вона більш точна і з її результатом знайдену ймовірність по формулі Пуассона краще всього порівнювати. Якщо похибка невелика, тоді ви все виконали правильно, в протилежному випадку прийдеться обчислювати знову або знайти слабке місце та виправити помилки.

1.4.5. Найпростіший (пуассонівський) потік подій

Означення. *Течією подій* називають послідовність таких подій, які з'являються у випадкові моменти часу.

Наприклад, заява до диспетчерського пункту з викликом таксі.

Означення. Течія подій називається **пуассонівською**, якщо вона:

1. Стаціонарна, тобто залежить від кількості k появ події та часу t і не залежить від моменту свого початку.

2. Має властивість відсутності післядії, тобто імовірність появи події не залежить від появи або не появи події раніше та не впливає на найближче майбутнє.

3. Ординарна, тобто імовірність появи більше однієї події в малий проміжок часу є величина нескінченно мала у порівнянні з імовірністю появи події один раз у цей проміжок часу.

Означення. Середнє число λ появ події A в одиницю часу називають **інтенсивністю течії**.

Теорема. Якщо течія подій пуассонівська, то імовірність появи події A k разів за час t можна знайти за формулою

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, \quad (1.26)$$

де λ – інтенсивність течії.

Формулу (1.26) іноді звать *математичною моделлю простої течії подій*.

Питання для самоперевірки

1. Описати схему Бернуллі.
2. Коли використовується формула Бернуллі?
3. Сформулювати наслідки з формули Бернуллі.
4. Що називають найімовірнішою чистотою появи події у незалежних випробуваннях (модю)?
5. Що означає подвійна нерівність $np - q \leq m_0 \leq np + p$?
6. Чому дорівнює $\sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m}$?
7. Сформулювати локальну теорему Муавра-Лапласа.
8. Сформулювати інтегральну теорему Муавра-Лапласа.
9. Чому дорівнює $P(|W(A) - p| < \varepsilon)$?

10. Функція Гауса та її властивості.
11. Функція Лапласа та її властивості.
12. За якої умови використовується формула Пуассона?

13. Чому дорівнює $\sum_{m=0}^n \frac{a^m}{m!} e^{-a}$?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 5 запитань. Ймовірність того, що він на позитивну оцінку відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові необхідно дати відповідь не менш ніж на три питання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.

Задача 2. Садівником восени було посаджено сім саджанців яблуні. Ймовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому складає 0,7. Обчислити ймовірність того, що із семи саджанців яблуні навесні проростуть: 1) три саджанці; 2) не менш як три. Знайти найімовірніше число саджанців, які навесні проростуть, і обчислити відповідну ймовірність.

Задача 3. Робітник обслуговує 10 верстатів-автоматів. Ймовірність того, що верстат потребує уваги робітника протягом однієї години в середньому складає 0,6. Знайти ймовірність того, що за 1 годину уваги робітника потребують: 1) 4 верстати; 2) від 4 до 6 верстатів (ураховуючи межі). Знайти найімовірніше число m_0 верстатів, які потребують уваги робітника за 1 год і обчислити ймовірність цього числа.

Задача 4. На автобазі є 12 пасажирських автобусів. Ймовірність того, що на маршрутну лінію вийде автобус, у середньому дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що автобаза працюватиме в нормальному режимі, якщо для цього потрібно, аби на маршрутну лінію виїхало не менш як 9 автобусів.

Задача 5. У партії однотипних деталей кількості стандартних і бракованих деталей відносяться, як 5:2. Навмання з партії беруть 8 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних виявиться 6? Знайти найімовірніше число появи

стандартних деталей серед семи навмання взятих і обчислити відповідну ймовірність.

Задача 6. У кожному із семи ящиків міститься по 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі. Навмання з кожного ящика беруть по одній деталі. Обчислити ймовірність того, що серед семи взятих деталей стандартних буде: 1) 3; 2) не менш як 3; 3) не більш як 3.

Задача 7. Ймовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що із 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку: 1) 90 покупців; 2) від 100 до 180 покупців?

Задача 8. У партії однотипних деталей стандартні становить 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде: 1) 355; 2) від 355 до 300. Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей m_0 і обчислити відповідну ймовірність.

Задача 9. Ймовірність виходу із ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,05. Яка ймовірність того, що під час випробувань 900 виробів із ладу вийдуть: 1) 30; 2) не більш як 30.

Задача 10. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть по телефону: 1) 5 абонентів; 2) не більш як 5?

Задача 11. Ймовірність того, що виготовлена на заводі електролампочка при вмиканні її в електромережу перегорить через певний відтинок часу є величиною сталою і дорівнює 0,02. Скільки необхідно взяти таких електролампочок, щоб ймовірність відхилення відносної частоти електролампочок, що перегорить, від імовірності 0,02, взяте по абсолютному значенню, не перевищувала величини 0,001, дорівнювала б 0,999.

Задача 12. Завод відправив на базу 9000 доброякісних виробів. Ймовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед 9000 виробів при транспортуванні буде

пошкоджено: 1) 3 вироби; 2) не більш як 3.

Задача 13. Частка діабетиків у певній місцевості становить у середньому 0,2%. Навмання було обстежено 4000 осіб. Яка ймовірність того, що серед них діабетиків буде: 1) 4 особи; 2) від 3 до 6 осіб; 3) не більш як 4 особи.

Задача 14. Ймовірність виявити помилку на сторінці книжки дорівнює 0,001. Яка ймовірність у результаті перевірки книжки на 1000 сторінок виявити помилку: 1) на 5 сторінках; 2) не більш як на 5 сторінках?

Індивідуальні завдання

Задача 1. Знайти ймовірність того, що подія A настає рівно m раз у n випробуваннях, якщо ймовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює p .

Задача 2. Ймовірність того, що деталь не пройшла перевірки ВТК, дорівнює p . Знайти ймовірність того, що серед n випадково відібраних деталей виявиться неперевіреними від k_1 до k_2 деталей.

Задача 3. Ймовірність випуску бракованого виробу дорівнює p . Чому дорівнює ймовірність того, що у партії із n виробів бракованих буде не більше як m ?

Задача 4. Ймовірність появи події в схемі незалежних випробувань Бернуллі є сталою в межах схеми і рівною $0,2 + \frac{N}{100}$. Знайти ймовірність того, що при $350 + N$ незалежних випробувань, відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності по модулю не перевищить $\varepsilon = \frac{N}{200}$ (N – номер варіанту).

Варіант	Задача 1			Задача 2				Задача 3		
	n	m	p	n	p	k_1	k_2	n	p	m
1	400	76	0,2	500	0,1	60	80	100	0,02	3
2	800	231	0,3	510	0,1	59	78	8000	0,001	4
3	350	145	0,4	520	0,1	51	69	9000	0,0007	5
4	780	400	0,5	530	0,15	70	90	7000	0,001	8
5	850	504	0,6	540	0,1	62	70	2000	0,003	7

6	825	575	0,7	525	0,14	64	85	4000	0,002	10
7	700	146	0,21	535	0,13	70	90	7000	0,001	4
8	725	220	0,3	540	0,12	61	82	2000	0,003	5
9	710	300	0,42	545	0,1	50	80	800	0,005	3
10	410	139	0,33	535	0,1	50	70	500	0,006	6
11	420	90	0,23	525	0,11	45	62	900	0,0008	2
12	430	131	0,3	550	0,1	55	72	8000	0,00006	3
13	440	130	0,29	555	0,14	56	83	7000	0,001	11
14	510	183	0,38	560	0,13	80	95	400	0,002	3
15	520	204	0,4	565	0,21	100	113	750	0,008	4
16	530	285	0,5	570	0,2	125	130	600	0,009	5
17	545	336	0,6	575	0,2	90	110	200	0,01	3
18	540	387	0,7	580	0,2	92	115	400	0,001	2
19	550	448	0,8	585	0,15	85	105	300	0,002	9
20	560	179	0,31	590	0,3	180	200	300	0,03	2
21	575	190	0,32	595	0,12	75	100	500	0,01	7
22	565	191	0,33	596	0,1	61	78	5000	0,0004	8
23	460	162	0,34	600	0,12	65	100	700	0,003	3
24	465	193	0,4	624	0,11	74	100	300	0,03	8
25	470	244	0,5	614	0,13	76	98	800	0,003	4
26	475	295	0,6	620	0,14	69	100	300	0,007	4
27	480	98	0,2	527	0,12	70	90	300	0,03	4
28	485	147	0,3	538	0,11	55	88	400	0,01	4
29	490	198	0,4	542	0,14	71	99	700	0,01	2
30	495	259	0,5	534	0,13	82	99	600	0,001	3

РОЗДІЛ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Всі числові характеристики будь-яких процесів та явищ є випадковими. Наприклад, чисельність населення визначеного регіону в будь-який момент часу, число студентів на лекції, прибуток підприємства, кількість телефонних розмов за день, температура повітря, тощо.

Ми будемо розглядати випадкові величини, які класифікуються на дискретні та неперервні. Випадкова величина вважається повністю заданою, якщо відомий закон її розподілу. Тобто зв'язок між значеннями реалізацій випадкової величини та ймовірностями того, що випадкова величина прийме відповідне значення.

Для того, щоб можна було оперувати із випадковими величинами застосовують числові характеристики. Основні з них це математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

2.1.1. Класифікація випадкових величин

Означення. *Випадковою величиною (ВВ) називається така величина, яка в результаті спроби може прийняти те або інше заздалегідь невідоме значення. Те, що випадкова величина набуває певного значення, є випадковою подією.*

Приклад випадкової величини:

- число пасажирів в автобусі міського маршруту;
- поточне значення напруги в побутовій електричній мережі.

Позначення випадкових величин та їх значень:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_n,$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n,$$

$$Z : z_1, z_2, \dots, z_n.$$

Нехай x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – можливі значення випадкової величини X . Кожне з цих значень можливе, і випадкова величина X може набути кожного з них з

деякою ймовірністю, яка позначається $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Розрізняють *дискретні* і *неперервні* випадкові величини.

Означення. *Дискретною випадковою величиною називається така величина, різні значення якої можна заздалегідь перерахувати.*

Кількість значень дискретної випадкової величини може бути кінцевою, наприклад, число пасажирів у вагоні метро, або зчисленою, наприклад, кількість крапель дощу, що впали на дах дому за останні 50 років.

Події, яким відповідають числові значення випадкової величини X : x_1, x_2, \dots, x_n , утворюють повну групу, тому

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \quad (2.1)$$

Рівність (2.1) називають **умовою нормування ймовірностей** подій повної групи.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

1. Рядом розподілу дискретної випадкової величини називається табличне завдання її закону розподілу, де значення x_i повинні розміщуватись в порядку зростання, тобто $x_i < x_{i+1}$.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

2. Багатокутником розподілу називається графічне зображення (рис.2.1) ряду розподілу випадкової величини у прямокутній системі координат (x_i, p_i) .

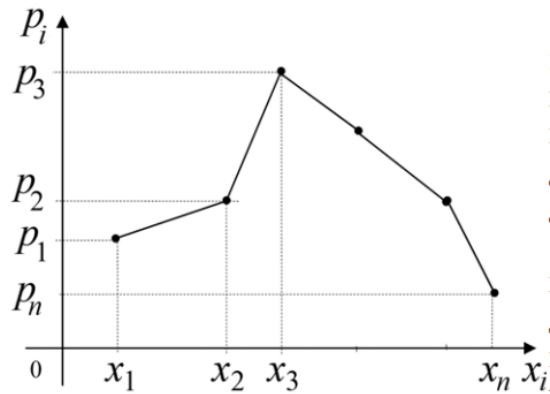


Рис. 2.1. Багатокутник розподілу.

2.1.2. Дії над випадковими величинами

Розглянемо найпростіші перетворення випадкових величин і відповідні зміни ймовірностей результатів таких перетворень.

1) **Множення випадкової величини X на константу C .** Закон розподілу випадкової величини не змінюється, змінюється лише кожне її значення, що стає рівним $C \cdot x_i$.

2) **Піднесення випадкової величини X до степеня n .** Результатом піднесення випадкової величини X до n -го степеня є випадкова величина $Y = X^n$, усі значення якої дорівнюють n -му степеню початкової випадкової величини X , а ймовірності відповідних значень величини Y зберігаються такими, як і для значень початкової випадкової величини X .

3) **Сумою** дискретних випадкових величин X (яка має значення x_i) і випадкової величини Y (яка має значення y_i) називається випадкова величина $Z=X+Y$, яка приймає значення *всіх* можливих сум $x_i + y_i$ із ймовірностями, які дорівнюють:

$$p_{ij} = \begin{cases} p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j), & \text{для незалежних } X \text{ і } Y; \\ p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j / X = x_i), & \text{для залежних } X \text{ і } Y. \end{cases}$$

У випадку різниці двох випадкових величин використовується правило підсумовування з урахуванням невід'ємного знаку другої випадкової величини: $Z = X + (-Y)$.

4) **Множення** випадкової величини ξ X (яка має значення x_i) і випадкової величини Y (яка має значення y_i) призводить до виникнення випадкової величини $Z=X \cdot Y$, яка приймає значення **всіх** можливих добутків $x_i \cdot y_i$ із ймовірностями, які дорівнюють:

$$p_{ij} = \begin{cases} p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j), & \text{для незалежних } X \text{ і } Y; \\ p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j / X = x_i), & \text{для залежних } X \text{ і } Y. \end{cases}$$

Приклад 2.1. Задано закони розподілу двох незалежних випадкових величин X та Y :

x_i	-1	1	2
p_i	0,4	0,3	0,3

y_i	0	1
p_i	0,4	0,6

Потрібно знайти закони розподілу випадкових величин:

$$Z_1 = X + Y; \quad Z_2 = X \cdot Y; \quad Z_3 = X^2.$$

Розв'язання.

1. Для випадкової величини $Z_1 = X + Y$ знаходимо закон розподілу:

Z_1	-1+0	-1+1	1+0	1+1	2+0	2+1
Z_1	-1	0	1	2	2	3
p_{ij}	0,4 · 0,4	0,4 · 0,6	0,3 · 0,4	0,3 · 0,6	0,3 · 0,4	0,3 · 0,6
p_{ij}	0,16	0,24	0,12	0,18	0,12	0,18

Після обчислення значень і об'єднання ймовірностей однакових значень Z_1 одержимо шуканий закон розподілу, який наведемо далі в табличній формі.

Z_1	-1	0	1	2	3
p_{ij}	0,16	0,24	0,12	0,30	0,18

Перевіримо правильність створеного закону розподілу шляхом контролю виконання умови нормування ймовірностей:

$$\sum_{i=1}^5 p_i = 0,16 + 0,24 + 0,12 + 0,30 + 0,18 = 1.$$

2. Для випадкової величини $Z_2 = X \cdot Y$ знаходимо закон розподілу:

Z_2	$-1 \cdot 0$	$-1 \cdot 1$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 1$	$2 \cdot 0$	$2 \cdot 1$
Z_2	0	-1	0	1	0	2
p_{ij}	$0,4 \cdot 0,4$	$0,4 \cdot 0,6$	$0,3 \cdot 0,4$	$0,3 \cdot 0,6$	$0,3 \cdot 0,4$	$0,3 \cdot 0,6$
p_{ij}	0,16	0,24	0,12	0,18	0,12	0,18

Після обчислення значень і об'єднання ймовірностей однакових значень Z_2 одержимо шуканий закон розподілу:

Z_2	-1	0	1	2
p_{ij}	0,24	0,40	0,18	0,18

Перевіримо правильність створеного закону розподілу шляхом контролю виконання умови нормування ймовірностей:

$$\sum_{i=1}^4 p_i = 0,24 + 0,40 + 0,18 + 0,18 = 1.$$

3. Для випадкової величини $Z_3 = X^2$ знаходимо закон розподілу:

Z_3	$(-1)^2$	1^2	2^2
Z_3	1	1	4
p_{ij}	0,4	0,3	0,3

Перше і друге значення однакові і відповідають несумісним подіям, що дозволяє сумувати їх ймовірності. У результаті одержимо таблицю закону розподілу випадкової величини Z_3 :

v_3	1	4
p_i	0,70	0,30

Перевіримо правильність створеного закону розподілу шляхом контролю виконання умови нормування ймовірностей:

$$\sum_{i=1}^2 p_i = 0,70 + 0,30 = 1. \blacklozenge$$

2.1.3. Функція розподілу дискретної випадкової величини

Означення. *Функцією розподілу випадкової величини (синоніми – інтегральна функція розподілу, інтегральний закон розподілу) називається ймовірність того, що значення випадкової величини X у результаті спроби потрапить на інтервал значень $-\infty < X < x$:*

$$F(x) = P(X < x) \quad (2.2)$$

Властивості функції розподілу

Властивість 1. Значення функції розподілу лежать у границях $0 \leq F(x) \leq 1$.

Властивість 2. Функція розподілу $F(x)$ є неспадною функцією свого аргументу, тобто

$$F(x_1) \leq F(x_2), \text{ якщо } x_1 < x_2.$$

Властивість 3. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю:

$$F(-\infty) = 0.$$

Властивість 4. На плюс нескінченності функція розподілу дорівнює одиниці:

$$F(+\infty) = 1.$$

Властивість 5. Ймовірність $P(a \leq X \leq b)$ улучення значення випадкової величини η на інтервал своїх можливих значень $a \leq X \leq b$ дорівнює збільшенню функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Функція розподілу дискретної ВВ X є розривною східчастою функцією $F(x)$, що і визначає для кожного конкретного значення x ймовірність того, що випадкова величина ζ набуде значення менше за x (рис.2.2.), тобто:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i),$$

де підсумовування виконується за всіма значеннями індексу i , для яких значення випадкової величини x_i менше порога x , тобто $x_i < x$.

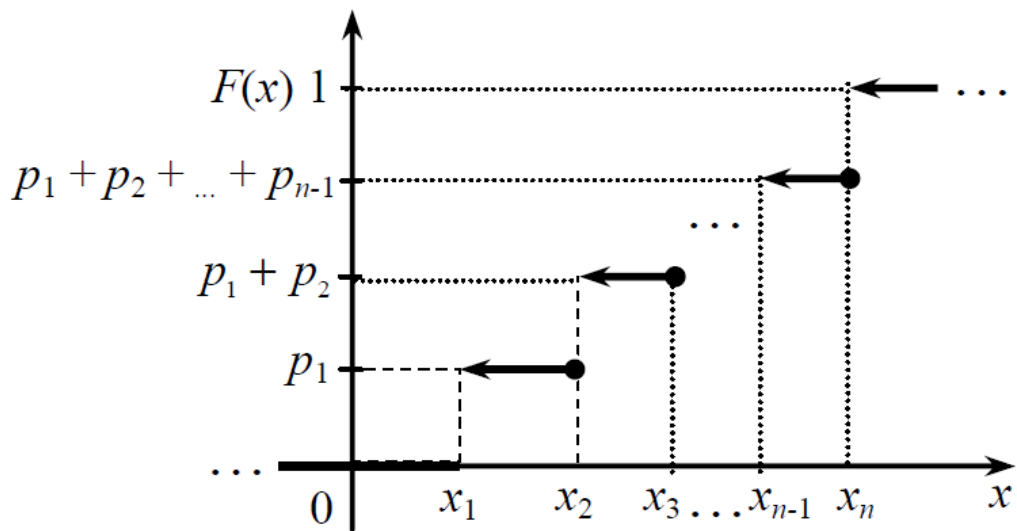


Рис. 2.2. Графік функції розподілу

Зауваження. Функція розподілу є універсальним способом задання випадкової величини.

Приклад 2.2. Проводиться випробування надійності системи, яка складається з трьох приладів, що працюють незалежно один від одного. Надійність (ймовірність безвідказної роботи) першого приладу дорівнює 0,9, другого — 0,8, третього — 0,7.

Завдання:

- 1) Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості надійних приладів у системі.
- 2) Побудувати багатокутник ймовірностей (многокутник розподілу).
- 3) Скласти функцію розподілу та побудувати її графік.
- 4) Обчислити ймовірність попадання X у проміжок (1;3).

Розв'язання.

1) Випадкова величина X набуває можливих значень 0, 1, 2, 3. Позначимо відповідно через g_1, g_2, g_3 ймовірності безвідказної роботи першого, другого і третього приладів. Тоді за умовою задачі $g_1 = 0,9, g_2 = 0,8, g_3 = 0,7$. Ймовірність виходу з ладу цих приладів становить відповідно $q_1 = 0,1, q_2 = 0,2, q_3 = 0,3$. За теоремами додавання і множення ймовірностей обчислимо p_i можливі значення випадкової величини X :

- $p_0 = P\{X = 0\} = q_1 q_2 q_3 = 0,006$ – всі пристрої вийшли з ладу (0 надійних приладів у системі);

- $p_1 = P\{X = 1\} = g_1q_2q_3 + q_1g_2q_3 + q_1q_2g_3 = 0,092$ – лише один прилад надійний (будь-який з трьох);
- $p_2 = P\{X = 2\} = g_1g_2q_3 + q_1g_2g_3 + g_1q_2g_3 = 0,398$ – два прилади надійні (будь-які два прилади з трьох);
- $p_3 = P\{X = 3\} = g_1g_2g_3 = 0,504$ – всі три прилади в системі надійні.

Ряд розподілу величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

Перевіримо виконання умови $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$:

$$0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1.$$

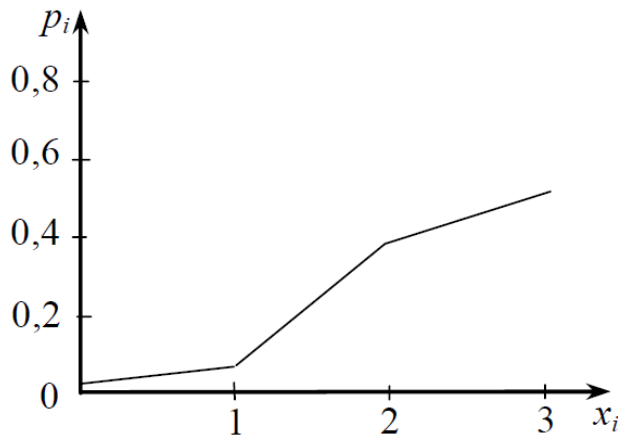


Рис. 2.3. Многокутник розподілу

2) Многокутник розподілу (рис.2.3.) для знайденого ряду будується наступним чином: на осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини X , а на осі ординат – відповідні ймовірності та знайдені точки сполучають прямолінійними відрізками.

3) Функція розподілу обчислюється за формулою

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X < x).$$

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

Отже, для ДВВ, заданої рядом розподілу, знаходимо функцію розподілу:

- при $x \leq 0$ $F(x) = 0$, оскільки випадкова величина X не набуває значень, менших від x ;

- при $0 < x \leq 1$ $F(x) = 0,006$, оскільки випадкова величина X набуває тільки значення x_0 , меншого за x , з ймовірністю p_0 ;
- при $1 < x \leq 2$ $F(x) = 0,006 + 0,092 = 0,098$, оскільки в цьому разі випадкова величина X набуває або значення x_0 , або значення x_1 , обидва менші за x , з ймовірностями відповідно p_0 і p_1 ;
- при $2 < x \leq 3$ $F(x) = 0,006 + 0,092 + 0,398 = 0,496$;
- при $x > 3$ $F(x) = 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1$, тобто

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P\{X < x_i\} = 1.$$

$$\text{Отже, } F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,006, & 0 < x \leq 1 \\ 0,098, & 1 < x \leq 2 \\ 0,496, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Графік функції розподілу $F(x)$ є розривною східчастою лінією (рис.2.4.).

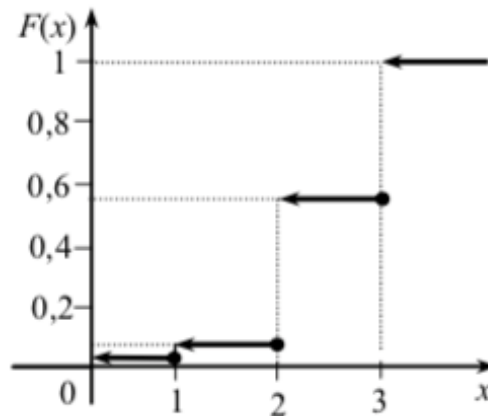


Рис.2.4. Графік функції розподілу

4) Обчислити ймовірність попадання X у проміжок $(1;3)$:

$$\square\square P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = 0,496 - 0,006 = 0,49. \blacklozenge$$

2.1.4. Числові характеристики дискретних випадкових величин та їх властивості

При розв'язанні багатьох задач теорії ймовірностей немає необхідності

знаходити закон розподілу випадкової величини повністю, часто виявляється достатнім визначити тільки деякі параметри цього закону, які називаються **числовими характеристиками**.

Математичне сподівання випадкової величини

Найбільш важливими з них є *математичне сподівання*, яке характеризує *середнє значення* випадкової величини, і *дисперсія*, яка характеризує розмір можливого *відхилення (розсіювання)* значень випадкової величини від свого математичного сподівання. Зупинимось на цих характеристиках.

Означення. *Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірність цих значень:*

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i . \quad (2.3)$$

Математичне сподівання $M(X)$ випадкової величини називають також *середнім значенням* або *центром розсіювання* цієї величини. $M(X)$ визначається в тих самих одиницях, що й сама випадкова величина X .

Властивості математичного сподівання:

Властивість 1. Математичне сподівання константи дорівнює константі:

$$M(C) = C .$$

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(aX) = aM(X) .$$

Означення. *Дві випадкові величини називають незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набуватиме друга величина.*

Означення. *Сумою випадкових величин* називають величину $X + Y$, можливі значення якої дорівнюють сумам кожного можливого значення X з кожним можливим значенням Y .

Означення. *Добутком незалежних випадкових величин* називають величину XY , можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення X на кожне можливе значення Y .

Властивість 3. Математичне сподівання алгебраїчної суми випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин (виконується для скінченного довільного числа залежних та незалежних ВВ):

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

Властивість 4. Для добутку скінченного довільного числа випадкових величин виконується:

$$M(XY) = M(X)M(Y),$$

якщо X та Y є незалежними випадковими величинами.

Властивість 5. Якщо $a \leq X \leq b$, то $a \leq M(X) \leq b$. Зокрема, $M(X) \geq 0$, коли $X \geq 0$.

Приклад 2.3. Знайти математичне сподівання випадкової величини X , закон розподілу якої заданий рядом розподілу.

X	-2	-1	0	1	2
P	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1

Розв'язання. За формулою (2.3) знаходимо:

$$M(X) = -2 \cdot 0,3 - 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 = -0,3. \blacklozenge$$

Дисперсія випадкової величини

Для оцінки розсіювання значень випадкової величини відносно свого математичного сподівання використовують поняття «дисперсія».

Означення. *Дисперсією (розсіянням) випадкової величини X* називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її

математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсію зручно обчислювати за формулою $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Для дискретної випадкової величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2. \quad (2.4)$$

Одиниця вимірювання $D(X)$ дорівнює квадрату одиниці вимірювання випадкової величини X .

Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини навколо її середнього значення – центра розсіяння (математичне сподівання).

Властивості дисперсії:

Властивість 1. Дисперсія константи (сталого) дорівнює нулю:

$$D(X) = D(C) = 0.$$

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, якщо піднести його до квадрату:

$$D(aX) = a^2 D(X).$$

Властивість 3. Дисперсія алгебраїчної суми випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі дисперсій цих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y),$$

якщо X та Y є незалежними випадковими величинами.

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$$

Властивість 4. $D(X) \geq 0$ для будь-якої випадкової величини X .

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини

Означення. Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (2.5)$$

Розмірність цієї характеристики розсіяння збігається з розмірністю випадкової величини.

Приклад 2.4. Нехай множину значень випадкової величини складають числа від 1 до 6, що випадають на верхній грані грального кубика при однократному його підкиданні. Вважаючи ймовірність випадання кожного числа $n \in \overline{1,6}$ однаковою, дістаємо ряд розподілу ймовірностей, що має вигляд такої таблиці:

X	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Математичне сподівання або середнє значення випадкової величини:

$$M(X) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 3,5.$$

Дисперсія випадкової величини:

$$D(X) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (x_i - 3,5)^2 = \frac{35}{12}.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини:

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}}. \blacklozenge$$

Мода випадкової величини

Означення. *Модою дискретної випадкової величини називають її найімовірніше значення.*

Отже, M_o – це таке значення випадкової величини, при якому значення відповідної ймовірності є найбільшим.

Питання для самоперевірки

1. Що таке випадкова величина?
2. Яка випадкова величина називається дискретною, неперервною?
3. Що таке ряд розподілу, многокутник розподілу?

4. Чому дорівнює сума ймовірностей у ряді розподілу?
5. Що таке інтегральна функція розподілу? Назвіть її властивості.
6. За якою формулою знаходять диференціальну функцію розподілу? Назвіть її властивості.
7. Для яких випадкових величин існує інтегральна функція розподілу?
8. Для яких ВВ існує диференціальна функція розподілу?
9. Чи може розподіл ймовірностей будь-якої випадкової величини задаватися таблицею:

1) $X = x_i$	0	0,5	0,7	0,9
$P(X = x_i) = p_i$	0,2	0,1	0,5	0,2

$X = x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i) = p_i$	0	0,3	0,4	0,2

10. Як знаходиться ймовірність потрапляння випадкової величини на проміжок $(\alpha; \beta)$? Яка для цього є геометрична інтерпретація?
11. Дайте означення математичного сподівання та опишіть його властивості.
12. Дайте означення дисперсії та опишіть її властивості.
13. Дайте означення середнього квадратичного відхилення випадкової величини і за якою формулою воно обчислюється?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Відомо, що в наборі з 20 деталями знаходиться 2 бракованих. Навмання береться 3 деталі з цього набору. Побудуйте закон розподілу випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед трьох взятих. Побудувати многокутник розподілу та знайти вираз функції розподілу $F(x)$.

Задача 2. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

$X = x_i$	-1	0	2	5
$P(X = x_i) = p_i$	0,2	0,5	0,2	0,1

Записати вираз функції $F(x)$ і побудувати її графік. Обчислити $P(X < 5)$, $P(X > 1)$, $P(X \leq 2)$, $P(0 \leq X < 3)$, $P(-2 < X < 2)$.

Задача 3. На шляху руху автомобіля 5 світлофорів, кожний з яких або дозволяє, або забороняє наступний рух з ймовірністю 0,5. Знайти закон розподілу ймовірностей випадкова величина X , яка дорівнює числу світлофорів, пройдених автомобілем до першої зупинки.

Задача 4. Задано закони розподілу незалежних випадкових величин X, Y :

X	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

Y	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

Скласти закон розподілу випадкової величини $Z = XY$ та визначити ймовірність $P(0 \leq Z \leq 2)$.

Задача 5. Дискретна випадкова величина X має ряд розподілу:

X	-1	0	1	2
P	0,1	$2a$	0,2	$5a$

- 1) Знайти ймовірності p_2 і p_4 можливих значень $X = 0$ і $X = 2$ випадкової величини;
- 2) Знайти вираз функції розподілу $F(x)$ та побудувати її графік;
- 3) Обчислити ймовірності попадання X у проміжки: а) $[-1; 1]$; б) $(-1; 0,5)$.

Задача 6. Зробили три постріли в мішень. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості влучень у мішень. Знайти функцію розподілу, багатокутник розподілу й побудувати графіки. Побудувати функцію та багатокутник розподілу для випадкової величини.

Задача 7. Ймовірність влучення в муху на льоту з рогатки дорівнює 0,001. Відбувається 2000 пострілів. Знайти числові характеристики випадкової величини X – кількість вбитих мух.

Задача 8. Монету підкидають тричі. Випадкова величина X – число появи герба. Знайти розподіл ймовірностей даної величини, якщо при кожному підкиданні ймовірність появи герба дорівнює 0,5. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Задача 9. Двоє стрільців незалежно один від одного зробили по одному пострілу по мішені. Скласти закон розподілу X – числа влучень у мішень, якщо ймовірність влучення мершим стрільцем дорівнює 0,8, а другим – 0,7. Визначити $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

Задача 10. Випадкову величину задано функцією розподілу ймовірностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -6, \\ 0,2, & -6 \leq x \leq -4, \\ 0,6, & -4 \leq x \leq 0, \\ 0,8, & 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Записати ряд розподілу випадкової величини X . Визначити $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

Індивідуальні завдання

Задача 1. Студент складає іспити з трьох предметів. Ймовірність здати перший, другий і третій іспити відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3 .

1) Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа іспитів, які складе студент.

2) Побудувати многокутник розподілу ймовірностей.

3) Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік, якщо

$$p_1 = 0,9 - \frac{N}{100}; \quad p_2 = 0,8 - \frac{N}{100}; \quad p_3 = 0,7 - \frac{N}{100}, \quad \text{де } N - \text{номер варіанту.}$$

Задача 2. Проводяться чотири незалежних постріли по мішені. Ймовірність

влучення при одному пострілі постійна і дорівнює p .

1. Знайти закон розподілу ДБВ X – числа влучень у мішень.

2. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $p = 0,7 - \frac{N}{100}$, де N – номер

варіанту.

Задача 3. Студент підготував до заліку M питань з N питань програми. Білет містить n питань.

1. Скласти закон розподілу ДБВ X – числа питань, на які студент знає відповіді.

2. Побудувати многокутник розподілу ймовірностей.

3. Обчислити числові характеристики розподілу: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, M_0 , M_e

при таких значеннях N, M, n (де K – номер варіанта):

варіанти **1-10**: $N = K + 30$, $M = N - 10$, $n = 3$.

варіанти **11-20**: $N = K + 20$, $M = N - 9$, $n = 4$.

варіанти **21-30**: $N = K + 10$, $M = N - 8$, $n = 5$.

2.2. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.2.1. Функції розподілу неперервної випадкових величин

Означення. *Неперервною випадковою величиною називається така величина, значення якої безперервно заповнюють деякий проміжок значень. Наприклад, тривалість людського життя, напруга в побутовій електричній мережі, розмір отриманого чистого прибутку й таке інше.*

Неперервна випадкова величина має незліченну множину можливих значень, що не дозволяє побудувати для неї ряд розподілу, такий, як для ДВВ. У цьому випадку розглядають не ймовірність події виникнення точного значення безперервної випадкової величини, тому що ця ймовірність дорівнює нулю [$P(X = x) = 0$], а ймовірність того, що випадкова величина X в результаті спроби набуде такого значення, яке не перевершує заздалегідь заданого (граничного) значення x . Тобто, розглядається ймовірність події $P(X < x) = F(x)$, яка полягає в тому, що випадкова величина *потрапить на інтервал значень* $-\infty < X < x$.

Означення. *Функцією розподілу випадкової величини (синоніми – інтегральна функція розподілу, інтегральний закон розподілу) називається ймовірність того, що значення випадкової величини X у результаті спроби потрапить на інтервал значень* $-\infty < X < x$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Властивості функції розподілу

Властивість 1. Функція розподілу випадкової величини є неспадною функцією свого аргументу (рис.2.5.), тобто

$$F(x_1) \leq F(x_2), \text{ якщо } x_1 < x_2.$$

Властивість 2. Область її можливих значень належить відрізку $[0; 1]$.

Властивість 3. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу $(a; b)$, дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Властивість 4. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(a; b)$, то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a \text{ і } F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

Якщо можливі значення випадкової величини розміщені на всій числовій осі, то:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

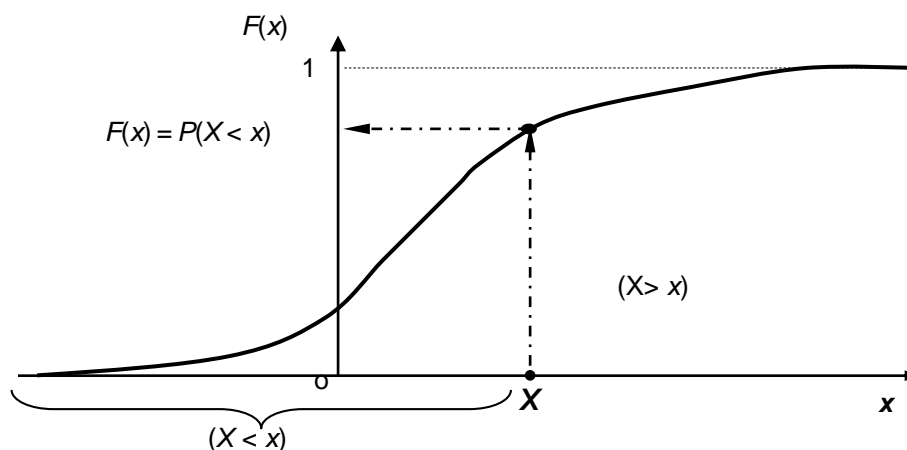


Рис. 2.5. Функція розподілу НВВ

2.2.2. Щільність розподілу неперервної випадкової величини

Якщо випадкова величина X – неперервна, то для неї існує ще одна характеристика – щільність розподілу.

Означення. *Щільністю розподілу $f(x)$ (синоніми – щільність розподілу ймовірностей, щільність ймовірностей, диференціальна функція розподілу, диференціальний закон розподілу) називається перша похідна від функції розподілу $F(x)$:*

$$f(x) = F'(x) \tag{2.6}$$

Щільність розподілу в явному вигляді можна подати так:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad dF(x) = f(x) \cdot dx.$$

Інтегруючи ліву і праву частини останньої рівності, знаходимо:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (2.7)$$

Тоді ймовірність влучення *неперервної* випадкової величини на задану ділянку (див. рис.2.6, б) можна записати так:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2.8)$$

Ця ймовірність є своєрідним «еквівалентом» ймовірності конкретного значення *дискретної* випадкової величини.

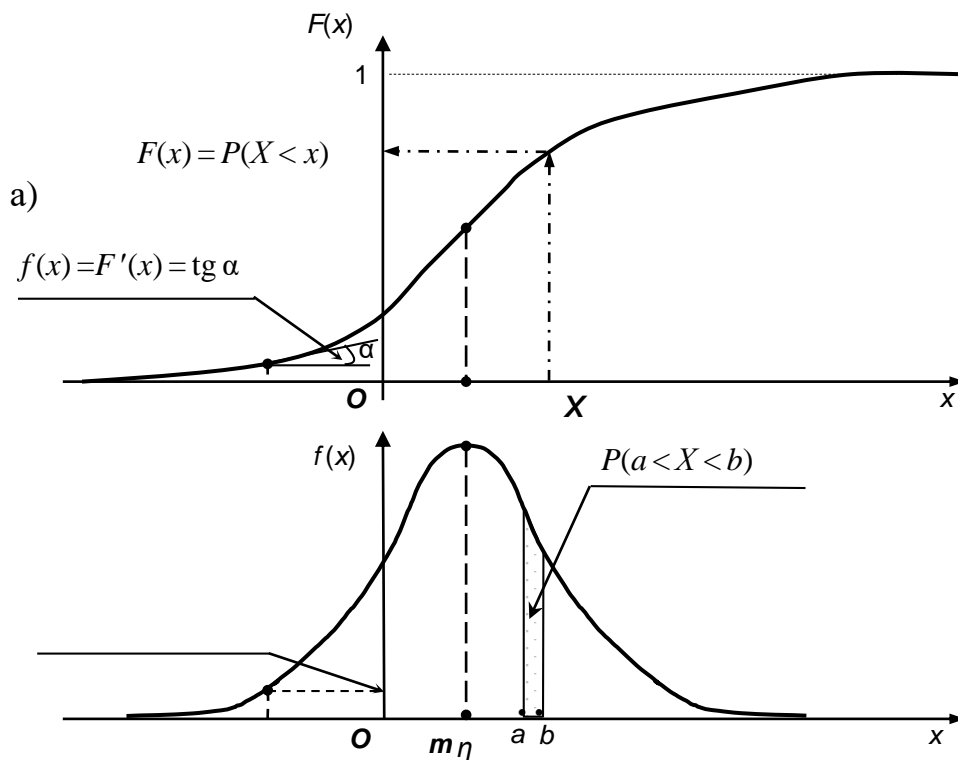


Рис.2.6. Закони розподілу неперервної випадкової величини:
а) функція розподілу б) щільність розподілу

Властивості щільності розподілу

Властивість 1. Щільність розподілу випадкової величини є функція невід'ємна, тобто

$$f(x) \geq 0.$$

Властивість 2. Умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку $[a; b]$, то умова нормування має такий вигляд $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Властивість 3. В геометричній інтерпретації $F(x)$ рівна площі фігури, обмеженої зверху кривою щільності розподілу $f(x)$ і знаходиться лівіше точки x (рис.2.7.).

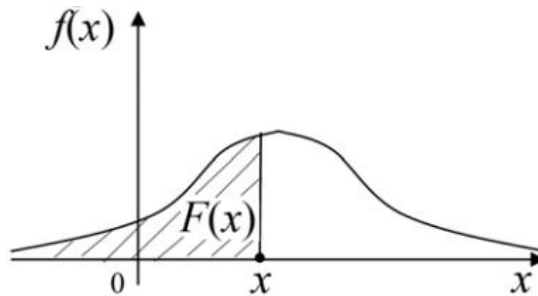


Рис.2.7. Функція розподілу.

Властивість 4. Функція розподілу $F(x)$ визначається через щільність розподілу за формулою:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (2.9)$$

Властивість 5. Ймовірність потрапляння випадкової величини на заданий проміжок $(\alpha; \beta)$ обчислюється за формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad (2.10)$$

Якщо X – неперервна випадкова величина, то ймовірність того, що випадкова величина X набуде конкретного значення x , дорівнює 0 ($P(X = x) = 0, x \in R$), а, отже, впливає два наступні **висновки**:

Висновок 1. На відміну від дискретної випадкової величини розподіл НВВ неможливо задати, зазначивши значення, яких вона набуває, та відповідні їм ймовірності.

Висновок 2. Мають місце рівності:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Приклад 2.5. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ a(x-1)^2 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a ; 2) щільність розподілу ймовірностей $f(x)$; 3) ймовірність влучення випадкової величини на інтервал $[1,5; 2,5]$.

Розв'язання.

1. Функція розподілу безперервної випадкової величини повинна бути безперервною. Вибираємо параметр a так, щоб у точках $x = 1$ і $x = 2$ функція $F(x)$ була безперервною (в усіх інших точках числової осі функція $F(x)$ безперервна).

Функція $F(x)$ безперервна в точці x_0 , якщо односторонні границі функції дорівнюють її значенню в цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Розглянемо точку $x = 1$. Умова безперервності функції в цій точці має вигляд: $a(1-1)^2 = 0$ і виконується при всіх значеннях параметра a .

Розглянемо точку $x = 2$. Умова безперервності функції в цій точці виглядає як $a(2-1)^2 = 1$, звідки знаходимо значення параметра $a = 1$.

Отже, функція розподілу буде мати вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

2. Щільність розподілу $f(x)$ дорівнює першій похідній від функції роз-поділу, тобто:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 2(x-1) & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Відзначимо, що в точці $x = 2$ похідна не існує.

3. Ймовірність влучення випадкової величини на інтервал $[1,5; 2,5]$ знаходимо, використовуючи властивість функції розподілу:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

$$P(1,5 < X < 2,5) = F(2,5) - F(1,5) = 1 - (1,5-1)^2 = 1 - 0,25 = 0,75. \blacklozenge$$

2.2.3. Числові характеристики НВВ та їх характеристики.

Математичне сподівання випадкової величини

Означення. *Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X , усі можливі значення якої належать всій осі Ox , називається вираз*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.11)$$

за умови абсолютної збіжності вказаного невласного інтеграла.

Якщо можливі значення НВВ X належать відрізьку $[a;b]$, то математичне сподівання буде обчислюватись за допомогою визначеного інтеграла

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Математичне сподівання $M(X)$ випадкової величини називають також **середнім значенням** або **центром розсіювання** цієї величини. $M(X)$ визначається в тих самих одиницях, що й сама випадкова величина X .

Властивості математичного сподівання:

Властивість 1. Математичне сподівання константи дорівнює константі:

$$M(C) = C.$$

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(aX) = aM(X).$$

Властивість 3. Математичне сподівання алгебраїчної суми випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин (виконується для скінченного довільного числа залежних та незалежних ВВ):

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

Властивість 4. Для добутку скінченного довільного числа випадкових величин виконується:

$$M(XY) = M(X)M(Y),$$

якщо X та Y є незалежними випадковими величинами.

Властивість 5. Якщо $a \leq X \leq b$, то $a \leq M(X) \leq b$. Зокрема, $M(X) \geq 0$, коли $X \geq 0$.

Дисперсія випадкової величини

Означення. *Дисперсією (розсіянням) випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:*

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \right]^2, \quad f(x) \in (-\infty; \infty) \quad (2.12)$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - \left[\int_a^b xf(x) dx \right]^2, \quad f(x) \in [a; b].$$

Одиниця вимірювання $D(X)$ дорівнює квадрату одиниці вимірювання випадкової величини X .

Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини навколо її середнього значення – центра розсіяння (математичне сподівання).

Властивості дисперсії:

Властивість 1. Дисперсія константи (сталого) дорівнює нулю:

$$D(X) = D(C) = 0.$$

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, якщо піднести його до квадрату:

$$D(aX) = a^2 D(X).$$

Властивість 3. Дисперсія алгебраїчної суми випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі дисперсій цих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y),$$

якщо X та Y є незалежними випадковими величинами.

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$$

Властивість 4. $D(X) \geq 0$ для будь-якої випадкової величини X .

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини

Означення. *Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини називають корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad (2.13)$$

Розмірність цієї характеристики розсіювання збігається з розмірністю випадкової величини.

Мода та медіана випадкової величини

Означення. *Моду* неперервної випадкової величини називають те її можливе значення, якому відповідає локальний максимум функції щільності розподілу. Отже, це таке її значення, за якого щільність розподілу набуває найбільшого значення, тобто

$$f(X = Mo) = \max.$$

Означення. *Медіаною* $Me(X)$ неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, для якого однаково ймовірно: випадкова величина X менше чи більше від цього значення:

$$P[X < Me(X)] = P[X > Me(X)] = \frac{1}{2}.$$

Отже, медіана – це таке її значення, яке є коренем рівняння $F(x) = \frac{1}{2}$.

Початкові й центральні моменти випадкової величини

Означення. Початковим моментом порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k :

$$v_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (2.14)$$

Зокрема, $v_1 = M(X)$.

Означення. Центральним моментом порядку k випадкової величини X називають математичне сподівання величини $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} [X - M(X)]^k f(x) dx \quad (2.15)$$

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0;$$

$$\mu_2 = M[X - M(X)]^2 = M(X^2) - (M(X))^2 = D(X).$$

Центральні моменти також можна обчислювати через початкові моменти:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= v_2 - v_1^2, \\ \mu_3 &= v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3, \\ \mu_4 &= v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4. \end{aligned}$$

Асиметрія й ексцес випадкової величини

Означення. Асиметрія As характеризує симетрію закону розподілу випадкової величини відносно його центру, коефіцієнт асиметрії («скошеності») визначається по формулі:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (2.16)$$

На рис.2.8. зображено три криві: одна з них симетрична відносно $M(X)$,

друга та третя мають додатну та від'ємну асиметрію.

Означення. *Ексцес* характеризує «гостровершинність» графіка щільності розподілу випадкової величини. Обчислюється за формулою:

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (2.17)$$

На рис.2.9. зображено щільності: нормального розподілу $Es = 0$, розподілу з додатнім та від'ємним ексцесом.

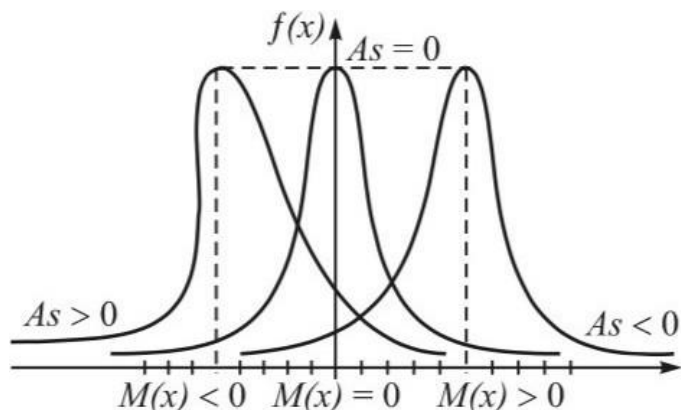


Рис.2.8. Асиметрія.

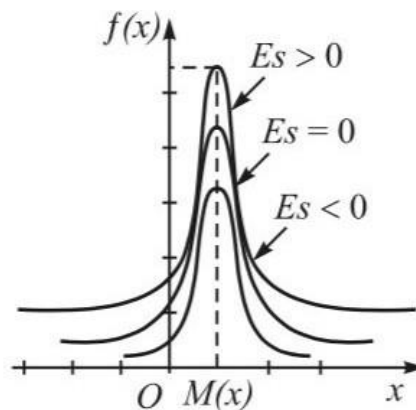


Рис.2.9. Ексцес.

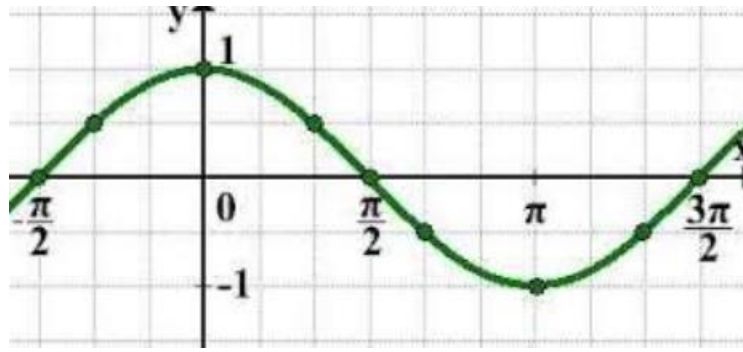
Приклад 2.6. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Обчислити: 1) моду; 2) медіану; 3) математичне сподівання; 4) дисперсію; 5) середнє квадратичне відхилення; 6) асиметрію; 7) ексцес.

Розв'язання.

- 1) **Мода** випадкової величини – на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ щільність розподілу має максимальне значення для $x = 0$ ($\cos 0 = 1$), тому $M_0 = 0$.



2) Медіана випадкової величини:

$$F(Me) = P(X < Me) = P(X > Me) = 0,5,$$

$$F(Me) = \int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_0^{Me} \cos(x)dx = \sin x \Big|_0^{Me} = \sin Me.$$

Отже, $\sin Me = 0,5$ і $Me \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, тому $Me = \frac{\pi}{6}$.

3) Математичне сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{інтегрування частинами} \\ u = x, \quad dv = \cos x dx \\ du = dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| = x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57.$$

4) Дисперсія $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \right)^2$:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (0,57)^2 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)dx - 0,3249 = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \cos x dx \\ du = 2x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)dx - 0,3249 = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin x dx \\ du = dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{4} - 2(-x \cos(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx - 0,3249 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 0,3249 = \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2 - 0,3249 \approx 0,4649 - 0,3249 = 0,14.
\end{aligned}$$

5) Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{D}$:

$$\sigma(X) = \sqrt{0,14} \approx 0,37.$$

6) Асиметрія $As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$:

$$\mu_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 0,57)^3 \cdot \cos(x) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^3 - 3 \cdot 0,57 \cdot x^2 + 3 \cdot 0,57^2 \cdot x - 0,57^3) \cdot \cos(x) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx - 1,71 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos(x) dx + 0,9747 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x) dx - 0,185193 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx =$$

$$= \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6 - 1,71 \cdot 0,4649 + 0,9747 \cdot 0,57 - 0,185193 \cdot 1 \approx$$

$$\approx 0,449893 - 0,794979 + 0,555579 - 0,185193 \approx 0,0253.$$

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0,0253}{0,37^3} \approx 0,45$$

7) Екцес $Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$:

$$\mu_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 0,57)^4 \cdot \cos(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^4 - 4 \cdot 0,57 \cdot x^3 + 6 \cdot 0,57^2 \cdot x^2 - 4 \cdot 0,57^3 \cdot x + 0,57^4) \cdot \cos(x) dx = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx - 2,28 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx + 1,9494 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos(x) dx - \\
&\quad - 0,740772 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x) dx + 0,10556 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \\
&= \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24 - 2,28 \cdot 0,449893 + 1,9494 \cdot 0,4649 - 0,740772 \cdot 0,57 + \\
&\quad + 0,10556 \cdot 1 \approx 0,496932 - 1,025756 + 0,906276 - 0,42224 + 0,10556 \approx 0,06.
\end{aligned}$$

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0,06}{0,37^4} - 3 \approx 0,2 \spadesuit$$

Питання для самоперевірки

1. Що таке випадкова величина?
2. Яка випадкова величина називається дискретною, неперервною?
3. Що таке інтегральна функція розподілу? Назвіть її властивості.
4. За якою формулою знаходять диференціальну функцію розподілу? Назвіть її властивості.
5. Які є способи задання неперервної випадкової величини?
6. Як знаходиться ймовірність потрапляння випадкової величини на проміжок $(\alpha; \beta)$? Яка для цього є геометрична інтерпретація?
7. Які є способи задання неперервної випадкової величини?
8. Дайте означення математичного сподівання та опишіть його властивості.
9. Дайте означення дисперсії та опишіть її властивості.
10. Які випадкові величини називають незалежними?
11. За якими формулами обчислюються дисперсія для неперервної випадкової величини?
12. Дайте означення середнього квадратичного відхилення випадкової

величини і за якою формулою воно обчислюється?

13. За якими формулами обчислюються початковий, центральний і абсолютний початковий моменти порядку k величини X ?

14. За якими формулами обчислюються асиметрія та ексцес випадкової величини?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. При яких значеннях a і b задана функція $F(x)$ буде функцією розподілу? Знайти $f(x)$, $P(2 \leq X < 7)$, $P(X = 2)$, якщо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax + b, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Задача 2. Функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

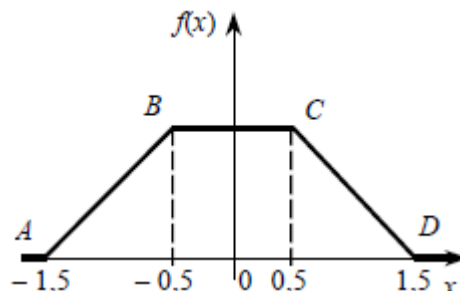
а) Чи є ця випадкова величина дискретною?

б) Записати функцію щільності розподілу $f(x)$.

в) Побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$.

г) Обчислити ймовірність того, що значення величини X лежать на проміжку $[2,1; 2,5)$.

Задача 3. Графік щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ випадкової величини X задано графічно



Знайти аналітичний вираз для $f(x)$ при $x \in R$.

Задача 4. Задано щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X . Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задача 7. Задано функції (див. нижче). Показати, що кожна з них є функцією розподілу деякої випадкової величини X . Записати щільність розподілу цієї величини. Обчислити ймовірності попадання X у проміжки: для випадку 1) $(0; \pi/3)$; для випадку 2) $(1; 2)$.

$$1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq 0, \\ \arctg x, & \text{коли } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{коли } x > \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad 2) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq 1, \\ \ln x, & \text{коли } 1 < x \leq e, \\ 1, & \text{коли } x > e. \end{cases}$$

Задача 8. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0, \\ ax, & \text{коли } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{коли } x > 3. \end{cases}$$

Визначити значення параметра a та числові характеристики випадкової величини X .

Задача 9. Задано щільність розподілу випадкової величини X :

$$а) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ або } x > 2, \\ ax^2, & 0 < x \leq 2. \end{cases} \quad б) f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2ae^{-6x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Обчислити: 1) параметр a ;

2) $P(-3 < X < 5)$, $P(5)$;

3) моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію, ексцес;

4) побудувати графік щільності розподілу;

5) записати функцію розподілу і побудувати її графік.

Задача 10. Випадкова величина X розподілена за законом, графіком щільності якого є ламана ABC , де $A(1;0)$, $B(2;a)$, $C(3;0)$. Записати щільність розподілу, функцію розподілу випадкової величини X . Обчислити $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

Задача 11. Задано незалежні випадкові величини X і Y із відповідними законами розподілу ймовірностей $(-1;1/2)$, $(1;1/2)$ і $(-2;1/2)$, $(2;1/2)$. Знайти закони розподілу ймовірностей шуканих випадкових величин. Визначити числові характеристики (математичне сподівання та дисперсію) випадкових величин $X + Y$, $X - Y$, XY та перевірити для них виконання властивостей 3) і 4) для математичного сподівання та властивості 3) для дисперсії.

Індивідуальні завдання

Задача 1. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу (N – номер варіанта):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq N \\ \frac{a(x-N)^2}{N}, & \text{при } N < x \leq 2N. \\ 1, & x > N \end{cases}$$

1. Знайти невідомий параметр a , записати вираз функції $F(x)$ і побудувати її графік.
2. Знайти диференціальну функцію розподілу і побудувати її графік.
3. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, Mo , Me , As , Es .
4. Обчислити $P\left(N-1 < X \leq N + \frac{a}{2}\right)$

2.3. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Всі числові характеристики будь-яких процесів та явищ є випадковими. Наприклад, чисельність населення визначеного регіону в будь-який момент часу, число студентів на лекції, прибуток підприємства, кількість телефонних розмов за день, температура повітря, тощо.

Розглядаються дискретні випадкові величини, які приймають чітко визначенні значення. При цьому кожне значення характеризується імовірністю з якою випадкова величина може приймати це значення. Така залежність називається законом розподілу імовірностей. Закон розподілу імовірностей для дискретних ВВ може бути заданим аналітично, таблично, графічно.

Розглянемо найбільш поширені закони розподілу дискретних випадкових величин: рівномірний, біноміальний, пуассонівський, геометричний, поліноміальний, а також їх числові характеристики математичне очікування та дисперсію.

2.3.1. Рівномірний закон розподілу

Означення. *Говорять, що дискретна випадкова величина X має **рівномірний розподіл**, якщо вона набуває n значень x_1, x_2, \dots, x_n з ймовірностями:*

$$p_m = P_n(m) = P(X = m) = \frac{1}{n} \quad (2.18)$$

де n – число всіх можливих значень ДВВ.

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	\dots	$\frac{1}{n}$

Приклади:

✓ випадіння герба (значення ДВВ $X = x_1 = 1$) або цифри (значення ДВВ

$X = x_2 = 2$) при підкиданні монети, $p_i = \frac{1}{2}$;

- ✓ число, що випадає при киданні грального кубика, $p_i = \frac{1}{6}$;
- ✓ номер сторінки навмання відкритої книги, $p_i = \frac{1}{n}$, n – кількість сторінок.

2.3.2. Біноміальний закон розподілу

Означення. Говорять, що дискретна випадкова величина X має **біноміальний розподіл**, якщо вона набуває n значень x_1, x_2, \dots, x_n з ймовірностями

$$p_m = P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (2.19)$$

де $0 < p < 1$; $q = 1 - p$; $m = 0, 1, \dots, n$.

Використовується у схемі Бернуллі, тобто у випадку n незалежних повторних випробувань. В кожному з цих випробувань призначена подія з'являється з ймовірністю p .

Ряд біноміально розподіленої випадкової величини має вигляд:

X	0	1	2	...	m	...	n
p_m	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$...	$C_n^m p^m q^{n-m}$...	p^n

Приклад 2.7. Біатлоніст стріляє по мішені 5 раз. Кожного разу він влучає в мішень з ймовірністю $p = 0,8$, а промажується з ймовірністю $q = 1 - p = 0,2$. Обчислити ймовірність, з якою біатлоніст влучить рівно 4 рази в мішень.

Розв'язання. Нехай подія A – влучення в мішень при пострілі. Випадковою величиною X позначимо число влучень в мішень. Тепер треба знайти ймовірність того, що $X=4$. Згідно з біноміальним законом розподілу:

$$P(X = 4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^{5-4} = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^1 = 5 \cdot 0,4096 \cdot 0,2 = 0,4096. \blacklozenge$$

2.3.3. Закон розподілу Пуассона

Закон розподілу Пуассона застосовується для наближених розрахунків ймовірності, з якою ДВВ приймає конкретне значення ($X=m$) у схемі повторення випробувань для випадку великих значень n . При великих значеннях n обчислення

біноміальних коефіцієнтів громіздки. Тому закон Пуассона дозволяє полегшити розрахунки **формулою Пуассона**

$$p_m = P_n(m) = P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (2.20)$$

де $a = n \cdot p > 0$ – параметр закону розподілу Пуассона (m – число появ деякої події («успіху») в n незалежних випробуваннях, a – середня кількість появи події в n випробуваннях).

Таблиця закону розподілу Пуассона має вигляд:

x_m	0	1	2	...	m	...	Σ
p_m	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2 e^{-a}}{2!}$...	$\frac{a^m e^{-a}}{m!}$...	1

2.3.4. Геометричний закон розподілу

Геометричний закон розподілу характеризує розподіл дискретної випадкової величини X , яку можна визначити таким чином. Нехай виконуються повторення незалежних випробувань. В кожному випробуванні призначена подія A може з'явитись з імовірністю p . Припустимо, що нас цікавить число випробувань, які відбулись до появи події A . Це число випробувань буде дискретною випадковою величиною X , що розподілена за геометричним законом розподілу:

$$p_m = P_n(m) = P(X = m) = p^m q, \quad (2.21)$$

де $p = P(A)$ – ймовірність появи події A в кожному випробуванні, $q = 1 - p$ – ймовірність не появи події A в результаті випробування; X – число випробувань до появи події A в серії незалежних повторних випробувань.

Ряд ймовірностей цього розподілу буде нескінченно спадною геометричною прогресією із знаменником q . Сума цієї прогресії дорівнює 1.

Ряд цього розподілу можна записати у вигляді таблиці:

X	0	1	2	...	m	...
p_m	q	pq	$p^2 q$...	$p^m q$...

Приклад 2.8. Проводиться перевірка партії деталей до виявлення нестандартної (обмеження на число перевірених деталей не накладається). Ймовірність браку для кожної деталі 0,1. Скласти закон розподілу числа перевірених деталей.

Розв'язання. Випадкова величина X – число перевірених деталей до виявлення бракованої – має геометричний розподіл з параметром $p=0,1$ $q=1-0,1=0,9$. Тому ряд розподілу має вигляд:

x_m	1	2	3	...	m	...
p_m	0,1	0,09	0,081	...	$0,1 \cdot 0,9^{m-1}$...

2.3.5. Гіпергеометричний закон розподілу

Гіпергеометричний закон розподілу вказує ймовірність появи m елементів з певною властивістю серед n елементів, які беруть із сукупності N елементів, яка містить k елементів саме такої властивості:

$$p_n(m) = P(X = m) = \frac{C_n^m \cdot C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad k \geq m. \quad (2.22)$$

Ряд гіпергеометричного закону розподілу має вигляд:

x_m	0	1	2	...	m	...	k	Σ
p_m	$\frac{C_{N-n}^k}{C_N^k}$	$n \frac{C_{N-n}^{k-1}}{C_N^k}$	$\frac{C_n^2 \cdot C_{N-n}^{k-2}}{C_N^k}$...	$\frac{C_n^m \cdot C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}$...	$\frac{C_n^k}{C_N^k}$	1

Приклад 2.9. Припустимо, що в контейнері $N=1000$ деталей. Відомо, що в цій сукупності $k=10$ бракованих деталей. Навмання ми беремо $n=20$ деталей. Яка ймовірність того, що у взятій випадковій виборці рівно $m=2$ бракованих деталей?

Розв'язання. Ця ймовірність обчислюється за формулою:

$$P(X = m) = \frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{990}^{18}}{C_{1000}^{20}}. \blacklozenge$$

Гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального при $N \rightarrow \infty$.

Біноміальний та гіпергеометричний розподіли мало відрізняються для малих значень k (обсяг вибірки) порівняно з N (обсяг генеральної сукупності).

2.3.6. Числові характеристики законів розподілу

Закон розподілу X	$M(X)$	$D(X)$
1. Біноміальний $P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot (1 - p)^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$.	np	npq
2. Пуассона $P(X = m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$, $a > 0$.	a	a
3. Геометричний $P(X = m) = p \cdot q^{m-1}$, $m = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
4. Гіпергеометричний $P(X = m) = \frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$, $k \geq n$.	$\frac{kn}{N}$	$\frac{kn(N-k)}{N^2} \times \frac{N-n}{N-1}$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення біноміального закону розподілу.
2. Дайте означення розподілу Пуассона.
3. Дайте означення геометричного розподілу.
4. Дайте означення гіпергеометричного розподілу.
5. Для якого p біноміальний розподіл симетричний?
6. Чому дорівнюють математичне сподівання та дисперсія випадкової величини з розподілом: а) біноміальним; б) геометричним; в) Пуассона; г) гіпергеометричним?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти середнє значення, моду і середнє квадратичне відхилення біноміального розподілу для $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$ та зобразити цей розподіл графічно.

Задача 2. У біноміальному випробуванні $n = 15$, $p = 0,05$. Знайти $P(X \leq 2)$ та $P(X \geq 13)$. Пояснити результат.

Задача 3. В біноміальному випробуванні з трьох експериментів імовірність двох успіхів у 12 разів більша від імовірності трьох неуспіхів. Знайти ймовірність успіху в одному випробуванні.

Задача 4. Нехай у партії готової продукції $\frac{2}{3}$ виробів вищого гатунку. Проводиться повторна вибірка 5 виробів. Побудувати закон розподілу ймовірностей, який характеризує можливі результати відбору.

Задача 5. В місті N 20% жителів віддають перевагу власному автотранспорту, щоб дістатися до роботи. Випадковим чином обрали 4 людини.

Завдання:

1) скласти ряд розподілу кількості людей у виборці, які дістаються до роботи на власному транспорті, побудуйте графік цього розподілу;

2) знайти основні числові характеристики отриманого розподілу;

3) написати функцію розподілу кількості людей у виборці, які переважно дістаються до роботи на власному транспорті;

4) знайти ймовірність того, що серед цих чотирьох: а) не буде жодної людини, яка б віддавала перевагу власному транспорту, щоб потрапити на роботу; б) виявиться хоча б одна людина, яка віддає перевагу власному транспорту, щоб дістатися роботи; в) буде не більше двох таких людей, які віддають перевагу власному транспорту, щоб дістатися роботи.

Задача 6. З партії в 1000 деталей, з яких 200 мають дефекти, беруть 50 деталей, X – кількість бракованих деталей. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 7. Гральний кубик підкидають до першої появи шести очок. Випадкова величина X – кількість підкидань кубика. Знайти ряд розподілу випадкової величини X , $M(X)$, $\sigma(X)$, наймовірнішу кількість підкидань.

Задача 8. Ймовірність того, що автомат для розміну монет спрацює при опусканні монети (подія A), дорівнює 0,98. Визначити закон розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X – числа опущених монет в автомат до першої правильної його роботи (числа випробувань до появи події A).

Задача 9. Ймовірність того, що грошовий приймач автомата при подачі грошей спрацює правильно, дорівнює 0,97. Скласти закон розподілу величини X – кількості подачі грошей в автомат: 1) до першої правильної роботи автомата; 2) до першої неправильної роботи автомата. *Вказівка:* рулетка має 37 полів (від 0 до 36), серед яких 18 червоних.

Задача 10. Стрілець стріляє в мішень допоки влучить. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти середню кількість вдалих пострілів і дисперсію кількості пострілів.

Задача 11. Монету підкидають 5 разів. Випадкова величина X – число появи гербів. Y – кількість підкидань до першого герба. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

Задача 12. З 20 лотерейних білетів виграшними є 4. Навмання вилучають 4 білети. Завдання:

- 1) скласти ряд розподілу виграшних білетів серед відібраних;
- 2) знайти основні числові характеристики отриманого розподілу;
- 3) написати функцію розподілу кількості виграшних білетів серед відібраних;
- 4) знайти ймовірність того, що серед відібраних чотирьох білетів виявлять: а) не менше трьох виграшних; б) не більше одного виграшного білета.

Задача 13. У партії із 50 виробів є 5 бракованих виробів. Здійснюють вибірку 6 виробів. Побудувати закон розподілу величини X – кількості бракованих виробів серед відібраних. Знайти $M(X)$ та $D(X)$.

Задача 14. Студент знає 20 питань з 25. Навмання виймається 5 питань. Випадкова величина X – кількість питань, на які студент знає відповідь. Знайти ряд розподілу випадкової величини X та ймовірність складання іспиту (іспит вважається складеним, якщо студент дає відповідь більше ніж на половину питань).

Задача 15. Магазин отримав 10000 пляшок соку. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,0004. Знайти: ряд розподілу випадкової величини X , що характеризує кількість розбитих пляшок; ймовірність того, що розбитих пляшок буде більше трьох.

Задача 16. На 10 однотипних роздоріжжях місцевих доріг зафіксовано за місяць 20 аварій (вважатимемо їх незалежними подіями). Нехай кількість аварій на кожному роздоріжжі підпорядкована закону Пуассона. Визначити: 1) ймовірність трьох аварій на одному роздоріжжі протягом місяця; 2) ймовірність того, що кількість аварій виявиться не меншою від чотирьох на одному роздоріжжі за цей самий час.

Задача 17. Величина X розподілена за законом Пуассона з $M(X)=3$. Побудувати многокутник розподілу, функцію розподілу $F(X)$. Знайти: а) $P(X < M(X))$; б) $P(X > 0)$.

Задача 18. Є n лампочок, кожна з яких з ймовірністю 0,2 має дефект. Лампочку вкручують у патрон і подають напругу, після чого бракована лампочка відразу ж перегорає, і її замінюють іншою. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість використаних лампочок. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Виконати для а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=5$; г) $n=6$.

Задача 19. Прибуття клієнтів в банк підпорядковується закону Пуассона. В середньому в банк кожні три хвилини входить один відвідувач. Дайте відповіді на наступні запитання. 1) Чому дорівнює ймовірність того, що протягом 1 хвилини в банк увійде один відвідувач? 2) Чому дорівнює ймовірність того, що принаймні три відвідувачі ввійдуть у банк протягом однієї хвилини?

Індивідуальні завдання

Варіант 1. Серед дев'яти однотипних виробів п'ять відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Навмання береться шість виробів. Визначити закон розподілу цілочислової випадкової величини X – появу числа виробів, що відповідають стандарту і обчислити для цієї величини $M(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант 2. Під час штампування валиків імовірність відхилення кожного валика від стандартного розміру дорівнює 0,15. За робочу зміну робітником було проштамповано 800 валиків. Знайти закон X – числа валиків, що не відповідають стандартному розміру, та її основні числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант 3. У лабораторних умовах було висіяно 10000 насінин нового сорту ячменю. Ймовірність того, що насінина ячменю не проросте в середньому становить 0,2. Визначити закон розподілу цілочислової випадкової величини X – числа зернин ячменю, що проростуть, і обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант 4. Радіотелефонна станція отримує цифровий текст. Унаслідок атмосферних завад ймовірність спотворення цифри в середньому дорівнює 0,001. Було отримано текст, що налічує 2000 цифр. Знайти закон розподілу X – числа спотворених цифр в отриманому тексті.

Варіант 5. В урні міститься 100 кульок, із них 80 білі, а решта чорні. Кульки із урни виймають навздогад по одній із поверненням. Знайти закон розподілу X – числа проведених експериментів, якщо вони здійснюються до першої появи чорної кульки. Чому дорівнюють $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$?

Варіант 6. В електромережу містечка увімкнено для освітлення вулиць у вечірню пору 20000 електролампочок. Ймовірність того, що лампочка не перегорить протягом вечірнього часу дорівнює в середньому 0,95. Знайти закон розподілу X – числа електролампочок, що не перегорять протягом вечірнього часу.

Варіант 7. Для космічного корабля ймовірність зіткнення його з метеоритом малої маси дорівнює 0,001 протягом одного оберту навкіл Землі. Космічний корабель здійснив 900 обертів. Знайти закон розподілу X – числа зіткнень космічного корабля із метеоритами малої маси.

Варіант 8. Монета підкидається доти, доки вона випаде гербом. Знайти закон

розподілу X – числа здійснених підкидань.

Варіант 9. Робітник за зміну обслуговує 14 однотипних верстатів-автоматів. Ймовірність того, що верстат за зміну потребує уваги робітника становить $1/7$. Знайти закон розподілу X – числа верстатів-автоматів, що потребують уваги робітника за зміну.

Варіант 10. За одну робочу зміну верстат-автомат виготовляє 400 однотипних деталей. Ймовірність, що виготовлена верстатом деталь стандартна дорівнює $0,98$. Знайти закон розподілу X – числа стандартних деталей, виготовлених верстатом-автоматом за робочу зміну.

Варіант 11. Серед 12 однотипних телевізорів 8 відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Навмання вибирають 5 телевізорів. Знайти закон розподілу X – числа телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед 5 навмання вибраних.

Варіант 12. Десять студентів складають залік з курсу «Теорія ймовірностей». Ймовірність того, що студент складе залік, у середньому становить $0,91$. Знайти закон розподілу X – числа студентів, що складуть залік.

Варіант 13. Серед одинадцяти однотипних виробів сім відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Навмання береться вісім виробів. Знайти закон розподілу X – появу числа виробів, що відповідають стандарту і обчислити для цієї величини $M(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант 14. Під час штампування валиків імовірність відхилення кожного валика від стандартного розміру дорівнює $0,13$. За робочу зміну робітником було проштамповано 700 валиків. Знайти закон розподілу X – числа валиків, що не відповідають стандартному розміру.

Варіант 15. У лабораторних умовах було висіяно 12000 насінин нового сорту ячменю. Ймовірність того, що насінина ячменю не проросте в середньому становить $0,3$. Визначити закон розподілу цілочислової випадкової величини X – числа зернин ячменю, що проростуть, і обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант 16. Радіотелефонна станція отримує цифровий текст. Унаслідок атмосферних завад ймовірність спотворення цифри в середньому дорівнює $0,002$.

Було отримано текст, що налічує 2200 цифр. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа спотворених цифр в отриманому тексті.

Варіант 17. В урні міститься 110 кульок, із них 90 білі, а решта чорні. Кульки із урни виймають навздогад по одній із поверненням. Визначити закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа проведених експериментів, якщо вони здійснюються до першої появи чорної кульки. Чому дорівнюють $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$?

Варіант 18. В електромережу містечка увімкнено для освітлення вулиць у вечірню пору 24000 електролампочок. Ймовірність того, що лампочка не перегорить протягом вечірнього часу дорівнює в середньому 0,94. Знайти закон розподілу X – числа електролампочок, що не перегорять протягом вечірнього часу.

Варіант 19. Для космічного корабля ймовірність зіткнення його з метеоритом малої маси дорівнює 0,0015 протягом одного оберту навкіл землі. Космічний корабель здійснив 1000 обертів. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа зіткнень космічного корабля із метеоритами малої маси.

Варіант 20. Робітник за зміну обслуговує 16 однотипних верстатів-автоматів. Ймовірність того, що верстат за зміну потребує уваги робітника становить $1/6$. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа верстатів-автоматів, що потребують уваги робітника за зміну.

Варіант 21. За одну робочу зміну верстат-автомат виготовляє 420 однотипних деталей. Ймовірність, що виготовлена верстатом деталь стандартна дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей, виготовлених верстатом-автоматом за робочу зміну.

Варіант 22. Серед 16 однотипних телевізорів 12 відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Навмання вибирають 6 телевізорів. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед 14 навмання вибраних.

Варіант 23. Десять студентів складають залік з курсу «Теорія ймовірностей». Ймовірність того, що студент складе залік, у середньому становить 0,92. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа студентів, що складуть залік.

Варіант 24. За одну робочу зміну верстат-автомат виготовляє 500 однотипних деталей. Ймовірність, що виготовлена верстатом деталь стандартна дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей, виготовлених верстатом-автоматом за робочу зміну.

Варіант 25. Десять студентів складають залік з курсу «Теорія ймовірностей». Ймовірність того, що студент складе залік, у середньому становить 0,94. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа студентів, що складуть залік.

Варіант 26. Серед десяти однотипних виробів шість відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Навмання береться сім виробів. Знайти закон розподілу X – появу числа виробів, що відповідають стандарту і обчислити для цієї величини $M(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант 27. Під час штампування валиків ймовірність відхилення кожного валика від стандартного розміру дорівнює 0,15. За робочу зміну робітником було проштамповано 750 валиків. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа валиків, що не відповідають стандартному розміру.

Варіант 28. У лабораторних умовах було висіяно 9000 насінин нового сорту ячменю. Ймовірність того, що насінина ячменю не проросте в середньому становить 0,2. Знайти закон розподілу величини X – числа зернин ячменю, що проростуть, і обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$.

Варіант 29. Радіотелефонна станція отримує цифровий текст. Унаслідок атмосферних завад ймовірність спотворення цифри в середньому дорівнює 0,001. Було отримано текст, що налічує 2400 цифр. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа спотворених цифр в отриманому тексті.

Варіант 30. В урні міститься 120 кульок, із них 100 білі, а решта чорні. Кульки із урни виймають навздогад по одній із поверненням. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа проведених експериментів, якщо вони здійснюються до першої появи чорної кульки. Чому дорівнюють $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$?

2.4. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Всі числові характеристики будь-яких процесів та явищ є випадковими. Наприклад, чисельність населення визначеного регіону в будь-який момент часу, число студентів на лекції, прибуток підприємства, кількість телефонних розмов за день, температура повітря, тощо.

Розглядаються неперервні випадкові величини, які приймають будь-які значення у заданому діапазоні. При цьому, ймовірність того, що НВВ прийме задане значення дорівнює нулю. Тому при аналізі НВВ треба оперувати з імовірністю потрапляння НВВ у визначений діапазон. Таку ймовірність характеризує щільність розподілу імовірностей НВВ $f(x)$, а вид графіка $f(x)$ називається законом розподілу імовірностей. Закон розподілу імовірностей для НВВ може бути заданим аналітично або графічно.

Розглянемо найбільш поширені закони розподілу неперервних випадкових величин: рівномірний, показниковий, нормальний, а також їх числові характеристики: математичне сподівання та дисперсію.

2.4.1. Рівномірний закон розподілу

Означення. *Неперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку $[a;b]$, a, b – дійсні числа, якщо усі її можливі значення належать цьому відрізку та щільність її ймовірностей $f(x)$ на цій ділянці постійна:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases} \quad (2.23)$$

Функція розподілу $F(X)$ для неперервної випадкової величини X , розподіленої рівномірно на проміжку (a, b) , має вигляд:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (2.24)$$

Графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$ наведені на рис.2.10 і рис.2.11 відповідно:

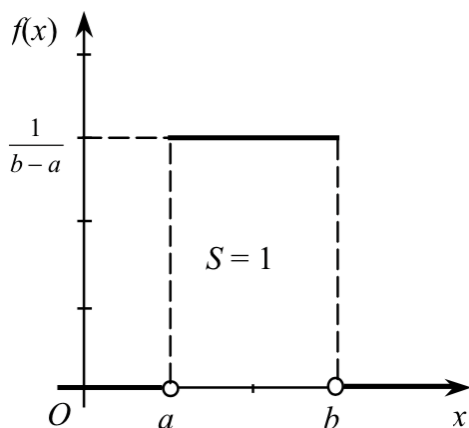


Рис.2.10. Графік щільності.

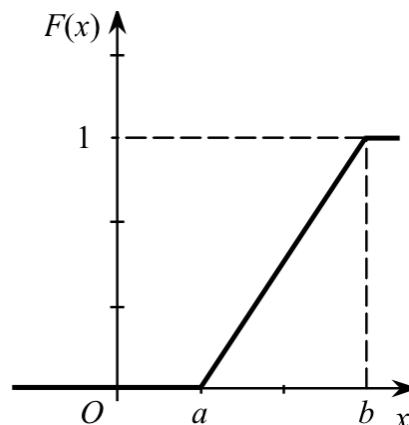


Рис.2.11. Графік функції розподілу.

Основні числові характеристики рівномірного закону розподілу НВВ:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (2.25)$$

Формула для знаходження **ймовірності попадання у проміжок** $(n, m) \in (a, b)$ значень НВВ, що розподілена за рівномірним законом на проміжку (a, b) :

$$P(n < X < m) = \frac{m-n}{b-a}. \quad (2.26)$$

Приклад 2.10. Потяги метрополітену ходять з інтервалом 2 хвилини. Пасажир виходить на платформу в будь-який момент часу. Яка ймовірність того, що чекати пасажиру доведеться не більше, як півхвилини? Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X – час очікування потягу.

Розв'язання. Неперервна випадкова величина X – час чекання потягу на відріжку $[0; 2]$ має рівномірний розподіл $f(x) = \frac{1}{2}$. Отже, ймовірність того, що пасажиру доведеться чекати не більше як півхвилини, знаходиться наступним чином:

$$P(X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{4}.$$

Знайдемо основні числові характеристики:

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ (хв.)}; D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}; \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,58 \text{ (хв.)}. \blacklozenge$$

2.4.2. Показниковий закон розподілу

Означення. Неперервна випадкова величина X (невід'ємна) має **показниковий (або експоненціальний) розподіл**, якщо щільність її ймовірностей має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Додатна величина $\lambda = const > 0$ називається **параметром показникового розподілу**, характеризує інтенсивність подій, яка є постійною та не залежить від часу (інтенсивність відмов – число відмов в одиницю часу).

Функція розподілу $F(X)$ для неперервної випадкової величини X , розподіленої експоненціально, має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Графіки функцій $f(x)$ та $F(X)$ наведені на рис.2.12 і рис.2.13 відповідно:

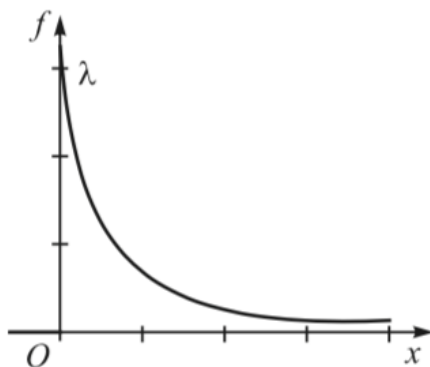


Рис.2.12. Графік щільності.

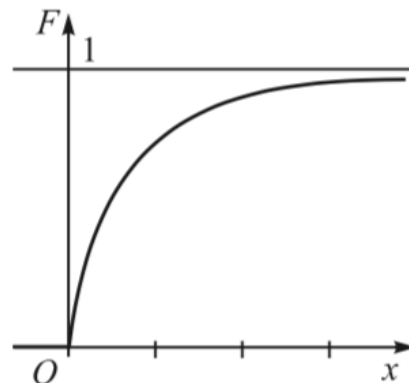


Рис.2.13. Графік функції розподілу.

Зауваження. Для експоненціального закону розподілу ймовірність безвідмовної роботи розподіл часу безвідмовної роботи не залежить від, того

скільки часу технічний засіб (ТЗ) пропрацював до початку відліку від моменту першого ввімкнення. Інші закони розподілу такої властивості не мають, оскільки в них $\lambda \neq const$, а залежить від часу.

Основні *числові характеристики* показникового закону розподілу неперервної випадкової величини:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.29)$$

Формула для знаходження *ймовірності попадання у проміжок* (a, b) значень НВВ, що розподілена за показниковим законом на цьому проміжку:

$$P(a < X < b) = 1 - e^{-\lambda b}, \quad \text{якщо } a < 0, \quad (2.30)$$

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}, \quad \text{якщо } a \geq 0. \quad (2.31)$$

Приклад 2.11. Час ремонту пилососу є випадковою величиною X , розподіленою за показниковим законом. Яка ймовірність того, що доведеться ремонтувати пилосос не менше 20 днів при середньому часі ремонту 15 днів? Знайти щільність ймовірності, функцію розподілу та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Розв'язання. За умовою середній час ремонту – 15 днів, тобто

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = 15 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{15}.$$

$$\text{Отже, щільність ймовірності: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} e^{-\frac{1}{15}x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{Функція розподілу: } F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{15}x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ймовірність того, що доведеться ремонтувати не менше 20 днів:

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - (1 - e^{-\frac{20}{15}}) = e^{-\frac{20}{15}} \approx 0,264.$$

Середнє квадратичне відхилення НВВ X : $\sigma(X) = M(X) = 15$ (днів).♦

2.4.3. Нормальний закон розподілу.

Означення. Неперервна випадкова величина X розподілена за **нормальним законом** з параметрами a, σ , якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.32)$$

Основні числові характеристики:

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma. \quad (2.33)$$

Отже, *параметр* нормального розподілу a є математичним сподіванням (центром розподілу), а *параметр* σ є характеристикою розсіювання. В цьому полягає їхній ймовірнісний зміст.

Нормальний закон розподілу ймовірностей НВВ займає особливе місце серед інших розподілів, оскільки являється основним в багатьох практичних дослідженнях. Його ще називають **законом Гауса**. Графік функції $f(x)$ називають **нормальною кривою** або **кривою Гауса**. Цей закон розподілу зустрічається доволі часто і відіграє важливу роль у різних прикладних застосуваннях теорії ймовірностей, особливо в побудові статистичних моделей (статистичні розподіли при $n \rightarrow \infty$ прямують до нормального).

На рис.2.14 та рис.2.15 наведені графіки щільності нормального розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

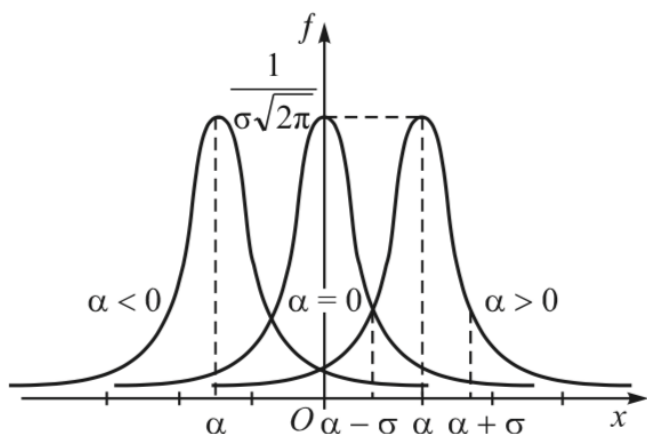


Рис.2.14.

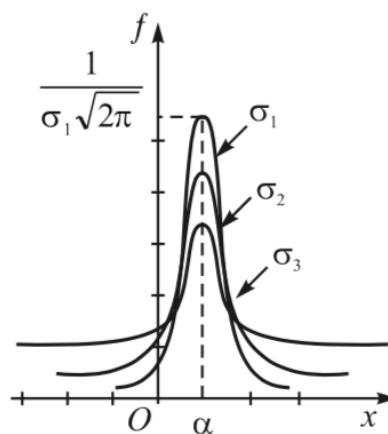


Рис.2.15.

Якщо $a=0$, $\sigma=1$, то нормальний розподіл називається **нормованим**.

Щільність імовірності для нього $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Це **функція Гауса**, значення якої наведені в додатку 1.

Ймовірність попадання нормально розподіленої НВВ X на ділянку від α до β виражається формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \quad (2.34)$$

де $F(x)$ – функція розподілу неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx,$$
$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (2.35)$$

Цей інтеграл неможливо обчислити безпосередньо, оскільки він не виражається через елементарні функції. Тому для знаходження ймовірності $P(\alpha < X < \beta)$ за цією формулою використовують зв'язок між **функцією розподілу**

та **функцією Лапласа** $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, значення якої наведені в додатку 2, тоді:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (2.36)$$

Ймовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини X у проміжок довжиною 2ε , **симетричний щодо центру розсіювання** ($M(X) = a$), виражається формулою:

$$P(|x - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \quad (2.37)$$

Якщо $\varepsilon = 3\sigma$, то $P(|x - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0,9973$. Це означає, що практично вірогідною вважається подія, яка полягає в тому, що неперервна випадкова величина, розподілена нормально, належить інтервалу $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. Це правило називається **правилом трьох сигм** 3σ .

Якщо закон розподілу НВВ X невідомий, але одержані статистичні дані говорять про те, що практичне відхилення її значень від математичного сподівання не перевищує 3σ , тоді можна припустити, що X – нормально розподілена випадкова величина.

Приклад 2.12. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X є функція. Знайти:

1) ймовірність того, що випадкова величина X набуде значень з інтервалу $(12;14)$;

2) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ буде менше за 2.

Розв'язання.

$$1) f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ а за умовою } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}} \text{ отже, } \sigma = 2,$$

$a = 10 = M(X)$, оскільки $2\sigma^2 = 8$, то $\sigma^2 = 4, \sigma = 2$.

Ймовірність того, що $X \in (12;14)$, обчислимо за формулою (2.36):

$$\begin{aligned} P(12 < X < 14) &= \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \\ &= \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359. \end{aligned}$$

Отже, лише близько 13,6% значень величини X припадає на інтервал $(12;14)$.

2) за формулою (2.37):

$$P(|X - 10| < 2) = 2\Phi\left(\frac{2}{2}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення рівномірно розподіленої НВВ на відрізку $[a;b]$.
2. Якою формулою задається функція розподілу рівномірно розподіленої НВВ на відрізку $[a;b]$?
3. Наведіть основні числові характеристики для рівномірно розподіленої

НВВ на відрізок $[a;b]$.

4. Дайте означення НВВ розподіленої за показниковим законом.
5. Наведіть основні числові характеристики для показникового розподілу.
6. Визначте щільність розподілу ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини.
7. Сформулюйте правило трьох сигм.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -4, \\ \frac{a(x+4)^2}{16}, & -4 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти параметр a , аналітичний вираз для щільності, імовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $(-2;5)$.

Задача 2. При яких параметрах a і b функція

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \sin x, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

буде функцією розподілу деякої випадкової величини X ? Знайти щільність даної випадкової величини.

Задача 3. ВВ задана щільністю

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ a \cos x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Визначити значення параметр a , аналітичний вираз для функції розподілу.

Знайти ймовірність потрапляння ВВ в проміжок $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Задача 4. Випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на відріжку $[2;5]$. Знайти аналітичні вирази для щільності та функції розподілу цієї випадкової величини. Побудувати їхні графіки. Знайти ймовірність потрапляння ВВ в інтервал $(0;3]$.

Задача 5. Знайдіть значення функції розподілу ймовірностей в точці $X = 200$, якщо ВВ розподілена нормально з середнім $a = 100$ та дисперсією $\sigma^2 = 2500$.

Задача 6. Поїзди метро йдуть з інтервалом 2 хв. Вважаючи, що час X очікування поїзда на зупинці має рівномірний розподіл, знайти аналітичні вирази для щільності та функції розподілу цієї випадкової величини. Побудувати їхні графіки. Знайти ймовірність того, що час очікування перевищуватиме 30 с.

Задача 7. Нормальний закон розподілу випадкової величини X задано функцією розподілу $F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t+1)^2}{32}} dt$.

Побудувати графік функції $f(x)$.

Обчислити $P\{-5 < X < 3\}$, $P\{|X + 1| < 12\}$.

Задача 8. Випадкова величина X має нормальний розподіл із параметрами a, σ . Записати вираз для щільності та функції розподілу ВВ X . Знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $(\alpha; \beta]$, якщо:

1) $a = 0, \sigma = 1, \alpha = 0, \beta = 5$;

2) $a = 5, \sigma = 3, \alpha = 2, \beta = 8$;

3) $a = 9, \sigma = 2, \alpha = 3, \beta = 15$.

Задача 9. Щільність нормально розподіленої випадкової величини має вигляд $f(x) = c \cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$. Знайти параметри c, a, σ . Порівняти ймовірності потрапляння ВВ у проміжки $(-9; 3]$ і $(4; 100]$.

Задача 10. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 3$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $(\alpha; \beta]$, якщо: 1) $\alpha = -2, \beta = -1$; 2) $\alpha = 2, \beta = 3$.

Задача 11. Випадкова величина X має експоненціальний розподіл. Ймовірність того, що ця ВВ набуде значення з проміжку $[0;5]$, дорівнює $0,7$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[7;9]$.

Задача 12. Ціна поділки вимірювального приладу дорівнює $0,5$. Показники округлюються до ближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відрахуванні буде зроблено похибку, яка перевищує $0,01$ од.

Задача 13. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює $0,1$ А. Показання округлюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде допущено похибку, яка перевищуватиме $0,02$ А.

Задача 14. Організатор антикварного аукціону допускає, що пропозиція ціни за деяку картину буде рівномірно розподіленою випадковою величиною в інтервалі від 5 тис. до 100 тис. грн. Знайти: 1) диференціальну функцію; 2) ймовірність продажу картини за ціну меншу від 20 тис. грн; 3) ймовірність продажу картини за ціну вищу за 100 тис.грн.

Задача 15. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 4$. Записати $f(X)$, $F(X)$. Знайти $P(0,1 < X < 1,5)$. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 16. Неперервна випадкова величина X є нормально розподіленою з математичним сподіванням $a = -7$ та дисперсією $D(X) = 9$. Записати вирази для щільності розподілу ймовірностей та функції розподілу. Побудувати їхні графіки, Обчислити ймовірність попадання ВВ на проміжок $(-5; -3)$. Яка ймовірність відхилення ВВ від її математичного сподівання більше ніж на 2 одиниці?

Задача 17. Знайти математичне сподівання і дисперсію ВВ X , що рівномірно розподілена на інтервалі $(1, 5)$.

Задача 18. Задана щільність розподілу $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$ Знайти $M(X)$, $P(0 < X < M(X))$.

Задача 19. Щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{16}}$, $(-\infty < x < \infty)$. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X < 3)$.

Індивідуальні завдання

Задача 1. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[a; b]$. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$, обчислити ймовірність подій $P(c < X < d)$ та $P(X < \alpha)$

Варіанти	$[a; b]$	$[c; d]$	α	Варіанти	$[a; b]$	$[c; d]$	α
1	[1; 20]	[5; 12]	13	18	[15; 33]	[19; 29]	30
2	[4; 26]	[7; 15]	18	19	[9; 41]	[10; 18]	20
3	[2; 18]	[3; 7]	9	20	[6; 29]	[9; 20]	24
4	[6; 18]	[7; 13]	16	21	[3; 17]	[5; 12]	15
5	[12; 25]	[16; 20]	23	22	[4; 27]	[8; 22]	25
6	[10; 31]	[15; 28]	30	23	[2; 26]	[7; 15]	20
7	[11; 32]	[17; 25]	28	24	[3; 37]	[8; 30]	31
8	[16; 42]	[21; 34]	39	25	[5; 22]	[10; 18]	19
9	[2; 16]	[5; 12]	15	26	[7; 28]	[11; 20]	21
10	[13; 26]	[16; 22]	24	27	[9; 19]	[11; 15]	17
11	[7; 25]	[10; 19]	20	28	[2; 18]	[7; 14]	16
12	[5; 15]	[7; 13]	14	29	[5; 28]	[9; 18]	23
13	[5; 29]	[11; 22]	24	30	[4; 25]	[8; 16]	19
14	[14; 35]	[17; 25]	32				
15	[8; 26]	[10; 21]	25				
16	[5; 17]	[9; 15]	16				
17	[3; 25]	[5; 11]	15				

Задача 2. Випадкова величина має показниковий розподіл з параметром λ .
Визначити $M(X)$, $\sigma(X)$, $M_e, f(x)$, $F(x)$, $P(a < X < b)$ та $P(X \geq c)$.

Варіанти	λ	$[a; b]$	c	Варіанти	λ	$[a; b]$	c
1	3	[1; 2]	2,3	18	3	[0,3; 1]	1,5
2	4	[1,3; 2]	2,5	19	2	[0,4; 12]	1,2
3	2	[0,4; 2]	3,1	20	4	[0,5; 1]	0,8
4	6	[2; 2,8]	3	21	6	[1,6; 2,2]	2,6
5	7	[0,5; 1]	0,6	22	7	[2; 2,6]	2,4
6	2	[0,2; 1]	2,5	23	3	[1,8; 2,5]	3
7	4	[1,5; 2]	2,8	24	4	[2; 2,0]	2,9
8	6	[1,8; 3]	2,1	25	6	[0,3; 1]	1,5
9	3	[1,2; 2,1]	3	26	7	[0,4; 1,5]	2
10	7	[1,3; 2]	1,5	27	2	[0,7; 2]	1,8
11	6	[1,8; 2,5]	2	28	2	[0,8; 2]	2,5
12	2	[0,2; 1,5]	1,6	29	4	[0,1; 1]	1,5
13	4	[1,3; 2,1]	2	30	3	[0,3; 2]	2
14	3	[1,1; 2,4]	2,5				
15	6	[1; 2,5]	1,5				
16	7	[2,1; 3]	3				
17	2	[1,5; 2,1]	2				

Задача 3. Випадкова величина має нормальний розподіл з параметрами a та σ . Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$, схематично побудувати їх графіки. Знайти ймовірності $P(\alpha < X < \beta)$.

Варіанти	a	σ	α	β	Варіанти	a	σ	α	β
1	-1	3	-3	1	18	4	6	0	7
2	-2	3	-3	2	19	-4	2	-5	-3
3	2	2	0	1	20	-3	1	-4	2
4	-1	4	-2	2	21	-1	2	-2	1
5	1	2	-1	1	22	-2	3	-4	3
6	3	3	1	4	23	2	4	-1	3
7	-1	1	-2	0	24	-2	5	-5	3
8	-2	3	-4	1	25	-3	2	-4	1
9	-2	5	-6	1	26	3	2	2	4
10	1	4	-3	2	27	-3	3	-6	1
11	1	3	-2	2	28	-2	6	-7	4
12	-1	3	-3	1	29	2	6	-2	7
13	-1	2	-2	1	30	-1	6	-5	2
14	-5	2	-6	-2					
15	5	2	4	6					
16	-4	5	-7	-1					
17	1	6	-3	2					

2.5. СИСТЕМИ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

2.5.1. Поняття про систему випадкових величин

Раніше ми розглядали розподіли окремих випадкових величин – дискретних та неперервних. Такі випадкові величини називаються *одновимірними*.

Означення. *Системою випадкових величин називають сукупність випадкових величин, що розглядаються разом.*

Приклади.

1. При стрільбі з гармати ми спостерігаємо відхилення від цілі як по відстані, так і по напрямку. Система 2 випадкових величин: X_1 – відхилення по відстані, X_2 – відхилення по напрямку.
2. Успішність випускника закладу вищої освіти характеризується системою n випадкових величин $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ – оцінки з різних навчальних дисциплін.
3. Ймовірність одержання певної оцінки на іспиті залежить від пропусків занять протягом семестру і під час сесії, від здоров'я, психологічного стану.

Означення. *Одночасна поява внаслідок проведення експерименту n випадкових величин з певною ймовірністю являє собою n -вимірну (багатовимірну) випадкову величину, яку називають також системою n випадкових величин, або n -вимірним випадковим вектором (X_1, X_2, \dots, X_n) , або випадковою точкою в n -вимірному просторі з координатами (X_1, X_2, \dots, X_n) .*

При $n=2$ маємо систему двох випадкових величин (X, Y) , яку можна зобразити як випадкову точку $M(X, Y)$ на площині xOy або як випадковий вектор \overline{OM} .

Багатовимірні випадкові величини бувають *дискретними* та *неперервними* (компоненти цих величин відповідно будуть дискретними та неперервними).

Для опису системи випадкових величин складають її *закон розподілу* – співвідношення, яке встановлює взаємозв'язок між областями можливих значень

системи випадкових величин та ймовірностями появи системи в цих областях.

2.5.2. Система двох дискретних випадкових величин, її способи задання та основні числові характеристики

Нехай задано дві дискретні випадкові величини X та Y , які утворюють *двовимірну випадкову величину* (X, Y) .

Означення. *Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини називають перелік можливих значень цієї випадкової (x_i, y_k) та їх ймовірностей $p(x_i, y_k)$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$.*

Таблиця (матриця) розподілу

Для завдання такої величини досить вказати всі її можливі значення – пари (x_i, y_j) та ймовірності цих значень $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$. Це зручно робити у вигляді *матриці розподілу* – прямокутної таблиці з двома входами, в якій записані всі ймовірності:

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}.$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	\dots	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2m}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_k	p_{k1}	p_{k2}	\dots	p_{km}

$p_{ij} = p((Y = y_i) \cap (X = x_j))$ – ймовірність сумісної появи двох подій.

$$p_{y_j} = \sum_{i=1}^m p_{ij}; \quad p_{x_i} = \sum_{i=1}^k p_{ij}.$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} = \sum_{i=1}^k p_{x_i} = \sum_{j=1}^m p_{y_j} = 1 \text{ – умова нормування.} \quad (2.38)$$

За матрицею розподілу системи (X, Y) будують ряди розподілу її складових X і Y , для чого підсумовують ймовірності відповідно в рядках і стовпцях таблиці, тобто ряди розподілу складових X і Y мають вигляд:

X	x_1	x_2	...	x_k
P	$\sum_{j=1}^m P_{1j}$	$\sum_{j=1}^m P_{2j}$...	$\sum_{j=1}^m P_{kj}$

Y	y_1	y_2	...	y_m
G	$\sum_{i=1}^k P_{i1}$	$\sum_{i=1}^k P_{i2}$...	$\sum_{i=1}^k P_{im}$

Приклад 2.13. Знайти закони розподілу компонент двовимірної випадкової величини, закон розподілу якої заданий таблицею:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,3	0,2
y_2	0,06	0,18	0,16

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

Y	y_1	y_2
P	0,6	0,4

Приклад 2.14. Два контролери незалежно один від одного оцінюють якість двох виробів. Ймовірність того, що кожний із виробів буде прийнятий першим контролером, дорівнює 0,9, другим — 0,7. Скласти закон розподілу системи (X, Y) , де X – кількість виробів, прийнятих першим контролером, Y – другим контролером, і ряди розподілу складових системи X і Y .

Розв'язання. Означимо випадкові величини:

X – кількість виробів, прийнятих першим контролером.

Y – другим контролером, прийнятих другим контролером.

I контролер – якісний товар - $p_1 = 0,9$, бракований товар - $q_1 = 0,1$.

II контролер – якісний товар - $p_2 = 0,7$, бракований товар - $q_2 = 0,3$.

Можливі значення випадкових величин: $X=0,1,2$, $Y=0,1,2$.

X	Y	P_{ij}
0	0	$P_{00}=0,1^2 \cdot 0,3^2=0,0009$
0	1	$P_{01}=0,1^2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 2=0,0042$
0	2	$P_{02}=0,1^2 \cdot 0,7^2=0,0049$
1	0	$P_{10}=0,9 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 0,3^2=0,0162$
1	1	$P_{11}=0,1 \cdot 0,9 \cdot 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 2=0,0756$
1	2	$P_{12}=0,1 \cdot 0,9 \cdot 2 \cdot 0,7^2=0,0882$
2	0	$P_{20}=0,9^2 \cdot 0,3^2=0,0729$
2	1	$P_{21}=0,9^2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 2=0,3402$
2	2	$P_{22}=0,9^2 \cdot 0,7^2=0,3969$

$X \backslash Y$	0	1	2	$\sum X$
0	0,0009	0,0042	0,0049	0,01
1	0,0162	0,0756	0,0882	0,18
2	0,0729	0,3402	0,3969	0,81
$\sum Y$	0,09	0,42	0,49	1

X	0	1	2
P	0,01	0,18	0,81

Y	0	1	2
P	0,09	0,42	0,49

ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ

Означення. Функцією розподілу ймовірностей (інтегральною) системи двох випадкових величин (X, Y) називають таку функцію $F(x, y)$ двох

аргументів x, y , яка визначає ймовірність спільної появи подій $((X < x) \cap (Y < y))$, тобто:

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y). \quad (2.39)$$

Геометрично функція $F(x, y)$ визначає потрапляння випадкової точки (X, Y) у нескінченний квадрант із вершиною в точці $M(x, y)$, розміщений ліворуч і нижче від цієї точки (рис.2.16.).

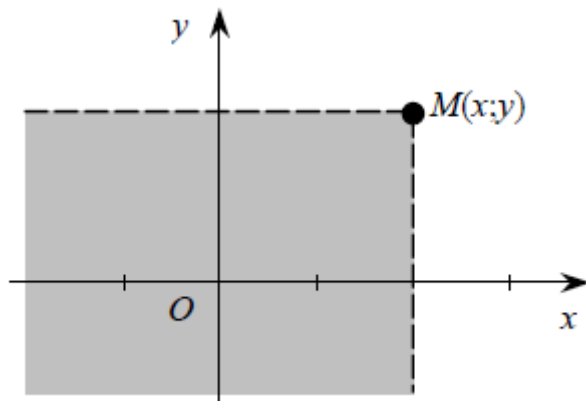


Рис.2.16. Нескінченний квадрант.

Властивості функції розподілу

Властивість 1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$, оскільки $0 \leq P((X < x) \cap (Y < y)) \leq 1$.

Властивість 2. Якщо один із аргументів $F(x, y)$ прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу одного аргументу, що не прямує до $+\infty$, а саме:

- $\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, +\infty) = F(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(+\infty, y) = F(y)$.

Властивість 3. Для функції розподілу виконуються граничні співвідношення:

- $F(+\infty, +\infty) = P(X < +\infty, Y < +\infty) = 1$, оскільки подія $(X < +\infty, Y < +\infty)$ – достовірна.
- $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$, оскільки події $(X < -\infty)$ та $(Y < -\infty)$ – неможливі.

Властивість 4. $F(x, y)$ є неспадною функцією аргументів, тобто при $x_2 > x_1$ $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$, а при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

Властивість 5. Ймовірність влучення точки (X, Y) в довільний прямокутник

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (2.40)$$

Приклад 2.15. Два контролери незалежно один від одного оцінюють якість двох виробів. Ймовірність того, що кожний із виробів буде прийнятий першим контролером, дорівнює 0,9, другим — 0,7. Знайти функцію розподілу $F(X, Y)$, де X — кількість виробів, прийнятих першим контролером, Y — другим контролером.

Розв'язання.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,0009	0,0042	0,0049
1	0,0162	0,0756	0,0882
2	0,0729	0,3402	0,3969

X	0	1	2
P	0,01	0,18	0,81

Y	0	1	2
P	0,09	0,42	0,49

Побудуємо одновимірні функції розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,01, & 0 < x \leq 1, \\ 0,19, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases} \quad F(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 0,09, & 0 < y \leq 1, \\ 0,51, & 1 < y \leq 2, \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

Побудуємо таблицю значень $F(x, y) = F(x) \cdot F(y)$:

$X \backslash Y$	$y \leq 0$	$0 < y \leq 1$	$1 < y \leq 2$	$y > 2$
$x \leq 0$	$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 0,09 = 0$	$0 \cdot 0,51 = 0$	$0 \cdot 1 = 0$
$0 < x \leq 1$	$0,01 \cdot 0 = 0$	$0,01 \cdot 0,09 = 0,0009$	$0,01 \cdot 0,51 = 0,0051$	$0,01 \cdot 1 = 0,01$
$1 < x \leq 2$	$0,19 \cdot 0 = 0$	$0,19 \cdot 0,09 = 0,0171$	$0,19 \cdot 0,51 = 0,0969$	$0,19 \cdot 1 = 0,19$
$x > 2$	$1 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 0,09 = 0,09$	$1 \cdot 0,51 = 0,51$	$1 \cdot 1 = 1$

2.5.3. Основні числові характеристики для випадкових величин X, Y , що утворюють систему

Задано систему (X, Y) дискретних випадкових величин задано матрицею розподілу і побудовані ряди розподілу складових X, Y .

1) Числові характеристики для випадкової величини X :

$$\checkmark M(X) = \sum_{i=1}^k x_i \sum_{j=1}^m p_{ij} = x_1 \sum_{j=1}^m p_{1j} + x_2 \sum_{j=1}^m p_{2j} + \dots + x_k \sum_{j=1}^m p_{kj} ;$$

$$\checkmark D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \sum_{j=1}^m p_{ij} - M^2(X) ;$$

$$\checkmark \sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

2) Числові характеристики для випадкової величини Y :

$$\checkmark M(Y) = \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=1}^k p_{ij} = y_1 \sum_{i=1}^k p_{i1} + y_2 \sum_{i=1}^k p_{i2} + \dots + y_k \sum_{i=1}^k p_{im} ;$$

$$\checkmark D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{j=1}^m y_j^2 \sum_{i=1}^k p_{ij} - M^2(Y) ;$$

$$\checkmark \sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

3) Кореляційний момент.

При вивченні системи двох і більше випадкових величин доводиться з'ясувати наявність зв'язку між цими величинами та його характер. З

Відповідною метою застосовується так званий **кореляційний момент (коваріація) K_{xy}** – математичне сподівання добутку відхилень цих величин від їхніх математичних сподівань:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) = K_{xy} &= M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))] = M(XY) - M(X)M(Y) = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i x_j p_{ij} - M(X)M(Y). \end{aligned} \quad (2.41)$$

У разі $K_{xy} = 0$ зв'язок між величинами X та Y , що належить системі (X, Y) , відсутній, тобто величини *незалежні*. Якщо $K_{xy} \neq 0$, то між відповідними X та Y кореляційний зв'язок існує, тобто величини *залежні*.

Властивості коваріації:

- 1) $K_{xy} = K_{yx}$ – коваріація симетрична.
- 2) Якщо X та Y незалежні, то $K_{xy} = 0$.
- 3) $K_{xx} = D(X)$, $K_{yy} = D(Y)$.
- 4) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K_{xy}$.
- 5) $K_{x, Cy} = K_{Cx, y} = CK_{xy}$.
- 6) $K_{xy} = K_{x+C, y} = K_{x, C+y} = K_{x+C, y+C}$.
- 7) $|K_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$.

4) Коефіцієнт кореляції.

Тісноту кореляційного зв'язку характеризує коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}, \quad |r_{xy}| \leq 1. \quad (2.42)$$

Отже, якщо випадкові величини X та Y є незалежні, то $K_{xy} = 0$ і

Рівність нулю r_{xy} є необхідною, але не достатньою умовою незалежності випадкових величин. Справді, може існувати система залежних випадкових величин, в якій коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система двох випадкових величин (X, Y) , яка рівномірно розподілена

всередині кола радіуса R із центром в початку координат.

Означення. Дві випадкові величини X і Y називають *некорельованими*, якщо $r_{xy} = 0$, і *корельованими*, якщо $r_{xy} \neq 0$.

Отже, якщо X та Y незалежні, то вони будуть і некорельованими. Але з некорельованості випадкових величин у загальному випадку не випливає їх незалежність.

При лінійній функціональній залежності $Y = aX + b$ між величинами X та Y коефіцієнт кореляції $r_{xy} = \pm 1$, причому його знак збігається зі знаком коефіцієнта a .

Якщо ж величини X та Y пов'язані будь-якою іншою залежністю, то $-1 < r_{xy} < 1$.

Якщо $r_{xy} > 0$, то говорять, що випадкові величини в системі мають *додатний кореляційний зв'язок*, тобто при зростанні однієї величини друга також зростає. Якщо $r_{xy} < 0$, то говорять, що випадкові величини в системі мають *від'ємний кореляційний зв'язок*, тобто при зростанні однієї величини друга спадає.

Приклад 2.16. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) задано матрицею розподілу:

$X \backslash Y$	$y_1 = 2,4$	$y_2 = 4,4$	$y_3 = 6,4$
$x_1 = 5,2$	$0,1a$	$2a$	$1,9a$
$x_2 = 10,2$	$2a$	$0,2a$	$0,8a$
$x_3 = 15,2$	$0,9a$	$1,8a$	$0,3a$

1) Визначити a і всі основні числові характеристики:

$$M(X), D(X), \sigma(X), M(Y), D(Y), \sigma(Y), K_{xy}, r_{xy}.$$

2) Знайти $P(2,4 \leq Y < 6,4; 5,2 < X \leq 15,2)$.

Розв'язання. За умовою нормування маємо:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P_{ij} = 0,1a + 2a + 1,9a + 2a + 0,2a + 0,8a + 0,9a + 1,8a + 0,3a = 1, \quad a = 0,1.$$

Тоді матриця розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) набуває вигляду:

$X \backslash Y$	$y_1 = 2,4$	$y_2 = 4,4$	$y_3 = 6,4$	$\sum X$
$x_1 = 5,2$	0,01	0,2	0,19	0,4
$x_2 = 10,2$	0,2	0,02	0,08	0,3
$x_3 = 15,2$	0,09	0,18	0,03	0,3
$\sum Y$	0,3	0,4	0,3	1

Обчислимо основні числові характеристики:

1) для випадкової величини X :

$$M(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 5,2 \cdot 0,4 + 10,2 \cdot 0,3 + 15,2 \cdot 0,3 = 2,08 + 3,06 + 4,56 = 9,7,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = (5,2)^2 \cdot 0,4 + (10,2)^2 \cdot 0,3 + (15,2)^2 \cdot 0,3 =$$

$$= 10,816 + 31,212 + 69,312 = 111,34,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 111,34 - 94,09 = 17,25,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 4,15;$$

2) для випадкової величини Y :

$$M(Y) = \sum_{k=1}^3 y_k p_{y_k} = 2,4 \cdot 0,3 + 4,4 \cdot 0,4 + 6,4 \cdot 0,3 = 0,72 + 1,76 + 1,92 = 4,4,$$

$$M(Y^2) = \sum_{k=1}^3 y_k^2 p_k = (2,4)^2 \cdot 0,3 + (4,4)^2 \cdot 0,4 + (6,4)^2 \cdot 0,3 =$$

$$= 1,728 + 7,744 + 12,288 = 21,76,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 21,76 - (4,4)^2 = 2,4,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 1,55;$$

3) для випадкових величин X та Y :

$$M(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 y_i x_k p_{ik} = 2,4 \cdot (5,2 \cdot 0,01 + 10,2 \cdot 0,2 + 15,2 \cdot 0,09) +$$

$$+ 4,4(5,2 \cdot 0,2 + 10,2 \cdot 0,02 + 15,2 \cdot 0,18) + 6,4(5,2 \cdot 0,19 + 10,2 \cdot 0,08 + 15,2 \cdot 0,03) = 40,28,$$

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = 40,28 - 9,7 \cdot 4,4 = 1,4.$$

Оскільки $K_{xy} \neq 0$, то між даними величинами існує кореляційний зв'язок.

- 4) Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислюємо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{1,4}{4,15 \cdot 1,55} = 0,37.$$

Оскільки $r_{xy} = 0,37 > 0$, то говорять, що випадкові величини в системі мають додатний помірний кореляційний зв'язок.♦

2.5.4. Умовний закон розподілу

Означення. Дві випадкові величини називаються **незалежними**, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, яких значень набуває інша.

Для залежних випадкових величини вводиться поняття умовних законів розподілу випадкових величини.

Означення. Умовним законом розподілу випадкової величини, що входить до системи (X, Y) , називається закон розподілу, який знайдений за умови, що інша випадкова величина набула деякого значення.

$$P(Y = y_i / X = x_i) = \frac{P(Y = y_i, X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^k p_{ij}}. \quad (2.43)$$

$P(Y = y_i / X = x_i)$ – умовна ймовірність того, що випадкова величина Y набуде значення y_i за умови, що $X = x_i$.

$$P(X = x_i / Y = y_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_i)}{P(Y = y_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^m p_{ij}}. \quad (2.44)$$

$P(X = x_i / Y = y_i)$ – умовна ймовірність того, що випадкова величина X набуде

значення x_i за умови, що $Y = y_i$.

Приклад 2.17. Задано матрицю розподілу системи випадкових величин:

$X \backslash Y$	-1	0	$\sum X$
1	0,2	0,15	0,35
2	0,1	0,15	0,25
3	0,3	0,1	0,4
$\sum Y$	0,6	0,4	1

X	1	2	3
P	0,35	0,25	0,4

Y	-1	0
P	0,6	0,4

1) Записати умовний розподіл випадкової величини X за умови, що $Y = -1$

$$P(X = 1 / Y = -1) = \frac{P(X = 1, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 2 / Y = -1) = \frac{P(X = 2, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 3 / Y = -1) = \frac{P(X = 3, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}.$$

Умовний закон розподілу X за умови, що $Y = -1$:

X	1	2	3
$P(X / Y = -1)$	1/3	1/6	1/2

2) Записати умовний розподіл випадкової величини Y за умови, що $X = 3$:

$$P(Y = -1 / X = 3) = \frac{P(Y = -1, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4},$$

$$P(Y = 0 / X = 3) = \frac{P(Y = 0, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}.$$

Умовний закон розподілу Y за умови, що $X = 3$:

Y	-1	0
$P(Y / X = 3)$	3/4	1/4

Зауваження. Якщо безумовні (початкові) розподіли величин X та Y збігаються з відповідними умовними розподілами, то величини X та Y є незалежними. В протилежному випадку – залежними.

Означення. Умовним математичним сподіванням випадкової величини системи називають її математичне сподівання, обчислене за умови, що інша випадкова величина набула певного значення:

$$M(Y / x_i) = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j / x_i) \quad (2.45)$$

$$M(X / y_j) = \sum_{i=1}^k x_i p(x_i / y_j) \quad (2.46)$$

Умовне математичне сподівання $M(Y / x) = \varphi(x)$ називають **функцією регресії** величини Y до X .

Умовне математичне сподівання $M(X / y) = \varphi(y)$ називають **функцією регресії** величини X до Y .

Графіки цих функцій називаються **лініями регресії**.

Питання для самоперевірки

1. Наведіть приклади багатовимірної випадкової величини.
2. Що називається системою випадкових величин.
3. Що означає задати закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) ?
4. Як задається закон розподілу неперервної випадкової величини?
5. Дайте означення функції розподілу $F(X, Y)$ двовимірної випадкової величини.
6. Дайте геометричне тлумачення функції розподілу $F(X, Y)$.
7. Назвіть основні властивості функції розподілу $F(X, Y)$.

8. Записати формули для обчислення математичного сподівання $M(X)$, $M(Y)$.
9. Записати формули для обчислення дисперсії $D(X)$, $D(Y)$ та їх середнього квадратичного відхилення.
10. Що характеризує кореляційний момент системи для двох випадкових величин (X, Y) ? Запишіть формулу і назвіть розмірність K_{xy} .
11. Сформулюйте основні властивості коваріації.
12. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції системи? Яку розмірність він має? Наведіть основні властивості r_{xy} .

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Задано закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) . Знайти: а) закон розподілу компонент; б) математичні сподівання $M(X)$, $M(Y)$; в) дисперсії $D(X)$, $D(Y)$ та $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$; г) K_{xy} , r_{xy} ; д) умовний закон розподілу Y при умові, що $X = X_2$; е) умовні математичні сподівання $M(Y / X = X_2)$:

$x_i \backslash y_j$	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

$x_i \backslash y_j$	-1	0	1
1	0,1	0,15	0,2
2	0,15	0,25	0,15

Задача 2. Задана випадкова величина своїм законом розподілу.

I.

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,15	0,25	0,1	0,3	0,2

II.

x_i	-2	1	2	4
p_i	0,3	0,1	0,25	0,35

Знайти закони розподілу X^2 , X^3 та обчислити їх числові характеристики.

Задача 3. Дискретні величини X та Y задані розподілами. Знайти розподіл $Z = X + Y$ та $M(Z)$, та $D[Z]$.

а)

x_i	10	12	16		y_i	1	2
p_i	0,4	0,1	0,5		p_i	0,2	0,8

б)

x_i	4	10		y_i	1	7
p_i	0,7	0,3		p_i	0,8	0,2

Задача 4. Для визначення середнього часу горіння електроламп в партії з 200 однакових ящиків було взято по 1 лампі. Оцінити ймовірність того, що середній час 200 відібраних ламп відрізняється від середнього часу всієї партії не більше ніж на 5 годин (за модулем), якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення часу горіння в кожному ящику менше 7^2 .

Задача 5. Ймовірність появи випадкової події в кожному з чотирьох незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Розглядаються дві випадкові величини: X — число появи випадкової події в результаті цих експериментів; Y — число експериментів, при яких подія не наставала.

Обчислити: $M(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $\sigma(Y)$, K_{xy} , r_{xy} .

Задача 6. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею:

	X	2	4	6	8
Y					
-6		0,1a	0,5a	0,4a	a
-4		0,9a	0,4a	0,5a	0,2a
-2		a	2,1a	1,1a	1,8a

Обчислити r_{xy} , $M(X/y=4)$, $M(Y/x=-2)$.

Задача 7. П'ять приладів випробовують на надійність. Ймовірність того, що окремо взятий прилад витримає режим випробування, дорівнює 0,85. Нехай X — число приладів, які витримають випробування, а Y — число приладів, які не витримають їх. Побудувати закон спільного розподілу X і Y і обчислити K_{xy} , r_{xy} .

Задача 8. У трьох посудинах містяться однотипні вироби. У першій посудині міститься 6 стандартних і 4 браковані вироби; у другій – 8 стандартних і 2 браковані, а у третій – 9 стандартних і 1 бракований виріб. Із кожної посудини навмання беруть по одному виробу. Нехай X – поява числа стандартних виробів серед трьох навмання взятих, а Y – поява відповідного числа бракованих. Побудувати закон розподілу X і Y та обчислити K_{xy}, r_{xy} .

Задача 9. Брак продукції заводу внаслідок дефекту A становить 3%, а внаслідок дефекту B – 4,5%. Стандартна продукція становить 95%. Знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції між дефектами A і B .

Задача 10. Двоє робітників виготовляють однотипні вироби. Імовірність того, що виріб, виготовлений першим робітником, є стандартним, дорівнює 0,9; для другого робітника ця ймовірність дорівнює 0,85. Позначивши через X число стандартних виробів, виготовлених першим робітником, а через Y число стандартних виробів, виготовлених другим робітником, побудувати функції розподілу $F(x, y)$, системи випадкових величин (X, Y) . $F(x, y)$ подано в табличній формі:

X \ Y	$x \leq 0$	$0 < x \leq 1$	$1 < x \leq 2$	$x > 2$
$y \leq 0$	0	0	0	0
$0 < y \leq 1$	0	0,000225	0,00405	0,01
$1 < y \leq 2$	0	0,00405	0,0455	0,18
$y > 2$	0	0,0225	0,225	1

Індивідуальні завдання

Задача 1. Система двох дискретних випадкових величин $(X; Y)$ задана таблицею розподілу (N – номер варіанта):

x \ y	$-N$	0	1	3
$N-5$	p	0,06	$0,05 + p$	0,08

N	0,04	$0,05 + p$	0,09	$0,01 + \frac{N}{100}$
$N + 3$	0,05	0,04	0,11	$2p$

1. Знайти невідомий параметр системи p .
2. Знайти ряди розподілу кожної випадкової величини X і Y та знайти одновимірні функції їх розподілів.
3. Обчислити числові характеристики системи $(X; Y)$: математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, кореляційний момент, коефіцієнт кореляції.
4. Знайти умовний закон розподілу ДВВ Y при умові, що ДВВ X набуває значення 1, та обчислити відповідне математичне сподівання.
5. Знайти умовний закон розподілу ДВВ X при умові, що $Y = 2$. Обчислити математичне сподівання цього розподілу.

2.6. СИСТЕМИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Якщо компоненти системи двох випадкових величин (X, Y) є неперервними випадковими величинами, то *система* називається *неперервною*.

Означення. Система двох випадкових величин (X, Y) називається неперервною, якщо її функція розподілу $F(x, y)$ є неперервною, диференційовною функцією в кожній точці області визначення та має визначену змішану похідну $F''_{xy}(x, y)$.

Означення. Законом розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) називають співвідношення між усіма можливими значеннями (X, Y) та відповідними їм ймовірностями.

2.6.1. Щільність ймовірності

Означення. Щільність ймовірності (або щільність сумісного розподілу ймовірностей, диференціальна функція розподілу) системи неперервних випадкових величин – друга змішана похідна від функції розподілу:

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (2.47)$$

Графік функції $f(x, y)$ називається *поверхнею розподілу*.

Властивості щільності ймовірності

1. $f(x, y) \geq 0$, тобто функція є невід'ємною;
2. Умова нормування системи двох неперервних випадкових величин:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (2.48)$$

Отже, $P\{-\infty < X < +\infty, -\infty < Y < +\infty\} = 1$.

3. Ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в область $D \subset \Omega$:

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y) dx dy. \quad (2.49)$$

Геометрично ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в область $D \subset \Omega$ – це об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею розподілу $z = f(x,y)$, в основі якого лежить область D (твірні паралельні Oz).

4. Ймовірність попадання випадкових точок X, Y у прямокутну область $D = \{a < X < b, c < Y < d\}$:

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy, \quad (2.50)$$

$$P(a < X < b, c < Y < d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c). \quad (2.51)$$

5. Інтегральна функція розподілу $F(X,Y)$ за відомою функцією щільності $f(x,y)$:

$$F(X,Y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy \quad (2.52)$$

Якщо $\Omega = \{a < X < b, c < Y < d\}$, то:

$$F(X,Y) = \begin{cases} \int_a^x \int_c^y f(x,y) dx dy, & \text{якщо } (x,y) \in \Omega, \\ 0, & \text{якщо } (x,y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.53)$$

6. Функції щільності компонентів X та Y окремо:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy, \quad (2.54)$$

$$f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx. \quad (2.55)$$

2.6.2. Основні числові характеристики для випадкових величин X, Y , що утворюють систему

Задано систему (X, Y) неперервних випадкових величин.

1) Числові характеристики для випадкової величини X :

$$\checkmark M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dxdy ;$$

$$\checkmark D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y)dxdy - (M(X))^2 ;$$

$$\checkmark \sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

2) Числові характеристики для випадкової величини Y :

$$\checkmark M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dxdy ;$$

$$\checkmark D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y)dxdy - (M(Y))^2 ;$$

$$\checkmark \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} .$$

Точка $(M(X); M(Y))$ називається *центром розподілу системи* випадкових величин (X, Y) .

Дисперсії $D(X), D(Y)$ характеризують *розсіювання випадкової точки* (X, Y) в напрямі координатних осей Ox та Oy відповідно.

3) Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції.

Для більш детального опису неперервної системи випадкових величин (X, Y) використовують **кореляційний момент (коваріація)** K_{xy} , який характеризує залежність випадкових величин, та **коефіцієнт кореляції** r_{xy} , який характеризує кількісну міру залежності випадкових величин:

$$K_{xy} = \text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y)dxdy - M(X) \cdot M(Y). \quad (2.56)$$

У разі $K_{xy} = 0$ зв'язок між величинами X та Y , що належить системі (X, Y) , відсутній, тобто величини *незалежні*. Якщо $K_{xy} \neq 0$, то між відповідними X та Y кореляційний зв'язок існує, тобто величини *залежні*.

Формула для обчислення коефіцієнта кореляції для системи неперервних випадкових величин збігається з формулою для обчислення коефіцієнта кореляції для системи дискретних випадкових величин:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad |r_{xy}| \leq 1. \quad (2.57)$$

Для незалежних випадкових величин $r_{xy} = 0$. При лінійній функціональній залежності $Y = aX + b$ між величинами X та Y коефіцієнт кореляції $r_{xy} = \pm 1$, причому його знак збігається зі знаком коефіцієнта a . Якщо ж величини X та Y пов'язані будь-якою іншою залежністю, то $-1 < r_{xy} < 1$.

Якщо $r_{xy} > 0$, то говорять, що випадкові величини в системі мають *додатний кореляційний зв'язок*, тобто при зростанні однієї величини друга також зростає. Якщо $r_{xy} < 0$, то говорять, що випадкові величини в системі мають *від'ємний кореляційний зв'язок*, тобто при зростанні однієї величини друга спадає.

2.6.3. Умовний закон розподілу

Для залежних випадкових величини вводиться поняття умовних законів розподілу випадкових величини.

Означення. *Умовним законом розподілу для неперервних випадкових величин, що входить до системи (X, Y) , називається закон розподілу, який знайдений за умови, що інша випадкова величина набула деякого значення. Визначається умовними щільностями ймовірностей:*

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}, \quad (2.58)$$

$$f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}, \quad (2.59)$$

де $f_1(x)$, $f_2(y)$ визначаються за формулами (2.54) та (2.55).

Отже,

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot f(x/y).$$

Якщо випадкові величини X та Y незалежні, то:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

$$f(x/y) = f_1(x),$$

$$f(y/x) = f_2(y),$$

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Для умовних законів розподілу розглядають числові характеристики – умовне математичне сподівання і умовну дисперсію, які обчислюються за формулами:

$$M(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y/x) dy, \quad D(Y/x) = M(Y^2/x) - (M(Y/x))^2;$$

$$M(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x/y) dx, \quad D(X/y) = M(X^2/y) - (M(X/y))^2.$$

Формули, які виражають умовні математичні сподівання, називаються *рівняннями регресії першого роду*.

Приклад 2.18. Система випадкових величин (X, Y) із невід’ємними складовими має функцію розподілу:

$$F(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Знайти $f(x, y)$ і $P(1 \leq X < 2; 2 \leq Y < 3)$. Дослідити, чи будуть незалежними величини X і Y , які входять до системи.

Розв’язання. Обчислимо ймовірність за допомогою функції розподілу за формулою (2.51):

$$\begin{aligned} P(1 \leq X < 2; 2 \leq Y < 3) &= F(2, 3) - F(1, 3) - F(2, 2) + F(1, 2) = 1 - e^{-2\alpha} - \\ &- e^{-3\beta} + e^{-2\alpha - 3\beta} - 1 + e^{-\alpha} + e^{-3\beta} - e^{-\alpha - 3\beta} - 1 + e^{-2\alpha} + e^{-2\beta} - e^{-2\alpha - 2\beta} + \\ &+ 1 - e^{-\alpha} - e^{-2\beta} + e^{-\alpha - 2\beta} = e^{-2\alpha - 3\beta} - e^{-\alpha - 3\beta} - e^{-2\alpha - 2\beta} + e^{-\alpha - 2\beta} = \\ &= -e^{-\alpha - 3\beta} (-e^{-\alpha} + 1) + e^{-\alpha - 2\beta} (-e^{-\alpha} + 1) = (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-\beta}) e^{-\alpha - 2\beta}. \end{aligned}$$

Для дослідження незалежності X і Y знайдемо щільність розподілу системи

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}:$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \alpha e^{-\alpha x} - \alpha e^{-\alpha x - \beta y}; \quad f(x, y) = \alpha \beta e^{-\alpha x - \beta y} = \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta y}.$$

Щільність розподілу системи подано як добуток двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. Отже, величини, що утворюють систему, незалежні. ♦

Приклад 2.19. Система випадкових величин рівномірно розподілена в даній області D (рис. 2.17.). Знайти $f(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y/x)$, $M(Y/x)$, $D(Y/x)$ й умовну ймовірність $P(0,2 \leq Y < 1,6 / X = 3,5)$.

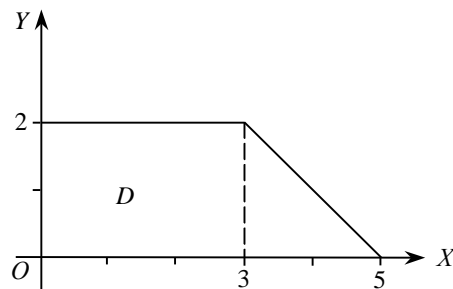


Рис.2.17. Область D .

Розв'язання. Для визначення щільності розподілу даної системи випадкових величин скористаємося її властивістю – умовою нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1,$$

а також тим, що в області D функція $f(x, y) = c$. Тоді:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1; \quad c \iint_D dx dy = 1.$$

Оскільки даний подвійний інтеграл чисельно дорівнює площі області, обчислимо

$$\text{його як площу трапеції } S_D = \frac{3+5}{2} \cdot 2 = 8.$$

Тоді

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (x, y) \notin D; \\ \frac{1}{8}, & \text{якщо } (x, y) \in D. \end{cases}$$

Знайдемо щільність розподілу $f_1(x)$. За формулою $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$.

Якщо значення $x < 0$, то щільність розподілу системи дорівнює нулю, тому:

$$f_1(x) = 0.$$

Якщо $x \in (0, 3]$, то область обмежена лініями $y = 0$ і $y = 2$, тому:

$$f_1(x) = \int_0^2 \frac{1}{8} dy = \frac{1}{4}.$$

Якщо $x \in (3, 5]$, обмеження області D за y такі: знизу $y = 0$, угорі $y = 5 - x$.

Звідси:

$$f_1(x) = \int_0^{5-x} \frac{1}{8} dy = \frac{5-x}{8}.$$

Якщо $x > 5$, щільність розподілу системи дорівнює нулю, тому:

$$f_1(x) = 0.$$

Функція щільності розподілу для X :

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо } 0 < x \leq 3; \\ \frac{5-x}{8}, & \text{якщо } 3 < x \leq 5; \\ 0, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Знайдемо умовну щільність розподілу, скориставшись формулою

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}:$$

$$f_2(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } 0 < y < 2, 0 < x \leq 3; \\ \frac{1}{5-x}, & \text{якщо } 0 < y < 5-x, 3 < x < 5. \end{cases}$$

Умовна щільність має два відмінні від нуля аналітичні вирази, кожний з яких має певне умовне математичне сподівання та дисперсію:

- $x \in (0, 3)$, то $M(Y/x) = \int_0^2 \frac{1}{2} y dy = \frac{y^2}{4} \Big|_0^2 = 1,$

- $x \in (3,5)$, то $M(Y/x) = \int_0^{5-x} \frac{y}{5-x} dy = \frac{1}{5-x} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{5-x} = \frac{5-x}{2}$.

$$M(Y/x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 < x \leq 3; \\ \frac{5-x}{2}, & \text{якщо } 3 < x < 5. \end{cases}$$

Для знаходження умовної дисперсії обчислимо $M(Y^2/x)$.

- $x \in (0,3]$:

$$M(Y^2/x) = \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}; \quad D(Y/x) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3},$$

- $x \in (3,5)$:

$$M(Y^2/x) = \int_0^{5-x} \frac{y^2}{5-x} dy = \frac{1}{5-x} \cdot \frac{y^3}{3} = \frac{(5-x)^2}{3};$$

$$D(Y/x) = \frac{(5-x)^2}{3} - \frac{(5-x)^2}{4} = \frac{(5-x)^2}{12}.$$

$$D(Y/x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{якщо } 0 < x \leq 3; \\ \frac{(5-x)^2}{12}, & \text{якщо } 3 < x < 5. \end{cases}$$

Для обчислення умовної ймовірності потрібно проінтегрувати умовну щільність на відповідному проміжку:

$$P(0,2 \leq Y < 1,6 / X = 3,5) = \int_{0,2}^{1,6} f_2(y/x) dy.$$

Якщо $x \in (3,5]$, то $0 < y < 5 - x$. Тоді при $x = 3,5$ верхня межа для значення $y = 1,5$.

Підставляючи у вираз для умовної щільності значення $x = 3,5$, маємо:

$$P(0,2 \leq Y < 1,6 / X = 3,5) = \int_{0,2}^{1,5} \frac{2}{3} dy = \frac{13}{15}. \blacklozenge$$

Приклад 2.20. Визначити математичні сподівання і кореляційну матрицю

системи випадкових величин (X, Y) , якщо $f(x, y) = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^3}$.

Розв'язання. Знайдемо числові характеристики системи за наведеними раніше формулами:

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + y^2 + 1)^3} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int (x^2 + y^2 + 1)^{-3} d(x^2 + y^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + y^2 + 1)^{-2}}{-2} \Big|_{-b}^b \right) dy = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, що з огляду на симетрію розподілу, математичне сподівання Y також дорівнює нулю.

Визначаємо дисперсії величин, які входять до системи:

$$D(X) = M(X^2) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Цей інтеграл обчислюємо, інтегруючи один раз частинами, а далі переходимо до полярних координат.

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2 + 1)^3} = \left(\begin{array}{l} x = u; \quad du = dx; \\ dv = \frac{xdx}{(x^2 + y^2 + 1)^3}; \quad v = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{array} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{4(x^2 + y^2 + 1)^2} \right) \Big|_{-b}^b \right) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \\ &= \left(\begin{array}{l} x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \\ dx dy = r dr d\varphi; \\ x^2 + y^2 = r^2; \end{array} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2(r^2 + 1)} \right) \Big|_0^b \right) d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

На підставі симетричності щільності розподілу системи маємо:

$D(Y) = D(X) = \frac{1}{2}$. Залишилося знайти K_{xy} . Математичні сподівання X і Y дорівнюють нулю, а тому:

$$K_{xy} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + 1)^3} = 0.$$

Отже, випадкові величини X і Y незалежні.♦

Питання для самоперевірки

1. Що називається системою випадкових величин.
2. Що означає задати закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) ?
3. Як задається закон розподілу неперервної випадкової величини?
4. Дайте означення функції щільності $f(x, y)$ системи випадкових величин (X, Y) .
5. Дайте геометричне тлумачення функції щільності $f(x, y)$ системи випадкових величин (X, Y) .
6. Назвіть основні властивості функції щільності $f(x, y)$ системи випадкових величин (X, Y) .
7. Записати формули для обчислення математичного сподівання $M(X)$, $M(Y)$.
8. Записати формули для обчислення дисперсії $D(X)$, $D(Y)$ та їх середнього квадратичного відхилення.
9. Що характеризує кореляційний момент системи для двох випадкових величин (X, Y) ? Запишіть формулу і назвіть розмірність K_{xy} .
10. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції системи? Яку розмірність він має? Наведіть основні властивості r_{xy} .

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Система випадкових величин (X, Y) рівномірно розподілена в області, яка являє собою багатокутник із вершинами $A(1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,4)$, $D(4,1)$, $E(3,0)$. Знайти $f(x, y)$, $f_1(x)$ і $P(0,1 \leq Y < 4 / X = 3)$.

Задача 2. Область значень системи випадкових величин (X, Y) – багатокутник із вершинами $A(-2,0)$, $B(-2,1)$, $C(0,1)$, $D(1,0)$. Знайти c ($|c|$ сталий в області), $f_2(y)$ і $P(-1,5 \leq X < 1 / Y = 0,6)$, якщо $f(x, y) = c(x + y)$.

Задача 3. Система випадкових величин (X, Y) має щільність розподілу $f(x, y) = \frac{A}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}$. Знайти A і функцію розподілу $F(x, y)$.

Задача 4. Координати випадкової точки (X, Y) розподілені рівномірно у прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Визначити ймовірність потрапляння випадкової точки у круг радіусом R , якщо $a > b$ і центр круга збігається з початком координат.

Задача 5. Задано щільність розподілу системи випадкових величин (X, Y) :

$$f(x, y) = kxye^{-(x^2+y^2)} \quad (x > 0, y > 0).$$

Визначити k і закони розподілу випадкових величин, які входять до системи.

Задача 6. Щільність розподілу системи випадкових величин (X, Y) задано формулою: $f(x, y) = Ae^{-ax^2 + bxy - cy^2}$ ($a > 0, c > 0$). Знайти закони розподілу величин, які входять до системи.

Задача 7. Система випадкових величин (X, Y) рівномірно розподілена у багатокутнику з вершинами $A(1,0)$, $B(0,4)$, $C(5,4)$, $D(6,2)$, $F(4,0)$. Знайти $f(x, y)$ і $M(Y / x)$.

Задача 8. Система випадкових величин (X, Y) рівномірно розподілена у багатокутнику з $A(1,0)$, $B(3,5)$, $C(6,3)$, $D(5,0)$. Знайти $f(x, y)$ і $M(Y / x)$.

Індивідуальні завдання

Щільність розподілу системи неперервних випадкових величин є сталою в межах чотирикутника з вершинами в точка A, B, C, D . Дослідити систему (X, Y) :

- 1) побудувати область визначення;
- 2) скласти рівняння границь області визначення;
- 3) знайти щільність сумісного розподілу;
- 4) знайти щільність розподілу кожної величини;
- 5) знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення кожної величини;
- 6) обчислити коефіцієнт кореляції;
- 7) побудувати прямі регресії.

Варіант	<i>A</i>		<i>B</i>		<i>C</i>		<i>D</i>	
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
1	6	4	6	6	2	4	2	2
2	7	5	2	2	2	5	7	8
3	5	3	3	3	1	1	3	1
4	4	6	1	3	4	3	7	6
5	4	3	1	1	1	3	1	5
6	5	7	5	4	1	1	1	4
7	6	4	4	4	2	2	4	2
8	5	5	2	2	5	2	8	5
9	1	1	3	1	7	5	5	5
10	8	5	5	5	1	1	4	1
11	1	1	1	3	5	5	5	3
12	6	4	6	7	1	4	1	1
13	3	2	5	2	3	0	1	0
14	1	0	4	3	7	3	4	0
15	4	4	6	4	3	1	1	1
16	1	1	4	1	9	6	6	6

17	6	3	6	5	1	3	1	1
18	1	4	1	1	7	4	7	7
19	2	6	2	3	8	6	8	9
20	3	3	7	7	9	7	5	3
21	2	1	4	1	6	3	4	3
22	5	1	8	4	5	4	2	1
23	2	3	5	5	5	3	2	1
24	2	1	2	4	6	7	6	4
25	1	2	3	2	6	7	6	4
26	6	7	9	7	4	2	1	2
27	1	4	6	6	6	4	1	2
28	7	8	7	5	1	2	1	5
29	4	2	8	6	6	6	2	2
30	9	6	6	6	2	2	5	2

2.7. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Розв'язання багатьох прикладних задач вимагає знання законів розподілу або числових характеристик різних випадкових величин. У деяких випадках експеримент з виявлення закону розподілу вимагає постановки коштовних або тривалих за часом експериментів, а в деяких випадках і самий експеримент поставити неможливо. Часто цей бар'єр легко можна подолати. Якщо випадкова величина, що нас цікавить, є функцією випадкового аргументу, то її числові характеристики і закон розподілу можуть бути визначені за відомими характеристиками і законом розподілу випадкового аргументу, а також вигляду функціональної залежності.

2.7.1. Функція однієї випадкової величини

Означення. *Випадкова величина Y називається функцією випадкової величини X , якщо вказано закон, за яким кожному можливному значенню випадкової величини X відповідає певне значення випадкової величини Y . Позначають $Y = \varphi(X)$.*

Функція дискретної випадкової величини

Нехай $Y = \varphi(X)$ – функція дискретної випадкової величини X з можливими значеннями x_1, x_2, \dots, x_n , ймовірності яких відповідно дорівнюють p_1, p_2, \dots, p_n :

X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	...	p_n

Y також є дискретною випадковою величиною з можливими значеннями $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ та відповідними ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n :

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$...	$\varphi(x_n)$
$P(Y)$	p_1	p_2	...	p_n

Із події «величина X набуває значення x_k » випливає подія «величина Y набуває значення $\varphi(x_k)$ ».

Зауваження. Щоб записати ряд розподілу випадкової величини Y , потрібно:

- 1) впорядкувати значення $\varphi(x_k)$ за зростанням;
- 2) якщо різним можливим значенням випадкової величини X відповідають значення функції Y , серед яких є рівні між собою, то їх потрібно записати 1 раз, а ймовірності рівних значень Y додати.

Числові характеристики функції Y :

$$\checkmark M(Y) = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) p_k;$$

$$\checkmark D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{k=1}^n \varphi^2(x_k) p_k - M^2(Y);$$

$$\checkmark \sigma(X) = \sqrt{D(Y)}.$$

Приклад 2.21. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-2	-1	1	2	4
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

Побудувати закон розподілу ймовірностей для $Y = 3x^2$.

Розв'язання. Для $Y = 3x^2$ побудуємо ряд розподілу:

$Y = 3x_i^2$	16	4	1	1	4	16
$P(y = 3x_i^2) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

Враховуючи повтори можливих значень Y , дістаємо:

$$P(Y = 16) = 0,1 + 0,3 = 0,4;$$

$$P(Y = 4) = 0,2 + 0,2 = 0,4;$$

$$P(Y = 1) = 0,1 + 0,1 = 0,2.$$

Отже, закон розподілу дискретної випадкової величини Y має вигляд:

$Y = y_j$	1	4	16
$P(y = y_j) = p_j$	0,2	0,4	0,4

Приклад 2.22. За заданим законом розподілу обчислити $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$, якщо $Y = \cos^2 x$.

$X = x_i$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

Розв'язання. Побудуємо закон розподілу Y .

$Y = \cos^2 x_i$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\cos^2 0$	$\cos^2 \frac{\pi}{6}$	$\cos^2 \frac{\pi}{4}$	$\cos^2 \frac{\pi}{3}$
$P(Y = \cos^2 x_i)$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

$Y = \cos^2 x_i$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	1	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$P(Y = \cos^2 x_i)$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

$Y = \cos^2 x_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$P(Y = \cos^2 x_i)$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

$Y = y_j$	0,25	0,5	0,75	1
$P(Y = y_j) = p_j$	0,3	0,3	0,3	0,1

$$M(Y) = \sum_{j=1}^4 y_j p_j = 0,25 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 =$$

$$= 0,075 + 0,15 + 0,225 + 0,1 = 0,55 \rightarrow M(Y) = 0,55;$$

$$M(Y^2) = \sum_{j=1}^4 y_j^2 p_j = 0,0625 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,3 + 0,5625 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 =$$

$$= 0,01875 + 0,075 + 0,16875 + 0,1 = 0,3625;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 0,3625 - 0,3025 = 0,06;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,06} \approx 0,245. \blacklozenge$$

Функція неперервної випадкової величини

Нехай випадкова величина $Y = \varphi(X)$ – функція неперервної випадкової величини X , закон розподілу якої заданий диференціальною функцією розподілу (щільністю ймовірностей) $f(X)$.

Нехай $[a;b]$ – інтервал, на якому розташовані всі можливі значення випадкової величини X . На інтервалі $[a;b]$ функція $y = \varphi(x)$ монотонно зростає та диференційовна. На цьому ж інтервалі вона має обернену функцію $x = \psi(y)$, яка також зростає та диференційовна. Тоді щільність розподілу функції $Y = \varphi(X)$ визначається виразом:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|. \quad (2.60)$$

Якщо функція $x = \psi(y)$ – немонотонна диференційовна функція в області визначення аргументу X , то обернена функція неоднозначна, тому розбиваємо цей інтервал на k частинних інтервалів, у кожному з яких функція $y = \varphi(x)$ монотонна і на кожному інтервалі монотонності знаходимо обернені функції $x_i = \psi_i(y)$. Тоді щільність розподілу $g(y)$ визначається як сума доданків, кількість яких дорівнює кількості значень оберненої функції:

$$g(y) = \sum_{i=1}^k f(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)|. \quad (2.61)$$

Схема знаходження функції щільності $g(y)$

Нехай неперервна випадкова величина X задана щільністю ймовірностей $g(y)$, якщо $x \in [a;b]$. Необхідно визначити $g(y)$, якщо $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ є монотонною функцією.

1. Визначаємо множину можливих значень для Y – оскільки $a \leq x \leq b$, то

$$\varphi(a) \leq Y \leq \varphi(b).$$

2. Знаходимо обернену функцію $x = \psi(y)$.

3. Знаходимо похідну $x'_y = \psi'(y)$.

4. Будуємо щільність ймовірностей для випадкової величини Y :

$$g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|, Y \in [\varphi(a); \varphi(b)].$$

5. Перевіряємо виконання умови нормування для $g(y)$:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(y) dy = 1.$$

Якщо нормування виконується, то $g(y)$ знайдено вірно. За знайденою $g(y)$ функцією розподілу ймовірностей визначається за формулою:

$$G(y) = \int_{\varphi(a)}^y g(y) dy. \quad (2.62)$$

Числові характеристики функції Y :

$$\checkmark M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot g(y) dy \text{ або } M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx;$$

$$\checkmark D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \right)^2;$$

$$\checkmark \sigma(X) = \sqrt{D(Y)}.$$

Приклад 2.23. Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{10}{7} \sqrt[7]{x^3}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти $g(y)$, $G(y)$, якщо $Y = 2x^2$. Обчислити $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$.

Розв'язання.

1. Знаходимо інтервал можливих значень для випадкової величини Y :

$$0 \leq X \leq 1;$$

$$0 \leq Y \leq 2,$$

оскільки на проміжку $[0, 1]$ функція $y = 2x^2$ є монотонно зростаючою функцією.

2. Із функціональної залежності $Y = 2x^2$ записуємо явний вираз

$$x = \sqrt{\frac{y}{2}} = \psi(y).$$

3. Знаходимо похідну функції $\psi(y)$

$$\psi'(y) = \frac{1}{4} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Використовуючи (2.60), будемо функцію $g(y)$:

$$g(y) = f(\psi(y)) (\psi'(y)) = \frac{10}{7} \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{3}{14}} \frac{1}{4} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15}{14} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{4}{14}} = \frac{5}{14} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{2}{7}}.$$

5. Перевіряємо виконання умови нормування:

$$\int_0^2 g(y) dy = 1 \rightarrow \int_0^2 \frac{5}{14} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{2}{7}} dy = \frac{5}{14} \int_0^2 \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{2}{7}} dy = \frac{5}{14} 2 \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{5}{7}} \frac{7}{5} \Big|_0^2 = \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{5}{7}} \Big|_0^2 = 1.$$

Нормування виконується, тому щільність ймовірностей випадкової величини Y :

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{15}{14} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{2}{7}}, & 0 < y \leq 2; \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

Використовуючи (2.62), знаходимо

$$G(y) = \int_0^y g(y) dy = \int_0^y \frac{5}{14} \left(\frac{y}{2} \right)^{-\frac{2}{7}} dy = \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{5}{7}} \Big|_0^y = \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{5}{7}}.$$

Отже,

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}, & 0 < y \leq 2; \\ 1, & y > 2. \end{cases}$$

Знаходимо числові характеристики:

1) математичне сподівання:

$$\begin{aligned} M(Y) &= \int_0^2 yg(y)dy = \int_0^2 y \frac{5}{14} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}} dy = \frac{5}{14} \sqrt[7]{4} \int_0^2 y^{\frac{5}{7}} dy = \frac{5}{14} \sqrt[7]{4} \left. \frac{y^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}} \right|_0^2 = \\ &= \frac{5}{24} 2^{\frac{2}{7}} \cdot 2^{\frac{12}{7}} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

або

$$M(Y) = \int_0^1 2x^2 \frac{10}{7} \sqrt[7]{x^3} dx = \frac{20}{7} \int_0^1 x^{\frac{17}{7}} dx = \frac{20}{7} \left. \frac{x^{\frac{24}{7}}}{\frac{24}{7}} \right|_0^1 = \frac{20}{24} = \frac{5}{6};$$

2) дисперсія:

$$\begin{aligned} M(Y^2) &= \int_0^2 y^2 g(y) dy = \int_0^2 y^2 \frac{5}{14} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}} dy = \frac{5}{14} \sqrt[7]{4} \int_0^2 y^{\frac{12}{7}} dy = \\ &= \frac{5}{14} \sqrt[7]{4} \left. \frac{y^{\frac{19}{7}}}{\frac{19}{7}} \right|_0^2 = \frac{5}{38} 2^{\frac{2}{7}} \cdot 2^{\frac{19}{7}} = \frac{5}{38} 8 = \frac{40}{38} = \frac{20}{19}; \end{aligned}$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \frac{20}{19} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{20}{19} - \frac{25}{36} = \frac{720 - 475}{684} = \frac{245}{684},$$

або

$$M(Y^2) = \int_0^1 (2x^2)^2 \frac{10}{7} \sqrt[7]{x^3} dx = \frac{40}{7} \int_0^1 x^4 x^{\frac{3}{7}} dx = \frac{40}{7} \int_0^1 x^{\frac{31}{7}} dx = \frac{40}{7} \left. \frac{x^{\frac{38}{7}}}{\frac{38}{7}} \right|_0^1 = \frac{40}{38} = \frac{20}{19},$$

$$D(Y) = \frac{20}{19} - \frac{25}{36} = \frac{245}{684};$$

3) середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{245}{684}} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{245}{19}}. \blacklozenge$$

2.7.2. Функція двох випадкових величин

Означення. *Випадкова величина Z називається функцією випадкової величини X та Y , якщо вказано закон, за яким кожній парі можливих значень випадкових величин X та Y відповідає єдине значення випадкової величини Z .* Позначають $Z = \varphi(X, Y)$.

Закони розподілу суми $Z = X + Y$ за відомими розподілами X та Y

1. Якщо X та Y – **дискретні незалежні** випадкові величини, то значення функції $Z = X + Y$ дорівнюють сумам кожного можливого значення X та кожного можливого значення Y , а ймовірності відповідних значень дорівнюють добуткам ймовірностей доданків.
2. Якщо X та Y – **неперервні незалежні** випадкові величини, які мають щільності розподілу $f(x_1), f(x_2)$, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z = X + Y$ за умови, що щільність розподілу принаймні одного з аргументів задана в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ визначається **композицією** цих функцій (або **згорткою**):

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx \text{ або } g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy. \quad (2.63)$$

Числові характеристики функцій можна знайти, визначивши закон розподілу, а також скориставшись формулами, аналогічними тим, які застосовувались для функцій одного випадкового аргументу:

$$\checkmark \quad MZ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy;$$

$$\checkmark D(Z) = M(Z^2) - (M(Z))^2, M(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x, y))^2 f(x, y) dx dy.$$

Зауваження. Сума незалежних нормально розподілених випадкових величин також має нормальний розподіл. Математичне сподівання і дисперсія цієї суми відповідно дорівнюють сумах математичних сподівань і дисперсій доданків, тобто якщо $M(X) = a_1$, $D(X) = \sigma_1^2$, $M(Y) = a_2$, $D(Y) = \sigma_2^2$ і коефіцієнтом кореляції r_{xy} , маємо нормальний закон розподілу з параметрами:

$$M(Z) = a_1 + a_2, D(Z) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r_{xy}\sigma_1 \cdot \sigma_2.$$

Приклад 2.24. Задано закони розподілу ймовірностей незалежних випадкових величин X, Y :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4; \\ \frac{1}{6}, & -4 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{1}{8}, & -2 < y \leq 6; \\ 0, & y > 6. \end{cases}$$

Знайти $G(z)$, $g(z)$, якщо $Z = X + Y$. Побудувати графіки $G(z)$, $g(z)$.

Розв'язання. Побудуємо множину Ω -сумісної появи випадкових величин X і Y . Ця множина зображена на рис.2.18.

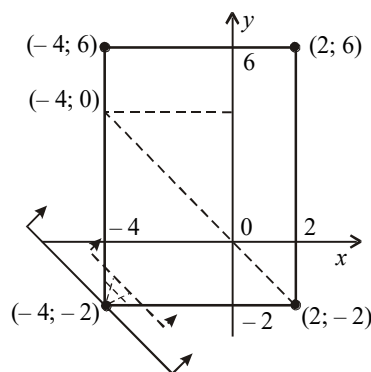


Рис. 2.18. Сумісна поява X та Y .

Пряма $Z = X + Y$ зі збільшенням Z рухатиметься паралельно сама собі, відтинаючи від множини Ω змінні площі (рис.2.19, 2.20.).

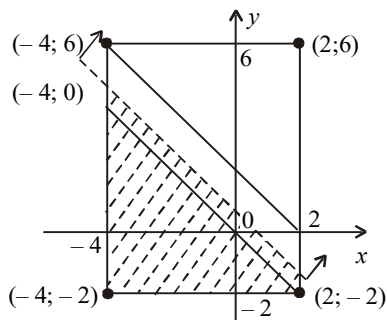


Рис.2.19.

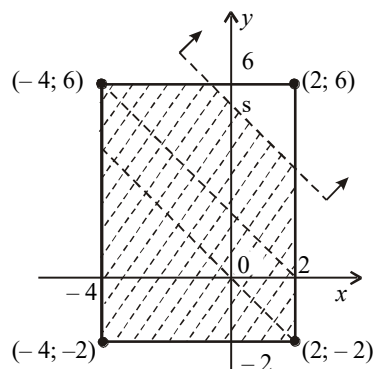


Рис.2.20.

У точці $(-4; -2)$ $Z = -6$; у точці $(2; -2)$ $Z = 0$; у точці $(-4; 6)$ $Z = 2$; у точці $(2; 6)$ $Z = 8$.

1. При $Z < -6$ $G(z) = 0$.

2. У разі зміни Z у проміжку $-6 < Z < 0$ маємо:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \int_{-4}^{z+2} \int_{-2}^{z-x} f(x) f(y) dx dy = \int_{-4}^{z+2} \int_{-2}^{z-x} \frac{1}{6} \frac{1}{8} dy dx = \frac{1}{48} \int_{-4}^{z+2} \int_{-2}^{z-x} dy dx = \\ &= \frac{1}{48} \int_{-4}^{z+2} \left(\int_{-2}^{z-x} dy \right) dx = \frac{1}{48} \int_{-4}^{z+2} \left(y \Big|_{-2}^{z-x} \right) dx = \frac{1}{48} \int_{-4}^{z+2} (z+2-x) dx = \\ &= -\frac{1}{48} \frac{(z+2-x)^2}{2} \Big|_{-4}^{z+2} = \frac{(z+6)^2}{96}. \end{aligned}$$

Отже, на проміжку $[-6; 0]$ функція розподілу ймовірностей змінюється за законом

$$G_1(z) = \frac{(z+6)^2}{96}.$$

3. Оскільки в точці $(-4; 4)$ $Z = 0$, то на проміжку $[0; 2]$ маємо:

$$\begin{aligned} G_2(Z) &= G_1(0) + \frac{1}{48} \int_{-4}^2 \left(\int_{-x}^{z-x} dy \right) dx = \frac{36}{96} + \frac{1}{48} \int_{-4}^2 \left(y \Big|_{-x}^{z-x} \right) dx = \\ &= \frac{36}{96} + \frac{1}{48} \int_{-4}^2 (z-x+x) dx = \frac{36}{96} + \frac{z}{48} \int_{-4}^2 dx = \frac{36}{96} + \frac{z}{48} 6 = \\ &= \frac{36+12z}{96} = \frac{z+3}{8}. \end{aligned}$$

Отже, на проміжку $[0, 2]$, функція розподілу ймовірностей змінюється за законом

$$G_2(z) = \frac{z+3}{8}.$$

4. У точці $(2,6)$ $Z = 8$ і функція розподілу ймовірностей при своїй зміні наблизатиметься до одиниці. Щоб дістати аналітичний вираз для $G(z)$, від одиниці віднімаємо змінну площу S трикутника.

$$\begin{aligned} G_3(Z) &= 1 - \frac{1}{48} \int_{z-6}^2 \int_{z-x}^6 dy dx = 1 - \frac{1}{48} \int_{z-6}^2 \left(\int_{z-x}^6 dy \right) dx = 1 - \frac{1}{48} \int_{z-6}^2 \left(y \Big|_{z-x}^6 \right) dx = \\ &= 1 - \frac{1}{48} \int_{z-6}^2 (6 - z + x) dx = 1 - \frac{1}{48} \left. \frac{(6 - z + x)^2}{2} \right|_{z-6}^2 = 1 - \frac{(8 - z)^2}{96}. \end{aligned}$$

Отже,

$$G_3(z) = 1 - \frac{(z-8)^2}{96}.$$

Таким чином, загальний вигляд функції розподілу ймовірностей буде такий:

$$G(z) = \begin{cases} 0, & z \leq -6; \\ \frac{(z+6)^2}{96}, & -6 < z \leq 0; \\ \frac{z+3}{8}, & 0 < z \leq 2; \\ 1 - \frac{(z-8)^2}{96}, & 2 < z \leq 8; \\ 1, & z > 8. \end{cases}$$

Тоді щільність ймовірностей матиме вигляд

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \leq -6; \\ \frac{z+6}{48}, & -6 < z \leq 0; \\ \frac{1}{8}, & 0 < z \leq 2; \\ \frac{8-z}{48}, & 2 < z \leq 8; \\ 0, & z > 8. \end{cases}$$

Графіки $F(x)$, $f(x)$ зображені на рис.2.21 і 2.22.

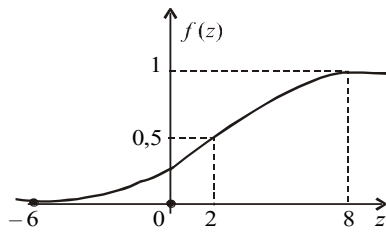


Рис.2.21. Графік $F(x)$.

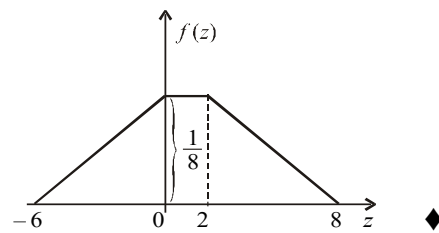


Рис. 2.22. Графік $f(x)$.

Питання для самоперевірки

1. За якими формулами обчислюється математичне сподівання та дисперсія функції дискретної випадкової величини?
2. За якими формулами обчислюється математичне сподівання та дисперсія функції неперервної випадкової величини?
3. Як обчислити щільність ймовірностей випадкової величини Y , якщо $Y = \varphi(X)$, де $\varphi(x)$ — монотонна функція, і відомий закон розподілу випадкової величини X ?
4. Як обчислити $g(y)$, якщо $Y = \varphi(X)$, де $\varphi(x)$ — немонотонна функція, і відомий закон розподілу випадкової величини X ?
5. Числові характеристики функції дискретного випадкового аргументу.
6. Числові характеристики функції неперервного випадкового аргументу.
7. Як визначити $G(Z)$, $g(z)$, якщо $Z = X + Y$?
8. Що означає здійснити композицію двох законів розподілу?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Задано

x_i	0,001	0,01	0,1	10	100	100
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

Обчислити $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$, якщо $Y = \lg x$.

Задача 2. Незалежні випадкові величини X і Y мають щільності ймовірностей згідно з рис. 2.23 і 2.24.

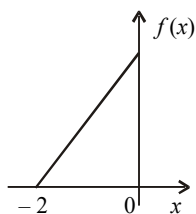


Рис. 2.23.

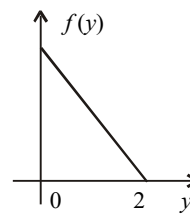


Рис. 2.24.

Визначити: 1) $M(2x + 3y - 2)$; $D(2x + 3y - 2)$;

2) $M(XY)$; $D(XY)$.

Задача 3. Випадкові величини X і Y є залежними і мають щільності ймовірностей згідно з рис. 2.25 і 2.26.

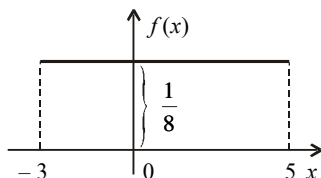


Рис. 2.25.

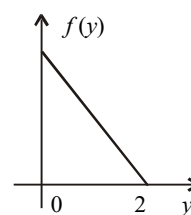


Рис. 2.26.

Знайти: 1) $M(4x - 5y - 1)$; $D(4x - 5y - 1)$;

2) $M(-4x - 10y + 5)$; $D(-4x - 10y + 5)$;

3) $M(XY)$. При цьому відоме значення $K_{xy} = -0,5$.

Задача 4. Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -1; \\ \frac{1}{2}, & -1 < y \leq 1; \\ 0, & y > 1. \end{cases}$$

Знайти $g(Z)$, якщо $Z = X + Y$.

Задача 5. Задані закони розподілу двох незалежних випадкових величин X і Y є щільностями ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{1}{4}, & -2 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{1}{8}, & -2 < y \leq 6; \\ 0, & y > 6. \end{cases}$$

Знайти $G(z)$, $g(z)$, якщо $Z = X + Y$.

Задача 6. Випадкова величина Y задана у вигляді

$$Y = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0; \\ \sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Знайти $g(y)$, якщо щільність ймовірностей випадкової величини X :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Задача 7. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей, що задано щільністю ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3; \\ \frac{1}{6}, & -3 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $g(y)$, якщо $Y = \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$. Обчислити $M(Y)$, $D(Y)$.

Задача 8. Щільність ймовірностей випадкової величини

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Знайти $g(y)$, якщо: 1) $y = 1 - x^3$; 2) $y = x^2$; 3) $y = \arctg x$; 4) $y = \frac{1}{x}$.

Задача 9. Закони розподілу незалежних випадкових величин X і Y задані щільностями ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4; \\ \frac{1}{8}, & -4 < x \leq 4; \\ 0, & x > 4; \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -2; \\ \frac{1}{8}, & -2 < y \leq 6; \\ 0, & y > 6. \end{cases}$$

Знайти $f(z)$, $M(z)$, $D(z)$, якщо $Z = X + Y$.

Задача 10. Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти $M(Y)$, якщо $Y = \min(X; 0,5)$.

Задача 11. Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти $M(Y)$, якщо $Y = \max(X; 0,5)$.

Індивідуальні завдання

Задача 1. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з $a = 2; \sigma = 1$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = MX + N$.

Задача 2. Два мисливці роблять по три постріли. Ймовірність влучення для кожного з них $\frac{N}{N+5}; \frac{N}{N+2}$. Знайти закон розподілу випадкової величини X - кількість вдалих пострілів, обчислити $M(X), D(X)$.

Зауваження. Ввести дві дискретні випадкові величини X_1, X_2 - кількість влучень для першого та другого мисливців та розглянути $X = X_1 + X_2$.

Задача 3. Випадкова величина x розподілена рівномірно на проміжку $[N-2, N+M]$. Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = KX + N$, обчислити $M(Y), \ddot{A}(Y)$.

Тут N - номер варіанту; M - кількість літер у прізвищі; K - кількість літер у повному імені.

2.8. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, властиві масовим випадковим явищам. Закономірності виявляються при великій кількості випадкових явищ, що відбуваються при однакових умовах.

Це означає, що характеристики випадкових подій і випадкових величин в цих умовах стають *стійкими*: середній їх результат (наприклад, частота події, середні значення випадкової величини) перестає бути випадковим і може бути передбачений з великим ступенем визначеності. Вказана особливість є суттю «закону великих чисел».

Закон великих чисел говорить про кількісні закономірності масових явищ, що чітко проявляються при їх великій кількості.

Закон великих чисел – це граничні теореми теорії ймовірностей, які встановлюють відповідність між теоретичними та дослідними характеристиками випадкових величини або випадкових подій при великій кількості випробувань.

Граничні теореми, що встановлюють граничні закони розподілу випадкових величин, об'єднують загальною назвою – *центральна гранична теорема*.

2.8.1. Нерівність Чебишова

Перша форма нерівності Чебишова. Для довільної випадкової величини X , яка приймає невід'ємні значення та має обмежене математичне сподівання

$$P(X \geq 1) \leq M(X). \quad (2.64)$$

Наслідок. Якщо X приймає лише невід'ємні значення, $M(X) < \infty$, $\alpha > 0$, то

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{M(X)}{\alpha}.$$

Друга форма нерівності Чебишова. Якщо випадкова величина X має обмежені $M(X)$; $D(X)$, то ймовірність відхилення цієї величини від свого математичного сподівання, взятого за абсолютною величиною ε ($\varepsilon > 0$), не перевищуватиме величини: $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, тобто

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (2.65)$$

Наслідок. $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \geq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$

Приклад 2.25. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-2; 4)$. Скориставшись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність $|x - a| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 4\sigma$.

Розв'язання. Оскільки $a = -2$, $\sigma_x = 4$, $D(X) = 16$, то згідно з (2.65) маємо:

$$P(|x + 2| < 16) \geq 1 - \frac{16}{256} = 1 - 0,0625 = 0,9375. \blacklozenge$$

Приклад 2.26. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 400 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події $|X - M(X)| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 10$.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $n = 400$, $p = 0,9$; $q = 0,1$; $\varepsilon = 10$.

$$M(X) = np = 400 \cdot 0,9 = 360,$$

$$D(X) = npq = 400 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 36,$$

$$P(|x - 360| < 10) \geq 1 - \frac{36}{100} = 0,64. \blacklozenge$$

2.8.2. Важливі граничні теореми

Теорема Чебишова. Нехай задано n незалежних випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n , які мають обмежені $M(X_i)$ ($i = 1, \dots, n$) і дисперсії яких $D(X_i)$ не перевищують деякої сталої C ($C > 0$), тобто $D(X_i) \leq C$. Тоді для будь-якого малого додатного числа ε ймовірність відхилення середнього арифметичного цих величин

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

від середнього арифметичного їх математичних сподівань

$$M(\bar{X}) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n},$$

взятого за абсолютним значенням на величину ε , прямуватиме до одиниці зі збільшенням числа n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1 \quad (2.66)$$

Оцінка ймовірності для практичного застосування:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \quad (2.67)$$

Приклад 2.27. Дисперсія кожної із 4500 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу ймовірностей, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань, взяте за абсолютною величиною, не перевищить 0,4.

Розв'язання. Використовуючи формулу (2.67), одержимо:

$$P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{4500} X_i}{4500} - \frac{\sum_{i=1}^{4500} M(X_i)}{4500} \right| < 0,4 \right) \geq 1 - \frac{5}{4500 \cdot 0,4} = 0,003. \blacklozenge$$

Приклад 2.28. Унаслідок медичного огляду 900 допризовників було виявлено, що середня маса кожного з них на 1,2 кг більша від середньої маси попереднього призову. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення маси допризовника дорівнює 8 кг?

Розв'язання. Використовуючи формулу (2.65), одержимо:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1,2\right) \geq 1 - \frac{8}{900(1,2)^2} = 1 - 0,0062 = 0,9932;$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1,2\right) \approx 0,0068.$$

Оскільки ця ймовірність дуже мала, відхилення маси можна вважати не випадковим. ♦

Теорема Бернуллі. Якщо ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p , то при необмеженому збільшенні числа експериментів $n \rightarrow \infty$ ймовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A) = \frac{m}{n}$ від ймовірності p , взятої за абсолютною величиною на ε ($\varepsilon > 0$) прямуватиме до одиниці зі зростанням n , що можна записати так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1. \quad (2.68)$$

Оцінка ймовірності для практичного застосування:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \quad (2.69)$$

Приклад 2.29. Скільки необхідно провести експериментів n , щоб ймовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від ймовірності $p = 0,85$, взяте за абсолютною величиною, на $\varepsilon = 0,001$, була б не меншою за $0,99$.

Розв'язання. Із умови задачі маємо $p = 0,85$; $q = 0,15$; $\varepsilon = 0,001$,

$$P(|W(A) - 0,85| < 0,001) = 0,99.$$

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0,99 \rightarrow n = \frac{pq}{0,01\varepsilon^2} = \frac{0,85 \cdot 0,15}{0,01 \cdot 0,000001} = 12450000. \quad \blacklozenge$$

Центральна гранична теорема. Нехай задано n незалежних випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n , кожна із яких має один і той самий закон розподілу ймовірностей із $M(X_i) = 0$, $\sigma(X) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|V_3|$, тоді зі зростанням числа n закон розподілу $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ наближатиметься до нормального.

Приклад 2.30. Кожна із 100 незалежних випадкових величин X_i має рівномірний закон розподілу на проміжку $[0; 0,12]$. Записати наближено закон розподілу для випадкової величини $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

Розв'язання. Знаходимо числові характеристики для X_i : $M(X_i) = 0,06$; $D(X) = 0,1$.

Тоді

$$M(Y) = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 100 \cdot 0,06 = 6.$$

$$D(Y) = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 100 \cdot 0,1 = 10.$$

На підставі центральної граничної теореми маємо:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} e^{-\frac{(y-6)^2}{20}}, \quad -\infty < y < \infty. \blacklozenge$$

Питання для самоперевірки

1. Запишіть першу і другу форму нерівності Чебишова.
2. Для оцінки чого використовується нерівність Чебишова?
3. Сформулюйте теорему Бернуллі.
4. Сформулюйте теорему Чебишова.
5. Сформулюйте центральну граничну теорему.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Ймовірність появи випадкової події в одному експерименті є величиною сталою і дорівнює 0,3. Із якою ймовірністю можна стверджувати, що відносна частота цієї події при 100 експериментах буде знаходитись у межах $[0,2; 0,4]$.

Задача 2. Випадкова подія A може здійснитися при одному експерименті із ймовірністю p . Експеримент повторили n раз. Яка ймовірність того, що при цьому виконується нерівність

$$np - 2\sqrt{npq} < m < np + 2\sqrt{npq} .$$

Задача 3. Яке повинна мати значення величина ε у нерівності Чебишова, щоб $P(|X - a| < \varepsilon) \approx 0,99$, коли відомо, що $D(X) = 4$.

Задача 4. Із якою надійністю середнє арифметичне вимірів певної величини відповідає істинному виміру цієї величини, якщо було здійснено 500 вимірювань із точністю 0,1 і при цьому дисперсії випадкових величин — результатів вимірювання — не перевищують 0,3.

Задача 5. Скільки необхідно провести вимірів діаметра втулки, щоб середнє арифметичне цих вимірів відрізнялося від істинного розміру діаметра втулки не більше як 0,05 із надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірів) не перевищують 0,2.

Задача 6. Ймовірність того, що за час t із ладу вийде один конденсатор, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що за час t із 100 конденсаторів із ладу вийде:

- 1) не менш як 28 конденсаторів;
- 2) від 14 до 26 конденсаторів?

Задача 7. При відливанні відливок, із яких потім виготовляють на верстатах деталі, одержують у середньому 20% браку. Скільки необхідно запланувати відливок, щоб із імовірністю не меншою за 0,95 була забезпечена програма випуску деталей, для виготовлення яких необхідно 50 бездефектних відливок.

Задача 8. Здійснюється вибіркве обстеження партії електроламп для визначення тривалості їх горіння. Скільки необхідно перевірити електролампочок, щоб із імовірністю не меншою за 0,9876 можна було стверджувати, що середня тривалість горіння лампочки для всіх n штук перевірених відхилялось від її середньої величини не більше ніж на 10 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочок дорівнює 80 годин.

Задача 9. Випадкова величина \bar{X} — середнє арифметичне 10000 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу, і середнє квадратичне відхилення кожної із них дорівнює 2. Яке максимальне відхилення величини \bar{X} від його математичного сподівання можна очікувати із ймовірністю 0,9544?

Задача 10. Верстат із програмним управлінням виготовляє за робочу зміну 900 виробів, із яких в середньому 1% складає брак. Знайти наближено ймовірність того, що за зміну буде виготовлено не менше 810 доброякісних виробів, якщо вони виявляються доброякісними незалежно один від одного.

Задача 11. Кожна із 40 незалежних випадкових величин має гамма-розподіл із значеннями параметрів $\alpha = 2$, $\lambda = 10$. На підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей записати наближено закон розподілу для випадкової величини

$$X = \sum_{i=1}^{40} X_i .$$

Задача 12. У касі певного закладу в наявності є 4000 гривень. У черзі знаходиться $n = 30$ робітників. Сума X , яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною із математичним сподіванням, рівним 200 грн. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 60$ грн. Знайти ймовірність того, що суми, котра є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі.

Задача 13. Зберігається умова задачі 12, тільки в черзі стоїть $n = 15$ робітників і сума X , яку повинен одержати кожний із них, є випадковою величиною із значеннями $M(X) = 150$ грн., $\sigma(X) = 60$ грн. Яка ймовірність того, що суми вистачить усім людям?

Задача 14. Залізничний состав складається із 30 вагонів. Маса кожного з них є випадковою величиною X із математичним сподіванням $M(X) = 400$ т і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 20$ т. Локомотив може нести масу не більшу за 12100 т. Якщо маса составу перевищує допустиму, то необхідно причеплювати другий локомотив. Знайти ймовірність того, що одного локомотива не досить для перевезення составу.

Задача 15. Маємо 100 ідентичних елементів, що складають певний технічний комплекс. Час безвідмовної роботи кожного i -го елемента є випадковою величиною T_i , що має експоненціальний закон розподілу із параметром $\lambda = 40$ і однаковим для всіх елементів. Випадкові величини $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$ є незалежними між собою. У разі відмови в роботі i -го елемента миттєво здійснюється переміщення на $i + 1$ -й справний елемент. Загальний час безвідмовної роботи комплексу дорівнює сумі T_i , а саме $T = \sum_{i=1}^{100} T_i$. Знайти наближено ймовірність того, що комплекс безвідмовно пропрацює не менш як 20 год.

Задача 16. Провести апроксимацію нормального закону із параметрами a, σ за допомогою суми n незалежних випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n , кожна із яких має рівномірний закон розподілу на проміжку $[0; 1]$

Задача 17. Верстат-автомат виготовляє за робочу зміну $n = 1000$ виробів, із яких брак у середньому становить 5%. На скільки доброякісних виробів k має бути розрахований бункер для доброякісних виробів, щоб імовірність його переповнення за зміну не перевищувала 0,001.

Індивідуальні завдання

Задача 1. Кількість повідомлень, що надходять на телефонний номер за добу є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює $50 + N$. Оцінити ймовірність того, що в найближчу добу кількість повідомлень (N – номер варіанту):

а) перевищить число $100 - N$;

б) на перевищить $70 + N$.

Задача 2. Аналіз торгівельної діяльності певного магазину показує, що середньомісячний товарообіг складає $N \cdot 5000$. Оцінити ймовірність того, що в наступному місяці товарообіг буде в межах $N \cdot 4800 - N \cdot 5200$, якщо відомо, що дисперсія досліджуваної величини $D(X) = 30000$ (N – номер варіанту).

Задача 3. Ймовірність спотворення цифрового сигналу під час його передачі дорівнює $0,05$. Скільки необхідно надіслати сигналів, щоб з ймовірністю не менше $1 - \frac{N}{100}$ очікувати, що число спотворених сигналів буде відхилитися від математичного сподівання на величину, що по модулю не перевищує N (N – номер варіанту). Розв'язати задачу:

а) за нерівністю Чебишова;

б) за інтегральною теоремою Муавра-Лапласа.

ПРИКЛАД МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. У коло радіуса 10 см кидають точку. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до кола не перевищує 4 см.

2. Маємо дві урни. В першій урні – 10 червоних і 6 чорних куль. В другій урні – 4 червоні і 6 чорних куль. З кожної з урн виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі червоні.

3. У лікарню поступило 50 % хворих на грип, 30 % хворих на ангіну та 20 % хворих на запалення легенів. Ймовірність повного одужання протягом семи днів від грипу дорівнює 0,9, від ангіни та запалення легенів — 0,7 та 0,6 відповідно. Виписано хворого, який повністю одужав. Знайти ймовірність того, що він був хворий на грип.

4. Кругова мішень складається з трьох зон. Ймовірність попадання в ці зони при одному пострілі відповідно дорівнюють 0,1, 0,35 і 0,4. Знайти ймовірність попадання при одному пострілі в першу або третю зони.

5. Ймовірність того, що подія відбудеться хоча б один раз у трьох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,936. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні.

6. Задано функцію розподілу ймовірностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -4, \\ 0,1, & \text{якщо } -4 < x \leq -1, \\ 0,4, & \text{якщо } -1 < x \leq 1, \\ 0,7, & \text{якщо } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{якщо } x > 3, \end{cases}$$

Записати закон розподілу випадкової величини X . Обчислити $P(-3 < X < 2)$.
Знайти математичне сподівання і дисперсію.

7. Задано функцію щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ a \sin \frac{x}{3}, & 0 < x \leq \frac{3}{2}\pi, \\ 0, & x \geq \frac{3}{2}\pi, \end{cases}$$

Обчислити $M(X)$, $D(X)$.

8. Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що кожний із них здасть іспит, відповідно дорівнює 0.9, 0.8, 0.4. Побудувати закон розподілу величини X – числа студентів, які здадуть зазначений іспит.

9. Вимірювальний прилад має систематичну помилку, яка розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 5 м і з середнє квадратичним відхилення 0,75м. Знайти ймовірність того, що помилка вимірювання не перевищить за абсолютною величиною 5м.

10. Випадкові величини X та Y мають наступні закони розподілу:

X	-3	0	3
p	0,2	0,2	0,6

Y	-1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Знайти коефіцієнт кореляції.

Варіант 2

Завдання 1.

А. Встановити відповідність:

Подію називають	1) випадковою, 2) неможливою, 3) достовірною,
якщо за певних умов ця подія	а) обов'язково відбудеться, б) може відбутися або не відбутися, в) не відбудеться.

Б. Елементарною випадковою подією називається подія,

- 1) що може відбутися внаслідок однієї і лише однієї спроби,
- 2) яка не може бути поділеною на більш прості події.

В. Ймовірність $P(A)$ випадкової події A являється кількісною оцінкою об'єктивної можливості її появи внаслідок експерименту і за класичним означенням обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m та n :

- 1) кількість всіх можливих елементарних подій,
- 2) загальна кількість всіх єдино можливих та рівноможливих елементарних наслідків,
- 3) число елементарних подій, що сприяють появі події A ,
- 4) число елементарних подій, що не сприяють появі події A .

Г. Ймовірність появи події A буде дорівнювати або належати проміжку:

$$1) 0, 2) 1, 3) 10, 4) -1, 5) [0;1], 6) (0;1); 7) [0;1),$$

якщо подія A : а) достовірна, б) випадкова, в) неможлива.

Завдання 2.

А. Простором елементарних подій називають множину Ω

- а) усіх подій,
 б) усіх можливих подій,
 в) усіх можливих елементарних подій ω_j , що відповідає кожному експерименту, який має випадкові наслідки.

Б. Задані дві множини цілих чисел

$a) N = 2m + 1:$ $\Omega_1 = \left\{ \frac{N+1}{2}, N \right\},$ $\Omega_2 = \{1, 4, 5\}.$	$b) N = 2m:$ $\Omega_1 = \left\{ \frac{N}{2}, N \right\},$ $\Omega_2 = \{3, 5, 8\}.$
--	--

Із кожної множини беруть по одному числу. Побудувати простір елементарних подій.

<i>а) сума цих пар чисел кратна двом,</i>	<i>б) добуток цих пар чисел кратний двом.</i>
---	---

Завдання 3.

А. Встановити відповідність:

Випадкові події A та B називаються 1) <i>залежними,</i> 2) <i>незалежними,</i> 3) <i>несумісними,</i> 4) <i>сумісними,</i>	якщо імовірність появи однієї з них а) не залежить від появи або не появи другої, б) не виключає появи другої в одному і тому ж випробуванні, в) виключає появу другої в одному і тому ж випробуванні, г) залежить від появи або не появи другої.
--	---

Б. Встановити відповідність:

1) Сумою випадкових подій $A \cup B (A + B)$ називають таку випадкову подію, яка полягає у появі подій. 2) <i>Добутком</i> випадкових подій	а) подія A не з'явиться, б) A або B або A та B . в) A та B одночасно.
--	---

$A \cap B (A \cdot B)$ називають таку випадкову подію, яка полягає у появі подій. 3) Різницею $B - A$ двох випадкових подій B та A називають усі наслідки, які полягають у тому.	
---	--

В. Встановити відповідність:

1) $P(AB) =$ (A та B – незалежні події)	а) $P(A) + P(B) - P(AB)$
2) $P(AB) =$ (A та B – залежні події)	б) $P(A) \cdot P(B)$
3) $P(A + B) =$ (A та B – несумісні події)	в) $P(A) \cdot P(B/A),$ $P(B) \cdot P(A/B)$
4) $P(A + B) =$ (A та B – сумісні події)	г) $P(A) + P(B)$

Завдання 4.

А. Ймовірність появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, \dots, A_n , незалежних в сукупності, дорівнює:

а) $P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n),$

б) $P(A) = 1 - \prod_{i=1}^n q_i,$

в) $P(A) = 1 - \sum_{i=1}^n q_i,$

якщо $P(A_i) = p_i, \quad q_i = 1 - p_i, (i = 1, 2, \dots, n).$

В. Якщо події $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ мають однакову ймовірність, рівну p , то ймовірність появи хоча б однієї з подій дорівнює:

а) $P(A) = 1 - q^n$,

б) $P(A) = 1 - p^n$,

в) $P(A) = 1 - nq$.

Завдання 5.

A. Якщо випадкова подія A може з'явитись лише сумісно з однією із несумісних між собою подій H_1, H_2, \dots, H_n , що утворюють повну групу, тоді ймовірність події A обчислюється за формулою:

а) $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P\left(\frac{A}{H_i}\right)$,

б) $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P\left(\frac{H_i}{A}\right)$.

B. Формула Байєса застосовується для:

а) переоцінки ймовірнісних гіпотези H_i за умови, що випадкова подія A здійсниться,

б) обчислення імовірності появи події H_i ,

в) обчислення імовірності появи події A за умови, що випадкова подія H_i здійсниться і обчислюється за формулою:

1) $P\left(\frac{H_i}{A}\right) = \frac{P(H_i)P\left(\frac{A}{H_i}\right)}{P(A)}$,

2) $P\left(\frac{A}{H_i}\right) = \frac{P(H_i)P\left(\frac{H_i}{A}\right)}{P(A)}$.

Завдання 6.

Задача.

а) $N = 2m + 1$. Система має два незалежно	б) $N = 2m$. Система має три незалежно
--	--

працюючих Ймовірність дорівнює $0,0N$	елементи. їх та $0,01 \cdot (N + 2)$	працюючих Ймовірність дорівнює $0,0N$	елементи. їх , $0,02$ та $\left(0,01 \cdot \binom{N}{2}\right)$.
---	--	---	---

Знайти ймовірність відмови системи, якщо для цього достатньо відмови принаймні одного з елементів.

Завдання 7.

Нехай виконується n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю p . Для визначення імовірності того, що подія A відбудеться в k випробуваннях, застосовується формула

1) якщо $n = N + 2$, $p = 0,2 + N \cdot 0,01$, $k = N$.	а) інтегральна теорема Лапласа,
2) якщо $n = 1000 \cdot N$, $p = N \cdot 0,001$, $1 < k < 4$.	б) формула Бернуллі,
3) якщо $n = 200 + N$, $p = 0,2 + N \cdot 0,01$, $N < k < 70$.	в) формула Пуассона,
4) якщо $n = 100 + N$, $p = 0,2 + N \cdot 0,01$, $k = N$.	г) локальна теорема Лапласа.

Завдання 8.

А. Встановити відповідність:

1) Формула Бернуллі	а) $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x)$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$,
2) Формула Пуассона	б) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $(q = 1 - p)$,

3) Локальна теорема Лапласа	$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$ в) $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$
4) Інтегральна теорема Лапласа	г) $P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np.$

Б. Радіоприлад містить

а) $N = 2m + 1$: $N \cdot 1000$ мікроелементів,	б) $N = 2m$: $\left(\frac{N}{2}\right) \cdot 1000$ мікроелементів,
---	--

які працюють незалежно один від одного, причому кожний з них може вийти з ладу під час роботи приладу з імовірністю $p = 0,001 \cdot N$. Знайти ймовірність таких випадкових подій: під час роботи приладу з ладу вийде:

а) менше двох елементів	б) три елементи.
-------------------------	------------------

Завдання 9.

А. Якщо виконується n незалежних випробувань за схемою Бернуллі, тоді мода m_0 задовольняє нерівність:

а) $np - q \leq m_0 \leq np + p,$

б) $np - p \leq m_0 \leq np + p .$

Б. Ймовірність того, що студент складе екзамен

а) $N = 2m + 1$: $p = 0,01 \cdot (N + 50) \quad (0 < N \leq 40)$	б) $N = 2m$: $p = 0,01 \cdot (N + 55) \quad (0 < N \leq 40)$
--	--

Нехай є група, що складається з $2 \cdot N$ студентів. Знайти найімовірнішу кількість членів цієї групи, які складуть екзамен, та обчислити цю ймовірність.

Завдання 10. Ймовірність того, що радіосигнал буде прийнятий при кожній з n передач, дорівнює p .

1) Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількості прийнятих радіосигналів.

2) Побудувати функцію розподілу ймовірностей і накреслити її графік.

3) Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення σ , асиметрію A_s та ексцес E_s .

4) Знайти моду M_o .

5) Знайти $P(1 < X < 3)$.

№ вар.	n	p	№ вар.	n	p
1	5	0,6	16	8	0,7
2	6	0,65	17	5	0,75
3	7	0,5	18	6	0,7
4	8	0,4	19	7	0,8
5	5	0,45	20	8	0,75
6	6	0,55	21	5	0,9
7	7	0,7	22	6	0,35
8	8	0,5	23	7	0,85
9	5	0,65	24	8	0,55
10	6	0,5	25	5	0,35
11	7	0,45	26	6	0,9
12	8	0,6	27	7	0,55
13	5	0,8	28	8	0,65
14	6	0,4	29	5	0,6
15	7	0,65	30	6	0,85

Завдання 11.

Дано:

а) $N = 2m + 1$: задана функцією розподілу $F(x)$:	б) $N = 2m$: задана функцією щільності розподілу $f(x)$:
--	--

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2 + b, & 0 < x \leq m, \\ 1, & x > m. \end{cases}$ <p>Знайти:</p> <p>1) a, b,</p> <p>2) щільність розподілу $f(x)$,</p> <p>3) $P\left(-1 < X < \left(\frac{m+1}{2}\right)\right)$.</p> <p>4) $M(X), D(X), \sigma, Me, Mo$,</p> <p>5) $f(y)$, якщо $y = x^3$.</p>	$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x > m, \\ ax, & < x \leq m. \end{cases}$ <p>Знайти:</p> <p>1) a,</p> <p>2) функцію розподілу $F(x)$,</p> <p>3) $P\left(-1 < X < \left(\frac{m}{2}\right)\right)$.</p> <p>4) $M(X), D(X), \sigma, Me, Mo$,</p> <p>5) $f(y)$, якщо $y = x^2$.</p>
---	--

Побудувати графіки функції та щільності розподілу НВВ X .

Завдання 12. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею (N – номер варіанта):

	$x_1 = N$	$x_2 = N + 2$	$x_3 = N + 4$	$x_4 = N + 6$	p_{y_i}
$y_1 = N + 1$	$\frac{N}{10}a$	$\frac{5N}{10}a$	$\frac{4N}{10}a$	Na	
$y_2 = N + 3$	$\frac{9N}{10}a$	$\frac{4N}{10}a$	$\frac{5N}{10}a$	$\frac{2N}{10}a$	
$y_3 = N + 5$	Na	$\frac{21N}{10}a$	$\frac{11N}{10}a$	$\frac{18N}{10}a$	
p_{x_i}					

Знайти:

- 1) невідомий параметр a ;
- 2) коефіцієнт кореляції r_{xy} ;
- 3) $M(X / y = y_2)$; $M(Y / x = x_2)$.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця значень функції нормального розподілу Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Цілі і десяти частини x	Соті частини x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Цілі і десяті частини x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

Ймовірності $P_a(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. розподілу Пуассона.

$m \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,09484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834
4		0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123
6					0,00001	0,00004	0,00008	0,00016
7								0,00002

$m \backslash a$	0,91	1	2	3	4	5	6
0	0,40657	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248
1	0,36591	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487
2	0,16466	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462
3	0,04940	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924
4	0,01111	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385
5	0,00200	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062
6	0,00030	0,00051	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622	0,16062
7	0,00004	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444	0,13768
8			0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326
9			0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884
10			0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130
11				0,00022	0,00192	0,00824	0,02253

$m \backslash a$	0,91	1	2	3	4	5	6
12				0,00006	0,00064	0,00343	0,01126
13				0,00001	0,00020	0,00132	0,00520
14					0,00006	0,00047	0,00223
15					0,00002	0,00016	0,00089
16						0,00005	0,00033
17						0,00001	0,00012
18							0,00004
19							0,00001

$m \backslash a$	7	8	9	10	11	12	13
0	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005	0,00002		
1	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045	0,00018	0,00007	0,00003
2	0,02234	0,01073	0,00500	0,00227	0,00101	0,00044	0,00019
3	0,05213	0,02863	0,01499	0,00757	0,00370	0,00177	0,00083
4	0,09123	0,05725	0,03374	0,01892	0,01019	0,00531	0,00269
5	0,12772	0,09160	0,06073	0,03783	0,02242	0,01274	0,00699
6	0,14900	0,12214	0,09109	0,06306	0,04109	0,02548	0,01515
7	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008	0,06458	0,04368	0,02814
8	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260	0,08879	0,06552	0,04573
9	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511	0,10853	0,08736	0,06605
10	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511	0,11938	0,10484	0,08587
11	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374	0,11938	0,11437	0,10148
12	0,02635	0,04813	0,07277	0,09478	0,10943	0,11437	0,10994

<i>m</i> \ <i>a</i>	7	8	9	10	11	12	13
13	0,01419	0,02962	0,05038	0,07291	0,09259	0,10557	0,10994
14	0,00709	0,01692	0,03238	0,05208	0,07275	0,09049	0,10209
15	0,00331	0,00903	0,01943	0,03472	0,05335	0,07239	0,08848
16	0,00145	0,00451	0,01093	0,02170	0,03668	0,05429	0,07189
17	0,00060	0,00212	0,00579	0,01276	0,02373	0,03832	0,05497
18	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709	0,01450	0,02555	0,03970
19	0,00009	0,00040	0,00137	0,00373	0,00840	0,01614	0,02716
20	0,00003	0,00016	0,00062	0,00187	0,00462	0,00968	0,01766
21		0,00006	0,00026	0,00089	0,00242	0,00553	0,01093
22		0,00002	0,00011	0,00040	0,00121	0,00302	0,00646
23			0,00004	0,00018	0,00058	0,00157	0,00365
24			0,00002	0,00007	0,00027	0,00079	0,00198
25				0,00003	0,00012	0,00038	0,00103
26				0,00001	0,00005	0,00017	0,00051
27					0,00002	0,00008	0,00025
28						0,00003	0,00011
29						0,00001	0,00005
30							0,00002

<i>m</i> \ <i>a</i>	14	15	16	17	18	19	20
0							
1	0,00001						
2	0,00008	0,00003	0,00001				

<i>m</i> \ <i>a</i>	14	15	16	17	18	19	20
3	0,00038	0,00017	0,00008	0,00003	0,00001		
4	0,00133	0,00065	0,00031	0,00014	0,00007	0,00003	0,00001
5	0,00373	0,00194	0,00098	0,00049	0,00024	0,00012	0,00005
6	0,00870	0,00484	0,00262	0,00139	0,00072	0,00037	0,00018
7	0,01739	0,01037	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,03044	0,01944	0,01199	0,00716	0,00416	0,00236	0,00131
9	0,04734	0,03241	0,02131	0,01353	0,00833	0,00498	0,00291
10	0,06628	0,04861	0,03410	0,02300	0,01499	0,00947	0,00582
11	0,08436	0,06629	0,04960	0,03554	0,02452	0,01635	0,01058
12	0,09842	0,08286	0,06613	0,05036	0,03678	0,02589	0,01763
13	0,10599	0,09561	0,08139	0,06585	0,05093	0,03784	0,02712
14	0,10599	0,10244	0,09302	0,07996	0,06548	0,05135	0,03874
15	0,09892	0,10244	0,09922	0,09062	0,07858	0,06504	0,05165
16	0,08656	0,09603	0,09922	0,09628	0,08840	0,07724	0,06456
17	0,07128	0,08474	0,09338	0,09628	0,09360	0,08633	0,07595
<i>m</i> \ <i>a</i>	14	15	16	17	18	19	20
18	0,05544	0,07061	0,08301	0,09094	0,09360	0,09112	0,08439
19	0,04085	0,05575	0,06990	0,08136	0,08867	0,09112	0,08884
20	0,02860	0,04181	0,05592	0,06916	0,07980	0,08657	0,08884
21	0,01906	0,02986	0,04261	0,05599	0,06840	0,07832	0,08461
22	0,01213	0,02036	0,03099	0,04326	0,05597	0,06764	0,07691
23	0,00738	0,01328	0,02156	0,03198	0,04380	0,05588	0,06688
24	0,00431	0,00830	0,01437	0,02265	0,03285	0,04424	0,05573

<i>m</i> \ <i>a</i>	14	15	16	17	18	19	20
25	0,00241	0,00498	0,00920	0,01540	0,02365	0,03362	0,04459
26	0,00130	0,00287	0,00566	0,01007	0,01637	0,02457	0,03430
27	0,00067	0,00160	0,00335	0,00634	0,01092	0,01729	0,02541
28	0,00034	0,00086	0,00192	0,00385	0,00702	0,01173	0,01815
29	0,00016	0,00044	0,00106	0,00226	0,00436	0,00769	0,01252
30	0,00008	0,00022	0,00056	0,00128	0,00261	0,00487	0,00834
31	0,00003	0,00011	0,00029	0,00070	0,00152	0,00298	0,00538
32	0,00001	0,00005	0,00015	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33		0,00002	0,00007	0,00019	0,00047	0,00102	0,00204
34		0,00001	0,00003	0,00010	0,00025	0,00057	0,00120
35			0,00002	0,00005	0,00013	0,00031	0,00069
36				0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37				0,00001	0,00003	0,00008	0,00021
38					0,00001	0,00004	0,00011

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. – К.: Центр учбової літ., 2010. – 424 с.
2. Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. підручник. – Київ, 2006. – 440 с.
3. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей : Учеб. пособие для вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Академия, 2003. – 448 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. Для вузов / Е.С. Вентцель. – 10-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 575 с.: ил.
5. Вища математика: Модульна технологія навчання: У 4 ч.: навч. пос. Ч. 4. Теорія ймовірностей і математична статистика / В.П. Денисюк, В.М. Бобков, Т.А. Погребецька, В.К. Репета. – 2-го вид. доопрац. – К.: Вид-во нац. авіа. ун-ту «НАУ-друк». – 2009. – 256 с.
6. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1988. – 439 с: ил. — 2-е изд., перераб. и доп.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для высшей школы. – М.: В.школа., 2000. – 400 с.: ил.
8. Гнеденко Б.В. Курс теорії ймовірностей. – К.: ВПЦ Київський університет, 2010. – 464 с.
9. Дороговцев А.Д. Збірник задач з теорії ймовірностей. – К.: Вища школа, 1976. – 384 .
- 10.Іванюта І.Д., Рибалка В.І., Рудоміно-Дусятська І.А. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. – К.: Слово, 2006.
- 11.Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач. – К., 2007. – 576 с.
- 12.Медведев М.Г., Пашенко І.О. Теорія ймовірностей та математична статистика. Підручник. – К.: Вид-во «Ліра-К», 2008. – 536 с.

- 13.Самойленко М.І., Кузнецов А.І., Костенко О.Б. Теорія ймовірностей. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 194 с.
- 14.Теорія ймовірностей [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. Ю. В. Сидоренко. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,22 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 81 с.
- 15.Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб пособие для вузов/ В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2003. – 479 с.
- 16.Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. – Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2014. – 556 с.
- 17.Чорней Р.К. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб для студ. вищ. закл. / Р.К. Чорней, О.Ю. Дюженкова, О.Б. Жильцов та ін.; за ред. Р.К. Чорнея. – К.: МАУП, 2003. – 328 с.

Навчальне видання

Барабаш Олег Володимирович

Мусієнко Андрій Петрович

Свинчук Ольга Василівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник