



Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»



В. П. Бунь, Т. Г. Баган

Теорія автоматичного керування

Підручник



УДК 681.5(075.8)
Б91

Гриф надано Вченою радою
КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 12.05.2025 р.)

Автори: *Бунь Валерій Павлович*, канд. техн. наук, доц., доцент кафедри автоматизації енергетичних процесів НН ІАТЕ, КПІ ім. Ігоря Сікорського
Баган Тарас Григорович, канд. техн. наук, доц., доцент кафедри автоматизації енергетичних процесів НН ІАТЕ, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Рецензенти: *Полупан Володимир Володимирович*, канд. техн. наук, доцент кафедри автоматизації та комп'ютерних технологій систем управління ім. проф. А. П. Ладанюка Національного університету харчових технологій
Колесник Василь Васильович, канд. техн. наук, ст. наук. співроб., доцент кафедри електрообладнання та автоматики водного транспорту Київського інституту водного транспорту імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного Державного університету інфраструктури та технологій

Відповідальний

редактор: *Любицький Сергій Вікторович*, ст. викладач кафедри автоматизації енергетичних процесів НН ІАТЕ, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Бунь В.П.

Б91 Теорія автоматичного керування : підруч. для здобувачів ступеня бакалавра за спец. «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка». У 2-х ч. Ч. 1 / В. П. Бунь, Т. Г. Баган ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2025. – 160 с.

ISBN 978-966-990-148-4

Підручник забезпечує викладання дисципліни «Теорія автоматичного керування». Видання є першою частиною, що охоплює основи теорії неперервного керування, які є ключовим компонентом підготовки фахівців у галузі автоматизації.

Викладено фундаментальні принципи автоматичного керування. Наведено класифікацію автоматичних регуляторів та основні принципи керування. Розглянуто рівняння статички і динаміки. Описано часові динамічні характеристики, динамічні властивості елементів і систем автоматичного керування. Розглянуто стійкість систем автоматичного керування, типові закони регулювання та синтез систем автоматичного регулювання.

Значну увагу приділено візуалізації матеріалу через графіки, схеми, діаграми, що сприяє кращому засвоєнню теоретичних понять у навчальному процесі.

Для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка», студентів технічних спеціальностей загалом, викладачів і всіх, хто цікавиться автоматизацією і теорією керування.

УДК 681.5(075.8)

ISBN 978-966-990-148-4

© В. П. Бунь, Т. Г. Баган, 2025
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025

Навчальне видання

Бунь Валерій Павлович
Баган Тарас Григорович

Теорія
автоматичного
керування

Підручник

У 2-х частинах

Частина 1

В авторській редакції
Надруковано з оригінал-макета замовника

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.
просп. Берестейський, 37, м. Київ, 03056

Підп. до друку 06.06.2025. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – електрографічний. Ум. друк. арк. 9,28. Обл.-вид. арк. 7,4.
Поз. 25-1-1-004. Наклад 20 пр. Зам. № 25-039.

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського
вул. Політехнічна, 14, корп. 15
03056, м. Київ
тел. (044) 204-81-78

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ	10
Контрольні запитання до Розділу 1.....	11
2 КЛАСИФІКАЦІЯ АВТОМАТИЧНИХ РЕГУЛЯТОРІВ	13
Контрольні запитання до Розділу 2.....	15
3 ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ КЕРУВАННЯ.....	16
Контрольні запитання до Розділу 3.....	23
4 РІВНЯННЯ СТАТИКИ І ДИНАМІКИ	25
4.1 Лінеаризація диференційних рівнянь.....	26
4.1.1 Лінеаризація статичних характеристик	27
4.1.2 Лінеаризація нелінійних статичних характеристик	28
4.2 Безрозмірна форма запису диференційних рівнянь.....	30
4.3 Розв'язання лінійних диференційних рівнянь, перетворення Лапласа і передавальні функції.....	31
Контрольні запитання до Розділу 4.....	35
5 ЧАСОВІ ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	36
Контрольні запитання до Розділу 5.....	41
6 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	42
Контрольні запитання до Розділу 6.....	46
7 ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ І СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	47
7.1 Елементарні ланки.....	48
7.1.1 Підсилювальна ланка.....	48
7.1.2 Інтегрувальна ланка	50
7.1.3 Аперіодична ланка першого порядку	53
7.1.4 Коливальна ланка	55
7.1.5 Ідеальна диференційна ланка.....	58

7.1.6	Реальна диференційна ланка.....	60
7.1.7	Ланка чистого запізнювання.....	63
7.2.	З'єднання ланок.....	65
	Контрольні запитання до Розділу 7.....	67
8	СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.....	69
8.1	Поняття про стійкість системи.....	69
8.2	Критерії стійкості	76
8.3	Критерій Рауса	78
8.4	Критерій Гурвіца	80
8.5	Критерій Найквіста	84
8.6	Критерій Михайлова	96
8.7	Логарифмічний критерій стійкості.....	101
8.8	Стійкість систем керування з запізнюванням	105
8.9	Поняття про запас стійкості	107
8.10	Побудова областей стійкості.....	111
8.11	Поняття про D -розбивку простору коефіцієнтів характеристичного рівняння.....	116
8.12	D -розбивка площини одного комплексного параметра	119
8.12.1	Постановка задачі і знаходження D -кривої.....	119
8.12.2	Правило штрихування	120
8.13	D -розбивка площини двох параметрів	122
8.13.1	Постановка задачі	122
8.13.2	Знаходження D -кривої.....	122
8.13.3	Правило штрихування	124
8.14	Інтегральні оцінки якості.....	126
	Контрольні запитання до Розділу 8.....	130
9	ТИПОВІ ЗАКОНИ РЕГУЛЮВАННЯ.....	131
9.1	Пропорційні регулятори	131
9.2	Інтегральні регулятори	133
9.3	Диференційні регулюючі пристрої.....	136

9.4	Пропорційно-інтегральні регулятори.....	139
9.5	Пропорційно-інтегрально-диференційні регулятори	146
	Контрольні запитання до Розділу 9.....	150
10	СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ.....	151
10.1	Метод розширених амплітудно-фазових характеристик	151
10.2	Дисперсійний метод.....	153
10.3	Інформаційний метод.....	154
10.4	Метод максимуму амплітудно-частотної характеристики	156
	Контрольні запитання до Розділу 10.....	157
	СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	158

ВСТУП

Становлення і розвиток теорії і техніки автоматичного керування теплоенергетичними процесами

Першим промисловим зразком автоматичного регулюючого пристрою був автоматичний регулятор рівня, застосований у 1765 р. механіком-винахідником Ползуновим І. І. у паровому котлі, що постачав парю його парову машину. Схематичне зображення системи керування з цим регулятором наведено на рис. В1. Об'єкт керування тут – паровий котел, мета керування – підтримка рівня води $y(t)$ постійним. Регулятор складається з поплавка Π , що, переміщуючись разом з рівнем, змінює ступінь *відкриття* $\mu(t)$ регулюючого органу PO – засувки на трубопроводі підведення живильної води в котел. Зчленування поплавка з засувкою виконано таким чином, що при підвищенні рівня води засувка прикривається, а при зниженні відкривається, забезпечуючи тим самим стабілізацію рівня води біля його заданого значення при дії збурень (зміні споживання пари з котла, мимовільній зміні витрати води внаслідок зміни тиску води перед засувкою і зміні тиску пари в котлі).

Приблизно два десятиліття по тому Дж. Уатт встановив на своїй паровій машині відцентровий регулятор частоти обертання її вала (рис. В2), принцип роботи якого не відрізнявся від регулятора Ползунова, але мав інше конструкційне оформлення.

Зміна частоти обертання вала в цьому регуляторі сприймається відцентровим маятником BM . Відцентрові сили, що розвиваються при обертанні маятника, розводять вантажі маятника, що *захоплюють за собою муфту* M нагору доти, поки ці сили не будуть урівноважені силою стиснення пружини Π . Очевидно, що чим більше швидкість обертання f , тим більше переміститься нагору муфта M , збільшуючи відстань η_M . У свою чергу, муфта пов'язана за допомогою важеля зі штоком регулюючого органу об'єкта клапаном PK на лінії підведення пари до машини, змінюючи його положення μ . Причому так, що при збільшенні частоти обертання вала клапан прикривається, а при зменшенні –

відкривається. Частота обертання вала може бути встановлена за допомогою відповідного початкового стиснення пружини за допомогою задавача *ЗД*.

Обидва наведені регулятори не мають серводвигунів, переміщення регулювальних органів здійснюється безпосередньо елементом, що сприймає зміну регульованої величини (поплавком, відцентровим маятником). Такого роду регулятори отримали назву **регуляторів прямої дії**.

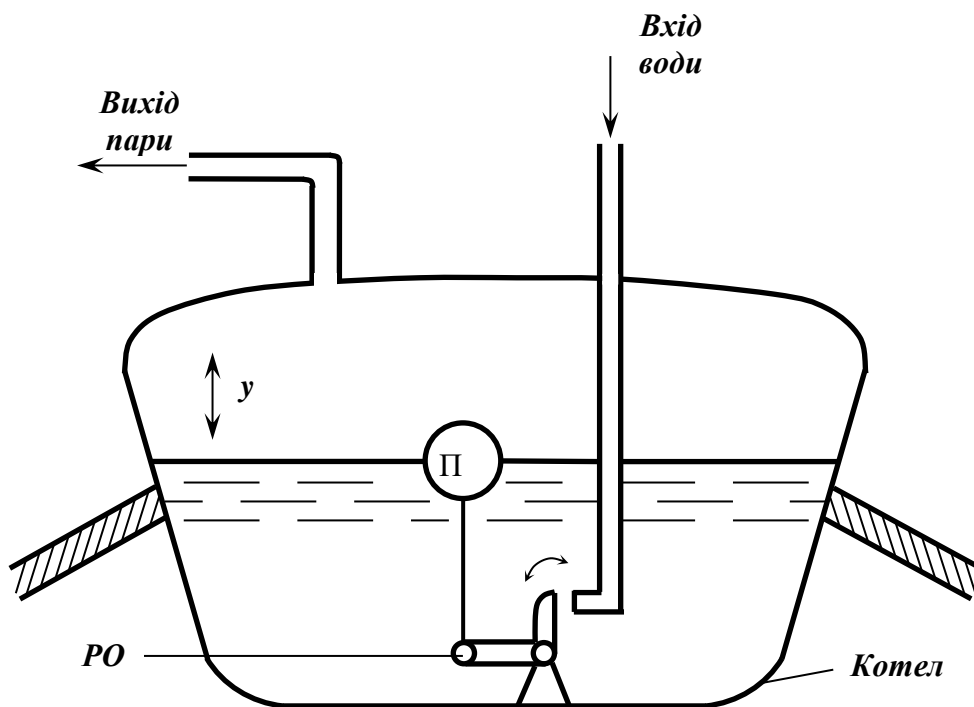


Рисунок В1 – Автоматичний регулятор рівня Ползунова

Ріст потужностей і розмірів парових машин призвів до серйозних труднощів у використанні відцентрових регуляторів прямої дії, оскільки для переміщення важких регулювальних клапанів було потрібно усе більше і більше збільшувати масу вантажів відцентрового маятника. Одночасно став усе більш помітним і інший недолік розглянутих регуляторів – їхня нездатність точно підтримувати задане значення регульованої величини при різних навантаженнях об'єкта (це явище отримало назву **статичної помилки** або **нерівномірності регулювання**).

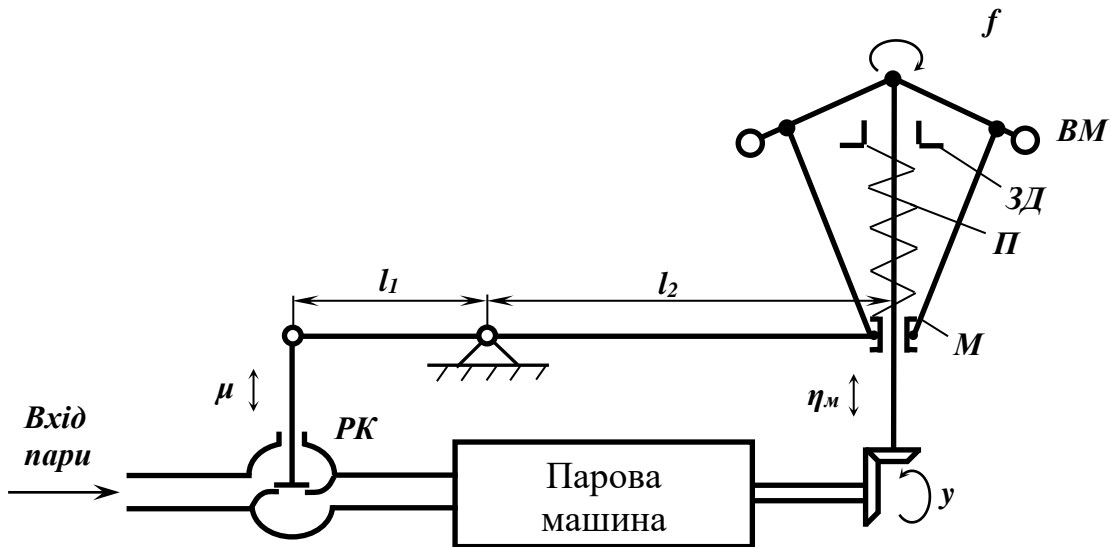


Рисунок В2 – Відцентровий регулятор частоти обертання Дж. Уатта

Дійсно, для того, щоб об'єкт ніс нове навантаження, необхідно перемістити його регулювальний орган у нове положення (чим більше навантаження, тим більше повинен бути відкритий регулювальний клапан). Але так як в обох конструкціях регуляторів положення регулюючого органа жорстко пов'язано з елементом, який сприймає зміну регульованої величини, то при різних сталих положеннях регулюючого органа повинно встановлюватися і різне значення регульованої величини. Так, регулятор частоти обертання вала парової машини може перемістити регулювальний клапан у нове положення тільки зміною положення муфти відцентрового маятника, що можливо тільки при новому значенні частоти обертання вала машини.

Прагнення зменшити нерівномірність керування (для чого в регуляторі, зображеному на рис. Б, слід, очевидно, збільшувати відношення плечей важелів l_1/l_2) призвело до несподіваного для того часу явища – втраті стійкості системами керування, тобто до появи розбіжних коливань регульованої величини. Спроби боротьби з цим явищем чисто конструкційними методами, насамперед спрямованими на зменшення сил тертя в зчленуваннях регулятора (саме в цьому бачили спочатку причину нестійкості) успіху не мали. Проблема виявилася настільки важливою, що нею зайнялися видатні вчені того часу. Перша робота зі

стійкості систем керування, у якій намітився правильний підхід до розв'язання, була опублікована Дж. К. Максвеллом у 1868 р.; однак, зроблені в ній спрощувальні припущення, виключали з розгляду реально існуючі тоді, а тому практично цінні, системи з відцентровими регуляторами Уатта, і тому вона не була помічена інженерами.

Чітке розуміння природи нестійких режимів роботи в системах керування, практичних способів отримання неколивальних режимів, а головне, методології вивчення систем керування як нового феномена техніки прийшло тільки після появи в 1876–1877 р.р. робіт Вишнеградського І. О. Ці роботи і заклали основи нової інженерної науки – **теорії автоматичного керування**, науки про процеси керування і їхні загальні закономірності.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ

Умови перебігу будь-якого технологічного процесу характеризуються низкою параметрів, підтримка яких у необхідних межах забезпечує надійну й економічну роботу установки. Задачу керування технологічними процесами розглянемо на прикладі регулювання рівня води в підігрівачі (рис. 1.1).

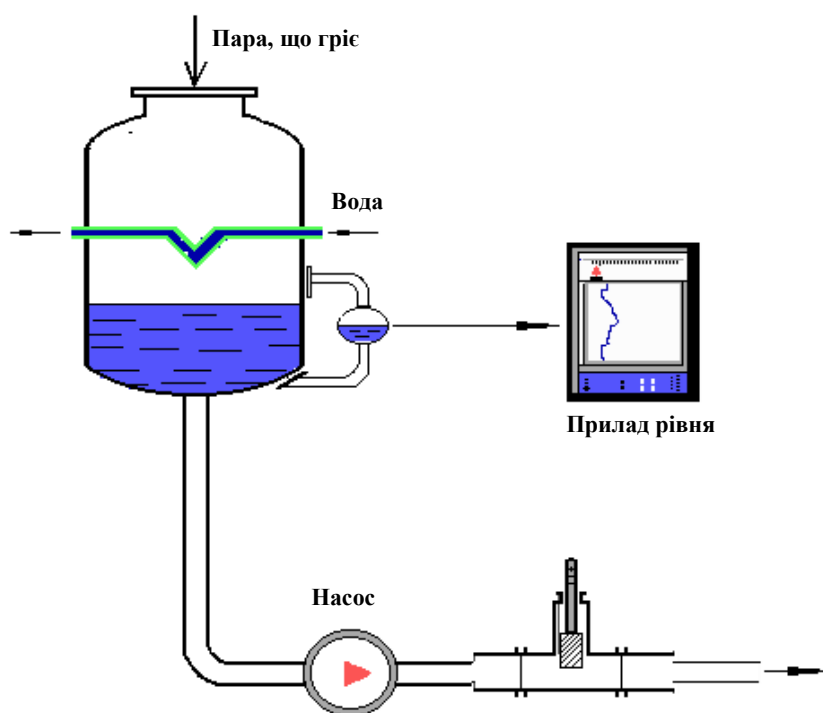


Рисунок 1.1 – Регулювання рівня в підігрівачі

Умовою сталості рівня є дотримання матеріального балансу між припливом конденсату і тією його кількістю, що відкачується. Регулювання кількості конденсату, що відкачується, може здійснювати обслуговуючий персонал на підставі спостереження за рівнем.

Цю ж задачу може виконати й автоматичний регулятор без втручання людини. Структурна схема такої системи наведена на рис. 1.2.

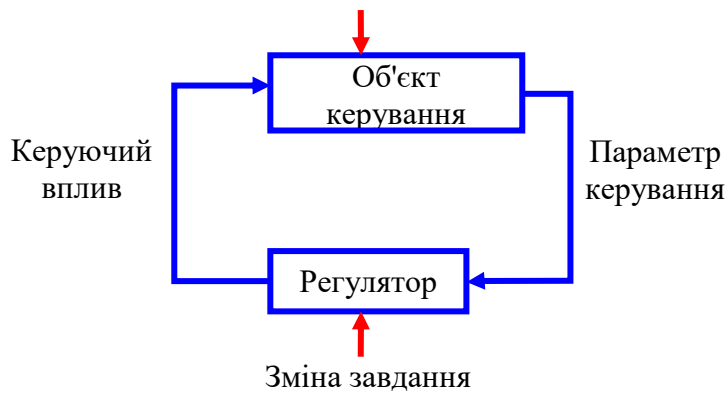


Рисунок 1.2 – Схема системи автоматичного керування

Об'єкт керування – об'єкт, у якому повинен підтримуватися заданий технологічний процес.

Параметр керування – параметр, що характеризує умови протікання процесу і керується регулятором.

Керуючий вплив – вплив регулятора на регульований орган.

Контур регулювання – замкнений ланцюг, утворений об'єктом і регулятором.

Система автоматичного керування – система, що автоматично змінює характеристики об'єкту з метою отримання бажаних результатів його роботи.

Система автоматичного регулювання – окремий випадок системи керування, коли необхідне протікання технологічного процесу досягається шляхом стабілізації одного чи декількох параметрів об'єкта на заданому рівні.

Контрольні запитання до Розділу 1

1. Чий роботи заклали основи теорії автоматичного управління?
2. Що таке об'єкт керування?
3. Що характеризує параметр керування?
4. Що називається керуючим впливом?

5. Що представляє собою контур керування?
6. Чим відрізняється система автоматичного керування від системи автоматичного регулювання?
7. Яке явище отримало назву статичної помилки або нерівномірності регулювання?
8. Що є умовою сталості рівня в системі автоматичного регулювання рівня?

2 КЛАСИФІКАЦІЯ АВТОМАТИЧНИХ РЕГУЛЯТОРІВ

У промисловості отримали поширення різноманітні системи керування, що розрізняються типами і кількістю використовуваних регуляторів і їх взаємозв'язків.

Регулятор – це пристрій, що використовується для керування або підтримання певного процесу чи системи в бажаному стані. Автоматичний регулятор автоматично підтримує параметри певного технічного процесу на заданому рівні без втручання людини. Він є ключовим елементом системи автоматичного керування і забезпечує стабільність, точність та ефективність роботи машин, механізмів або систем. Автоматичні регулятори є невід'ємною частиною сучасної техніки, особливо у промисловості, де необхідна стабільність і ефективність процесів [1].

Класифікація регуляторів може здійснюватися за різними ознаками. Основні з них наведені на рис. 2.1.

Класифікація регуляторів є важливим фактором, оскільки вона дозволяє систематизувати їх за характеристиками, призначенням і принципами роботи. Це допомагає в правильному виборі, розумінні роботи, розробці та використанні регуляторів у конкретних технічних, наукових чи побутових завданнях. Зокрема інженерам та конструкторам потрібно розуміти, які саме типи регуляторів доступні, їх можливості та обмеження.

Знання класифікації дозволяє аналізувати, які типи регуляторів можуть бути замінені на більш сучасні або ефективні. Це важливо для модернізації технологічних процесів.

Класифікація дозволяє забезпечити правильне використання регуляторів, зменшити ризики невідповідного вибору та зробити технічні системи більш надійними, точними і економічними.

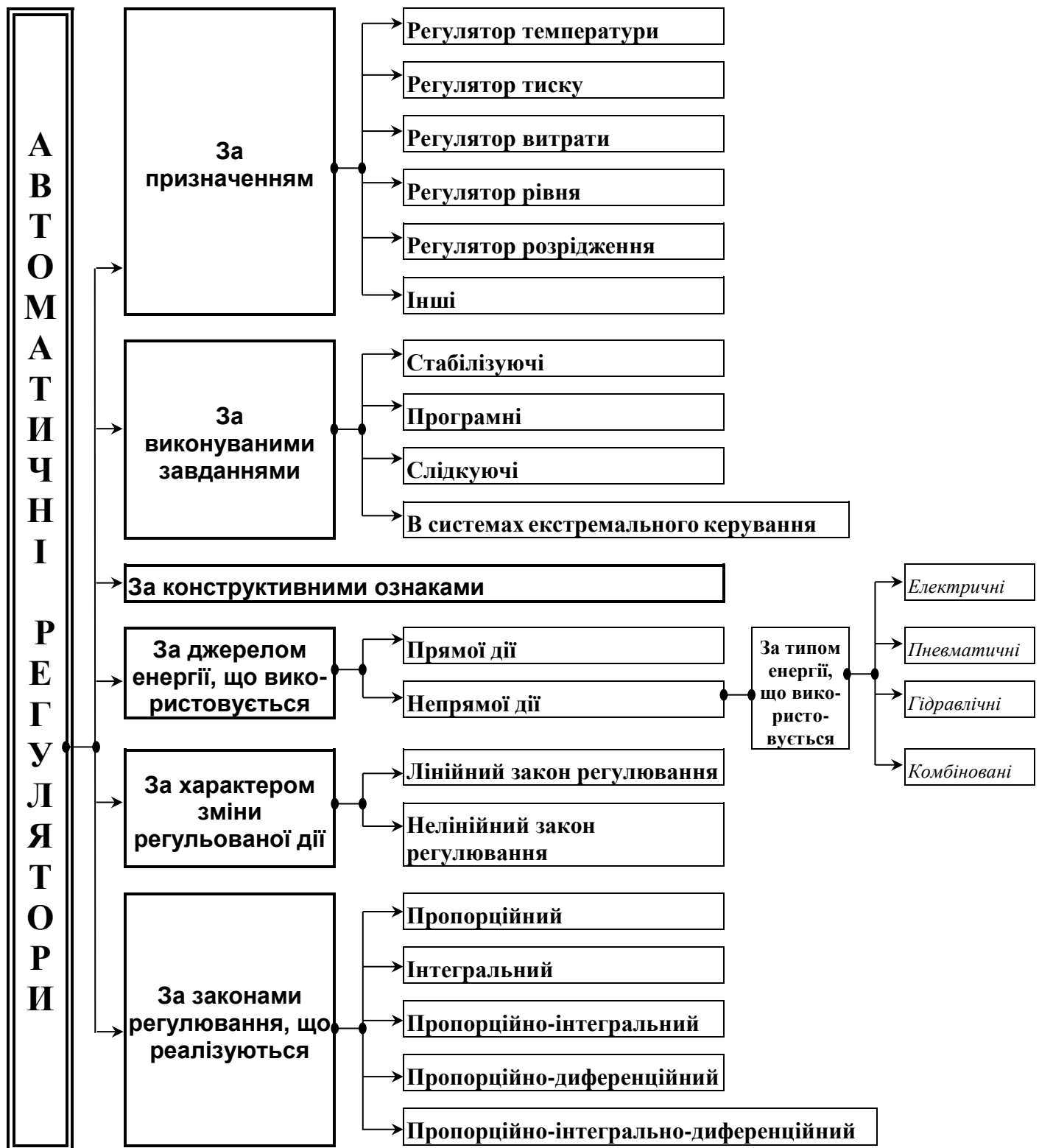


Рисунок 2.1 – Класифікація автоматичних регуляторів

Вибір того або іншого типу регулятора залежить від конкретних задач, що виникають при керуванні технологічним процесом, вимог, що висуваються до точності керування, специфічних умов, у яких повинен працювати регулятор та ін.

Контрольні запитання до Розділу 2

1. За якими ознаками розрізняються автоматичні регулятори?
2. Які регулятори отримали назву регулятори прямої дії?
3. Які основні ознаки класифікації регуляторів?

3 ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ КЕРУВАННЯ

Залежно від характеру інформації про об'єкт, що отримується в процесі його роботи, наявності його математичного опису, статичних характеристик і головне – задачі, поставленої перед системою автоматичного керування, принципи автоматичного керування істотно розрізняються.

Задачі, які ставляться перед системою керування, можна розподілити на наступні групи.

1. **Стабілізація.** У цьому випадку необхідно з заданою точністю підтримувати на постійному рівні ті або інші параметри керування.

2. **Програмне керування.** В цьому випадку закон зміни параметрів керування заздалегідь відомий і задається оператором, що обслуговує систему керування.

3. **Слідкування** за деяким параметром керування, закон зміни якого заздалегідь невідомий. У цьому випадку величина, якою керують повинна з заданою точністю відтворювати вимірювану величину або деяку функцію вимірюваної величини. Такі системи керування називаються **слідкуючими** системами.

4. **Самоналаштування системи на оптимум** будь-якого показника об'єкта або системи. Це може бути забезпечення або екстремального значення регульованої величини, або максимальної швидкодії системи керування шляхом підстроювання її параметрів та забезпечення оптимального режиму роботи об'єкта. Самоналаштування може поєднуватися із стабілізацією, програмним керуванням і слідкуванням.

Системи керування розділяються на розімкнуті і замкнуті [2].

У **розімкнутих** системах управляючий вплив задається без обліку дійсного значення регульованої величини на підставі мети керування, характеристик об'єкта і відомих зовнішніх впливів. Таке керування називається **жорстким**.

У розімкнутих системах керування відсутня компенсація впливу неконтрольованих збурень, вони застосовуються для стабілізації і програмного керування.

У замкнутих системах управляючий вплив формується в безпосередній залежності від параметра керування.

Принцип дії розімкнутих і замкнутих систем керування може бути проілюстрований двома прикладами регулювання рівнем рідини в резервуарі, що здійснюється людиною-оператором (рис. 3.1). У першому випадку (рис. 3.1, а) оператор не отримує інформації про потрібний йому рівень рідини, проте знає, як цей рівень змінюється зі зміною припливу рідини в резервуар. Вимірюючи витрату рідини g_1 , він обчислює необхідне положення клапана, що регулює приплив рідини u_1 і встановлює відповідне відкриття клапана.

В другому випадку (рис. 3.1, б) оператор отримує інформацію про рівень рідини y_1 і залежно від відхилення рівня від необхідного значення v_1 змінює положення клапана, який регулює приплив рідини u_1 .

Перший принцип керування називається **керуванням за збуренням**, а другий – **керуванням за відхиленням**. Зазначені функції людини-оператора успішно і з великими швидкостями дії виконуються автоматичними пристроями – **регуляторами**.

Стабілізація. Залежно від інформації про регульований об'єкт і про зовнішні впливи на нього задача стабілізації може вирішуватися різними шляхами. Якщо всі зовнішні впливи на об'єкт контролюються і можуть бути виміряні, а властивості об'єкта і його динамічних характеристик відомі, то керування може вестися за збуренням. Функціональна схема пристрою, що регулює за збуренням, показана на рис. 3.2, а. Тут неконтрольовані впливи відсутні ($f \approx 0$), і задача керування вирішується шляхом знаходження функції

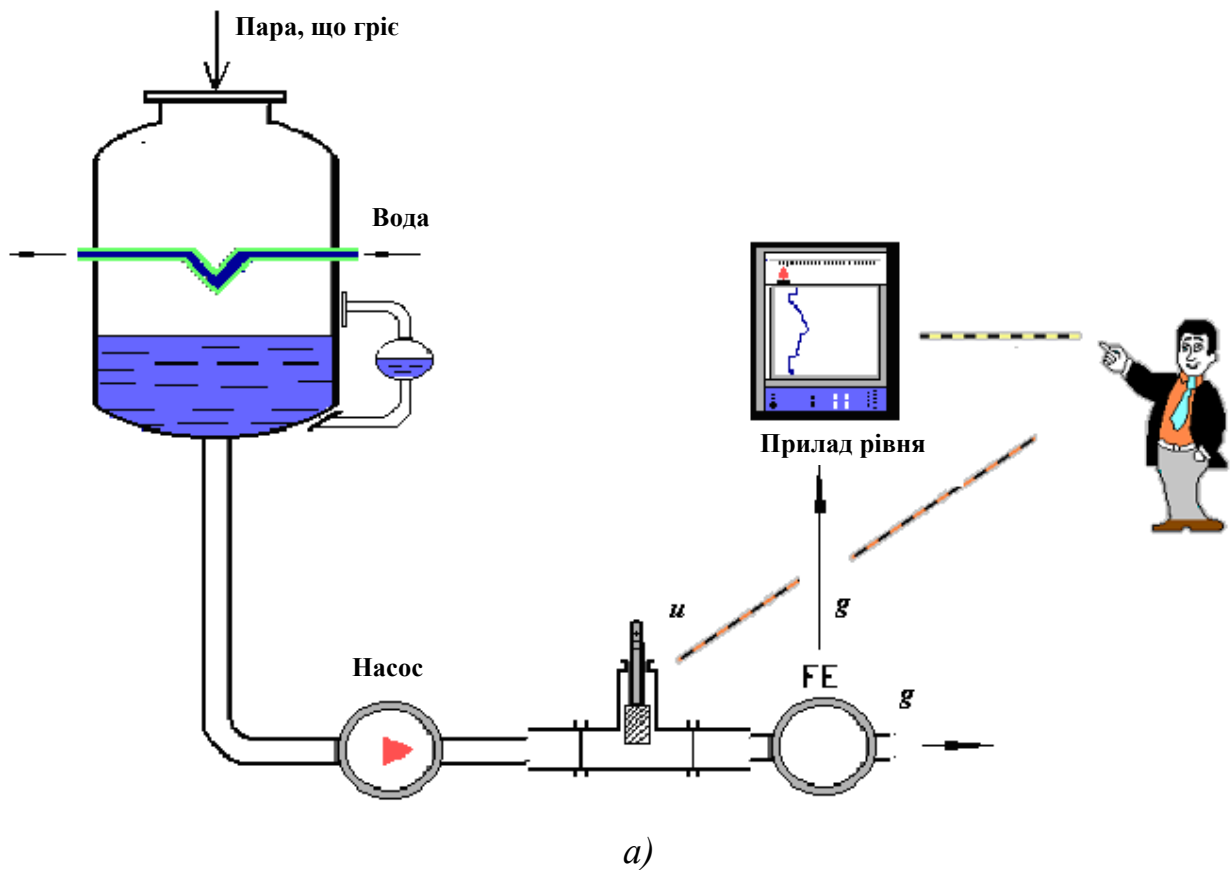
$$u = u(g), \quad (3.1)$$

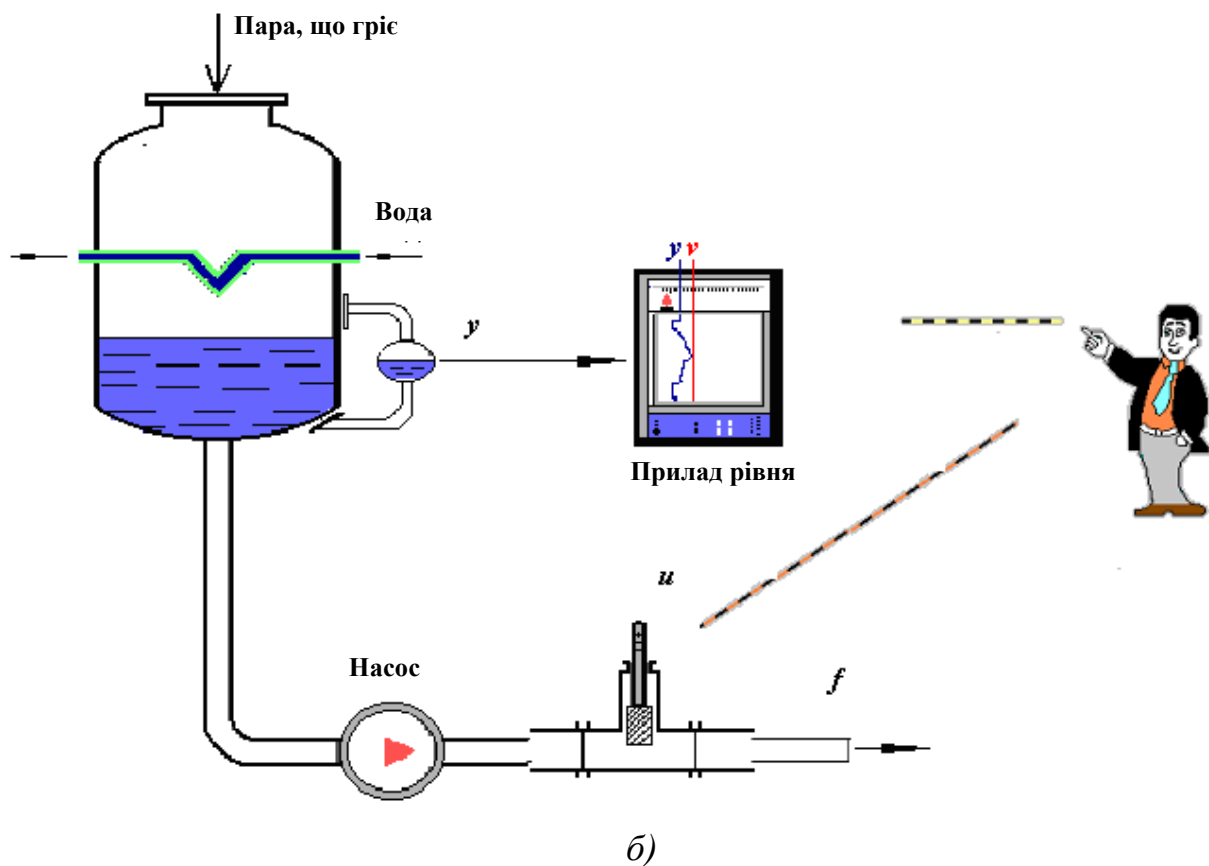
при якій забезпечується умова

$$y = y_{em} = \text{const}, \quad (3.2)$$

де y_{em} – еталонне (необхідне) значення параметра керування, що відповідає завданню v .

Регулятор, що виконує умову (3.2), забезпечує стабілізацію параметрів керування або їхню інваріантність, тобто незалежність від зовнішніх впливів. Для приклада, зображеного на рис. 3.1, *a*, регулятор виконує функції людини-оператора.





a – керування за збуренням; *б* – керування за відхиленням

Рисунок 3.1 – Регулювання рівнем рідини в резервуарі

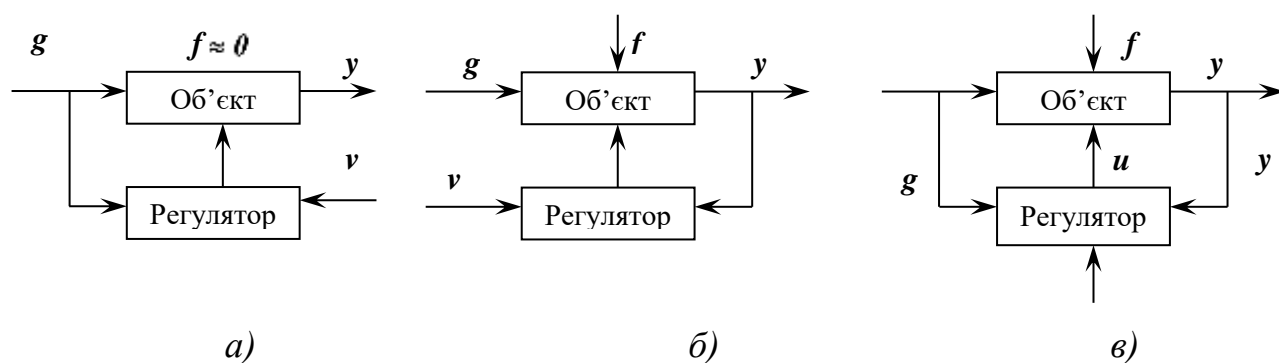
При наявності неконтрольованих збурень і при недостатньо повному математичному описі об'єкта, керування за збуренням не може забезпечити стабілізації регульованої величини. У цьому випадку застосовується принцип керування за відхиленням, реалізований у замкнутій системі керування. Схематично пристрій керування за відхиленням наведений на рис. 3.2, *б*.

Управляючий вплив на об'єкт u залежить від різниці e між регульованою величиною y і завданням v і спрямовано у бік зменшення цієї різниці. Завдання на регульовану величину v може бути або рівним необхідному значенню y , або трохи перевищувати цю величину для того, щоб забезпечити значення e , необхідне для роботи регулятора. Для приклада, наведеного на рис. 3.1, *б*, регулятор виконує функції людини-оператора.

Для підвищення точності систем автоматичного керування застосовуються комбіновані системи керування, що поєднують принципи керування за відхиленням і збуренням (рис. 3.2, в).

Програмне керування. Програмне керування будь-якою регульованою величиною залежно від наявності математичного опису об'єкта і неконтрольованих зовнішніх впливів також може здійснюватися розімкнутими і замкнутими системами.

Якщо існує точний математичний опис об'єкта, а всі зовнішні впливи контролюються і шляхом керування за збуренням їхній вплив може бути зведеним до нуля, то програмне керування об'єктом здійснюється **по розімкнутій системі жорсткого керування**. При такому керуванні задається такий закон зміни керуючого впливу, який забезпечує необхідний закон зміни параметра керування.



a – керування за збуренням; $б$ – керування за відхиленням;
 $в$ – поєднання принципів керування за збуренням і за відхиленням

Рисунок 3.2 – Схема автоматичного керування

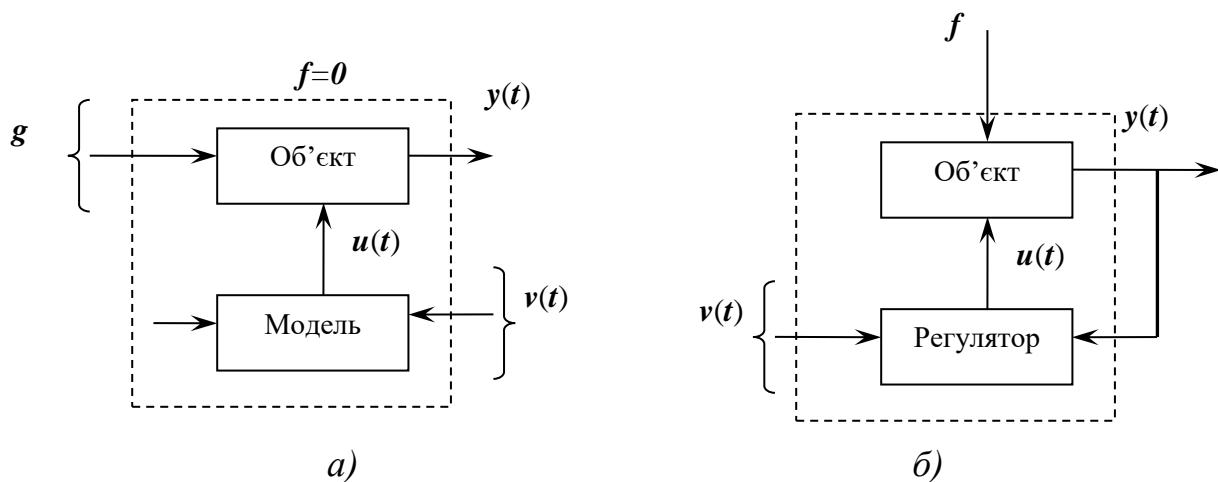


Рисунок 3.3 – Схема розімкнутої системи програмного керування

Нехай потрібно, щоб параметр керування y змінився в часі за законом

$$y = y_{em}(t) \quad (3.3)$$

Тоді за допомогою рівнянь, що описують об'єкт, можна обчислити необхідний закон зміни керуючого впливу $u(t)$. Застосування програмного пристрою, який задає цю залежність, забезпечує виконання необхідної умови.

Залежність $u(t)$ можна визначити автоматично. На рис. 3.3, *a* наведена схема розімкнутої системи програмного керування, на вхід якої подається задаючий вплив $v(t)$; за допомогою моделі обчислюється залежність $u(t)$, яка необхідна для забезпечення залежного від $v(t)$ еталонного закону керування $y_{em}(t)$.

Будь-яка неточність математичного опису об'єкта або наявність неконтрольованого впливу на об'єкт приводить до порушення відповідності між $y(t)$ і $y_{em}(t)$ і до невиконання необхідного закону зміни параметра керування.

При наявності неконтрольованих впливів застосовується принцип програмного керування за відхиленням. Системи, що реалізують цей принцип, являють собою замкнуті системи керування. У їхньому регуляторі (рис. 3.3, *б*) порівнюються дві величини (значення заданого параметра керування $v(t)$ і фактичне значення параметра керування $y(t)$) і виробляється такий керуючий вплив $u(t)$, що забезпечує мінімальне значення неузгодженості:

$$e(t) = v(t) - y(t). \quad (3.4)$$

У програмних регуляторах функція $v(t)$ задається.

Розглянуті раніше системи автоматичної стабілізації є частковим випадком програмних систем керування, у яких програма не залежить від часу, тобто $v(t) = \text{const}$.

Слідкування. Слідкування за змінами вимірюваної величини $v(t)$, наприклад, кута повороту вала, швидкості його обертання або будь-якої іншої фізичної величини, виконується за допомогою слідкуючих систем.

Основною з вимог, які ставлять до систем, які слідкують, є мінімум похибки $\delta(u)$, обумовленої як різниця між заздалегідь невідомим законом $v(t)$ і параметром керування $y(t)$. Системи, що слідкують, зазвичай являють собою замкнуті системи керування за відхиленням. У них вплив, що *задає*, $v(t)$ однозначно визначає $y_{em}(t)$. В окремих випадках $y_{em}(t) = v(t)$.

Самоналаштування (адаптація). Задачі, що ставляться перед самонастроювальними або адаптивними системами керування, значно складніші і різноманітніші, ніж задачі, які розв'язуються розглянутими системами автоматичного керування.

Першою задачею є підтримка екстремуму параметра керування. Для цієї мети на об'єкт подаються пробні впливи з боку керування $\delta(t)$, аналізується знак зміни регульованої величини $y(t)$ і виробляється управляючий вплив, що наближає режим до точки екстремуму. Таким чином, система керування автоматично підтримує режим, близький до оптимального, при якому $\partial y_i / \partial u_j \approx 0$. Пристрої, які забезпечують режим роботи об'єкта керування, близький до оптимального, називаються **екстремальними регуляторами**.

Схематично система екстремального керування об'єктом наведена на рис. 3.4, а. Такі системи застосовуються для об'єктів, що мають екстремальні характеристики й істотні, але повільно змінювані неконтрольовані фактори, які призводять до зміни екстремальних характеристик. При цьому можна вважати, що за час приходу до екстремуму характеристика керування об'єктом істотно не змінюється.

Другою задачею самоналаштування є підтримка оптимальної роботи системи керування за умовою максимальної швидкодії. У цьому випадку показником екстремуму є час, протягом якого система приходить у відповідність зі зміною впливу, який задається наперед. Цей час може аналізуватися за допомогою спеціального пристрою самоналаштування, який змінює параметри регулятора таким чином, щоб час керування став мінімальним. Схематично розглянута система наведена на рис. 3.4, б. Тут вплив, що змінює параметри регулятора, позначено через M . Визначення часу керування виробляється за допомогою спробних змін впливу (v), який задається наперед.

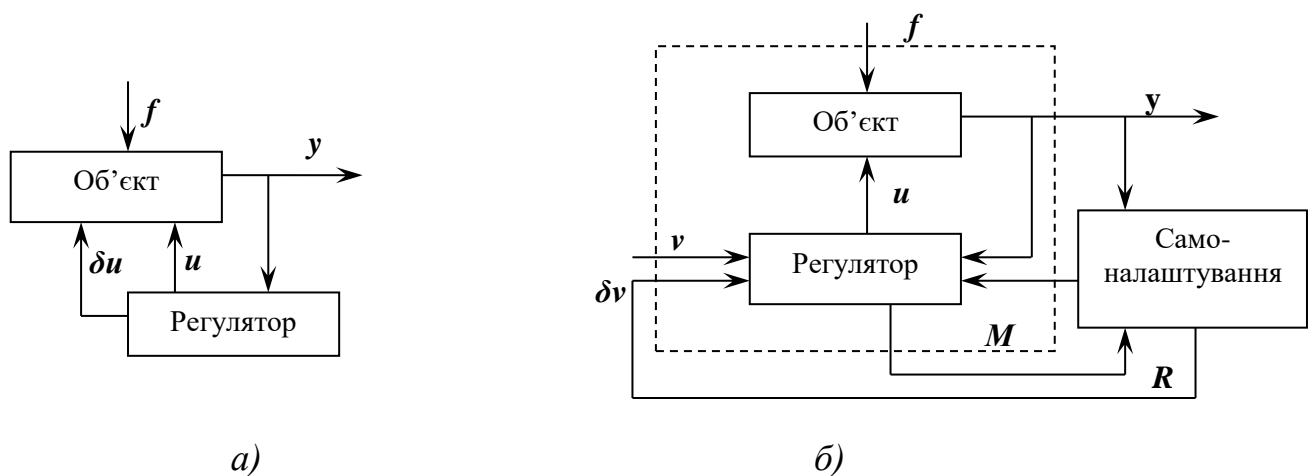


Рисунок 3.4 – Система керування за умовою максимальної швидкодії

Об'єкт разом з регулятором можна розглядати як об'єкт екстремального керування більш високої категорії, регульований пристроєм самоналаштування. Таким чином, розглянута система може бути представлена у вигляді двох систем, з яких одна керує іншою. Оскільки самонастроювальні системи мають подвійне значення, так як поєднують вивчення об'єкта і керування ним, то вони називаються **пристроями дуального керування**.

Контрольні запитання до Розділу 3

1. Чим за поставленими задачами розрізняються системи автоматичного керування?
2. Які системи автоматичного керування називаються стабілізуючими?

3. Які системи автоматичного керування називаються розімкненими?
4. Які системи автоматичного керування називаються замкнутими?
5. Чим відрізняються системи керування за збуренням від систем керування за відхиленням?
6. Які задачі виконують системи слідкування?
7. Які регулятори називають екстремальними?

4 РІВНЯННЯ СТАТИКИ І ДИНАМІКИ

Для ефективного керування виробничими процесами або дослідження систем автоматичного керування необхідно володіти адекватним математичним описом процесів, що протікають як у самій системі, так і в її елементах.

Під **математичним описом** (математичною моделлю) мають на увазі сукупність рівнянь і обмежуючих умов, що у кількісній формі описують залежність вихідних величин від вхідних у сталих і перехідному режимах [3]. У зв'язку з цим розрізняють два види рівнянь систем автоматичного керування: **рівняння сталих режимів** (рівняння статички) і **рівняння перехідних режимів** (рівняння динаміки).

Рівняння, що описує зміну в часі вихідної величини системи або елемента в залежності від зміни вхідної, називається **рівнянням динаміки**. Воно визначає динамічний режим системи, який виникає кожний раз, коли на систему діють збурення. Перехід системи з одного сталого режиму до іншого при дії прикладеного збурення називається **перехідним процесом**. У загальному випадку рівняння динаміки є диференціальним або інтегрально-диференціальним і повністю описує поведінку системи (елемента) у перехідному режимі. В якості сталого режиму найчастіше розглядається стан рівноваги, який як окремий випадок сталого режиму називають **сталим станом**.

Рівняння статички відображають функціональний зв'язок між вхідними і вихідними величинами системи в сталому стані. Рівняння сталого стану являє собою диференціальне рівняння нульового порядку, тобто алгебраїчне рівняння, яке може бути отримане з рівняння динаміки шляхом прирівнювання усіх похідних за часом до нуля. **Статичною характеристикою** елемента і системи називається залежність вихідної величини або швидкості її зміни від вхідної величини в сталому режимі.

Як рівняння статички, так і рівняння динаміки можуть бути лінійними і нелінійними. Елемент називається **лінійним**, якщо його рівняння статички і динаміки є лінійними. Якщо ж обидва його рівняння (статички і динаміки) або хоча б одне з них є нелінійним, то елемент називається **нелінійним**.

4.1 Лінеаризація диференційних рівнянь

Аналіз і розв'язання нелінійних диференційних рівнянь пов'язані зі значними труднощами і можливі тільки в деяких окремих випадках, коли порядок рівнянь невеликий. Тому в інженерних розрахунках часто використовують лінеаризацію нелінійних диференційних рівнянь шляхом заміни нелінійних диференційних рівнянь наближеними лінійними, розв'язання й аналіз яких значно простіші. Найбільш розповсюдженим методом лінеаризації є метод малих відхилень, в основі якого лежить припущення про те, що в процесі керування вхідні і вихідні величини змінюються так, що їхні відхилення від сталих значень залишаються досить малими. Допустимо, що автоматизована система керування описується нелінійним диференціальним рівнянням:

$$F(y^{(i)}; x^{(j)}) = 0, \quad (4.1)$$

де $y^{(i)}$ – регульована вихідна величина і її похідні ($i = 0, 1, 2, \dots, n$); $x^{(j)}$ – вхідна величина і її похідні ($j = 0, 1, 2, \dots, m$).

Сталий режим у системі спостерігається при деяких постійних значеннях величин:

$$y^{(i)} = y_0^{(i)}; \quad x^{(j)} = x_0^{(j)}. \quad (4.2)$$

Рівняння для сталого режиму запишемо у вигляді:

$$F(y_0^{(i)}; x_0^{(j)}) = 0. \quad (4.3)$$

Якщо в результаті зміни вхідної величини $x = x_0 + \Delta x$ відбулося відхилення вихідної величини від сталого режиму, то перехідний процес описується рівнянням:

$$F(y^{(i)} + \Delta y^{(i)}; x^{(j)} + \Delta x^{(j)}) = 0. \quad (4.4)$$

Якщо функція F гладка і має безперервні похідні, то лінеаризація здійснюється розкладанням функції в ряд Тейлора в околиці точки, що відповідає сталому режимові:

$$F(y^{(i)} + \Delta y^{(i)}; x^{(j)} + \Delta x^{(j)}) = F(y; x) + \sum_{i=0}^{i=n} \left(\frac{\partial^i F}{\partial y^i} \right)_0 \Delta y^{(i)} + \sum_{j=0}^{j=m} \left(\frac{\partial^j F}{\partial x^j} \right)_0 \Delta x^{(j)} + R. \quad (4.5)$$

Нульовий індекс при частинних похідних вказує, що їхні значення враховуються при рівноважному стані, тобто при

$$y^{(i)} = y^{(i)}; \quad x^{(j)} = x^{(j)}. \quad (4.6)$$

Залишковий член R враховує величини вищого порядку малості.

Віднімаючи з рівняння (4.5) рівняння (4.4) і зневажаючи залишковим членом R , отримаємо лінеаризоване диференціальне рівняння:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \left(\frac{\partial^i F}{\partial y^i} \right)_0 \Delta y^{(i)} = - \sum_{j=0}^{j=m} \left(\frac{\partial^j F}{\partial x^j} \right)_0 \Delta x^{(j)}. \quad (4.7)$$

Під знаком похідних у лінеаризоване рівняння входять не самі змінні y, x , а їхні відхилення $\Delta y, \Delta x$ від деяких сталих значень y, x , тому отримане лінеаризоване рівняння називається **рівнянням у відхиленнях**. Отримане рівняння є лінійним щодо відхилень y, x з постійними коефіцієнтами.

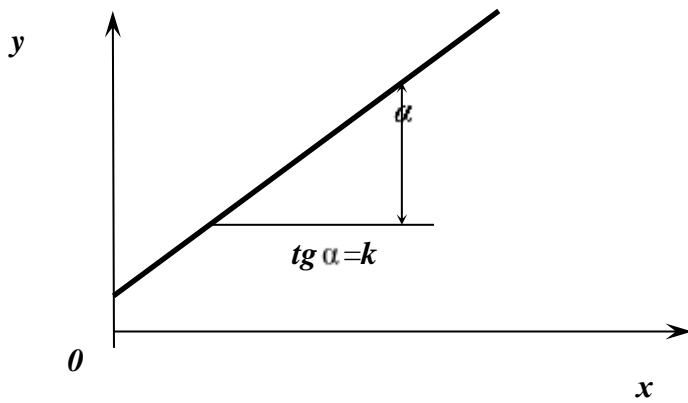
Розділивши рівняння (4.7) на Δt , при $\Delta t \rightarrow 0$ отримаємо диференціальне рівняння в першому наближенні:

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i \left(\frac{d^i y}{dt^i} \right) = \sum_{j=0}^{j=m} b_j \left(\frac{d^j x}{dt^j} \right), \quad (4.8)$$

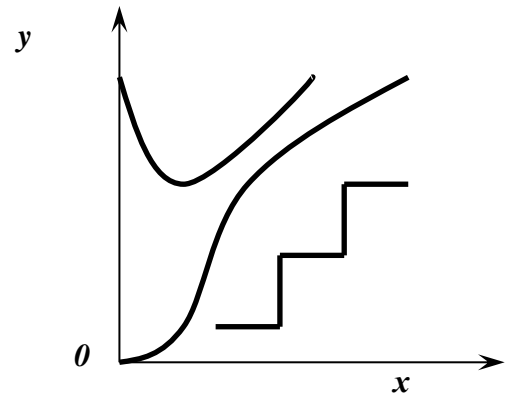
де $a_i = \left(\frac{\partial^i F}{\partial y^i} \right)_0$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $b_j = - \left(\frac{\partial^j F}{\partial x^j} \right)_0$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

4.1.1 Лінеаризація статичних характеристик

Статичні характеристики можуть бути лінійними і нелінійними. Статична характеристика є лінійною, якщо вона описується лінійним рівнянням і зображується у вигляді прямої лінії (рис. 4.1, а). Статична характеристика є нелінійною, якщо вона описується нелінійними рівняннями і зображується у вигляді кривої або ламаної лінії (рис. 4.1, б).



a)



б)

a – лінійна; б – нелінійна

Рисунок 4.1 – Статичні характеристики

4.1.2 Лінеаризація нелінійних статичних характеристик

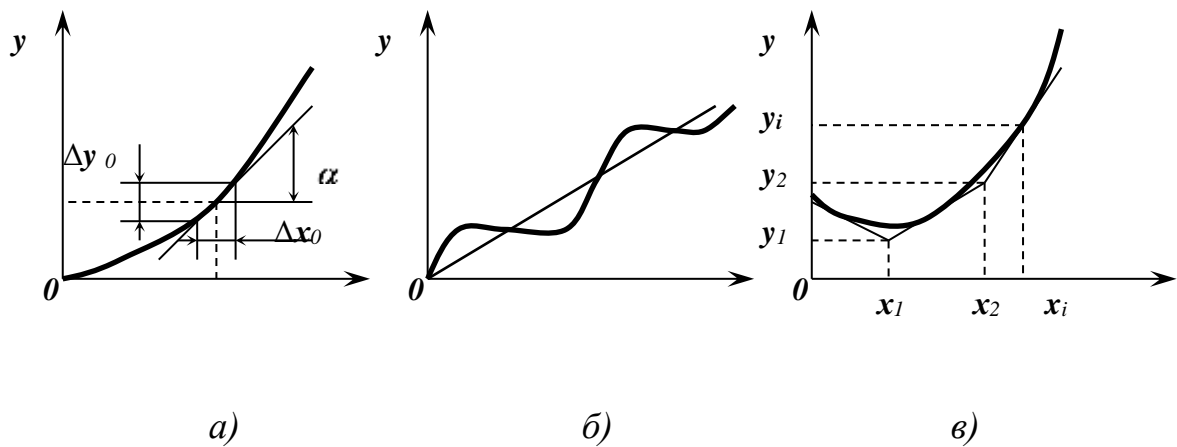
Лінеаризація нелінійних статичних характеристик здійснюється декількома способами:

1. **Метод малих відхилень.** Якщо нелінійна статична характеристика виражається аналітичною функцією $y = f(x)$, то вона може бути лінеаризована шляхом розкладання в ряд Тейлора і відкидання членів вищого порядку малості з використанням методики лінеаризації диференціальних рівнянь. При цьому нелінійна залежність замінюється лінеаризованим рівнянням в межах точки y_0 , x_0 , що відповідає деякому номінальному режимові:

$$\Delta y = k \Delta x, \quad (4.9)$$

$$\Delta y = y - y_0; \Delta x = x - x_0; k = \left(\frac{df}{dx} \right)_0$$

– коефіцієнт пропорційності, що дорівнює значенню похідній у точці номінального режиму.



a – методом дотичної; *б* – методом січної; *в* – методом кусочно-лінійної апроксимації

Рисунок 4.2 – Лінеаризація нелінійних статичних характеристик

2. **Метод дотичної** полягає в тому, що криву статичної характеристики замінюють прямою, дотичною в околиці точки y_0 , x_0 (рис. 4.2, а). Цей спосіб застосовується, коли відсутній аналітичний опис статичної характеристики. Отримана лінійна залежність буде мати вигляд рівняння (4.9) при $k = \text{tg } \alpha$. Слід зазначити, що коефіцієнт пропорційності k може бути визначений як тангенс кута нахилу дотичної до осі абсцис лише тільки за умови рівності масштабів по осях абсцис і ординат. На практиці коефіцієнт k визначають за співвідношенням $k = \Delta y / \Delta x$. Його розмірність – одиниця виміру вихідної величини, поділена на одиницю виміру вхідної величини.

3. **Метод січної** полягає в тому, що рівняння кривої статичної характеристики замінюють рівнянням січної, коефіцієнти якого визначають методом найменших квадратів (рис. 4.2, б).

4. **Метод кусочно-лінійної апроксимації** полягає в тому, що криву замінюють рядом прямолінійних ділянок, причому коефіцієнти кожного з них розраховують методом найменших квадратів (рис. 4.2, в). У цілому залежність залишається нелінійною. Слід зазначити, що зустрічаються елементи, статичні характеристики яких не піддаються лінеаризації зазначеними вище методами і їх називають істотно нелінійними. Прикладом можуть служити статичні

характеристики релейних елементів типу «НЕ» із зоною або без зони нечутливості.

4.2 Безрозмірна форма запису диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння елементів і систем керування можуть бути записані для абсолютних значень вихідної і вхідної величини – форма (4.1) або для відхилень цих величин від номінальних значень – форма (4.7). Однак іноді доцільно записувати лінеаризоване диференціальне рівняння в безрозмірній формі. Переваги безрозмірної форми стають очевидними, наприклад, при необхідності порівняння динамічних і статичних характеристик зовсім різних за принципом дії елементів і їхніх систем. Для цього вводять безрозмірні відносні відхилення від базових значень:

$$Y = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{\Delta y}{y_0}; \quad X = \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{\Delta x}{x_0}, \quad (4.10)$$

y_0, x_0 – базові значення.

Тоді після введення відносних безрозмірних відхилень отримаємо лінеаризоване рівняння в безрозмірній формі:

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i y_0 \frac{d^i Y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{j=m} b_j x_0 \frac{d^j X}{dt^j}. \quad (4.11)$$

У рівнянні (4.11) коефіцієнти $a_j y_0, b_j x_0$ мають розмірність. Щоб отримати лінеаризоване рівняння в безрозмірній формі з коефіцієнтами, розмірність яких не залежить від розмірності вхідної і вихідної величин, обидві частини рівняння варто розділити на коефіцієнт при X або Y .

Оскільки в теорії автоматичного керування прийнято, щоб вихідна величина Y входила в рівняння з коефіцієнтом, рівним одиниці, то обидві частини рівняння варто розділити на $a_0 y_0$. В результаті отримаємо рівняння в так званій нормалізованій формі, при якій коефіцієнт при першій похідній має розмірність c , при другий – c^2 і т.д.:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{a_i y_0}{a_0 y_0} \frac{d^i Y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{j=m} \frac{b_j x_0}{a_0 y_0} \frac{d^j X}{dt^j}. \quad (4.12)$$

У лівій частині прийнятої форми запису лінійного диференційного рівняння (4.12) розташовані вихідна величина і її похідні за часом з відповідними коефіцієнтами, а в правій частині – вхідна величина і її похідні.

4.3 Розв’язання лінійних диференційних рівнянь, перетворення Лапласа і передавальні функції

Поводження елемента або автоматизованої системи керування (АСК) описується лінійними неоднорідними диференційними рівняннями n -го порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_k \left(\frac{d^i y(t)}{dt^i} \right) = \sum_{j=0}^{j=m} b_l \left(\frac{d^j x(t)}{dt^j} \right) \text{ при } n > m, k = n \dots 0, l = j \dots 0, \quad (4.13)$$

де $y(t)$ – вихідна величина; $x(t)$ – вхідна величина.

Коефіцієнти a_k і b_l є постійні величини, що визначаються фізичними, конструктивними й іншими параметрами системи.

Лінійні диференційні рівняння, що використовуються для опису динаміки елементів і систем автоматичного керування, можна розв’язати класичним методом або шляхом застосування перетворення Лапласа.

Відповідно до класичного методу розв’язок лінійного неоднорідного диференційного рівняння, за яким визначають зміну величини $y(t)$ у часі при заданому збуренні $x(t)$ і відомих початкових умовах, можна представити у вигляді суми:

$$y(t) = y^{заг} (t) + y^{част} (t), \quad (4.14)$$

де $y^{заг} (t)$ – загальне розв’язок однорідного диференційного рівняння; $y^{част} (t)$ – частинний розв’язок неоднорідного диференційного рівняння (з урахуванням правої частини).

Оскільки загальний розв'язок рівняння не залежить від коефіцієнтів правої частини рівняння (4.14) і характеру зміни вхідного збурення, то $y^{заз}(t)$ складового розв'язку визначає вільний рух системи і називається перехідною (вільною) складовою. Частинний розв'язок $y^{васм}(t)$ визначає вимушений рух системи, обумовлений дією $x(t)$, і залежить як від параметрів системи a_k і b_l , так і від закону зміни вхідного збурення $x(t)$. Частинний розв'язок $y^{васм}(t)$ називається змушеною складовою і характеризує сталий процес у системі.

Розв'язок диференціальних рівнянь високих порядків класичним методом є досить складною задачею, тому в теорії автоматичного керування застосовується метод з використанням інтегрального перетворення Лапласа.

Перетворення Лапласа полягає в тому, що замість функції часу $x(t)$ використовують функцію комплексної змінної $X(p)$, де $p = \alpha + j\beta$. Функція $X(p)$ називається зображенням функції $x(t)$, що називається оригіналом функції $X(p)$. Операція переходу від $x(t)$ до $X(p)$ називається прямим однобічним перетворенням Лапласа і позначається символом L :

$$L[x(t)] = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt. \quad (4.15)$$

Операція переходу від зображення $X(p)$ до оригіналу $x(t)$ називається зворотним перетворенням Лапласа і позначається символом L^{-1} :

$$L^{-1}[X(p)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt} dp. \quad (4.16)$$

Для полегшення переходу від оригіналу функції до її зображення і назад існують таблиці перетворень по Лапласу для часто вживаних функцій. Частина з таких перетворень приведена в табл. 4.1. Перетворення Лапласа є лінійним перетворенням, що випливає з формул 2 і 3 таблиці: зображення суми функцій дорівнює сумі зображень цих функцій і множення оригіналу функції на постійний множник відповідає множенню зображення функції на цей множник. У багатьох випадках перехід до зображення спрощує вид функції. Так зображення похідної функції при нульових початкових умовах дорівнює зображенню функції, помноженому на p^n , де n – порядок похідної функції

(формула 7 табл. 4.1). Зображення інтеграла функції дорівнює зображенню функції, діленому на p (формула 8 табл. 4.1).

Таким чином, при використанні перетворень Лапласа є можливість переходу від похідної й інтеграла до простих алгебраїчних виразів (функціям комплексної змінної p). Це і використовується при розв'язанні диференціальних рівнянь.

Таблиця 4.1 – Перетворення за Лапласом

№ з/н	Вид функції (оригінал)	Зображення функції за Лапласом
1	$x(t)$	$X(p)$
2	$\sum_{i=1}^{i=n} x_i(t)$	$\sum_{i=0}^{i=n} X_i(p)$
3	$Ax(t)$	$AX(p)$
4	$1(t)$	$1/p$
5	$AI(t)$	A/p
6	$\delta(t) = 1'(t)$	1
7	$d^j x(t) / dt^j, j = 1 \dots n$ (при нульових початкових умовах)	$p^j X(p), j = 1 \dots n$
8	$\int x(t) dt$	$X(p)/p$
9	$x(t-\tau)$	$e^{-p\tau} X(p)$
10	$e^{\pm\alpha t}$	$1/(p \mp \alpha)$
11	$(1/\alpha)(1-e^{-\alpha t})$	$1/(p+\alpha)p$
12	$(1/\lambda)-e^{-\alpha t} \sin \lambda t$	$\frac{1}{[(p+\alpha)^2 + \lambda^2]}$

Застосовуючи пряме перетворення Лапласа до лівої і правої частин диференціального рівняння (4.13) при нульових початкових умовах, отримуємо операторну форму запису рівняння елемента або системи, що має вид алгебраїчного рівняння:

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_k p^i Y(p) = \sum_{j=0}^{j=m} b_l p^j X(p). \quad (4.17)$$

Винесемо за знак суми зображення вихідний $Y(p)$ і вхідний $X(p)$ величин і, узявши їхнє відношення, отримаємо вираз, що називається **функцією передачі** або **передавальною функцією**:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{j=0}^{j=m} b_l p^j}{\sum_{i=0}^{i=n} a_k p^i} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (4.18)$$

У розгорнутій формі запису поліноми знаменника і чисельника передавальної функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} A(p) &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k; \\ B(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{l-1} p + b_l. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Отже, передавальна функція $W(p)$ являє собою відношення зображення по Лапласу вихідної величини до зображення вхідної величини при нульових початкових умовах. Передавальна функція, як і диференційне рівняння, однозначно визначає динамічні властивості елемента або системи. Прирівнюючи до нуля поліном знаменника передавальної функції $A(p)=0$, отримаємо характеристичне рівняння вихідного диференційного рівняння:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k = 0. \quad (4.20)$$

Корені характеристичного рівняння, як відомо, визначають розв'язок однорідного диференційного рівняння і тому характеризують вільний рух системи. Корені знаменника передавальної функції (**характеристичного рівняння**) звертають знаменник у нуль, а передавальну функцію — у нескінченність і називаються **полюсами** передавальної функції. Корені чисельника називаються **нулями** передавальної функції.

Використовуючи поняття передавальної функції, можна з виразу (4.18) отримати залежність зображення по Лапласу вихідної величини від зображення вхідної величини:

$$Y(p) = W(p) X(p). \quad (4.21)$$

Застосовуючи до зображення вихідної величини зворотне перетворення Лапласа (4.16), можна знайти розв'язок вихідного диференційного рівняння, а отже, визначити перехідний процес:

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}[W(p)X(p)]. \quad (4.22)$$

Оскільки $W(p)$ є дрібно-раціональною функцією змінної p , то $Y(p)$ також є дрібно-раціональною функцією p .

У зв'язку з тим, що таблиці оригіналів функцій і їхніх зображень містять зазвичай тільки прості вирази, виникає задача розкладання дрібно-раціональної функції $Y(p)$ на елементарні дроби і здійснення над кожною з них зворотного перетворення Лапласа. Перехідний процес дорівнює сумі отриманих при цьому оригіналів зазначених елементарних дробів.

Контрольні запитання до Розділу 4

1. Що відображають рівняння статички систем автоматичного керування?
2. Що відображають рівняння динаміки систем автоматичного керування?
3. В чому полягає лінеаризація нелінійних статичних характеристик методом малих відхилень?
4. В чому полягає лінеаризація нелінійних статичних характеристик методом дотичної?
5. В чому полягає лінеаризація нелінійних статичних характеристик методом січної?
6. В чому полягає лінеаризація нелінійних статичних характеристик методом кусочно-лінійної апроксимації?
7. Що називають нулями, а що полюсами характеристичного рівняння?

5 ЧАСОВІ ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Залежність вихідної величини системи або елемента від часу при переході системи з одного сталого стану в інший в результаті надходження на вхід типового впливу називається **часовою динамічною характеристикою**.

При дослідженні динамічних властивостей системи або елемента широке застосування знаходять типові впливи у вигляді одиничної стрибкоподібної і одиничної імпульсної функцій, що відображають істотні риси реальних впливів, які часто зустрічаються [5].

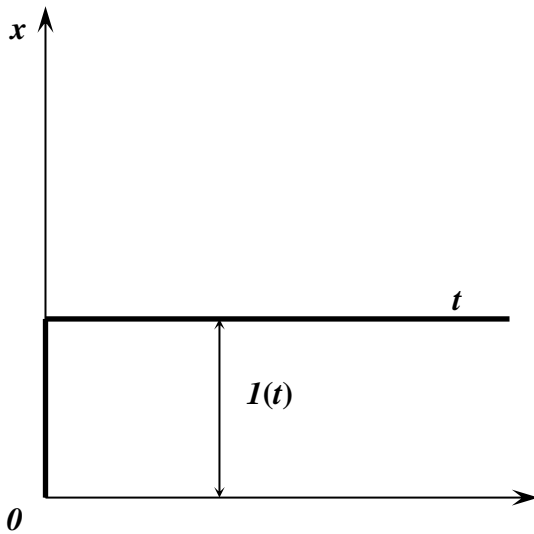


Рисунок 5.1 – Одиничний стрибкоподібний вплив

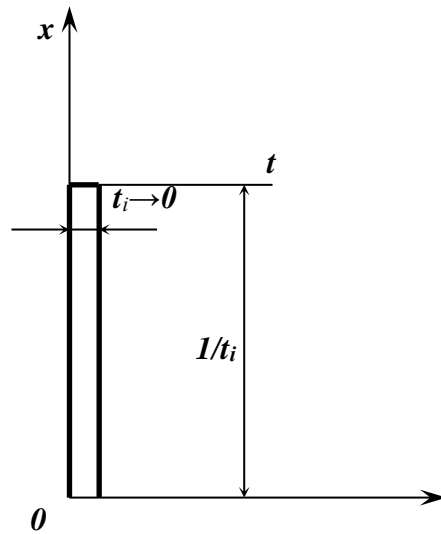


Рисунок 5.2 – Одиничний імпульсний вплив

Математично одиничну стрибкоподібну функцію (рис. 5.1) можна представити у вигляді:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Реакція системи або елемента (зміна в часі $y(t)$) на одиничний стрибкоподібний вплив при нульових початкових умовах називається **перехідною функцією $h(t)$** . Якщо стрибкоподібний вплив відрізняється від одиничного $y(t) = A * 1(t)$ і при $t \geq 0$ дорівнює постійній величині A , то реакція системи на такий вплив називається **кривою розгону**. Стрибкоподібне збурення

є найбільш розповсюдженим видом вхідного впливу в автоматичних системах. До таких збурень відносяться миттєва зміна завдання автоматичному регуляторові, підключення живильної напруги до елемента, миттєве зростання навантаження на валу електродвигуна і т.д.

Під одиничною імпульсною функцією розуміється імпульс, площа якого дорівнює одиниці (рис. 5.2).

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_i} & \text{при } 0 \leq t \leq t_i \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

При $t_i=0$ одинична імпульсна функція перетворюється в деяку математичну ідеалізацію, що називається дельта-функцією $\delta(t)$, значення якої дорівнює нулю при всіх значеннях t , крім $t = 0$, коли воно дорівнює нескінченності. При цьому її площа:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (5.3)$$

Реакція елемента або системи на вхідний вплив у вигляді дельта-функції при нульових початкових умовах називається **імпульсною перехідною функцією** (функцією ваги) $w(t)$.

Перехідна $h(t)$ і імпульсна перехідна $w(t)$ функції адекватно описують динамічні властивості лінійної системи і можуть бути порівняно просто перетворені одна в іншу, оскільки одинична східчаста функція $I(t)$ і дельта-функція $\delta(t)$ тісно пов'язані між собою. Дійсно, диференціюючи вираз (5.3), отримаємо:

$$\delta(t) = I'(t). \quad (5.4)$$

З виразу (5.4) випливає, що імпульсна перехідна функція $w(t)$ є реакцією системи на похідну одиничної стрибкоподібної функції. На цій підставі маємо

$$w(t) = h'(t) \quad (5.5)$$

$$\text{або } \int_0^{\infty} w(t) dt = h(t). \quad (5.6)$$

Перехідні й імпульсна перехідна функції відносяться до часових динамічних характеристик, що визначають поведження системи в часовій області.

Функція $w(t)$ елемента пов'язана з його передавальною функцією $W(p)$ зворотним перетворенням Лапласа. Дійсно, відповідно до визначення передавальної функції:

$$Y(p) = W(p)X(p). \quad (5.7)$$

Звідси оригінал вихідної величини $y(t)$ після зворотного перетворення Лапласа дорівнює:

$$y(t) = L^{-1}[W(p)X(p)]. \quad (5.8)$$

Якщо $x(t) = \delta(t)$, то $X(p) = 1$ (відповідно до формули 6 у табл. 4.1) і $y(t) = w(t)$. Тоді

$$w(t) = L^{-1}[W(p)]. \quad (5.9)$$

Застосовуючи пряме перетворення Лапласа до виразу (5.9), отримаємо, що передавальна функція є зображенням імпульсної перехідної функції і пов'язана з нею інтегральним перетворенням Лапласа:

$$W(p) = L[w(t)] = \int_0^{\infty} w(t)e^{-pt} dt. \quad (5.10)$$

У свою чергу перехідна функція $h(t)$ елемента пов'язана з його передавальною функцією $W(p)$. Якщо $x(t) = 1(t)$, то $x(p) = 1/p$ (формула 4 табл. 4.1), $y(t) = h(t)$. Тоді, використовуючи вираз (4.21), отримаємо:

$$h(t) = L^{-1}\left[W(p) \cdot \frac{1}{p}\right]. \quad (5.11)$$

Застосовуючи пряме перетворення Лапласа до виразу (5.11), отримаємо:

$$W(p) = pL[h(t)] = p \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt. \quad (5.12)$$

Використовуючи типові впливи, можна отримати реакцію системи в перехідному режимі на довільну зміну вхідної величини $x(t)$. Це можливо тільки у випадку лінійних систем, для яких справедливий принцип суперпозиції: реакція лінійної системи на суму вхідних впливів дорівнює сумі реакцій на

кожний з цих впливів. Оскільки будь-який вхідний вплив можна представити у вигляді суми типових впливів (одиночних стрибкоподібних, імпульсних і т.д.), то завжди можна знайти реакцію системи на довільне збурення, знаючи її реакцію на типовий вплив.

Реакцію системи на типовий або будь-який довільний вплив $x(t)$ можна знайти шляхом розв'язання диференційного рівняння, що описує динамічні системи. Так, перехідну функцію $h(t)$ знаходять шляхом розв'язання диференційного рівняння при $x(t) = I(t)$ і нульових початкових умовах. Такий розв'язок дає формула Хевісайда при використанні виразу передавальної функції $W(p)$ (для окремого випадку, коли характеристичне рівняння $A(p) = 0$ має не більш одного нульового і r інших дійсних коренів):

$$h(t) = W(0) + \sum_{i=1}^{i=r} \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{+p_i t}, \quad (5.13)$$

де p_i – дійсні корені характеристичного рівняння; $B(p_i)$ – чисельник передавальної функції при $p = p_i$; $A'(p_i)$ – похідна знаменника передавальної функції при $p = p_i$; $W(0)$ – передавальна функція при $p = 0$.

Реакцію системи або елемента на довільний вплив можна визначити, не вирішуючи диференційного рівняння і використовуючи перехідну функцію $h(t)$:

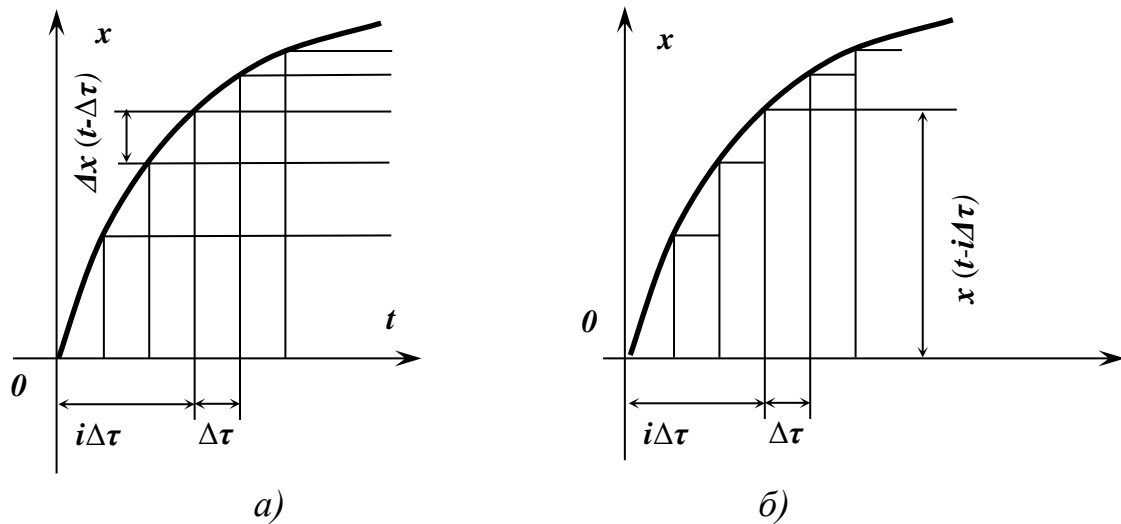
$$y(t) = h(t)x(0) + \int_0^t h(t-\tau)x'(\tau)d\tau, \quad (5.14)$$

де $x(0) = x(t)$ при $t = 0$,

або імпульсну перехідну функцію $w(t)$:

$$y(t) = h(0)x(t) + \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad (5.15)$$

де $h(0)$ – перехідна функція при $t = 0$. У виразах (5.14) і (5.15) τ – деякий допоміжний час інтегрування. На рис. 5.9 дана геометрична інтерпретація цих виразів.



a – заміна стрибкоподібними впливами; *б* – заміна імпульсними впливами

Рисунок 5.3 – Геометрична інтерпретація довільного впливу

Реакція системи $y(t)$ на довільний вхідний вплив $x(t)$ визначена як границя суми реакції на стрибкоподібні впливи висотою $\Delta x(t - \Delta\tau)$, на які можна розкласти $x(t)$, при $\Delta\tau \rightarrow 0$. Цю реакцію можна визначити також як границю суми реакцій на імпульси висотою $x(t - \Delta\tau)$ і шириною $\Delta\tau$ (при $\Delta\tau \rightarrow 0$).

Вирази (5.14) і (5.15) тісно пов'язані між собою і можуть бути порівняно легко отримані один з іншого, будучи варіантами інтеграла згортки, що називається інтегралом Дюамеля. З огляду на те, що перший доданок $h(0)x(t)$ у виразі (5.15) дорівнює нулю, оскільки в реальних (інерційних) системах значення перехідної функції $h(0) = 0$ при $t = 0$ і при $x(0) = 0$, то можна остаточно записати:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) x'(\tau) d\tau, \quad (5.16)$$

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau) x(\tau) d\tau. \quad (5.17)$$

Контрольні запитання до Розділу 5

1. Що називають часовою динамічною характеристикою?
2. Що називається перехідною функцією?
3. В чому полягає відмінність перехідної функції від кривої розгону?
4. Що називається імпульсною перехідною функцією?

6 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Частотні характеристики описують змушені коливання на виході системи, викликані гармонійними впливами на її вході. Нехай на вхід системи або елемента подається гармонійний вплив, наприклад, синусоїдальний, з постійною амплітудою $A_{вх}$ і частотою ω :

$$x(t) = A_{вх} \sin(\omega t). \quad (6.1)$$

Якщо $A_{вх} = 1$, то вхідний вплив називається **одичним** гармонійним. Тут $\omega = 2\pi/T_k$ – кутова частота, T_k – період коливань.

По закінченні перехідного процесу на виході системи встановлюються гармонійні коливання $y(t) = A_{вих} \sin(\omega t - \varphi(\omega))$ тієї ж частоти, але з іншою амплітудою $A_{вих}(\omega)$ і зсунуті по фазі щодо вхідних коливань на кут $\varphi(\omega)$ (рис. 6.1).

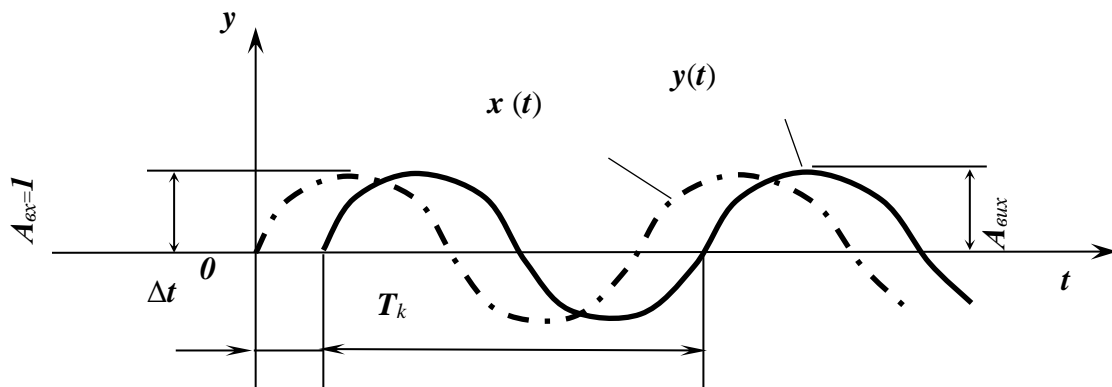


Рисунок 6.1 – Вхідні і вихідні гармонійні коливання

Кут $\varphi(\omega)$ розраховують по тимчасовому зсуву Δt :

$$\varphi(\omega) = (\Delta t/T_k)2\pi = \Delta t\omega. \quad (6.2)$$

Якщо збільшувати частоту від 0 до $+\infty$ і визначати сталу амплітуду і фазу вихідних коливань для різних частот, можна отримати залежність від частоти співвідношення амплітуд $A(\omega) = A_{вих}(\omega)/A_{вх}$ і зсув фази $\varphi(\omega) = \varphi(\omega)_{вих} - \varphi_{вх}$ вихідних коливань щодо вхідних. Ці залежності називаються $A(\omega)$ – амплітудною частотною характеристикою (АЧХ), $\varphi(\omega)$ – фазовою частотною характеристикою (ФЧХ).

Для досліджень і розрахунків систем автоматичного керування

застосовують перетворення Фур'є, що складається в переході від оригіналу функції $x(t)$ до її зображення по Фур'є $F[x(t)] = X(j\omega)$ і визначається співвідношенням:

$$F[x(t)] = X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (6.3)$$

Останній вираз називається прямим однобічним перетворенням Фур'є, а комплексна функція $X(j\omega)$ – зображенням Фур'є або спектром функції $x(t)$. Операція переходу від зображення функції по Фур'є до оригіналу $x(t)$ називається зворотним перетворенням по Фур'є і визначається співвідношенням:

$$x(t) = F^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.4)$$

Порівнюючи вирази (4.15) і (6.4), неважко переконатися в тісному зв'язку однобічних перетворень Лапласа і Фур'є. Вони можуть бути легко отримані одне з іншого. Для переходу від зображення функції по Лапласу до її зображення по Фур'є необхідно зробити заміну символу p незалежної комплексної змінної символом $j\omega$ уявного числа.

В теорії автоматичного керування широко застосовується вираз, що дорівнює співвідношенню зображень по Фур'є вихідної і вхідної величин $W(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$ і називається **амплітудно-фазовою характеристикою** (АФХ) лінійної системи або елемента.

Оскільки структура виразів для перетворень Лапласа і Фур'є однакова і відрізняється тільки символами p і $j\omega$, всі операції, проведені над зображеннями функції по Лапласу, можна здійснювати над зображеннями по Фур'є. Замінивши p на $j\omega$ у виразі передавальної функції $W(p)$ (4.18), отримаємо вираз амплітудно-фазової характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j(j\omega)^j}{\sum_{i=0}^n a_i(j\omega)^i} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \quad (6.5)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}. \quad (6.6)$$

Виділяючи дійсну $Re(\omega)$ і уявну $Im(\omega)$ складові, можна представити АФХ в алгебраїчній формі:

$$W(j\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega). \quad (6.7)$$

Залежність дійсної частини АФХ від частоти називається **дійсною** частотною характеристикою $Re(\omega)$, а залежність уявної частини $Im(\omega)$ – **уявною** частотною характеристикою. Обидві характеристики можна виразити через коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника амплітудно-фазової характеристики. Виділивши в кожному поліномі дійсну і уявну частини, отримаємо:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= Re(\omega) + jIm(\omega), \\ B(j\omega) &= Re(\omega) + jIm(\omega), \end{aligned} \quad (6.8)$$

де $Re(\omega)$ і $Re(\omega)$ – дійсні частини знаменника і чисельника АФХ відповідно; $Im(\omega)$ і $Im(\omega)$ – уявні частини.

З урахуванням цих залежностей АФХ системи можна записати в наступній формі:

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{Re_B(\omega) + jIm_B(\omega)}{Re_A(\omega) + jIm_A(\omega)}. \quad (6.9)$$

Усуваючи уявну складову в знаменнику шляхом множення чисельника і знаменника на сполучений множник $Re(\omega) - jIm(\omega)$, отримаємо:

$$Re(\omega) = \frac{Re_B(\omega) \cdot Re_A(\omega) + Im_B(\omega) \cdot Im_A(\omega)}{Re^2_A(\omega) + Im^2_A(\omega)}, \quad (6.10)$$

$$Im(\omega) = \frac{Im_B(\omega) \cdot Re_A(\omega) - Im_A(\omega) \cdot Re_B(\omega)}{Re^2_A(\omega) + Im^2_A(\omega)}. \quad (6.11)$$

При строгому підході АФХ будується на комплексній площині при зміні частоти від $-\infty$ до $+\infty$, однак, оскільки АФХ симетрична щодо дійсної осі при зміні частоти від $-\infty$ до 0 і від 0 до $+\infty$ (пунктирна і суцільна криві на рис. 6.1), досить побудувати АФХ тільки для зміні частоти від 0 до $+\infty$ (суцільна крива на рис. 6.2).

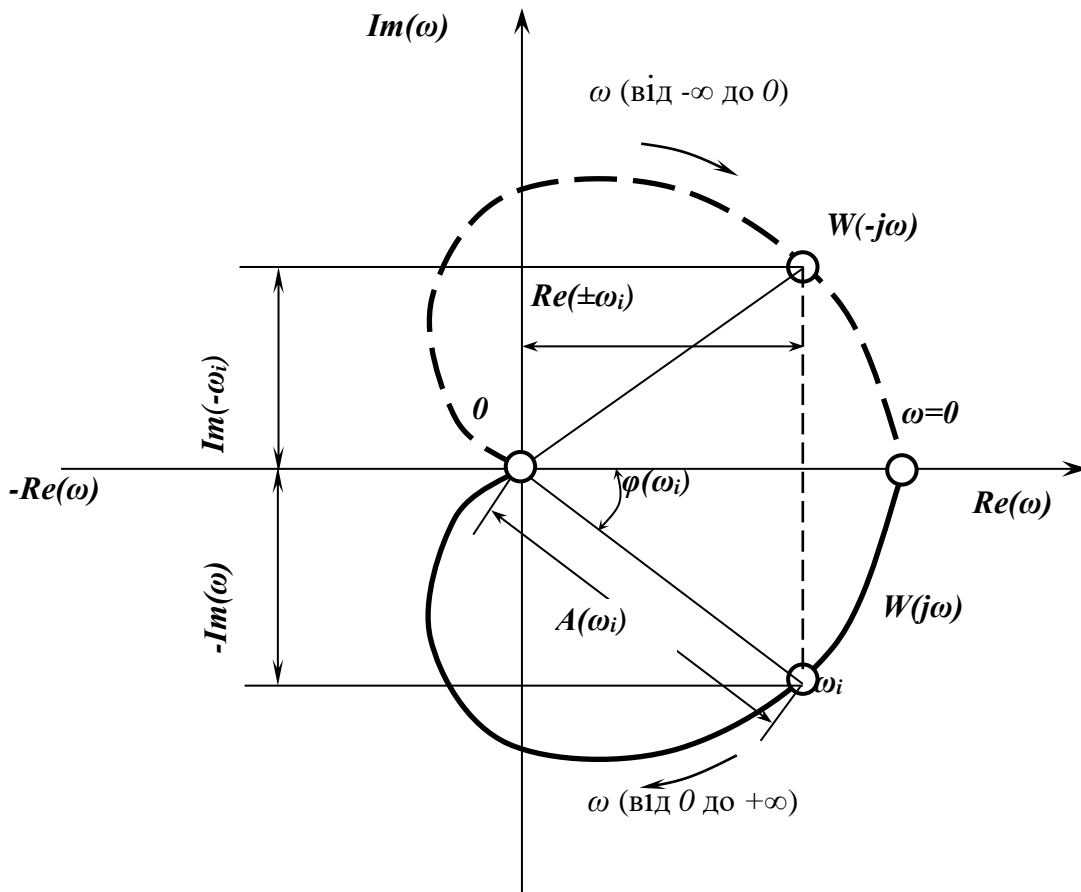


Рисунок 6.2 – Амплітудно-фазова характеристика

АФХ системи можна також представити у вигляді радіус-вектора на комплексній площині і записати в показовій формі:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad (6.12)$$

де $A(\omega)$ – модуль вектора (являє собою АЧХ); $\varphi(\omega)$ – аргумент вектора $W(j\omega)$ (являє собою ФЧХ).

Перехід від алгебраїчної форми запису АФХ до показового здійснюється за наступними співвідношеннями:

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}. \quad (6.13)$$

При зміні частоти від 0 до ∞ кінець вектора $W(j\omega)$ описує на комплексній площині криву, що називається **годографом АФХ**.

Таким чином, динаміка елементів і систем характеризується диференційними рівняннями, передавальними функціями, часовими (перехідна й імпульсна перехідна функції) і частотними характеристиками. Природно, що всі зазначені вирази однозначно пов'язані між собою і можуть бути теоретично отримані з диференційного рівняння. Деякі з динамічних характеристик (перехідні функції, частотні характеристики) зручно отримувати експериментально, що особливо важливо при вивченні складних об'єктів, математичний опис яких відсутній.

Контрольні запитання до Розділу 6

1. Який вхідний вплив на систему або елемент називається одиничним гармонійним?
2. Яка залежність системи чи елемента називається амплітудною частотною характеристикою?
3. Яка залежність системи чи елемента називається фазовою частотною характеристикою?
4. Що таке годограф АФХ?

7 ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ І СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

При вирішенні задач аналізу і синтезу лінійних автоматизованих систем керування доцільно представляти їх у вигляді сукупності з'єднаних між собою декількох нескладних елементів з визначеними динамічними властивостями. З погляду динамічних властивостей ланок у теорії автоматичного керування прийнято їх класифікувати за характером перехідного процесу, що виникає при подачі на вхід ланки одиничного східчастого впливу. При цьому перехідний процес визначається тільки виглядом диференційного рівняння, що описує поведінку ланки. Реальні елементи, що складають АСК, можуть мати різноманітну фізичну основу (теплову, механічну, електричну і т.д.) і конкретне виконання (нагрівальний пристрій, гідро- або пневмопривід, електричний двигун і т.д.), але описуються тим самим диференційним рівнянням, а отже, мають ідентичні динамічні властивості. Виходячи з ідентичності динамічних властивостей, реальні елементи можна віднести до визначеного типу ланок, що у підсумку дозволяє звести все різноманіття реальних елементів АСК до невеликого числа так званих елементарних ланок.

Таким чином, з погляду математичного опису перехідних процесів реальний елемент і АСК можуть бути представлені у вигляді окремої елементарної ланки або їхніх комбінацій [6]. В результаті такого представлення отримують структурну схему реального елемента або АСК, що досить точно і повно описує їхні динамічні властивості. **Елементарною ланкою** називається така ланка, яку неможливо поділити на ще більш прості ланки. Елементарні ланки характеризуються наступними загальними властивостями:

- мають одну вхідну й одну вихідну величину;
- описуються диференційним рівнянням не вище 2-го порядку;
- володіють детектуючою властивістю, тобто пропускають сигнал тільки в одному напрямку.

Елементарними ланками, з яких може бути складена структурна схема АСК практично будь-якої складності, є: пропорційна, ідеальна інтегруюча, аперіодична, коливальна, ідеальна диференційна і ланку чистого запізнювання.

Розглянемо основні властивості типових лінійних ланок.

7.1 Елементарні ланки

7.1.1 Підсилювальна ланка

Підсилювальною (пропорційною або безінерційною) називають ланку, у якої вихідна величина в кожен момент часу пропорційна вхідній величині.

Рівняння ланки

$$y(t) = Kx(t), \quad (7.1)$$

де K – коефіцієнт передачі ланки.

В операторній формі рівняння ланки буде мати вигляд, аналогічний виразу (7.1), а в операційній формі:

$$Y(P) = KX(P). \quad (7.2)$$

Передавальна функція ланки

$$W(P) = K. \quad (7.3)$$

АФХ підсилювальної ланки

$$W(j\omega) = K, \quad (7.4)$$

яка графічно наведена на рис. 7.1.

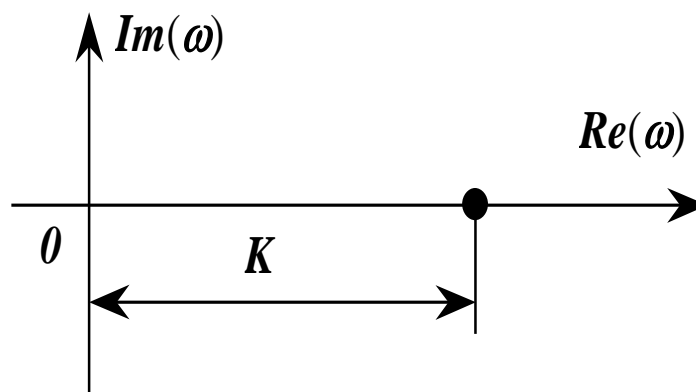


Рисунок 7.1 – АФХ підсилювальної ланки

АЧХ підсилювальної ланки

$$A(\omega) = K. \quad (7.5)$$

ФЧХ підсилювальної ланки

$$\varphi(\omega) = 0. \quad (7.6)$$

Графіки АЧХ і ФЧХ підсилювальної ланки наведені на рис. 7.2 і рис. 7.3.

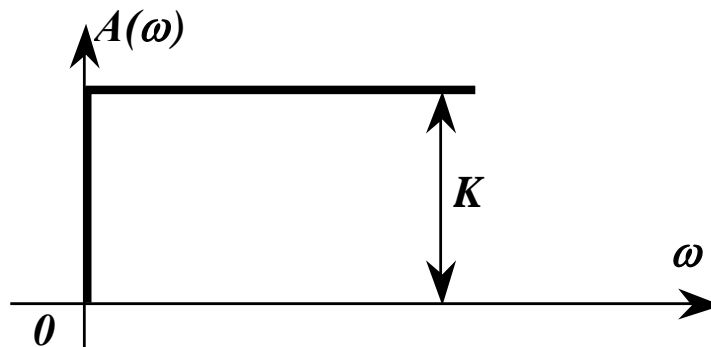


Рисунок 7.2 – АЧХ підсилювальної ланки

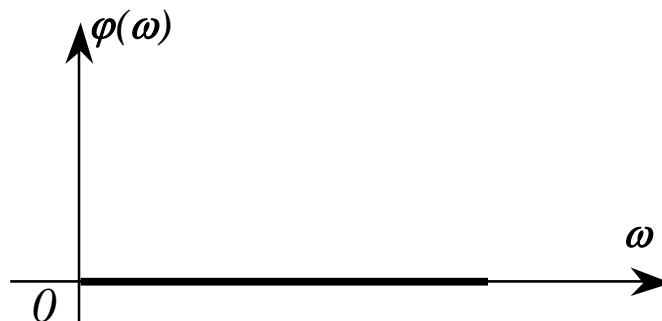


Рисунок 7.3 – ФЧХ підсилювальної ланки

Перехідна характеристика підсилювальної ланки буде мати вигляд

$$h(t) = K, \quad (7.7)$$

а її графік зображений на рис. 7.4.

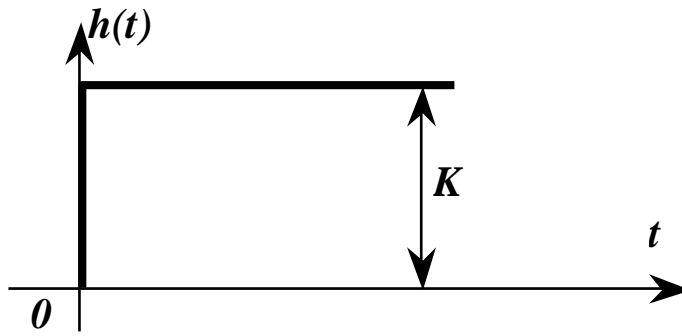


Рисунок 7.4 – Перехідна характеристика підсилювальної ланки

Прикладами елементів, характеристики яких близькі до характеристик підсилювальної ланки, можуть служити: безінерційні підсилювачі, трансформатори.

7.1.2 Інтегрувальна ланка

Інтегрувальною (астатичною) називають ланку, у якої вихідна величина пропорційна інтегралові від вхідної величини.

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \int x(t) dt . \quad (7.8)$$

де T_I – постійна часу інтегруючої ланки.

Продиференціюємо праву і ліву частини рівняння (7.8) і отримаємо другу форму запису рівняння ланки:

$$T_I \frac{dy(t)}{dt} = x(t) . \quad (7.9)$$

З рівняння (7.9) видно, що швидкість зміни вихідної величини інтегрувальної ланки пропорційна вхідній величині. В операторній формі рівняння (7.9) запишеться як

$$T_I pY(t) = X(t) , \quad (7.10)$$

а в операційній формі

$$T_I pY(p) = X(p) . \quad (7.11)$$

Передавальну функцію ланки отримаємо з рівняння (7.11)

$$W(p) = \frac{1}{T_I p} . \quad (7.12)$$

АФХ інтегрувальної ланки

$$W(j\omega) = \frac{1}{T_1 j\omega} = -j \frac{1}{T_1 \omega}. \quad (7.13)$$

АЧХ інтегрувальної ланки

$$A = \frac{1}{T_1 \omega}. \quad (7.14)$$

її графік наведений на рис. 7.5

ФЧХ інтегрувальної ланки

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2}. \quad (7.15)$$

Графік ФЧХ зображений на рис. 7.6.

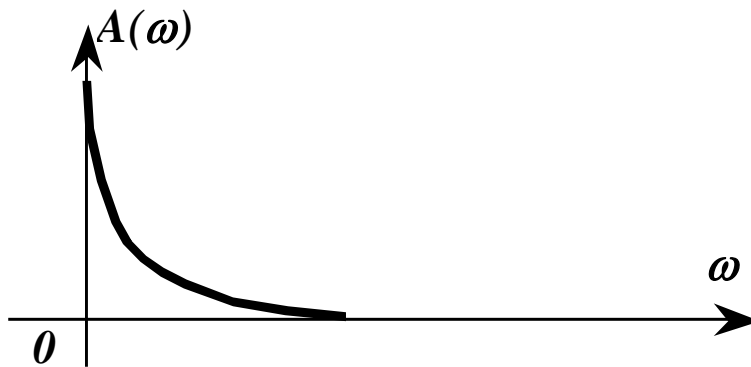


Рисунок 7.5 – АЧХ інтегрувальної ланки

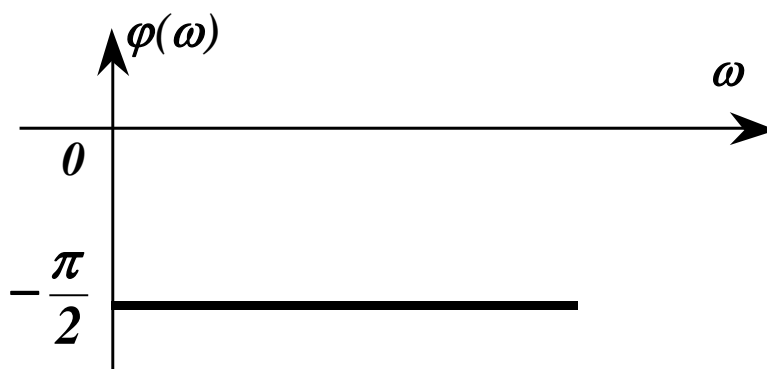


Рисунок 7.6. ФЧХ інтегрувальної ланки

АФХ інтегрувальної ланки буде мати вигляд

$$W(j\omega) = \frac{1}{T_1 \omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (7.16)$$

Графічно АФХ зображена на рис. 7.7.

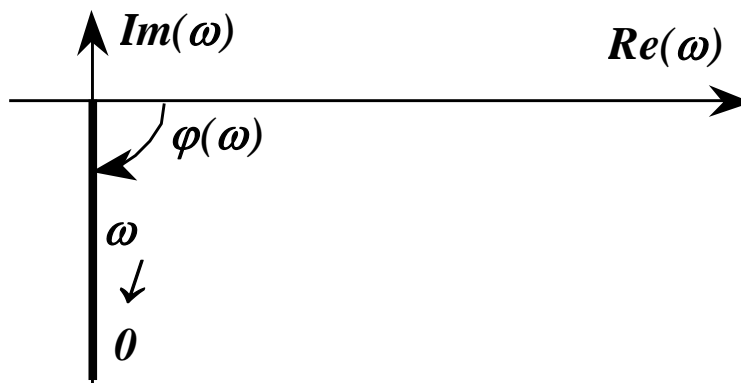


Рисунок 7.7 – АФХ інтегрувальної ланки

Перехідна характеристика інтегрувальної ланки

$$h(t) = \frac{t}{T_I}. \quad (7.17)$$

її графік зображений на рис. 7.8.

На графіку $T_{I1} > T_{I2} > T_{I3}$, а кут нахилу характеристики $\alpha = \arctg \frac{1}{T_I}$.

Інтегрувальна ланка має астатизм: у сталому режимі роботи ланки відсутня однозначна залежність між вихідною і вхідною величинами. Прикладами елементів, характеристики яких близькі до характеристики інтегрувальної ланки, можуть служити: ємність, з якої відкачується рідина насосом з постійною продуктивністю; гідравлічний поршневий сервомотор.

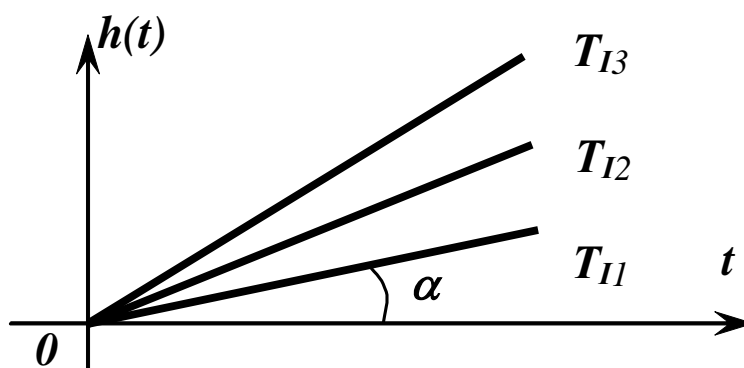


Рисунок 7.8 – Перехідна характеристика інтегрувальної ланки

7.1.3 Аперіодична ланка першого порядку

Аперіодичною називають ланку, у якої вихідна величина при стрибкоподібному вхідному впливі змінюється експоненційно, прагнучи до нового сталого значення. Диференційне рівняння ланки

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t), \quad (7.18)$$

де T – постійна часу ланки.

В операторній формі рівняння (7.18) буде мати вигляд

$$(Tp+1)y(t)=Kx(t). \quad (7.19)$$

Те ж рівняння в операційній формі

$$(Tp+1)Y(p)=KX(p). \quad (7.20)$$

З рівняння (7.20) отримаємо передавальну функцію ланки:

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1}. \quad (7.21)$$

АФХ аперіодичної ланки отримаємо підстановкою $p = j\omega$ у виразі передавальної функції:

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega+1} = \frac{K - jKT\omega}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (7.22)$$

$$Re(\omega) = \frac{K}{T^2\omega^2 + 1}; \quad Im(\omega) = \frac{-KT\omega}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (7.23)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{K}{T^2\omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{-KT\omega}{T^2\omega^2 + 1}\right)^2}. \quad (7.24)$$

Графік АФХ зображений на рис. 7.9.

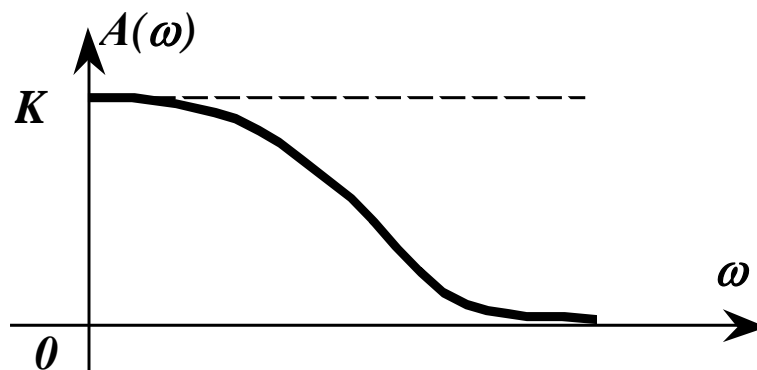


Рисунок 7.9 – АЧХ аперіодичної ланки

З виразів (7.23) видно, що АФХ аперіодичної ланки розташовується в четвертому квадранті.

$$\phi(\omega) = \text{arctg}(-T\omega) = -\text{arctg}(T\omega) . \quad (7.25)$$

Графік ФЧХ аперіодичної ланки наведений на рис. 7.10.

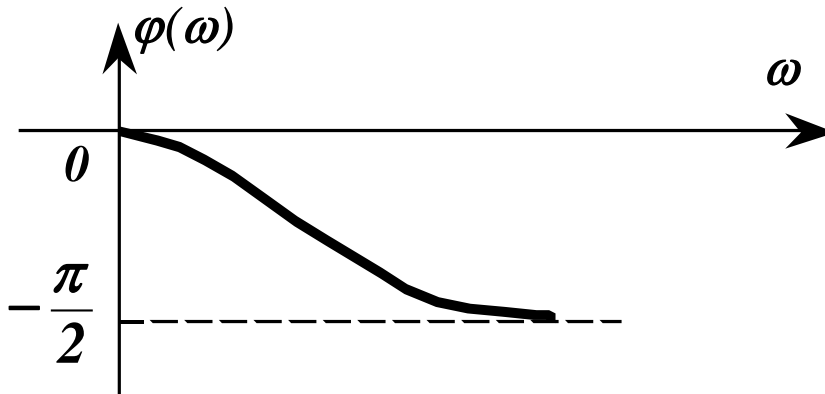


Рисунок 7.10 – ФЧХ аперіодичної ланки

АФХ аперіодичної ланки в показовій формі буде мати вигляд

$$W(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-\text{arctg}(T\omega)} , \quad (7.26)$$

її графік наведений на рис. 7.11.

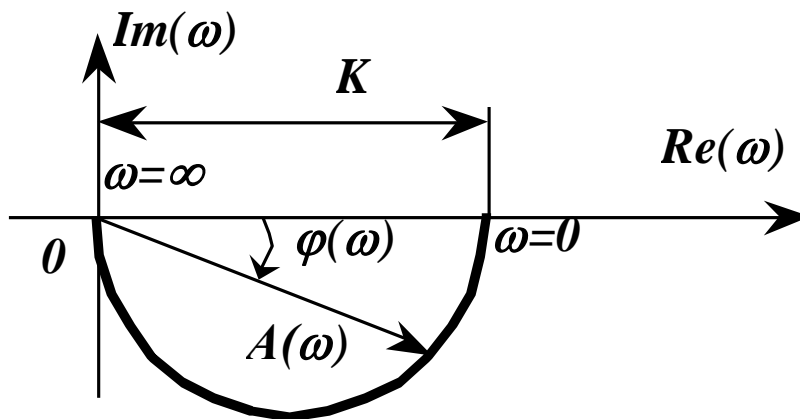


Рисунок 7.11 – АФХ аперіодичної ланки

Перехідна характеристика аперіодичної ланки

$$h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) , \quad (7.27)$$

її графік подано на рис. 7.12.

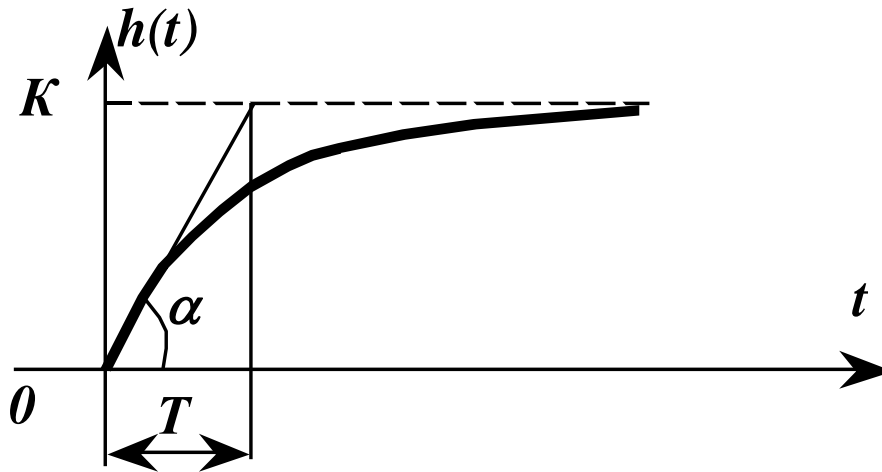


Рисунок 7.12 – Перехідна функція аперіодичної ланки

Прикладами елементів, характеристики яких близькі до характеристики аперіодичної ланки, можуть служити: електричні ланцюги, що складаються з резистора і конденсатора; термопарі і термометри опору без захисних чохлаів.

7.1.4 Коливальна ланка

Коливальним називають ланку, у якій вихідна величина при стрибкоподібному вхідному впливі прагне до нового сталого значення, роблячи щодо нього коливання, що загасають за законом експоненти. Коливальна ланка описується наступним диференціальним рівнянням:

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t), \quad (7.28)$$

де T_1 , T_2 – постійні часу ланки; K – коефіцієнт передачі ланки.

В операторній формі рівняння ланки буде мати вигляд

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)y(t) = Kx(t). \quad (7.29)$$

В операційній формі

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)Y(t) = KX(t). \quad (7.30)$$

З рівняння (7.30) отримаємо передавальну функцію ланки:

$$W(p) = \frac{K}{(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)}. \quad (7.31)$$

АФХ коливальної ланки

$$W(j\omega) = \frac{K}{(T_2^2(j\omega)^2 + T_1(j\omega) + 1)} = \frac{K}{(1 - T_2^2\omega^2) + jT_1\omega} \quad (7.32)$$

Звідси

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}} \quad (7.33)$$

$$\phi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{T_1\omega}{1 - T_2^2\omega^2} \quad (7.34)$$

Частотні характеристики коливальної ланки наведені на рис. 7.13 – 7.15.

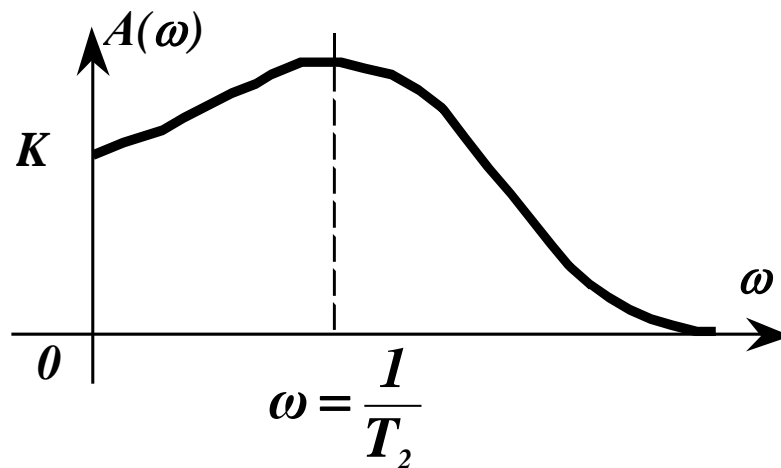


Рисунок 7.13– АЧХ коливальної ланки

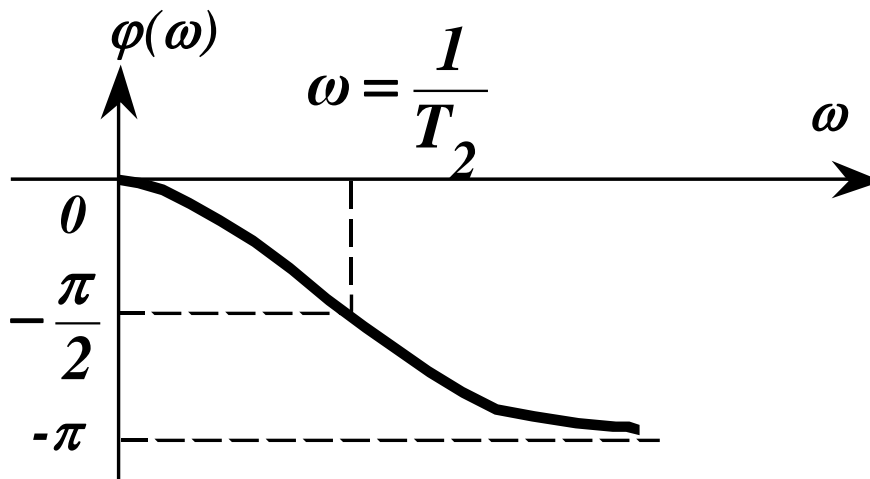


Рисунок 7.14 – ФЧХ коливальної ланки

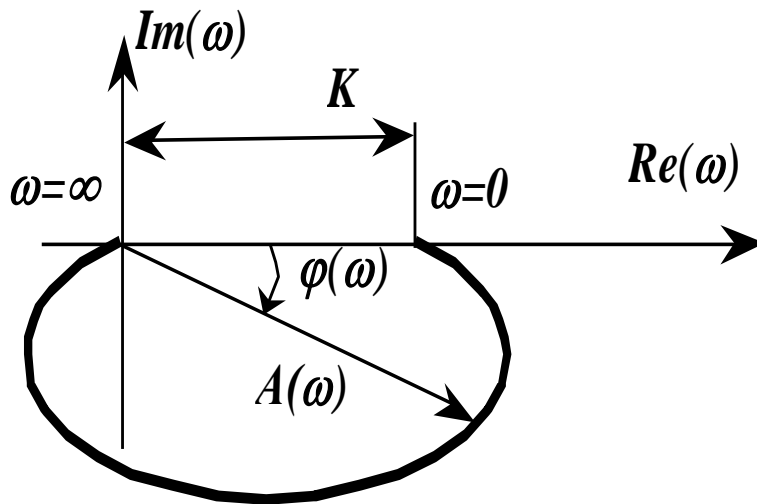


Рисунок 7.15 – АФХ коливальної ланки

Перехідна характеристика коливальної ланки описується виразом:

$$h(t) = K \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right], \quad (7.35)$$

де

$$\alpha = \frac{T_1}{2T_2} \quad ; \quad \omega = \frac{1}{T_2} \sqrt{1 - \frac{T_1^2}{4T_2^2}}.$$

Графік перехідної характеристики наведено на рис. 7.16. Характер перехідного процесу ланки визначається розташуванням коренів його характеристичного рівняння на комплексній площині.

Якщо $T_1 < 2T_2$, то характеристичне рівняння має два сполучених комплексних корені. Перехідний процес у цьому випадку (див. рис. 7.16) описується згасаючою синусоїдою, амплітуда якої зменшується по експоненті $e^{-\alpha t}$. Показник експоненти залежить від дійсної і уявної складових α комплексних коренів. Уявна складова коренів характеристичного рівняння ω є круговою частотою коливальної ланки.

Якщо $T_1 \geq 2T_2$, то корені характеристичного рівняння дійсні і від'ємні. Перехідний процес у цьому випадку описується аперіодичною S-подібною кривою. Отже, при такому співвідношенні постійних часу T_1 і T_2 рівняння коливальної ланки відповідає двом послідовно включеним аперіодичним

ланкам. У цьому випадку таку ланку називають аперіодичною ланкою другого порядку.

Прикладами елементів, характеристики яких близькі до характеристики коливальної ланки, можуть служити: електричний контур, що містить ємність, індуктивність і активний опір; сполучені посудини, з'єднані через гідравлічний опір.

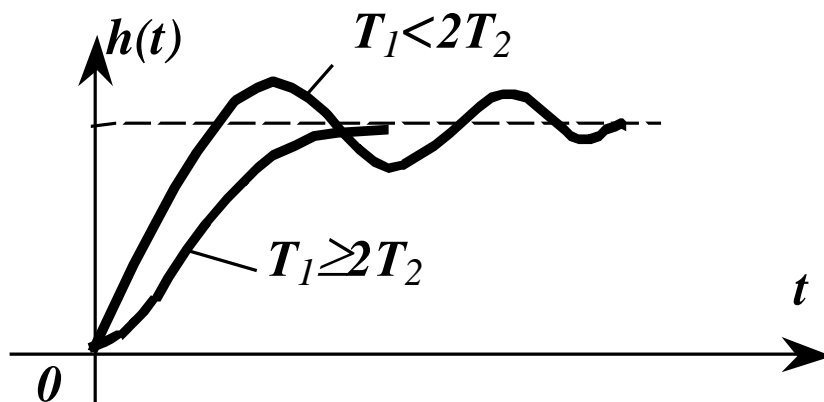


Рисунок 7.16 – Перехідна характеристика коливальної ланки

7.1.5 Ідеальна диференційна ланка

Ідеальною диференційною називається ланка, у якої вихідна величина пропорційна швидкості зміни вхідної величини.

Диференційне рівняння ланки

$$y(t) = \frac{T_d dx(t)}{dt}, \quad (7.36)$$

де T_d – постійна часу диференційної ланки.

Те ж рівняння в операторній формі

$$y(t) = T_d p x(t). \quad (7.37)$$

В операційній формі рівняння (7.37) буде мати вигляд

$$Y(p) = T_d p X(p). \quad (7.38)$$

Передавальна функція ланки

$$W(p) = T_d p. \quad (7.39)$$

АФХ ідеальної диференційної ланки

$$W(j\omega) = jT_d \omega. \quad (7.40)$$

АФХ такої ланки містить тільки уявну частину, тому АЧХ і ФЧХ будуть визначатися співвідношеннями:

$$A(\omega) = T_d \omega ; \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (7.41)$$

Графіки АЧХ і ФЧХ зображені на рис. 7.17 і 7.18.

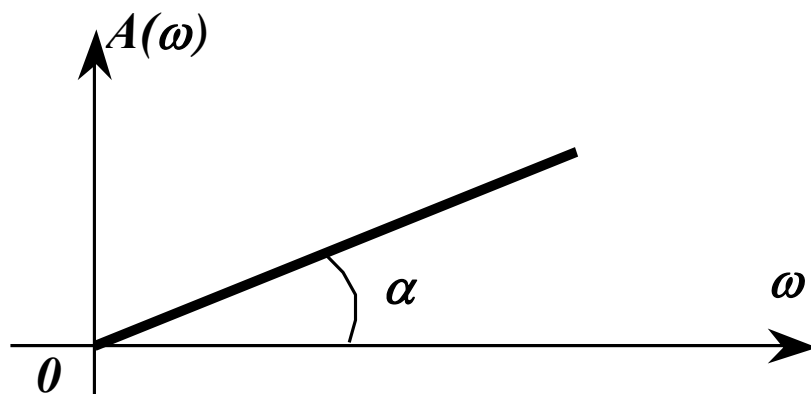


Рисунок 7.17 – АЧХ ідеальної диференційної ланки

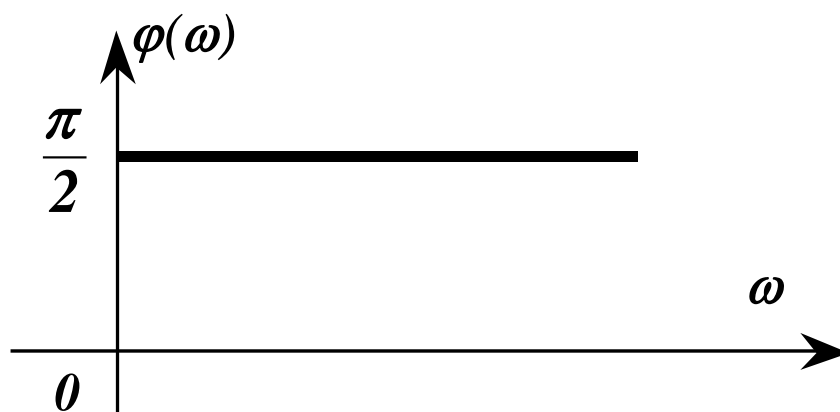


Рисунок 7.18 – ФЧХ ідеальної диференційної ланки

З урахуванням (7.41), АФХ ідеальної диференційної ланки у показовій формі буде мати вигляд

$$W(j\omega) = jT_d \omega e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad (7.42)$$

її графік наведено на рис. 7.19.

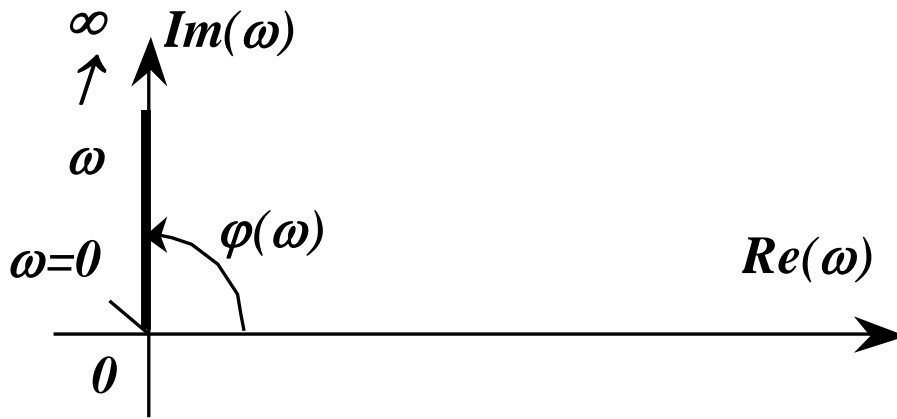


Рисунок 7.19 – АФХ ідеальної диференційної ланки

Перехідна характеристика ланки описується виразом:

$$h(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (7.43)$$

і являє собою імпульс нескінченно великої амплітуди в момент нанесення збурення. На рис. 7.20 представлений графік зміни перехідної характеристики ідеальної диференційної ланки.



Рисунок 7.20 – Перехідна характеристика ідеальної диференційної ланки

У практичних умовах жоден фізичний пристрій не має характеристики ідеальної диференційної ланки.

7.1.6 Реальна диференційна ланка

Рівняння такої ланки має вигляд

$$T_d \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_d T_d \frac{dx(t)}{dt}, \quad (7.44)$$

де T_d – постійна часу ланки; K – коефіцієнт передачі ланки.

В операторній формі рівняння (7.44) запишеться в такий спосіб

$$(T_d p + 1)y(t) = K_d T_d p x(t), \quad (7.45)$$

а в операційній формі буде мати вигляд

$$(T_d p + 1)Y(p) = K_d T_d p X(p), \quad (7.46)$$

Передавальна функція ланки

$$W(p) = \frac{K_d T_d p}{T_d p + 1}. \quad (7.47)$$

АФХ реальної диференційної ланки, має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{K_d T_d j\omega}{T_d j\omega + 1}. \quad (7.48)$$

Звідки

$$A(\omega) = \frac{K_d T_d \omega}{\sqrt{T_d^2 \omega^2 + 1}}, \quad (7.49)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } T_d \omega. \quad (7.50)$$

Графіки АЧХ і ФЧХ ланки зображені на рис. 7.21. і 7.22.

АФХ реальної диференційної ланки, у показовій формі буде мати вигляд

$$W(j\omega) = \frac{K_d T_d \omega}{\sqrt{T_d^2 \omega^2 + 1}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } T_d \omega\right)}, \quad (7.51)$$

вона наведена на рис. 7.23.

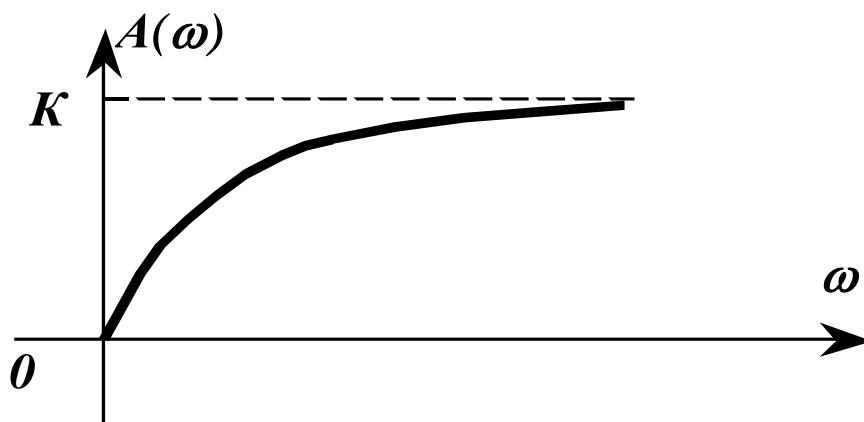


Рисунок 7.21 – АЧХ реальної диференційної ланки

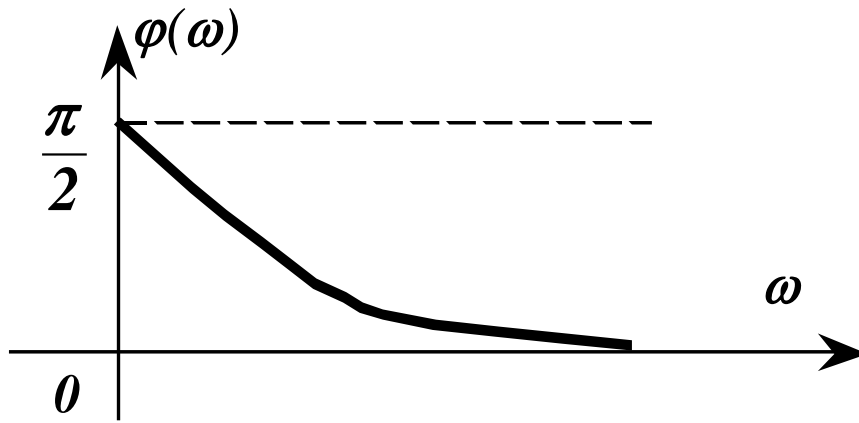


Рисунок 7.22 – ФЧХ реальної диференційної ланки

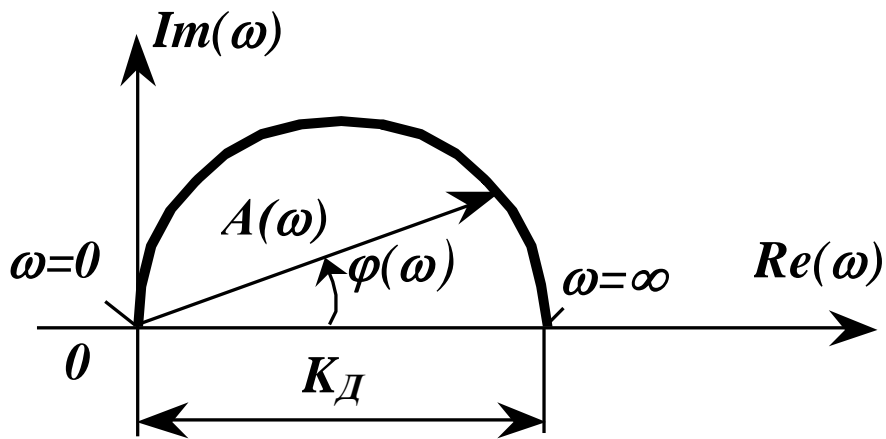


Рисунок 7.23 – АФХ реальної диференційної ланки

Перехідна характеристика ланки

$$h(t) = K_D e^{-\frac{t}{T_D}}, \quad (7.52)$$

її графік наведений на рис. 7.24.

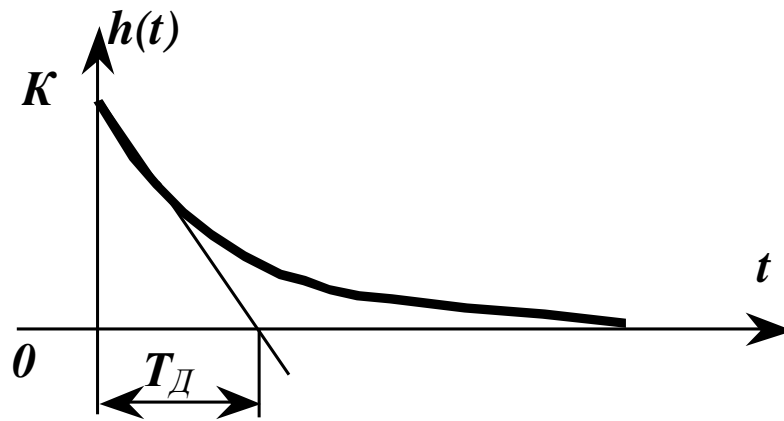


Рисунок 7.24 – Перехідна характеристика реальної диференційної ланки

Як видно з малюнка, диференціювання в такій ланці відбувається з викривленням. В початковий момент часу його характеристика наближається до характеристики ідеальної диференційної ланки, а потім зміна вихідної величини відбувається як в аперіодичній ланці. Прикладами елементів, характеристики яких близькі до характеристики реальної диференційної ланки, можуть служити гідравлічні демпфери; RC-ланцюги.

7.1.7 Ланка чистого запізнювання

Ланка чистого запізнювання пропускає вхідну функцію без викривлень, але з затримкою на деяку постійну величину τ .

Рівняння ланки

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (7.53)$$

де τ – час запізнювання.

З урахуванням теореми про зсув оригіналу отримуємо рівняння ланки в операційному вигляді

$$Y(p) = e^{-p\tau} X(p). \quad (7.54)$$

Передавальна функція ланки

$$W(p) = e^{-p\tau}. \quad (7.55)$$

АФХ ланки запізнювання буде мати вигляд

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}, \quad (7.56)$$

при цьому $A(\omega)=1$, а $\varphi(\omega)=-\omega\tau$. Таким чином, на комплексній площині АФХ ланки буде представляти коло одиничного радіуса з центром на початку координат. Фаза ланки лінійно залежить від частоти коливань.

АФХ ланки запізнювання приведена на рис. 7.25.

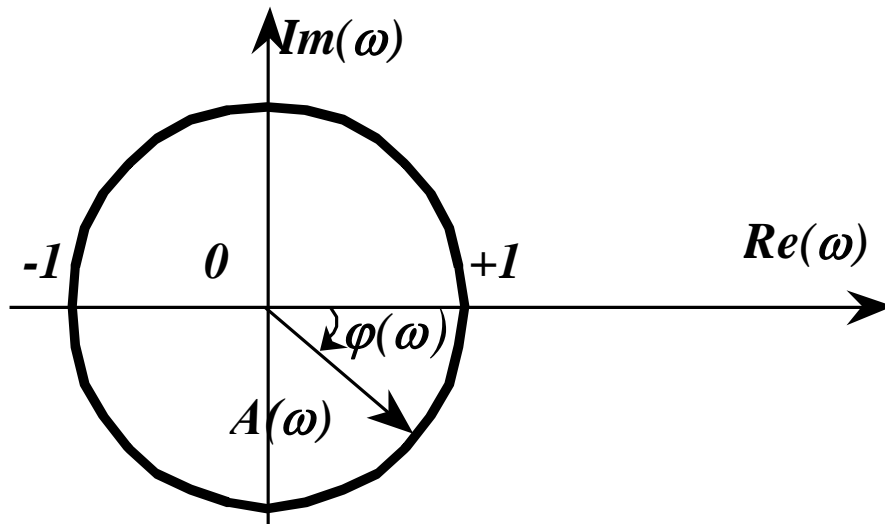


Рисунок 7.25 – АФХ ланки чистого запізнювання

Перехідна характеристика ланки

$$h(t)=1(t-\tau), \tag{7.57}$$

являє собою східчасту функцію зі зсувом на час τ , тобто

$$h(t)=\begin{cases} \infty & \text{при } t=0 \\ 0 & \text{при } t>0 \end{cases} . \tag{7.58}$$

Графік перехідної характеристики наведений на рис. 7.26.

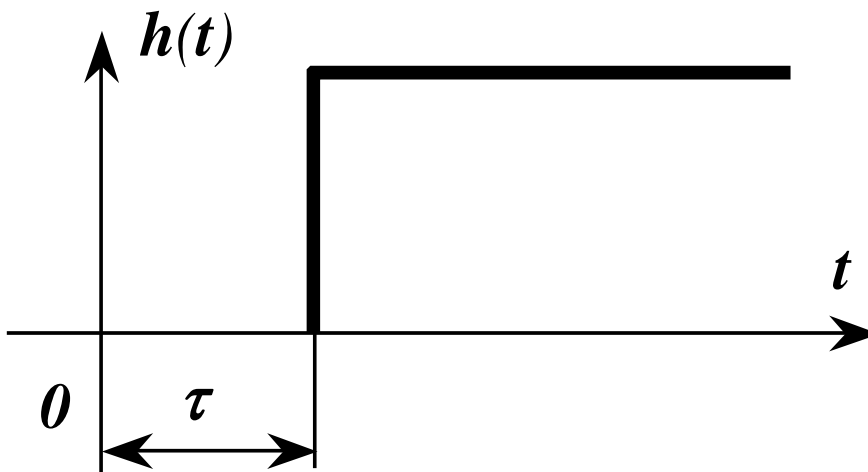


Рисунок 7.26 – Перехідна характеристика ланки запізнювання

Прикладами елементів, характеристики яких близькі до характеристики ланки запізнювання, є стрічкові транспортери, довгі трубопроводи, лінії електропередач.

7.2. З'єднання ланок

Розрізняють три типи з'єднання ланок: послідовне, паралельне і зі зворотним зв'язком (рис. 7.27). Розглянемо передавальні функції систем при різному з'єднанні ланок.

Послідовне з'єднання. Послідовним називають таке з'єднання ланок, при якому вихідна величина попередньої ланки є вхідною величиною наступної ланки (рис. 7.27, *a*). Передавальна функція системи послідовно з'єднаних ланок дорівнює добуткові передавальних функцій окремих ланок:

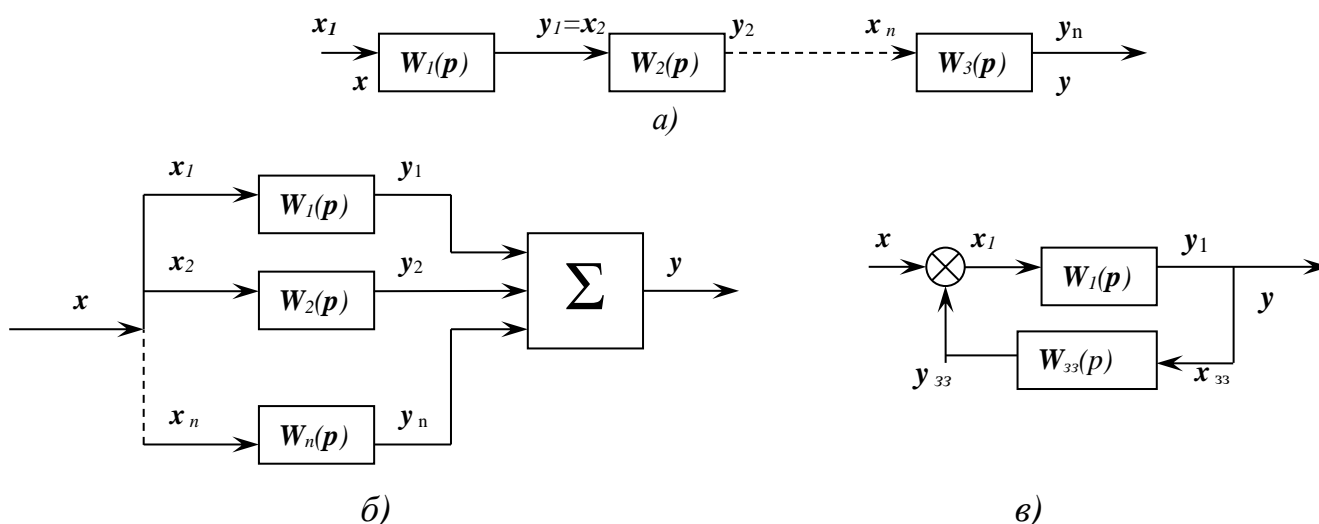
$$W(p) = W_1(p)W_2(p) \dots W_{n-1}(p)W_n(p) \dots \quad (7.59)$$

АФХ системи також дорівнює добуткові АФХ окремих ланок:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega) \dots W_{n-1}(j\omega)W_n(j\omega) \dots \quad (7.60)$$

Якщо АФХ записані в показовій формі, то для отримання модуля АФХ системи перемножуються модулі окремих ланок, а для отримання фази (аргументу) АФХ системи складаються фази окремих ланок:

$$W(j\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega) \dots A_n(\omega) e^{j[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)]}. \quad (7.61)$$



a – послідовне; *б* – паралельне; *в* – зі зворотним зв’язком

Рисунок 7.27 – Структурні схеми з’єднань ланок

Паралельне з’єднання. При паралельному з’єднанні ланок (рис. 7.27, б) на вхід усіх ланок надходить та сама вхідна величина $x = x_1 = x_2 = \dots = x_n$, а вихідна величина дорівнює сумі вихідних величин окремих ланок:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n. \quad (7.62)$$

Передавальна функція системи паралельно з’єднаних ланок дорівнює сумі передавальних функцій окремих ланок:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_{n-1}(p) + W_n(p) \dots \quad (7.63)$$

АФХ такої системи дорівнює сумі АФХ окремих ланок:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega) + \dots + W_{n-1}(j\omega) + W_n(j\omega) \dots \quad (7.64)$$

З’єднання зі зворотним зв’язком. При з’єднанні двох ланок, коли ланка з передавальною функцією $W_1(p)$ охоплена зворотним зв’язком у вигляді ланки з передавальною функцією $W_{3.3}(p)$, дотримуються співвідношення:

$$y_1 = x_{3.3} = y$$

$$x_1 = x \pm y_{3.3}.$$

Знак «плюс» відповідає додатному зворотному зв’язку, а знак «мінус» – від’ємному зворотному зв’язку. **Додатним** зворотним зв’язком називають такий зв’язок, введення якого викликає збільшення вихідної величини, а **від’ємним** –

такий, введення якого призводить до зменшення вихідної величини в порівнянні зі значенням без зворотного зв'язку.

Переходячи у виразі (7.65) від оригіналів функцій до їхніх зображень і розділивши на зображення вихідної величини $Y(p)$, отримаємо:

$$\frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{X(p)}{Y(p)} \pm \frac{Y_{з.з.}(p)}{Y(p)}. \quad (7.65)$$

Ліва частина отриманого рівняння являє собою зворотну передавальну функцію першої ланки $1/W_1(p)$, тому що $Y_1(p) = Y(p)$. Перший доданок правої частини – зворотна передавальна функція системи $1/W(p)$, а другий доданок – передавальна функція ланки зворотного зв'язку $W_{з.з.}(p)$ тому що $Y(p) = X_{з.з.}(p)$, тобто:

$$1/W(p) = (1/W_1(p)) \pm W_{з.з.}(p).$$

Після перетворення отримаємо:

$$W(p) = W_1(p) / [1 \mp W_1(p)W_{з.з.}(p)]. \quad (7.66)$$

Передавальна функція системи при охопленні ланки зворотним зв'язком дорівнює дробу, чисельник якого – передавальна функція ланки, а знаменник – одиниця плюс (мінус) добуток передавальної функції основної ланки і передавальної функції ланки зворотного зв'язку («плюс» відповідає від'ємному, «мінус» – додатному зворотному зв'язку). АФХ такої системи при відповідному виді зворотного зв'язку має вигляд:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) / [1 \mp W_1(j\omega)W_{з.з.}(j\omega)]. \quad (7.67)$$

Контрольні запитання до Розділу 7

1. Якими загальними властивостями характеризуються елементарні ланки систем управління?
2. Наведіть основні властивості підсилювальної ланки.
3. Наведіть основні властивості інтегруючої ланки.
4. Наведіть основні властивості аперіодичної ланки першого порядку.
5. Наведіть основні властивості коливальної ланки.

6. Наведіть основні властивості ідеальної диференційної ланки.
7. Наведіть основні властивості реальної диференційної ланки.
8. Наведіть основні властивості ланки чистого запізнювання.
9. Наведіть передавальну функцію системи при послідовному з'єднанні ланок.
10. Наведіть передавальну функцію системи при паралельному з'єднанні ланок.
11. Наведіть передавальну функцію системи при з'єднанні зі зворотним зв'язком.

8 СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

8.1 Поняття про стійкість системи

Система автоматичного керування, як будь-яка динамічна система, характеризується перехідним процесом, що виникає в ній при порушенні її рівноваги яким-небудь впливом; це можуть бути сигнали керування, налаштування, збурення, навантаження і т.п.

Перехідний процес $y(t)$ залежить як від властивостей системи, так і від виду збурення. У перехідному процесі завжди варто розрізнити дві складові (див. пункт 4.3):

$$y(t) = y^{заг}(t) + y^{част}(t). \quad (8.1)$$

Однією з основних динамічних характеристик системи керування є її стійкість (або нестійкість). Для виконання практичних задач керування система насамперед повинна бути стійка. Під стійкістю розуміється властивість системи повертатися до стану рівноваги після усунення збурення, що порушило зазначену рівновагу [4]. Нестійка система не повертається до стану рівноваги, з якого вона з тих чи інших причин вийшла, а безупинно віддаляється від нього або робить біля нього неприпустимо великі коливання. Очевидно, що нестійкі системи керування застосовуватися для роботи не можуть. Тому, для того, щоб система могла правильно реагувати на сигнал керування, налаштування або зміни навантаження, у перехідному процесі вільна складова з часом повинна прагнути до нуля, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^{заг}(t) \rightarrow 0. \quad (8.2)$$

Таким чином, характер вільного руху системи визначає її стійкість або нестійкість.

Аналітичне формулювання умови стійкості визначається виразом (8.2); при невиконанні умови (8.2) система вважається нестійкою.

У питаннях судження про стійкість систем автоматики мають велике практичне значення загальні теореми стійкості, сформульовані А. М. Ляпуновим [4] і які приводяться нижче без аналітичного доведення. Ці теореми дозволяють

встановити значення і сферу застосування лінеаризації нелінійних рівнянь, тобто правомірність віднесення до лінійних систем більшості реальних систем. Теорема формулюється наступним чином:

1. Нелінійна система стійка в «малому» (тобто при малих початкових відхиленнях), якщо всі дійсні корені характеристичного рівняння системи, яке складене для її лінійного наближення – від'ємні.

2. Нелінійна система нестійка в «малому», якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння лінійного наближення має додатну дійсну частину.

При наявності чисто уявних коренів зазначеного рівняння питання про стійкість системи вимагає в кожному випадку додаткового дослідження.

Для нелінійних систем стійкість «у малому» ще не вирішує питання про стійкість системи при будь-яких обставинах: нелінійні системи можуть бути стійкі «у малому», тобто при невеликих початкових відхиленнях від стійкого стану, і в той же час нестійкі «у великому», коли початкове відхилення велике. Отже, стійкість нелінійних систем залежить і від величини збурення.

У лінійних і лінеаризованих системах, на відміну від нелінійних, стійкість не залежить від величини збурення.

Можливі види кривих перехідного процесу вільної складової $y^{zaz}(t)$ для стійкої лінійної системи приведені на рис. 8.1, а, а для нестійкої системи – на рис. 8.1, б.

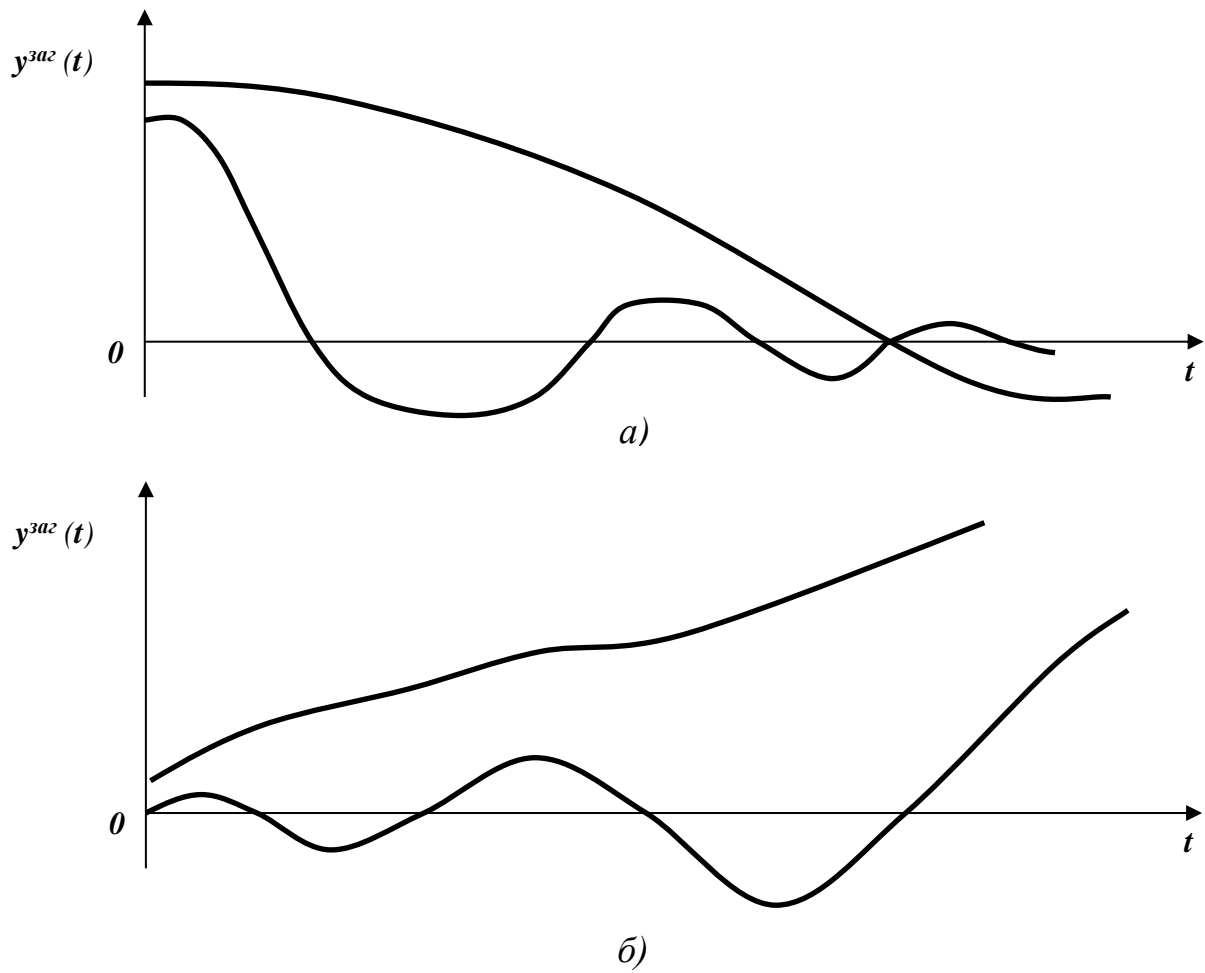


Рисунок 8.1 – Види перехідних процесів для стійкої (а) і для нестійкої (б) систем

При аналітичному дослідженні динамічних властивостей системи керування необхідно знайти її диференційне рівняння і потім його проінтегрувати. Це означає, що тим самим буде знайдено закон зміни в часі величини, яка нас цікавить.

Однак розв'язання диференційних рівнянь високих порядків, навіть для лінійних систем, пов'язано зі значними труднощами.

Тому істотне значення мають ознаки, за якими є можливість судити про стійкість систем керування без безпосереднього інтегрування диференційного рівняння, що визначає досліджувану систему.

Ці ознаки отримали назву **критеріїв стійкості**. Критерії стійкості дозволяють, не вдаючись до розв'язання диференційного рівняння системи,

встановити, чи є система стійкою. Крім того, такі критерії дозволяють з'ясувати характер впливу того чи іншого параметра і структури системи на її стійкість.

Для того, щоб краще усвідомити від чого залежить стійкість або нестійкість системи керування, розглянемо загальне диференціальне рівняння лінійної системи автоматичного керування.

Відповідно до визначення стійкості системи, остання характеризується вільними рухами системи. Так як вільний рух лінійної системи описується однорідним диференціальним рівнянням, тобто рівнянням без правої частини, то для визначення стійкості лінійної системи і слід досліджувати таке однорідне рівняння.

Рівняння вільного руху лінійної системи автоматичного керування, розв'язане відносно досліджуваної величини, здебільшого стосовно відхилення регульованого параметра від заданого значення, може бути записане так:

$$a_0 \frac{d^n y^{\text{зар}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y^{\text{зар}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy^{\text{зар}}}{dt} + a_n y^{\text{зар}} = 0, \quad (8.3)$$

де a_0, a_1, \dots, a_n – постійні коефіцієнти, обумовлені параметрами системи керування.

В операторній формі це ж рівняння запишеться:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y^{\text{зар}} = 0.$$

Звідси характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (8.4)$$

Розв'язок диференціального рівняння (8.3) при всіх дійсних коренях, як відомо, має такий вигляд:

$$y^{\text{зар}}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}, \quad (8.5)$$

де A_i – постійні інтегрування, обумовлені параметрами системи і початкових умов;

p_i – корені характеристичного рівняння (8.4);

t – час.

При наявності пари комплексних коренів рівняння (8.4) $p_{i,i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i$ у праву частину формули (8.5) буде входити доданок

$$A_i e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i), \quad (8.6)$$

де A_i – початкова амплітуда;

φ_i – початкова фаза.

З (8.5) і (8.6) випливає, що динамічні властивості системи керування визначаються значеннями p_i і A_i .

Якщо всі корені характеристичного рівняння (8.4) будуть від’ємними дійсними або комплексні з від’ємною дійсною частиною, то кожен доданок правої частини виразу (8.5) буде з часом зменшуватися і при t , що прагне до нескінченності, буде прагнути до нуля. Але якщо кожен доданок правої частини цього виразу прагне до нуля при t , що прагне до нескінченності, то і сума їх буде також прагнути до нуля й умова (8.2) буде задовольнятися.

Графічне представлення зміни кожного доданка, що відповідає дійсному від’ємному кореню, наведено на рис. 8.2, а; а для кожної пари комплексних коренів з від’ємною дійсною частиною – на рис. 8.2, б.

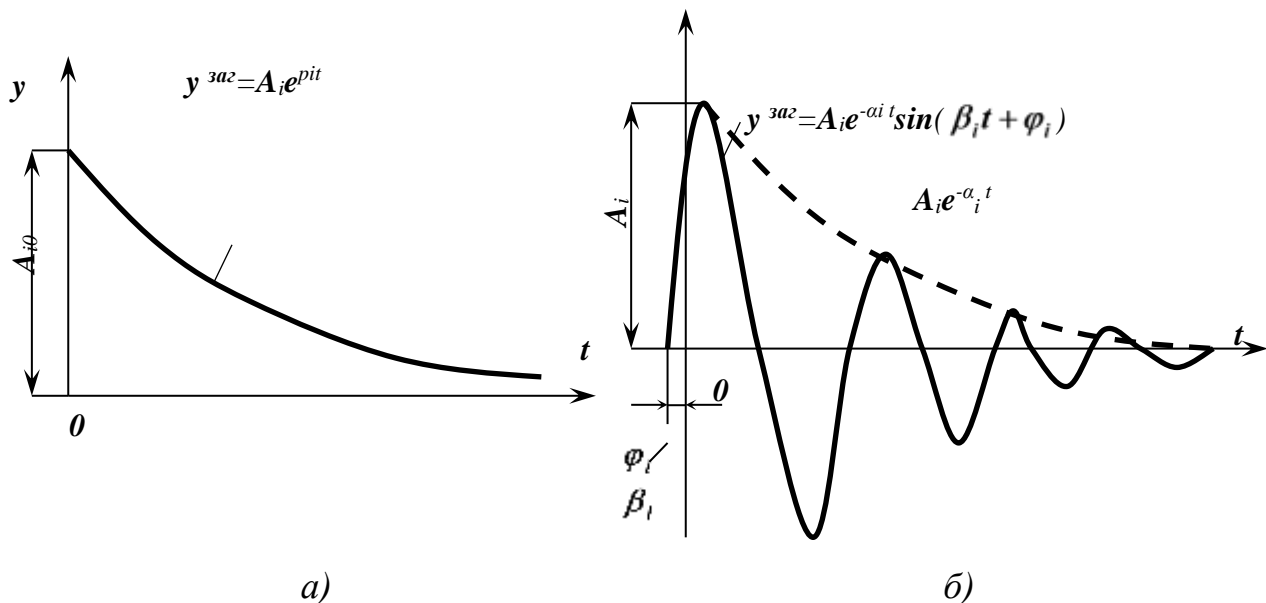


Рисунок 8.2 – Перехідний процес для дійсного від’ємного кореня (а) і для пари комплексних коренів характеристичного рівняння з від’ємною дійсною частиною (б)

Система з такими коренями буде стійкою, тому що відхилення параметра керування від заданого значення з часом зменшується до нуля.

Якщо серед коренів характеристичного рівняння (8.4) буде хоча б один дійсний додатний корінь або якщо це рівняння буде мати хоча б одну пару сполучених комплексних коренів з додатною дійсною частиною, то одна зі складових правої частини формули (8.5) або доданок, який відповідає цьому кореневі (або парі коренів), з часом буде необмежено рости і при t , що прагне до нескінченності, буде також прагнути до нескінченності.

Перехідний процес для однієї складової правої частини, (8.5), показник степеню в якій є дійсним додатним коренем, приведений на рис. 8.3, а, а перехідний процес для доданка, що відповідає парі комплексних сполучених коренів з додатною дійсною частиною – на рис. 8.3, б.

Це означає, що при наявності хоча б однієї такої складової, права частина (8.5) з часом буде необмежено рости. Така система, мабуть, уже не буде стійкою, тому що відхилення параметра керування від заданого значення з часом необмежено зростає.

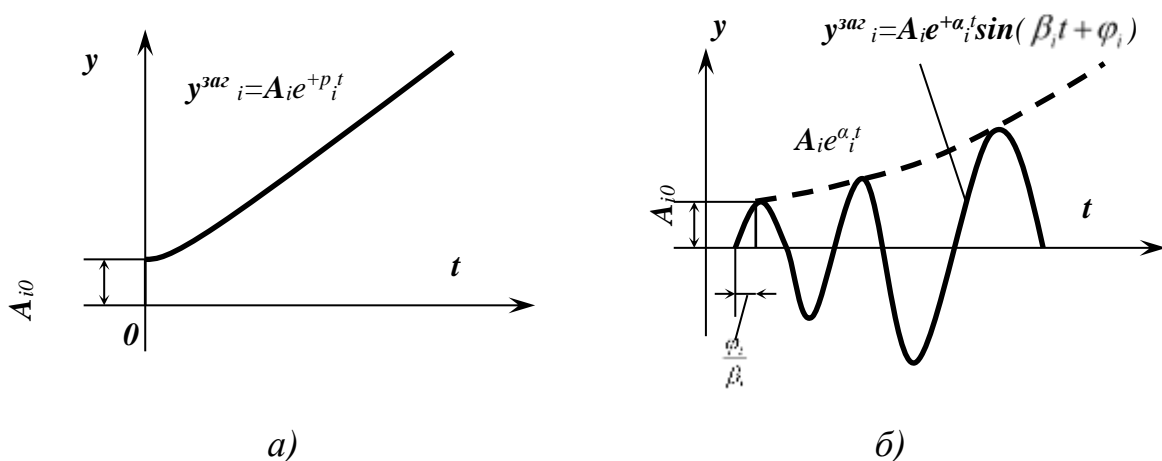


Рисунок 8.3 – Перехідний процес для дійсного додатного кореня (а) і пари комплексних коренів характеристичного рівняння з додатною дійсною частиною (б)

Якщо серед коренів характеристичного рівняння (8.4) буде хоча б одна пара комплексних коренів з дійсною частиною, яка дорівнює нулю, то з'явиться складова виду (8.6), у якої показник степеня α_i буде дорівнювати нулю, і перехідний процес для неї буде мати вигляд незатухаючих коливань. Приклад такого перехідного процесу наведено на рис. 8.4. У цьому випадку система буде знаходитися на границі стійкості і нестійкості, але так як в перехідному процесі такої системи виниклі коливання не будуть загасати, то систему варто вважати нестійкою.

Таким чином, необхідною і достатньою умовою стійкості системи керування є дотримання того, щоб усі корені характеристичного рівняння системи мали від'ємну дійсну частину.

Якщо представити корені характеристичного рівняння на комплексній площині, то для стійкої системи потрібно, щоб усі корені лежали в лівій півплощині, як це наведено на рис. 8.5.

Очевидно, що при зміні параметрів системи будуть змінюватися і коефіцієнти a_i характеристичного рівняння (8.4), а зміна коефіцієнтів рівняння буде викликати переміщення коренів на комплексній площині. При визначених значеннях коефіцієнтів рівняння частина коренів може виявитися розташованою на уявній осі.

Сукупності значень коефіцієнтів характеристичного рівняння, при яких принаймні одна пара комплексних коренів знаходиться на уявній осі, а всі інші корені розташовані лівіше за неї, визначають точки границі стійкості. Такому випадкові, наприклад, і відповідає перехідний процес, який зображений на рис. 8.4.

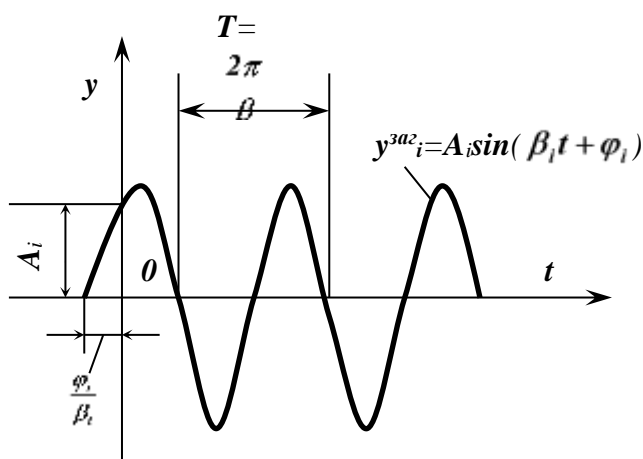


Рисунок 8.4 – Перехідний процес для пари уявних коренів характеристичного рівняння

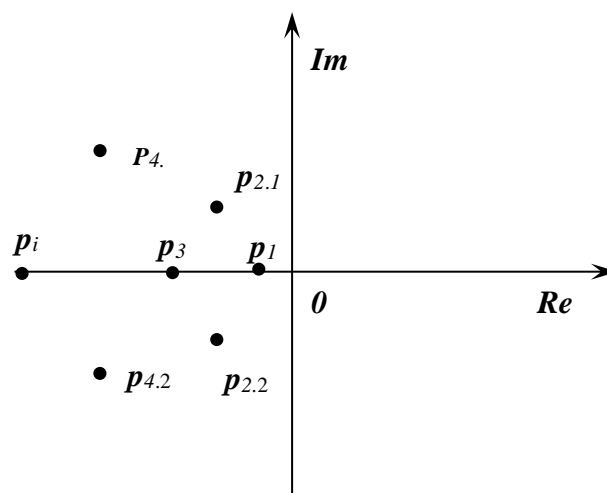


Рисунок 8.5 – Розташування коренів характеристичного рівняння для стійкої системи

Границя стійкості поділяє всі сукупності значень коефіцієнтів характеристичного рівняння на дві області – одна з них відповідає стійкості системи, а друга – її нестійкості.

8.2 Критерії стійкості

Для судження про стійкість системи керування досить лише мати уявлення про знаки всіх коренів характеристичного рівняння.

Ознаки, що дозволяють зробити висновок про знаки коренів характеристичного рівняння без розв’язання самого рівняння, отримали в теорії автоматичного керування назву критеріїв стійкості.

Природно, що застосування того чи іншого критерію стійкості дає можливість судити про стійкість більш просто й ефективно, ніж це має місце при звичайному розв’язку рівняння, особливо коли порядок таких рівнянь високий.

Крім того, критерії стійкості дозволяють встановити причину нестійкості і намітити шляхи і засоби досягнення стійкості системи. Якщо знайти співвідношення між коефіцієнтами диференційного рівняння системи, при яких дійсна частина коренів характеристичного рівняння змінює знак з мінуса на

плюс, то тим самим буде сформульована умова переходу процесу керування від стійкого до нестійкого режиму, а при зворотній зміні знака, навпаки, від нестійкого до стійкого режиму.

Уперше задача про знаходження критерію, що дозволяє судити про стійкість лінійних систем, була сформульована в 1868 р. Дж. Максвеллом.

Загальний метод судження про корені характеристичного рівняння будь-якого порядку був запропонований 1877р. Раусом у вигляді правила, що визначає послідовність операцій, які необхідні для розв'язання задачі. Ці правила будемо називати критерієм Рауса. У 1895 р. швейцарський математик Гурвіц за пропозицією словацького вченого Стодоли сформулював умови, при дотриманні яких усі дійсні частини комплексних коренів характеристичного рівняння будь-якого порядку будуть від'ємні, і виразив ці умови у формі визначників, що складаються з коефіцієнтів характеристичного рівняння. Ці правила будемо називати критерієм Гурвіца.

Усі ці умови стійкості можна назвати **алгебраїчними критеріями**.

Алгебраїчні критерії досить прості для дослідження систем, в яких процеси описуються рівняннями відносно невисокого порядку. Однак уже для рівнянь п'ятого порядку і вище застосування критеріїв Рауса і Гурвіца стає трудомістким. Труднощі ще більше зростають, якщо потрібно установити вплив якого-небудь параметра на стійкість процесу. У подібних випадках, а також для систем, що характеризуються рівняннями високих порядків, виявляється більш зручним досліджувати стійкість системи, застосовуючи так звані частотні критерії, що володіють великою наочністю, яка обумовлена тим, що задача зводиться до вивчення плоскої кривої, яка може бути побудована порівняно просто. У 1932 р. Найквіст, виходячи з теореми Коші, запропонував досліджувати стійкість підсилювачів зі зворотним зв'язком у радіосхемах, застосовуючи для цього частотні методи (амплітудно-фазові характеристики). У 1938 р. А. В. Михайлов, використовуючи принцип аргумента, застосував частотні методи для дослідження стійкості систем автоматичного керування.

Розглянемо послідовно зазначені критерії стійкості.

8.3 Критерій Рауса

У 1877 р. Раусом були знайдені умови стійкості для систем керування, які характеризуються лінійними диференційними рівняннями будь-якого порядку з постійними коефіцієнтами.

Раус знайшов умови, при дотриманні яких, усі корені характеристичного рівняння n -го порядку будуть мати тільки від'ємні дійсні частини, тобто ним були сформульовані ознаки стійкості будь-яких лінійних систем керування.

Сутність критерію Рауса, що приводиться без доведення, зводиться до наступного.

Нехай дано рівняння n -го степеня з додатним коефіцієнтом a_0 при старшому члені:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (8.7)$$

Для виконання поставленої задачі складається таблиця Рауса з $n+1$ рядка:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_3 & c_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_0 & c_2 & c_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_3 & b_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_2 & b_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad (8.8)$$

Перший нижній рядок таблиці складається з коефіцієнтів рівняння з парними індексами, другий рядок – з коефіцієнтів рівняння з непарними індексами.

Коефіцієнти у вищих рядках виражаються через коефіцієнти нижніх двох рядків відповідно до наступного правила. Починаючи з перших двох нижніх рядків, піднімаючи по одному рядку нагору, складають матриці:

$$\left. \begin{array}{l}
 \left\| \begin{array}{cccccccc}
 a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_0 & b_2 & b_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_3 & b_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_0 & b_2 & b_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 c_0 & c_2 & c_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 b_1 & b_3 & b_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array} \right\| \cdot \cdot \cdot \\
 \end{array} \right\} \quad (8.9)$$

і т.д.

Мінори кожної попередньої матриці, що включають перший стовпчик, утворять послідовність потрібних коефіцієнтів верхнього рядка наступної матриці:

$$\left. \begin{array}{l}
 b_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix}; b_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ a_0 & a_6 \end{vmatrix}; \\
 b_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}; b_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}; b_5 = \begin{vmatrix} b_0 & b_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}; \\
 c_0 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}; c_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 \\ b_0 & b_4 \end{vmatrix}; c_4 = \begin{vmatrix} b_1 & b_7 \\ b_0 & b_6 \end{vmatrix}; \\
 c_1 = \begin{vmatrix} c_0 & c_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; c_3 = \begin{vmatrix} c_0 & c_4 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix} \quad \text{і т. д.}
 \end{array} \right\} \quad (8.10)$$

Умовою стійкості є додатність членів перших стовпчиків усіх матриць, тобто

$$a_0 > 0; a_1 > 0; b_0 > 0; b_1 > 0; c_0 > 0 \quad (8.11)$$

Число порушень цього правила дорівнює числу коренів характеристичного рівняння, розташованих у правій комплексній півплощині.

Критерій Рауса трохи заощаджує в порівнянні з іншими алгебраїчними критеріями (наприклад, з досить розповсюдженим критерієм Гурвіца, який розглянуто нижче) число обчислювальних операцій. Хоча це має значення лише при високих порядках аналізованих рівнянь.

8.4 Критерій Гурвіца

Найбільш розповсюджена в технічній практиці форма алгебраїчного критерію стійкості відома за назвою критерію Гурвіца. Цей критерій формулює умови стійкості у формі визначників.

Якщо характеристичне рівняння n -го степеня системи керування має вигляд:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (8.12)$$

то умови стійкості за Гурвіцем зводяться до того, щоб при $a_0 > 0$ усі n визначників, складених за визначеною схемою, що приводиться нижче, і всі коефіцієнти a_i були додатні.

Визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ утворюються з наступної таблиці коефіцієнтів характеристичного рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}. \quad (8.13)$$

З цієї таблиці для визначника $1, 2, \dots, n$ -го порядку беруться $1, 2, \dots, n$ стовпчиків і рядків.

Сама таблиця складається за наступним правилом. На головній діагоналі виписуються послідовно, починаючи з a_1 , коефіцієнти характеристичного рівняння. Стовпчики таблиці, починаючи з головної діагоналі, заповнюються нагору зі зростаючими індексами, вниз – зі спадними; усі коефіцієнти з індексами нижче нуля і вище степеня рівняння n замінюються нулями.

Для рівняння високих степенів порядок визначників зростає, і практичне обчислення їх стає складним.

Для конкретних випадків, що часто зустрічаються на практиці, умови стійкості за Гурвіцем мають такий вигляд.

Рівняння першого і другого степеня. Як відомо, умовою від'ємності дійсних коренів у рівнянні першого порядку і від'ємності дійсних частин коренів рівняння другого порядку є вимога додатності всіх коефіцієнтів відповідного характеристичного рівняння. Тому що в цьому випадку значення коефіцієнтів можуть бути будь-якими додатними числами, то такі системи називаються абсолютно стійкими. Застосування критерію Гурвіца до таких рівнянь у край просто: треба, щоб

$$a_0 > 0; a_1 > 0 \text{ і } a_2 > 0. \quad (8.14)$$

Рівняння третього степеня. Його характеристичне рівняння:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Умови стійкості будуть:

$$a_0 > 0; \Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 > 0, \text{ звідкіля } a_3 > 0.$$

Остаточно отримуємо умови:

$$a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; \quad (8.15)$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Отже, для стійкості системи третього порядку необхідно і достатньо, щоб усі коефіцієнти характеристичного рівняння були додатні і щоб визначник другого порядку був додатним.

Рівняння четвертого степеня. Його характеристичне рівняння:

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

Умови стійкості будуть:

$$a_0 > 0; \Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 - a_1 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0.$$

З огляду на те, що для стійкості потрібно мати $\Delta_3 > 0$ і $\Delta_4 > 0$, отримаємо, що $a_4 > 0$; крім того, оскільки вираз $a_1 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix}$ при $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ і $a_4 > 0$ завжди додатний, отримаємо, що при $\Delta_3 > 0$ і $a_3 > 0$ значення Δ_2 буде завжди додатне.

Тоді остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_4 > 0; \\ \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Отже, для стійкості системи четвертого порядку необхідно і достатньо, щоб усі коефіцієнти характеристичного рівняння були додатні і щоб визначник третього порядку також був додатний.

З критерію Гурвіца випливає наслідок:

Для стійкості АСК необхідно, але не достатньо, щоб усі коефіцієнти рівняння (8.12) були більше нуля.

Відзначимо, що зі структури побудови останнього визначника Δ_n випливає, що він дорівнює

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (8.17)$$

Якщо прирівняти передостанній визначник нулеві за умови додатності всіх попередніх визначників, то отримаємо рівняння, що відповідає границі стійкості:

$$\Delta_{n-1} = 0. \quad (8.18)$$

Наприклад, для системи третього порядку границя стійкості буде визначатися умовою

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,$$

а для системи четвертого порядку умовою

$$\Delta_3 = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 = 0$$

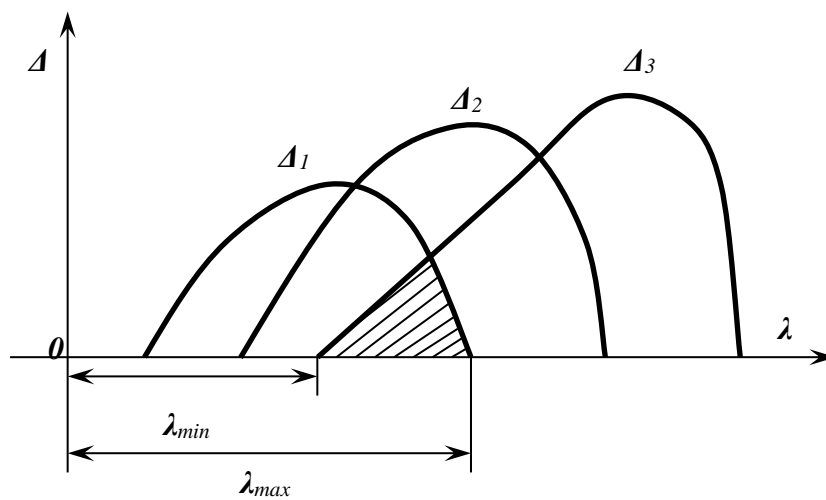
і т.д.

Для виконання такої задачі в прямокутній системі координат по осі абсцис відкладають чисельні значення того параметра, вплив якого на систему керування хочуть з'ясувати, а по осі ординат відкладають чисельні значення визначників Гурвіца, які виходять при відповідних змінних значеннях досліджуваного параметра. При цьому повинна зберігатися сталість значень

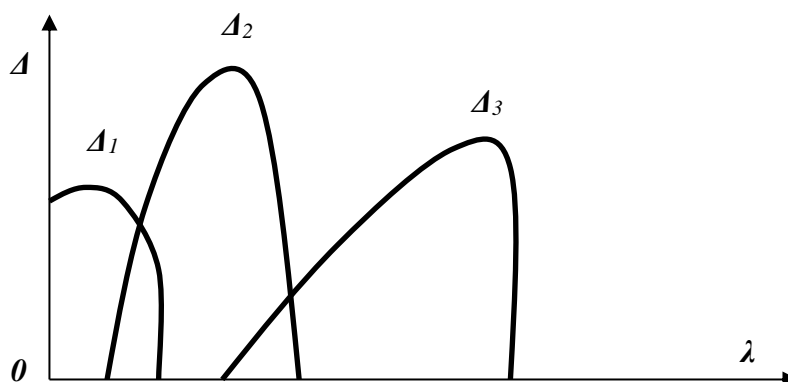
інших величин, що входять у структуру визначників. У результаті такої побудови виходить ряд кривих для визначників Гурвіца, число яких дорівнює порядкові характеристичного рівняння системи. Розташування цих кривих одна щодо іншої показує припустимі границі зміни досліджуваного параметра λ без порушення стійкості системи керування.

Приклад подібної побудови приведений на рис. 8.6. На рис. 8.6, *a* наведені припустимі межі зміни параметра λ , при яких система залишається стійкою, а на рис. 8.6, *б* наведено, що система нестійка при будь-яких значеннях λ .

Стійкою є тільки область, охоплена всіма побудованими кривими (наприклад, заштрихована площа на рис. 8.6, *a*).



a)



б)

Рисунок 8.6 – Криві визначників Гурвіца

8.5 Критерій Найквіста

Частотні критерії стійкості в даний час отримали широке визнання. Одним з них є критерій Найквіста, або, як його також називають, частотний амплітудно-фазовий критерій, який є наслідком відомої теореми Коші.

Амплітудно-фазовий критерій дає можливість судити про стійкість замкнутої системи за допомогою дослідження розімкнутої системи. Дослідження ж розімкнутої системи простіше, ніж замкнутої і, крім того, його можна робити також експериментально.

Керуючись формою і розташуванням на комплексній площині амплітудно-фазової характеристики розімкнутої системи, можна судити про динамічні властивості замкнутої системи.

Частотні критерії мають велику наочність у силу їх простої геометричної інтерпретації.

Існує декілька доведень справедливості даного критерію. Одне з розповсюджених доведень базується на принципі аргументу. Тут ми розглянемо коротке математичне обґрунтування критерію в наочній геометричній формі.

Припустимо, що рівняння розімкнутої системи керування має такий вигляд:

$$D(p)y = E(p)x, \quad (8.19)$$

де $D(p)$ і $E(p)$ – поліноми від p , причому передбачається, що степінь полінома $D(p)$ вище або в крайньому випадку дорівнює степені полінома $E(p)$, що в технічних задачах завжди має місце.

Характеристичне рівняння розімкнутої системи буде мати вигляд:

$$D(p) = 0. \quad (8.20)$$

Вважаючи, що в замкнутій системі при вільному русі $y = -x$, можемо написати рівняння замкнутої системи в наступному вигляді:

$$[D(p)+E(p)]x = 0. \quad (8.21)$$

Його характеристичне рівняння буде:

$$D(p)+E(p)=0. \quad (8.22)$$

Як відомо, для того щоб замкнута система була стійка, потрібно, щоб усі корені її характеристичного рівняння мали від'ємні дійсні частини або, інакше кажучи, лежали в лівій комплексній півплощині.

Розділивши ліву частину характеристичного рівняння (8.22) замкнутої системи на ліву частину характеристичного рівняння (8.20) тієї ж розімкнутої системи, отримаємо дрібно-раціональну функцію від p :

$$\frac{D(p)+E(p)}{D(p)} = W(p). \quad (8.23)$$

Корені знаменника функції (8.23) називають полюсами дрібно-раціональної функції. Корені чисельника функції (8.23) називають нулями дрібно-раціональної функції; їхнє розташування на комплексній площині нас і цікавить.

Позначимо корені чисельника через $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, а корені знаменника – через $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \dots, \bar{p}_n$; тоді вираз (8.23) можна переписати в наступному вигляді:

$$\frac{D(p)+E(p)}{D(p)} = 1 + \frac{E(p)}{D(p)} = 1 + W_{pc}(p) = \frac{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}{(p-\bar{p}_1)(p-\bar{p}_2)\dots(p-\bar{p}_n)}. \quad (8.24)$$

В силу наведеного вище про степені поліномів $D(p)$ і $E(p)$ число коренів поліномів чисельника і знаменника у виразі (8.24) дорівнює один одному. У площині коренів, що є площиною комплексної змінної, кожен корінь p_i рівняння може бути представлений вектором, проведеним з початку координат у точку (p_i) , обумовлену значенням кореня.

Якщо вибрати значення незалежної змінної p у будь-якій довільній точці комплексної площини, наприклад у точці A , то комплексне число виду $p - p_i$ може бути представлене у вигляді вектора, рівного різниці векторів p і p_i , як це наведено на рис. 8.7. Покладемо $p = j\omega$, тобто помістимо точку A на уявній осі. Тоді вектор $p - p_i$ буде мати початок у точці (p_i) , а свій кінець – на уявній осі в точці A .

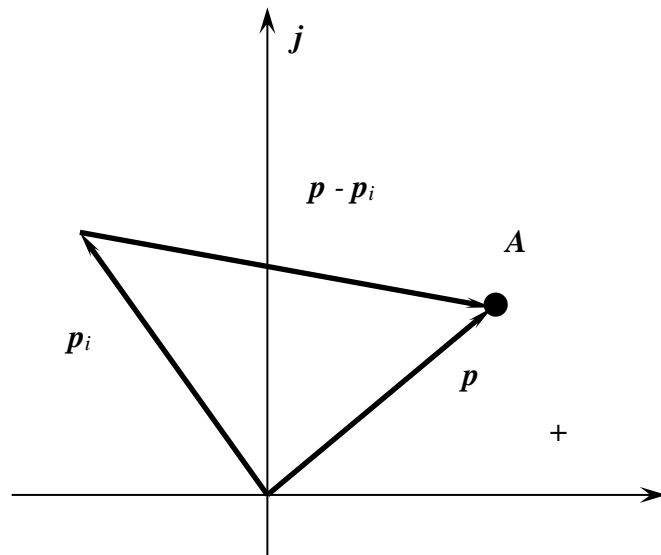


Рисунок 8.7 – Графічне представлення різниці векторів

Підставляючи $p = j\omega$ у вираз (8.24) маємо

$$W(j\omega) = 1 + \frac{E(j\omega)}{D(j\omega)} = 1 + W_{pc}(j\omega) = \frac{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n)}{(j\omega - \bar{p}_1)(j\omega - \bar{p}_2) \dots (j\omega - \bar{p}_n)}. \quad (8.25)$$

Вектори, що входять співмножниками у вираз (8.25), можна представити так, як це наведено на рис. 8.8.

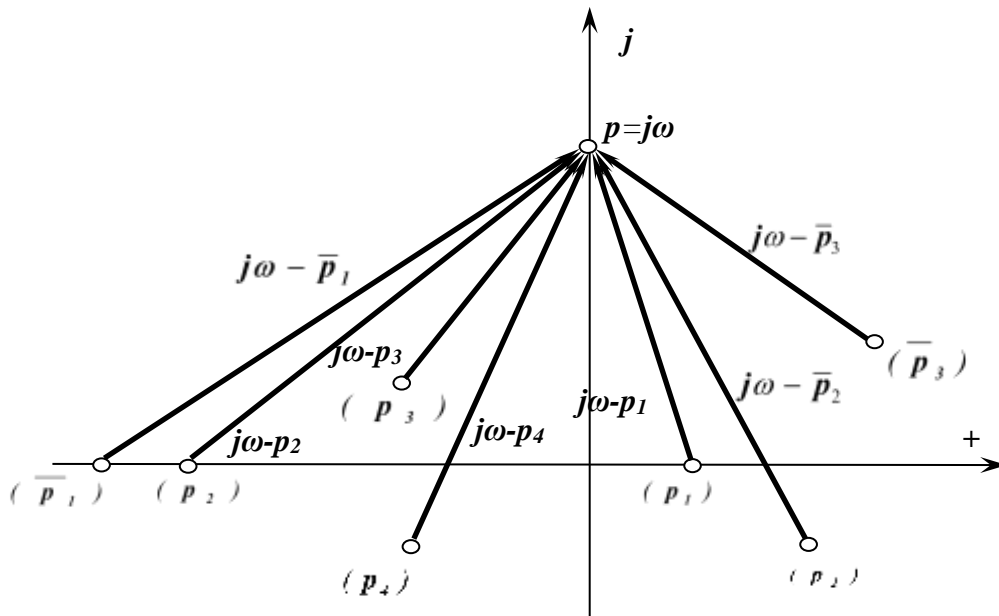


Рисунок 8.8 – Графічне представлення векторів співмножників виду $j\omega - p_i$

Якщо змінювати значення ω від $-\infty$ до $+\infty$, то кінець кожного вектора $j\omega - p_i$ буде ковзати по уявній осі і повернеться на півоберта, тобто на кут π ; поворот буде відбуватися проти годинникової стрілки, якщо корінь p_i лежить ліворуч від уявної осі, і по годинниковій стрілці, якщо корінь розташований праворуч від цієї осі.

Чисельник виразу (8.25) може бути представлений як сумарний вектор, модуль якого дорівнює добуткові абсолютних значень векторів співмножників чисельника, а кут повороту цього вектора, тобто його фаза, дорівнює сумі кутів поворотів тих же векторів співмножників. Точно так само у вигляді сумарного вектора може бути представлений і знаменник виразу (8.25). Його модуль і фаза будуть визначатися такими ж співвідношеннями, що мають місце і для чисельника.

Отже, вектор $W(j\omega)$ можна представити як частку від ділення двох векторів, тобто теж як вектор, модуль якого дорівнює частці від ділення модулів сумарних векторів чисельника і знаменника, а фаза – різниці сумарних фаз чисельника і знаменника.

Таким чином, повний кут повороту сумарного вектора $W(j\omega)$ при зміні частоти від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює різниці кутів повороту сумарних векторів чисельника і знаменника.

Нехай досліджувана система керування описується рівнянням n -го порядку.

Якщо аналізована замкнута система стійка, то всі n коренів чисельника у виразі (8.24), що представляє собою, як уже відзначалося вище, характеристичне рівняння замкнутої системи, повинні лежати ліворуч від уявної осі. Отже, сумарний кут повороту вектора чисельника стійкої замкнутої системи при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ буде дорівнює $+n\pi$.

Якщо ця ж система в розімкнутому стані також стійка, то всі корені знаменника, що представляє собою характеристичне рівняння розімкнутої системи, теж лежать ліворуч від уявної осі і сумарний кут повороту вектора знаменника при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ також дорівнює $+n\pi$.

Отже, сумарний кут повороту вектора $W(j\omega)$ для стійкої замкнутої системи при цих умовах дорівнює нулеві

$$n\pi - n\pi = 0. \quad (8.26)$$

Якщо ця ж система в розімкнутому стані нестійка і поліном знаменника має k коренів праворуч від уявної осі і $n-k$ коренів ліворуч від неї, то сумарний кут повороту вектора $W(j\omega)$ для стійкої замкнутої системи при цих умовах буде дорівнювати:

$$n\pi - (n-k)\pi + k\pi = 2k\pi. \quad (8.27)$$

Вираз $W_{pc}(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{D(j\omega)}$ називається АФХ розімкнутої системи.

Якщо задано АФХ розімкнутої системи $W_{pc}(j\omega)$ і відповідно до неї накреслена амплітудно-фазова характеристика (годограф), то очевидно, що вектор, початок якого знаходиться в точці $(-1, j0)$, а кінець лежить на характеристиці $W_{pc}(j\omega)$, дорівнює $W(j\omega) = 1 + W_{pc}(j\omega)$, тобто точка $(-1, j0)$ є початком векторів $W(j\omega) = 1 + W_{pc}(j\omega)$ (рис. 8.9).

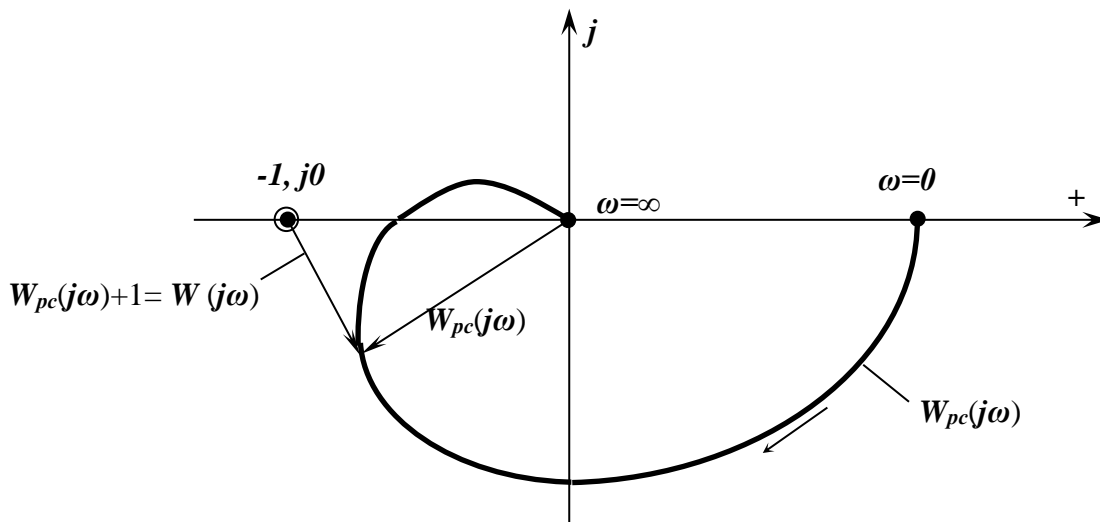


Рисунок 8.9 – Взаєморозташування векторів $W_{pc}(j\omega)$ і $W(j\omega)$

Вектор $W(j\omega)$ у стійкій замкнутій системі повинен при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ описати кут, рівний або нулеві, якщо повинна виконуватися умова (8.26), або $k\pi$, якщо виконується умова (8.27). Перше можливо тільки в тому випадку, якщо початок вектора $W(j\omega)$, тобто точка $(-1, j0)$, лежить поза кривою АФХ, по якій ковзає його кінець, а друге – тільки в тому випадку, якщо точка $(-1, j0)$

знаходиться всередині АФХ. Поєднуючи цей висновок з викладеними вище умовами (8.26) і (8.27), а також стійкістю системи в розімкнутому стані, можна сформулювати умови стійкості тієї ж системи в замкнутому стані.

Для того щоб замкнута система керування була стійка, потрібно, щоб дотримувалися умови:

1. Якщо система стійка в розімкнутому стані, то амплітудно-фазова характеристика системи $W_{pc}(j\omega)$, отримана при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$, не повинна охоплювати точку $(-1, j0)$.

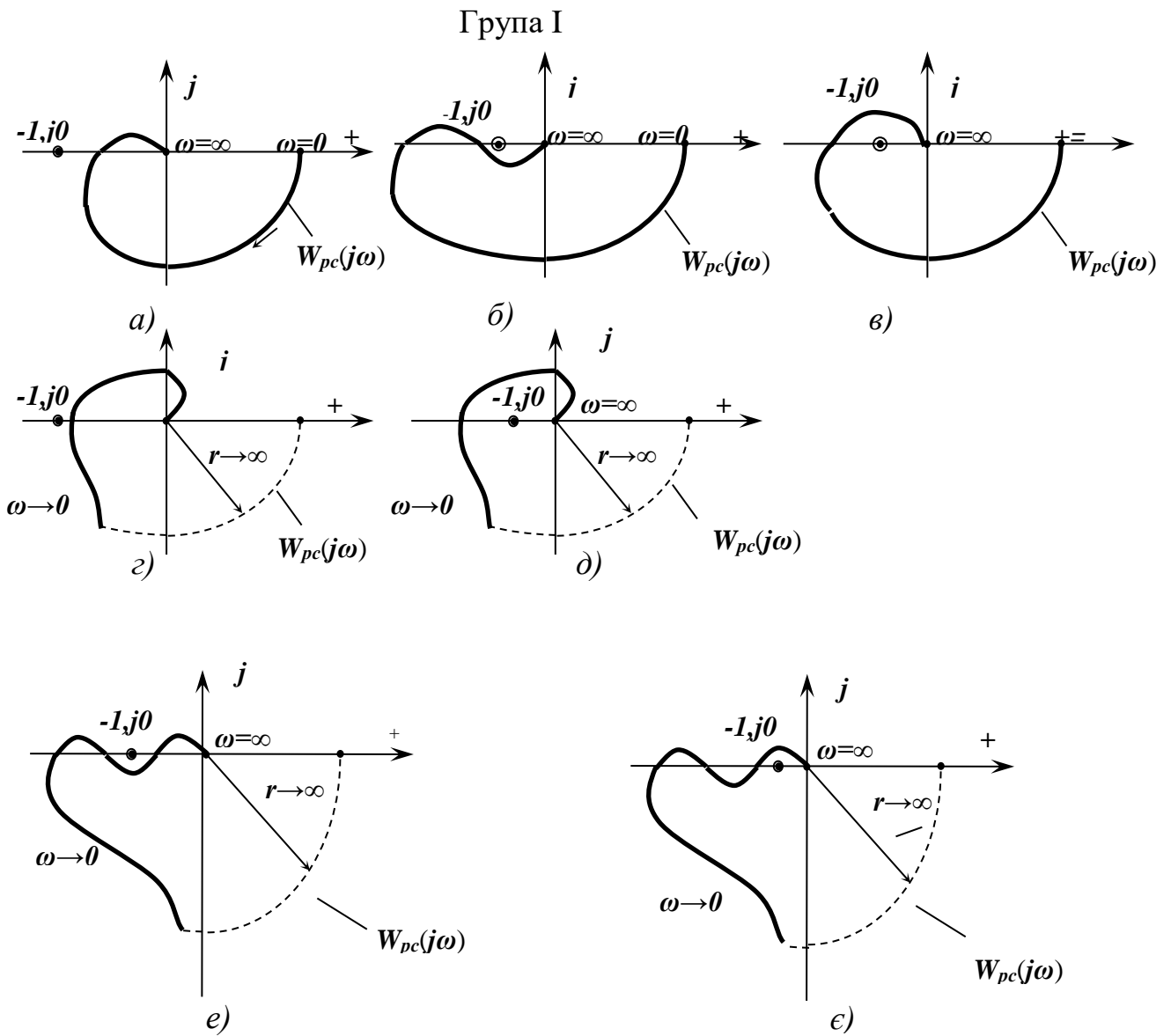
2. Якщо система нестійка в розімкнутому стані і має k коренів у правій півплощині, то амплітудно-фазова характеристика $W_{pc}(j\omega)$ при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ повинна охоплювати k раз точку з координатами $(-1, j0)$, тобто кут повороту вектора $W(j\omega)$ повинен дорівнювати $2\pi k$.

При від'ємному знаку в $W_{pc}(j\omega)$ зазначені вище положення визначаються точкою $(+1, j0)$.

Слід відмітити, що подібний критерій справедливий також і для випадку, коли поліном $D(p)$ має один нульовий корінь. У цьому випадку амплітудно-фазова характеристика, що йтиме при $\omega \rightarrow 0$ у нескінченність, доповнюється тут півколом нескінченно великого радіуса, яке проводиться в найкоротшому напрямку до додатної дійсної півосі, до перетинання з нею і розглядується як частина амплітудно-фазової характеристики.

Приклади деяких амплітудно-фазових характеристик для стійких і нестійких, статичних і астатичних розімкнутих систем приведені на рис. 8.10.

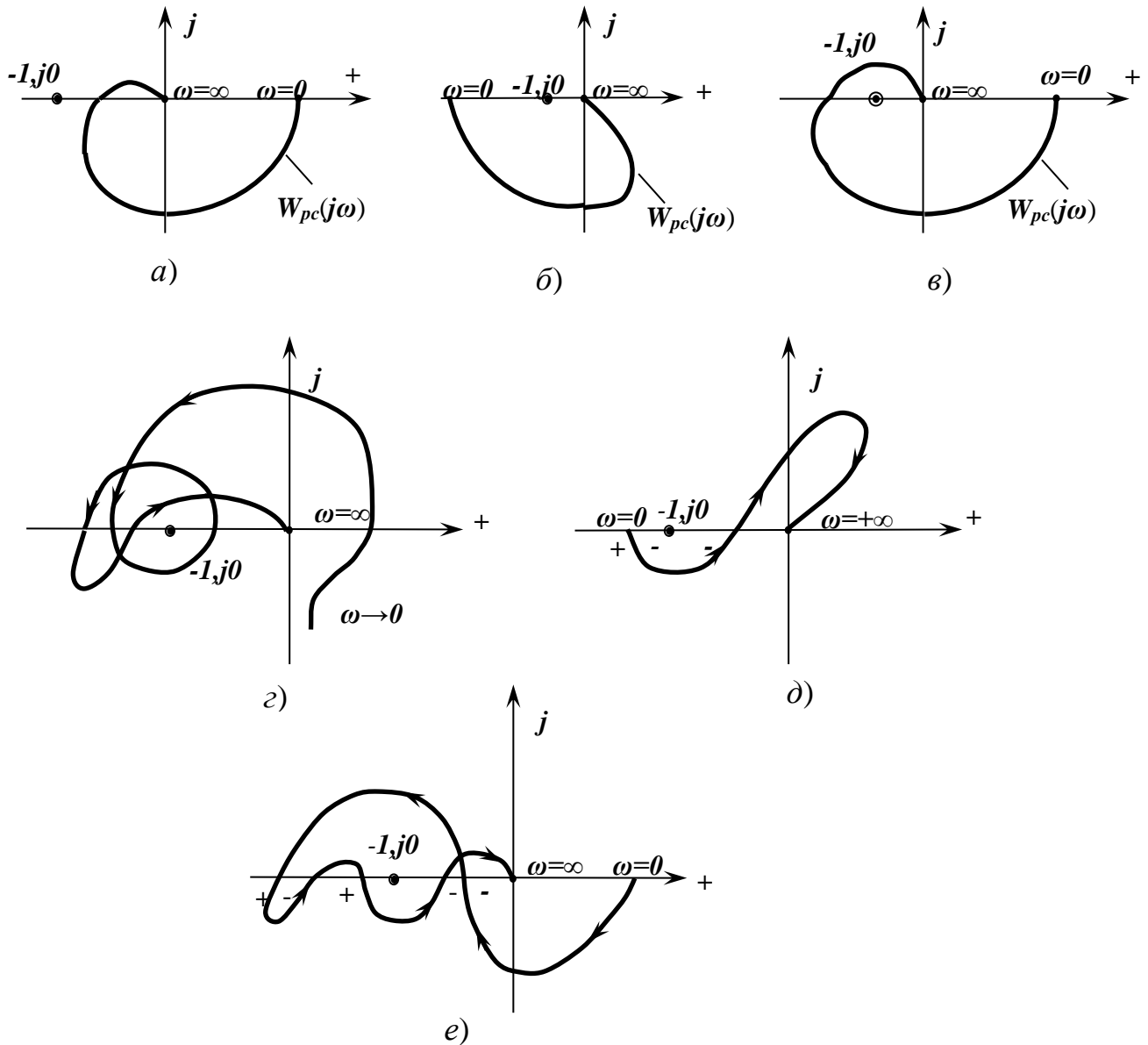
Для систем, стійких у розімкнутому стані, відповідні характеристики наведено на рис. 8.10, група I; для цих систем зазначено, які з них стійкі в замкнутому стані. Для систем, нестійких у розімкнутому стані, відповідні характеристики наведено на рис. 8.11 у групі II і зазначено, при якому числі правих коренів ці системи в кожному випадку стають стійкими.



a, б – статичні стійкі системи; *в* – статична нестійка система;
г, е – астатичні стійкі системи; *д, ж* – астатичні нестійкі системи.

Рисунок 8.10 – Амплітудно-фазові характеристики для стійких і нестійких статичних і астатичних систем: Група I – число коренів праворуч у розімкненому стані $k=0$.

Група II



a – при $k=0$ система стійка; при $k \neq 0$ система нестійка; *б* і *д* – при $k=1$ система стійка, при $k \neq 1$ система нестійка; *в*, *з* і *е* – при $k=2$ система стійка; при $k \neq 2$ система нестійка.

Рисунок 8.11 – Амплітудно-фазові характеристики для стійких і нестійких статичних і астатичних систем: Група II – число правих коренів у розімкненому стані k різне

На практиці зручніше користуватися трохи зміненим формулюванням розглянутого критерію стійкості, при якому можна не робити обчислень зміни фази амплітудно-фазової характеристики (АФХ). Зміна фази АФХ при зміні ω

від 0 до ∞ буде дорівнює нулю, якщо число переходів годографа $W_{pc}(j\omega)$ через відрізок від'ємної дійсної півосі, що лежить у межах $(-\infty, -1)$, буде парним.

Вважаючи перехід годографа $W_{pc}(j\omega)$ з нижньої півплощини у верхню при зростанні ω від'ємним, а зворотний перехід – додатним, можна сформулювати наступні умови стійкості: замкнута система керування буде стійка, якщо при зміні ω від 0 до $+\infty$ різниця між числами додатних і від'ємних переходів годографа АФХ розімкнутої системи через відрізок дійсної осі $(-\infty, -1)$ дорівнює $k/2$, де k – число правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи. При цьому вважається, що якщо АФХ розімкнутої системи при $\omega = 0$ починається на відрізку $(-\infty, -1)$, то це відповідає $+1/2$ або $-1/2$ перетинання відрізка залежно від того, нагору чи вниз від дійсної осі пройде АФХ при зростанні ω .

Ілюстрацією наведеного може служити представлена на рис. 8.11, б (група II) амплітудно-фазова характеристика системи, характеристичне рівняння якої в розімкнутому стані має один додатний корінь ($k=1$); ця система в замкнутому стані буде стійка.

На рис. 8.11, е (група II) наведено аналогічний приклад системи, яка має два додатних корені ($k=2$).

Розглянутий амплітудно-фазовий частотний критерій порівняно легко дозволяє у випадку нестійкості системи намітити шляхи її стабілізації.

Наприклад, якщо маємо нестійку астатичну систему керування і амплітудно-фазова характеристика $W_{pc}(j\omega)$ цієї системи в розімкнутому стані охоплює точку $(-1, j0)$, як це наведено на рис. 8.12.

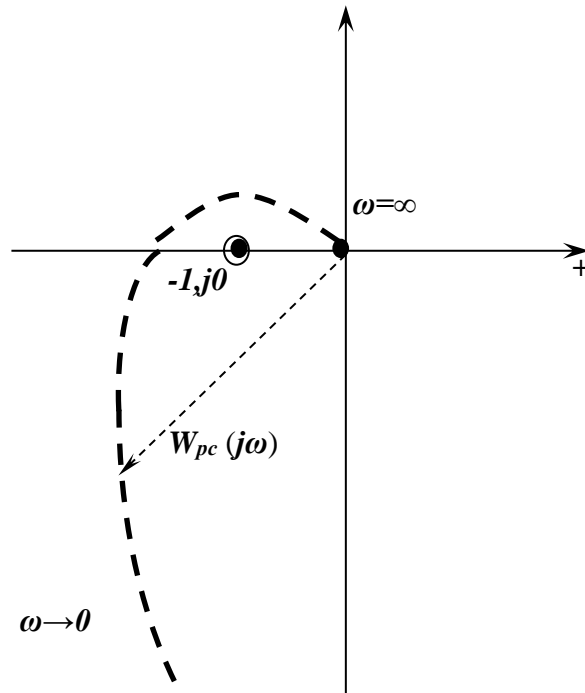


Рисунок 8.12 – Амплітудно-фазова характеристика нестійкої системи

У точці, яка обумовлена схемою і конструкцією системи, включимо послідовно з іншими ланками додаткову інерційну ланку, яка дає відставання по фазі. Для електричної системи схема такої ланки наведена на рис. 8.13, а; а її амплітудно-фазова характеристика – на рис. 8.13, б.

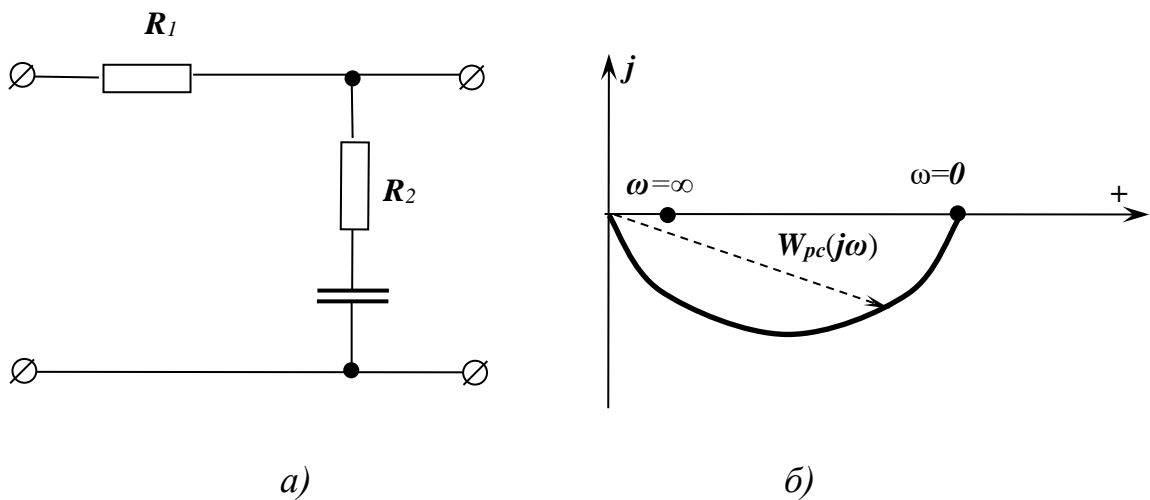


Рисунок 8.13 – Інерційна стабілізуюча ланка і її амплітудно-фазова характеристика

Знайдемо сумарну амплітудно-фазову характеристику розімкненої системи з наявністю додаткової ланки (рис. 8.14). Для цього виконаємо при однакових частотах перемножування модулів векторів і додавання фаз характеристики нестійкої системи *1* і характеристики додаткової ланки *2* (наведені пунктирними лініями). У результаті отримаєм нову сумарну амплітудно-фазову характеристику системи *3* (наведена жирною лінією), що не охоплює точки $(-1, j0)$. Параметри додаткової ланки повинні бути при цьому обрані, так, щоб вони давали при відповідних частотах достатнє відхилення характеристики від точки $(-1, j0)$.

Таким чином можна стабілізувати систему.

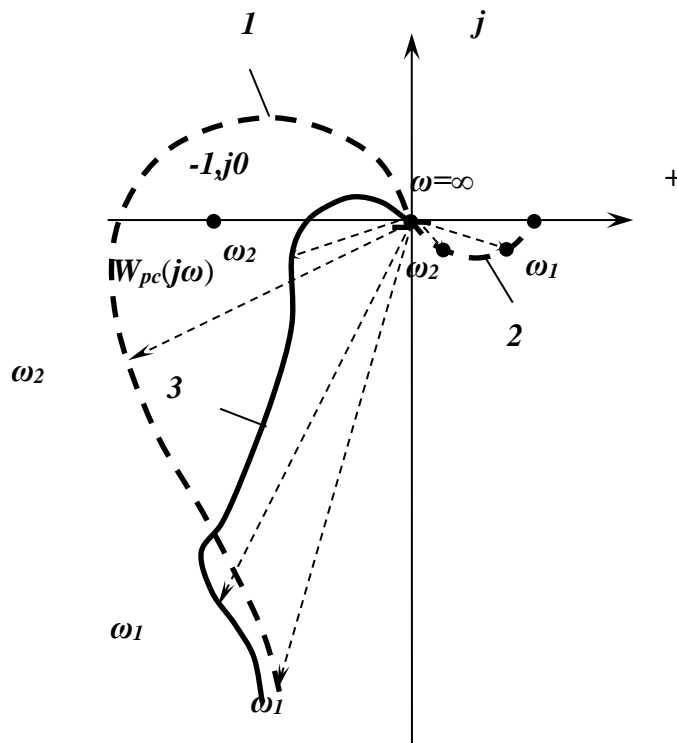


Рисунок 8.14 – Амплітудно-фазова характеристика стабілізованої системи

Досить ефективно можуть впливати на перехідний процес системи також і диференційні ланки, які дають випередження по фазі. Схема однієї з таких ланок для електричної системи приведена на рис. 8.15, а; а її амплітудно-фазова характеристика – на рис. 8.15, б.

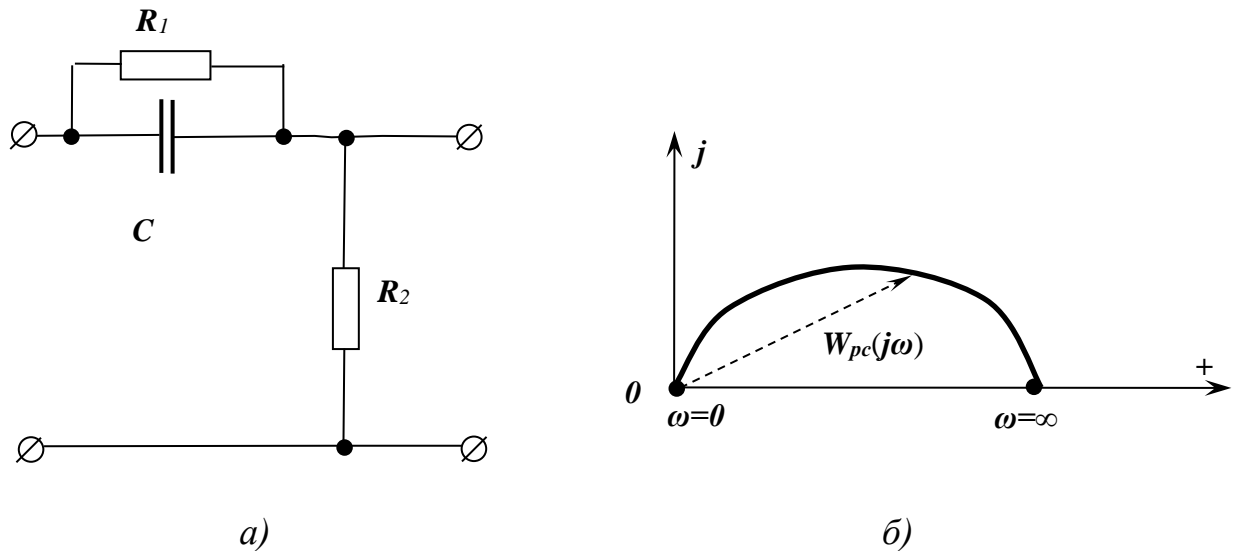


Рисунок 8.15 – Схема стабілізуючої диференційної ланки і її амплітудно-фазова характеристика

Якщо система була нестійка і мала амплітудно-фазову характеристику $W_{pc}(j\omega)$, яка охоплює точку $(-1, j0)$, що наведена на рис. 8.15 пунктирною кривою 1, то включення диференційної ланки з амплітудно-фазовою характеристикою, яка наведена пунктирною кривою 2, послідовно з іншими ланками системи дає сумарну амплітудно-фазову характеристику 3, що наведена на рис. 8.16 суцільною кривою лінією. Нова крива вже не охоплює точку $(-1, j0)$.

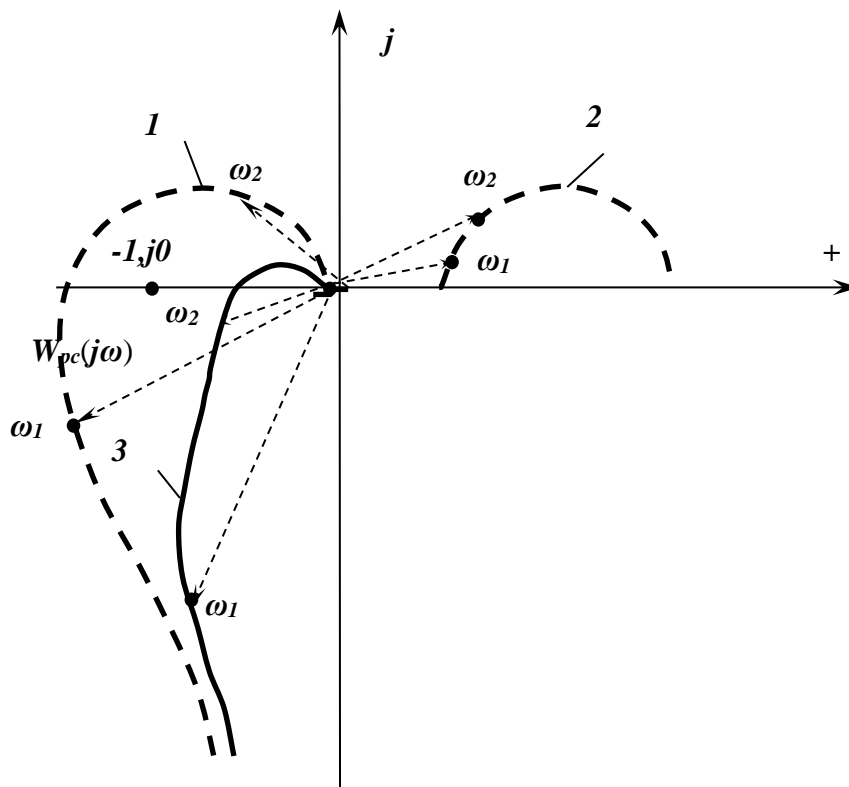


Рисунок 8.16 – Амплітудно-фазова характеристика стабілізованої системи

8.6 Критерій Михайлова

Даний критерій заснований на розгляді кривої, обумовленої характеристичним рівнянням замкнутої системи і є дуже наочним.

Для цього критерію наведемо доведення, яке аналогічне вказаному вище для критерію Найквіста.

Розглянемо алгебраїчний багаточлен степеня n , що відповідає характеристичному рівнянню замкнутої системи керування:

$$F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (8.28)$$

Цей багаточлен можна представити в наступному вигляді (якщо рівняння (8.28) приведено до виду, де $a_0=1$):

$$F(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (8.29)$$

де p_1, p_2, \dots, p_n – корені рівняння (8.28).

Відомо, що на комплексній площині коренів кожному кореню рівняння (8.28) відповідає своя визначена точка. Кожен корінь рівняння (8.28) може бути геометрично зображений вектором.

Підставивши в (8.29) замість p величину $j\omega$, отримаємо:

$$F(j\omega) = (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (8.30)$$

Кожен множник $(j\omega - p_k)$ може бути геометрично зображений на комплексній площині також у вигляді вектора, початок якого знаходиться в точці, що визначає корінь p_k , а кінець лежить на уявній осі для лівих коренів, і у вигляді вектора $(j\omega - p_i)$ для правих коренів (рис. 8.16). Отже, $F(j\omega)$ можна представити сумарним вектором, який дорівнює добуткові елементарних векторів $(j\omega - p_i)$.

Модуль сумарного вектора буде дорівнювати добуткові модулів окремих векторів, а фаза його буде дорівнювати сумі фаз цих векторів.

При зміні частоти кінець кожного вектора буде переміщуватись уздовж уявної осі. При зміні ω від мінус нескінченності до плюс нескінченності кожен складовий вектор, початок якого лежить на дійсній осі, повернеться на кут, рівний $+\pi$, якщо його початок лежить у лівій півплощині, і рівний $-\pi$, якщо його початок лежить у правій півплощині (за додатний напрямок приймається рух проти годинникової стрілки), а кожна пара комплексних коренів – відповідно на кут $+2\pi$ або -2π . Це положення ілюструється на рис. 8.17.

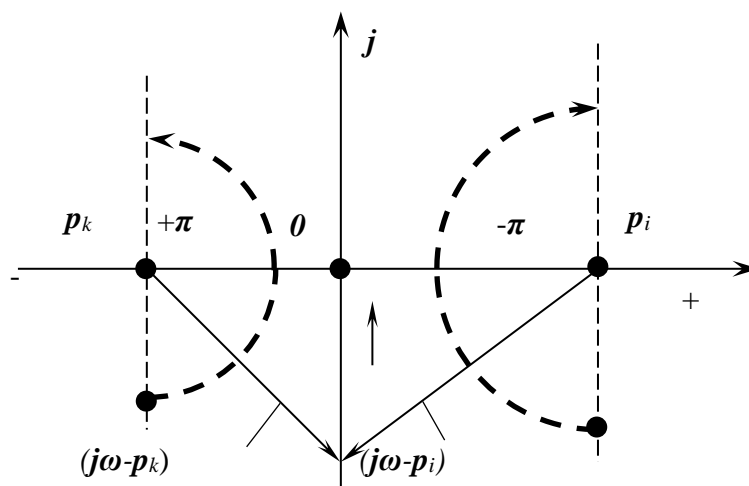


Рисунок 8.17 – Розташування векторів $j\omega - p_k$ і описувані ними кути поворотів

Якщо характеристичне рівняння n -го порядку має m коренів у правій півплощині, то в лівій півплощині число цих коренів буде $n - m$.

При зміні ω від мінус нескінченності до плюс нескінченності сумарний вектор $F(j\omega)$ повернеться на кут

$$-m\pi + (n - m)\pi = (n - 2m)\pi. \quad (8.31)$$

Для стійкості замкнутої системи керування необхідно і достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння (8.28) лежали в лівій півплощині, тобто щоб $m = 0$.

Таким чином, якщо вектор $F(j\omega)$, що характеризує замкнуту систему керування, при зміні ω від мінус до плюс нескінченності описує в додатному напрямку (не змінюючи напрямку) кут, рівний $n\pi$ (де n – степінь характеристичного рівняння), то така система керування буде стійкою. В протилежному випадку вона буде нестійка.

В силу симетричності кривої, яка описується кінцем вектора $F(j\omega)$, можна обмежитися розглядом лише її частини, що відповідає додатним значенням частоти. При цьому кут, який описується вектором $F(j\omega)$ при зміні частоти від нуля до плюс нескінченності, зменшиться вдвічі. Можливі криві $F(j\omega)$ (годографи) для цього випадку приведені на рис. 8.18.

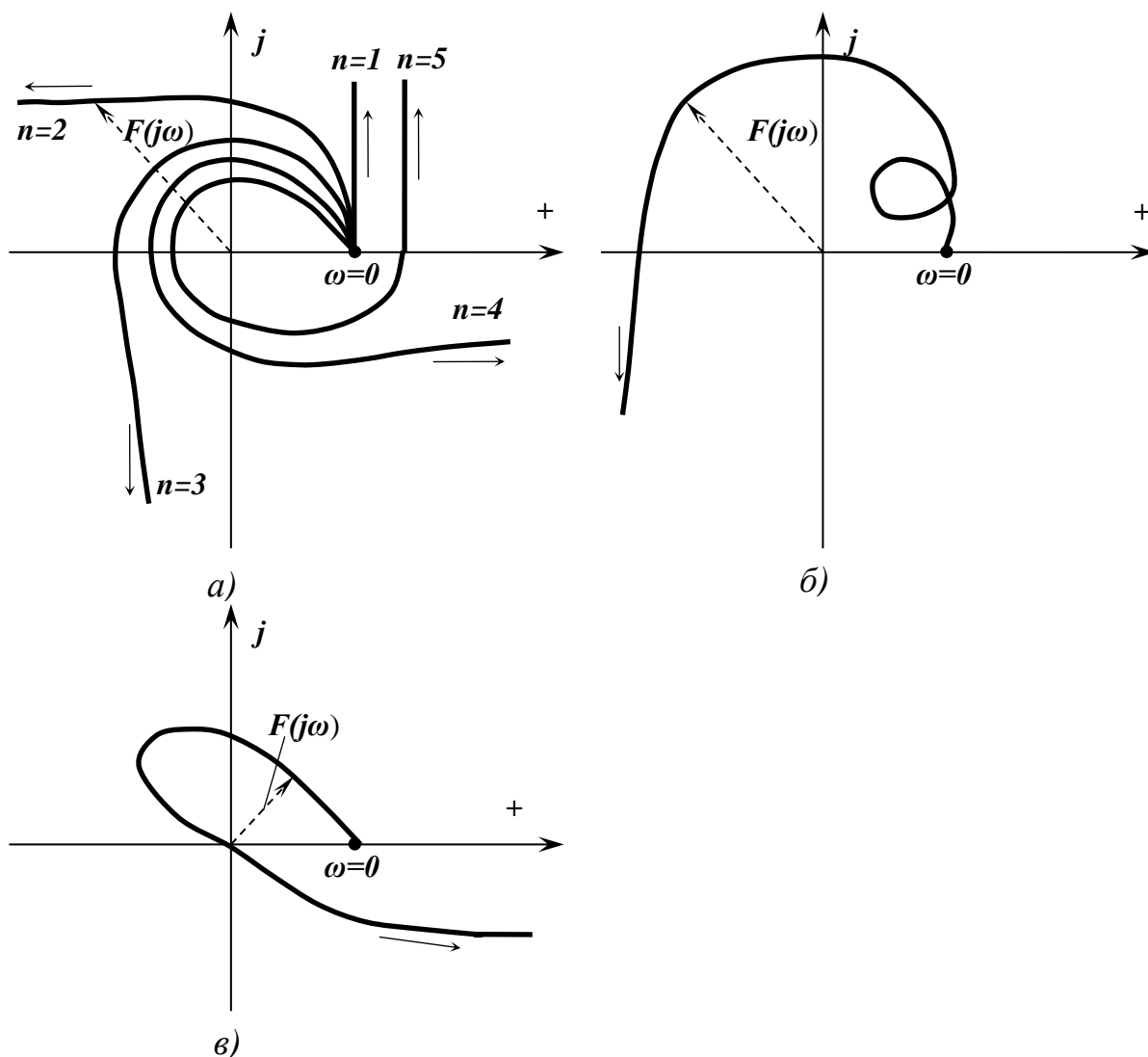


Рисунок 8.18 – Вид годографів $F(j\omega)$ замкнутої системи для стійкої, нестійкої і нейтральної систем

Рис. 8.18, *а* показує годографи стійкої системи, де для рівнянь n -го порядку крива, що окреслена вектором $F(j\omega)$, проходить без пропусків послідовно n квадрантів справа ліворуч; на рис. 8.18, *б* приведена крива, накреслена вектором $F(j\omega)$ для нестійкої системи керування; на рис. 8.18, *в* приведена крива, що проходить через початок координат $F(j\omega)$ для системи, що знаходиться на границі стійкості.

Якщо дійсний кут повороту вектора $F(j\omega)$, дорівнює $l\pi$, де $l < n$, то система буде нестійка.

Число коренів m характеристичного рівняння, які лежать праворуч, можна знайти з наступного рівняння:

$$l\pi = (n-2m)\pi \quad (8.32)$$

або

$$m = \frac{n-l}{2}. \quad (8.33)$$

На підставі розглянутих положень можна встановити наслідок із приведенного критерію стійкості.

Заміняючи в рівнянні (8.28) p на $j\omega$, отримаємо:

$$F(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n = 0. \quad (8.34)$$

Виділяючи в рівнянні (8.34) дійсну частину (сума доданків, які мають ω у парних степенях) і прирівнюючи її нулю, отримаємо парну функцію ω , що дорівнює

$$\varphi(\omega) = 0. \quad (8.35)$$

Виділяючи уявну частину рівняння (8.35) (сума доданків, що мають ω у непарних степенях) і прирівнюючи її нулю, отримуємо непарну функцію ω , що дорівнює

$$\psi(\omega) = 0. \quad (8.36)$$

Очевидно, що

$$F(j\omega) = \varphi(\omega) + j\psi(\omega). \quad (8.37)$$

В міру обертання вектора $F(j\omega)$ при зміні ω дійсна і уявна осі будуть у стійкій системі по черзі перетинатися кривою, яку кінець вектора буде описувати на комплексній площині. Кожному перетину дійсної осі, очевидно, буде відповідати корінь полінома $\psi(\omega)$, а кожному перетину уявної осі – корінь полінома $\varphi(\omega)$. Звідси випливає, що корені поліномів $\varphi(\omega)$ та $\psi(\omega)$ для стійкої системи повинні чергуватися за величиною і бути дійсними. Сума чисел коренів поліномів $\varphi(\omega)$ і $\psi(\omega)$ повинні дорівнювати порядку рівняння.

З умов чередування коренів у стійкій системі також випливає, що для стійкості необхідно і достатньо, щоб корені рівняння $\varphi(\omega) = 0$ при зміні ω від нуля до нескінченності були дійсними. Значення функції $\psi(\omega)$ для всіх коренів

рівняння $\varphi(\omega)=0$ повинні бути відмінні від нуля і додатні для тих коренів, для яких похідна $d[\varphi(\omega)]/d\omega$ від'ємна, і від'ємні для тих коренів, для яких похідна $d[\varphi(\omega)]/d\omega$ додатна.

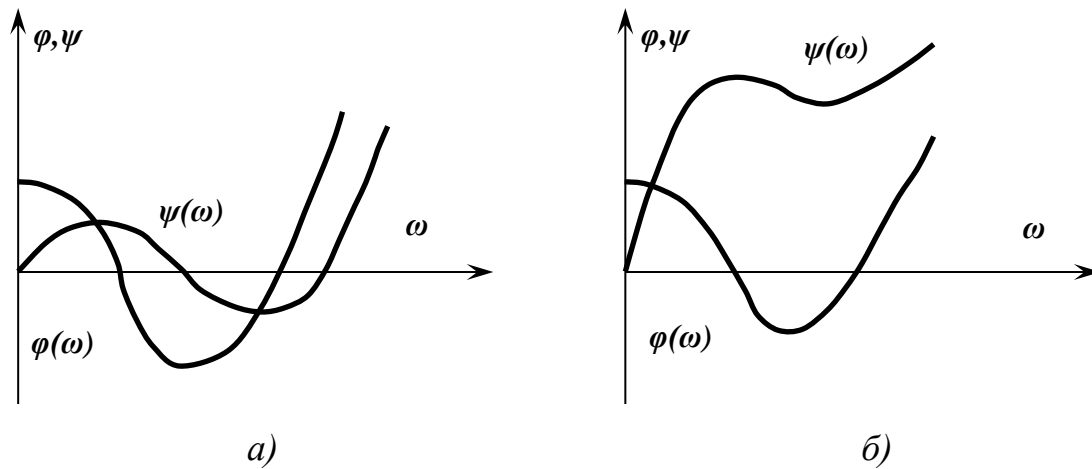


Рисунок 8.19 – Дійсна $\varphi(\omega)$ і уявна $\psi(\omega)$ криві для стійкої (а) і нестійкої (б) систем

На рис. 8.19, а приведені криві $\varphi(\omega)$ і $\psi(\omega)$ для стійкої системи, а на рис. 8.18, б – ті ж криві для нестійкої системи.

8.7 Логарифмічний критерій стійкості

Амплітудно-фазовий частотний критерій стійкості Найквіста легко може бути інтерпретований у логарифмічній формі. Відповідним точкам і значенням амплітудно-фазової частотної характеристики, очевидно, будуть відповідати цілком визначені точки і значення логарифмічних амплітудних і фазової частотних характеристик. Так, точкам перетину кривої $W_{pc}(j\omega)$ з відрізком $(-1 \div -\infty)$ від'ємної дійсної півосі будуть відповідати фази $\Theta(\omega) = -\pi, -3\pi, -5\pi$ і т.д., а також значення амплітуди в логарифмічному масштабі $L(\omega) > 0$. Приймається, що коли логарифмічна фазова характеристика при додатних значеннях $L(\omega)$ перетинає при зростанні частоти фазове значення, що дорівнює -180° (тобто $-\pi$), знизу вгору, то це є додатним переходом, а зверху вниз – від'ємним переходом.

Амплітудно-фазові характеристики для трьох систем (стійких у розімкнутому стані) наведені на рис. 8.20, *а* і *в*. Одна з цих систем, що нестійка в замкнутому стані, має характеристику **2**.

Для всіх трьох систем побудовані відповідні логарифмічні амплітудні і фазові частотні характеристики (рис. 8.20, *б* та *г*).

Для наочності передбачається, що фазова характеристика $\Theta(\omega)$, приведена на рис. 8.20, *б*, загальна для обох амплітудних характеристик $L_1(\omega)$ і $L_2(\omega)$. Для систем звичайного (не дзобоподібного) виду амплітудно-фазова характеристика, приведена на рис. 8.20, *а*, при зміні ω від 0 до ∞ перетинає від'ємну дійсну піввісь тільки один раз при частоті ω_1 , де $\Theta(\omega) = -\pi$. Цим точкам відповідає на ЛАЧХ (рис. 8.20, *б*) точка *M* перетину фазової кривої $\Theta(\omega)$ з лінією $\Theta = -\pi = -180^\circ$. З рис. 8.20, *а* видно, що амплітуда вектора $W_{pc}(j\omega)$ стає рівною одиниці при перетині амплітудно-фазової характеристики з колом одиничного радіуса, що проходить через точку $(-1, j0)$ і точці, що має центр у точці 0 ; цій точці перетину відповідає частота, позначена на рис. 8.20, *а* і *б* через ω_3 . Позначення ω_{31} і ω_{32} відносяться відповідно до характеристик **1** і **2**. На ЛАЧХ (рис. 8.20, *б*) цим частотам відповідають частоти ω_{31} і ω_{32} . Частоти, при яких відбувається перетин характеристик, $L_1(\omega)$ і $L_2(\omega)$ з віссю абсцис називаються **частотами зрізу** і позначаються ω_3 .

Відповідно до критерію стійкості Найквіста замкнута система буде стійка при розглянутих формах амплітудно-фазових характеристик, якщо точка з частотою ω_1 (рис. 8.19, *а*) буде лежати правіше точки $(-1, j0)$. Відстань між цими точками характеризує **запас стійкості по амплітуді**.

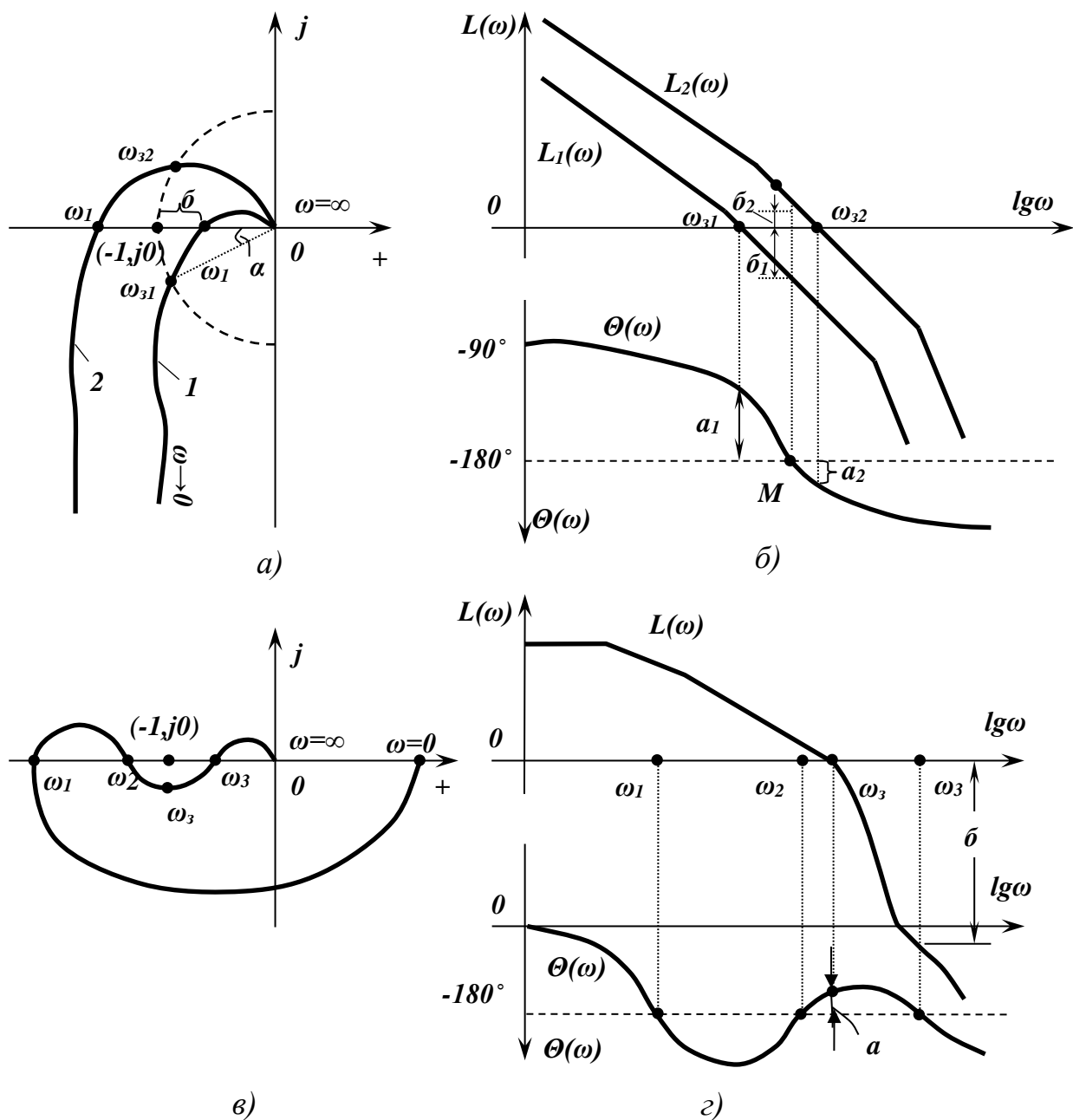


Рисунок 8.20 – Звичайні і логарифмічні частотні характеристики системи

З рис. 8.20, а видно, що якщо замкнута система стійка, то $\omega_{31} < \omega_1$, а якщо вона нестійка, то $\omega_{32} > \omega_1$. Це означає, що для системи (стійкої в замкнутому стані) точка ЛФЧХ, обумовлена фазою -180° , повинна відповідати області від'ємних значень $L(\omega)$. Величина від'ємної ординати $L(\omega)$ β_1 (рис. 8.20, б) являє собою запас стійкості по амплітуді. Величина a_1 (рис. 8.19, б) ординати ЛФЧХ, що відповідає точці ω_{31} на ЛАЧХ, характеризує запас стійкості по фазі (кут α на

рис. 8.20, а). Додатна ордината \bar{b}_2 на рис. 8.20, б свідчить про нестійкість замкнутої системи.

Для дзобоподібної АФХ (рис. 8.20, в) число точок перетину від'ємної дійсної півосі при зміні ω від 0 до ∞ більше однієї (при частотах $\omega_1, \omega_2, \omega_3$). У цьому випадку для системи, стійкої в замкнутому стані, число таких точок, що лежать лівіше точки $(-1, j0)$ повинно бути парним. Оскільки кожна така точка відповідає $\Theta = -180^\circ$, умовою стійкості замкнутої системи при дзобоподібних АФХ буде наявність парного числа перетинів логарифмічної фазової частотної характеристики $\Theta(\omega)$ із прямою, що відповідає $\Theta = -180^\circ$ в області додатних ординат $L(\omega)$, тобто ті, що лежать лівіше частоти зрізу ω_3 (точки перетину $L(\omega)$ з віссю абсцис, рис. 8.20, з). Запас стійкості замкнутої системи по амплітуді і по фазі стосовно до рис. 8.19, з представляє складнішу картину, він може характеризуватися декількома величинами. Зокрема, він може бути представлений відповідно у вигляді відрізків – для амплітуди відрізок \bar{b} , а для фази – відрізок a (однак тут можна відзначити також запас по амплітуді при частотах ω_1 і ω_2).

Так само згідно зі сформульованими раніше при розгляді критерію Найквіста умовами про число і вид перетинів відрізка $(-\infty; -1)$ дійсної осі з годографом АФХ можна знайти логарифмічний критерій стійкості для замкнутих АСК, нестійких у розімкнутому стані: подібні системи стійкі, якщо різниця чисел додатних і від'ємних переходів логарифмічного фазового частотного і від'ємного переходів логарифмічної фазової частотної характеристики $\Theta(\omega)$ через значення $\Theta = -180^\circ$, що лежать в області додатних $L(\omega)$, дорівнює $k/2$ при зміні ω від 0 до ∞ . Тут k – число додатних коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи.

При підрахунку числа перетинів варто вважати $1/2$ перетину, якщо АФХ має при $\omega = 0$ точку, що лежить на відрізку $(-\infty, -1, j0)$ дійсної осі. У цьому випадку при $\omega = 0$ ЛАЧХ перетинає пряму, що відповідає $\Theta = -180^\circ$, а значення $L(0)$ – додатне.

8.8 Стійкість систем керування з запізнюванням

Якщо в структурі системи керування є пристрій, що може бути виражений через ланку запізнювання, включену послідовно з основним ланцюгом системи, то схема такої системи може бути представлена у вигляді двох частин: перша складається з усіх ланок системи без запізнювання і друга – окремо ланка запізнювання. Така схема приведена на рис. 8.21.

Передавальна функція системи в цьому випадку може бути записана так:

$$W_{\tau}(p) = W(p)e^{-p\tau}. \quad (8.38)$$

З цього виразу випливає, що амплітудно-фазова характеристика системи з запізнюванням $W_{\tau}(p)$ може бути отримана шляхом побудови амплітудно-фазової характеристики $W(j\omega)$ системи без запізнювання, кожен вектор якої потім без зміни модуля повернуто на кут $\tau\omega$. Очевидно, що при зростанні ω цей кут буде швидко рости, а тому що при великих значеннях ω модуль має мале значення, то амплітудно-фазова характеристика з запізнюванням закручується навколо початку координат. Така побудова амплітудно-фазових характеристик приведена на рис. 8.21.

Критерій стійкості Найквіста для систем із запізнюванням аналогічний критерієві для звичайних систем. Таким чином, якщо система без запізнювання стійка в розімкнутому стані, то для того, щоб система з запізнюванням у замкнутому стані була стійка, потрібно, щоб характеристика $W_{\tau}(j\omega)$ не охоплювала точку $(-1, j0)$.

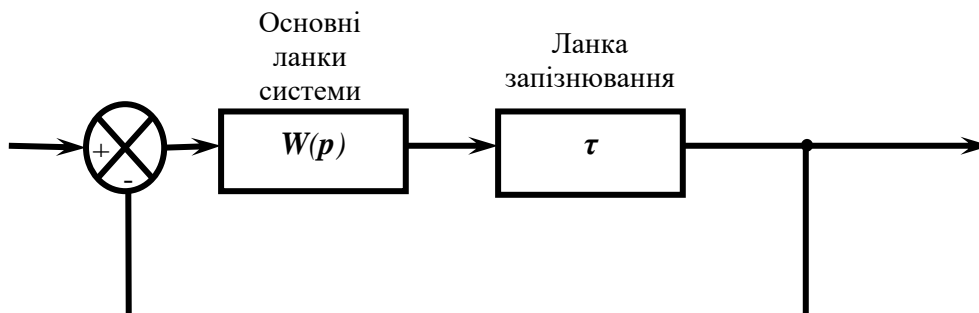


Рисунок 8.21 – Схема системи з запізнюванням

Для визначення граничного припустимого значення часу запізнювання, при якому система буде стійка, можна побудувати вихідну амплітудно-фазову характеристику без запізнювання і, змінюючи її в залежності від різних значень τ , знайти те значення часу запізнювання, при якому характеристика буде проходити через точку $(-1, j0)$. Очевидно, припустимий час запізнювання повинен бути меншим того, при якому амплітудно-фазова характеристика проходить через точку $(-1, j0)$.

Значення припустимого часу запізнювання можна також визначити виходячи з наступних співвідношень. При проходженні амплітудно-фазової характеристики через точку $(-1, j0)$ при наявності запізнювання τ_0 маємо:

$$|W_\tau(j\omega_0)| = |W(j\omega_0)e^{-j\tau_0\omega_0}| = 1. \quad (8.39)$$

З умови (8.39) можемо написати для амплітуд і фаз векторів $W_\tau(j\omega_0)$:

$$\begin{aligned} A_\tau(\omega_0) &= A(\omega_0) = 1; \\ \Theta_\tau(\omega_0) &= -\Theta(\omega_0) - \omega_0\tau_0 = -\pi(2m+1), \end{aligned} \quad (8.40)$$

де ω_0 – частота, при якій $A(\omega_0) = 1$;

τ_0 – граничний час запізнювання;

$m = 0, 1, 2, 3, \dots$

З умови (8.40) можна знайти:

$$\tau_0 = \frac{\pi - \theta(\omega_0)}{\omega_0} + \frac{2m\pi}{\omega_0} = \frac{\gamma}{\omega_0} + \frac{2m\pi}{\omega_0}, \quad (8.41)$$

де γ – кут між вектором $W(j\omega)$ і від'ємним відрізком дійсної осі.

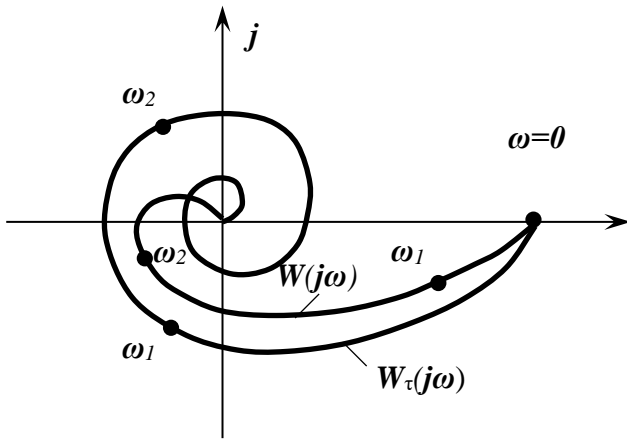


Рисунок 8.22 – Амплітудно-фазова характеристика системи з запізнюванням

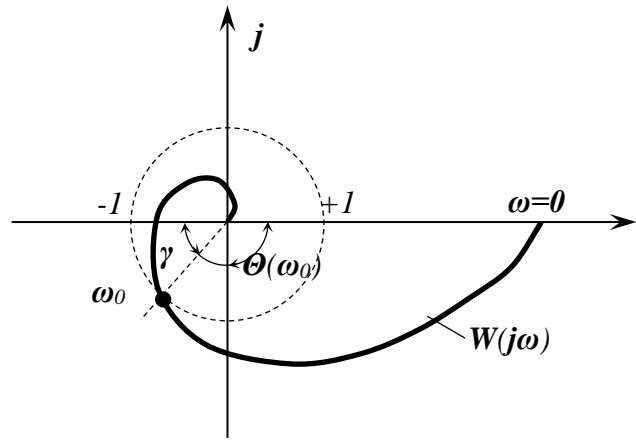


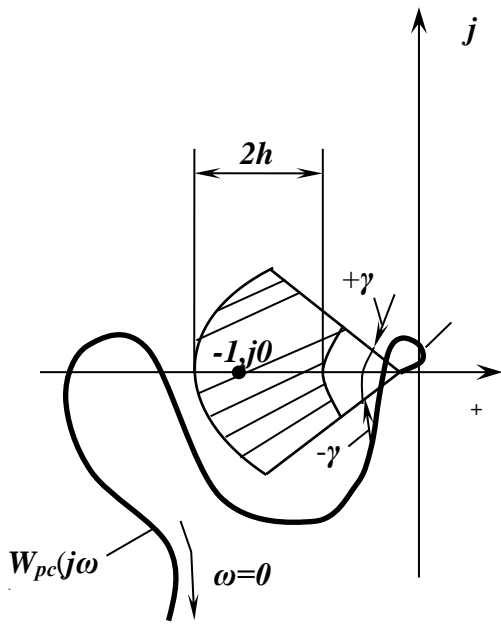
Рисунок 8.23 – Графічне визначення допустимого часу запізнювання

Припустиме значення τ_0 можна просто знайти з графічної побудови. Для цього будується амплітудно-фазова характеристика (рис. 8.23) і потім проводиться коло одиничного радіуса. Точка перетину кола й амплітудно-фазової характеристики дозволяє знайти значення γ і ω_0 , а по їхніх значеннях визначити припустиме τ_0 .

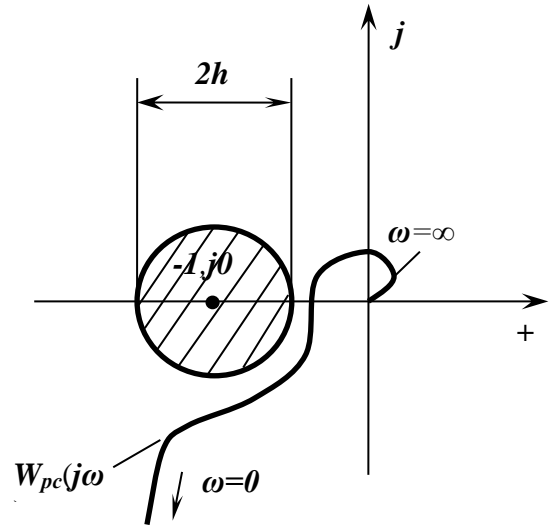
8.9 Поняття про запас стійкості

Поняття запасу стійкості можна встановити з розгляду будь-якого критерію стійкості.

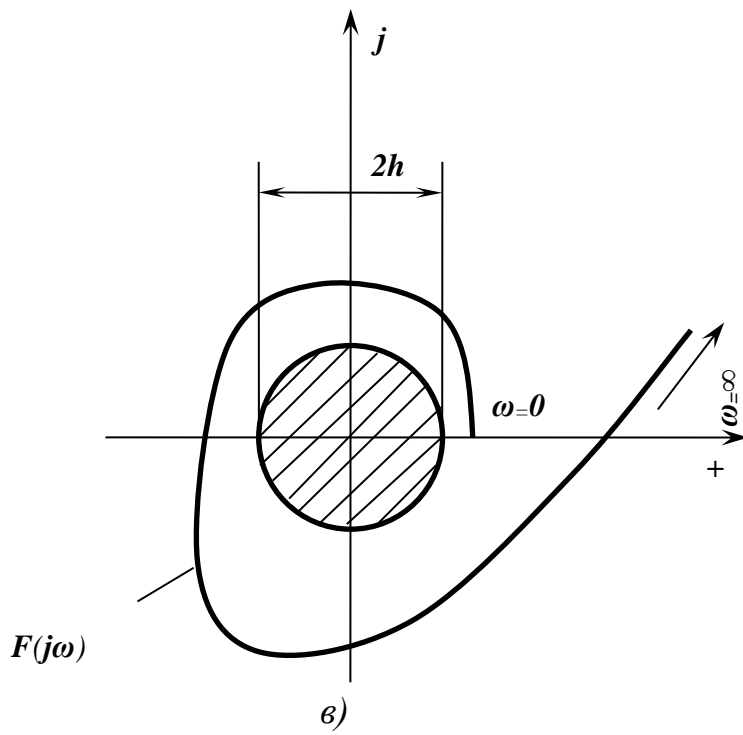
Це положення ілюструється рис. 8.24, а – г.



a)



б)



в)

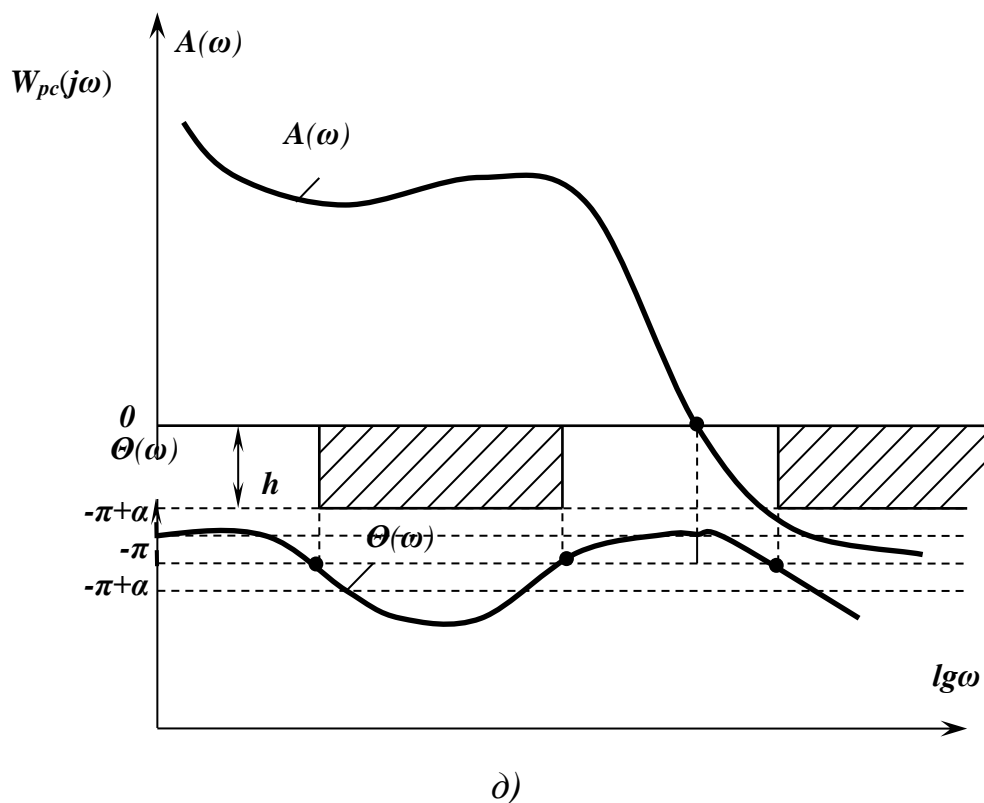
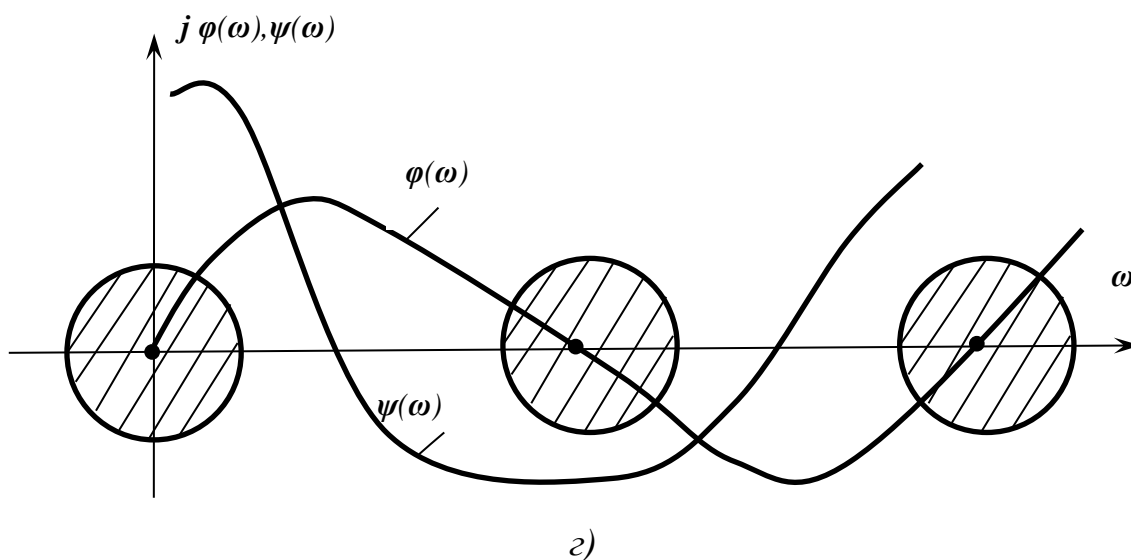


Рисунок 8.24 – Графічне зображення різних видів запасів стійкості

Так, наприклад, якщо навіть амплітудно-фазова характеристика і не охоплює «небезпечну» точку $(-1, j0)$, але при $\Theta = -180^\circ$ її амплітуда несуттєво відрізняється від одиниці, така теоретично стійка система може виявитися практично нестійкою, тому що можуть мати місце неточності при складанні рівнянь системи або під час роботи системи можуть виникнути непередбачені відхилення параметрів системи від розрахункових, котрі приведуть до такої

зміни вигляду амплітудно-фазової характеристики, що спричинить за собою нестійкість системи. Тому виявляється доцільним ввести поняття про запас стійкості. Визначають запас стійкості, виходячи з різних ознак. Стосовно до амплітудно-фазових характеристик цей запас може визначатися як по модулю, так і по фазі. Навколо небезпечної точки окреслюється визначена область, у яку не повинна заходити амплітудно-фазова характеристика. Такі області приведені на рис. 8.24, *a* і *б*.

При використанні заборонної області, приведеної на рис. 8.24, *a*, вважається, що система керування має необхідний запас стійкості, якщо вона при модулі амплітудно-фазової характеристики, що відрізняється від одиниці не менш, ніж на задану величину $\pm h$, має фазу, що відрізняється від -180° не менш, ніж на кут $\pm \gamma$. При заборонній області, наведеній на рис. 8.24, *б*, де ця область представляє коло, що має центр у точці $(-1, j0)$ і радіус, що дорівнює h , вважається, що стійкість забезпечується, якщо амплітудно-фазова характеристика не заходить у таке коло.

Стосовно алгебраїчних критеріїв стійкості, запас стійкості системи буде виражатися умовою, щоб відповідні нерівності були досить далекі від їхнього невиконання.

Стосовно критерію стійкості, обумовленому годографом $F(j\omega)$, запас стійкості забезпечується умовою, що крива $F(j\omega)$ не повинна заходити в заборонене коло заданого радіуса з центром на початку координат (рис. 8.24, *в*). Використовуючи для визначення стійкості змінність коренів, можна досягти забезпечення запасу стійкості формулюванням умови, щоб жодна з кривих $\varphi(\omega)$ або $\psi(\omega)$, що представляє дійсну і уявну частини величини $F(j\omega)$, не заходила в середину кіл заданого радіуса, проведених навколо точок перетину іншою з цих кривих з віссю абсцис (рис. 8.24, *г*). Нарешті, при використанні логарифмічного частотного критерію стійкості запас стійкості може бути виражено умовою, щоб логарифмічна амплітудна частотна характеристика мала задані запаси по фазі й амплітуді (рис. 8.24, *д*).

Створення відповідного запасу стійкості забезпечує не тільки надійну усталену роботу системи, але і визначені показники якості перехідного процесу.

Вибір величин h і γ або інших параметрів, що визначають запас стійкості для даного класу систем керування, роблять в основному дослідним шляхом.

8.10 Побудова областей стійкості

Розглянуті критерії стійкості дозволяють отримати відповідь на питання, чи є система стійкою при заданих її параметрах. Однак нерідко приходиться вирішувати задачу, коли один або два параметри системи можуть у визначених межах змінюватися і потрібно вибрати оптимальні їхні значення, що забезпечують найкращі динамічні показники системи керування.

Найбільше ефективно ця задача вирішується загальним методом визначення областей стійкості і нестійкості, тобто областей з відомим розподілом коренів характеристичного рівняння в правій і лівій комплексних півплощинах; до того ж цей метод встановлює загальну точку зору на різні критерії стійкості.

Розглянемо задачу побудови областей з різним числом коренів, що лежать праворуч і ліворуч від уявної осі, і визначимо прийоми для відшукування серед цих областей області стійкості.

Припустимо, що система керування описується лінійним диференціальним рівнянням і його характеристичне рівняння має звичайний вигляд:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (8.42)$$

Допустимо, що в цьому рівнянні всі коефіцієнти, крім одного, задані. Як відомо, система буде стійкою, коли всі корені її характеристичного рівняння лежать у площині коренів ліворуч від уявної осі. Припустимо, що коефіцієнт a_1 , у рівнянні (8.42) може змінюватися в межах від 0 до ∞ . Якщо додавати ряд значень коефіцієнтові a_1 при заданих постійних величинах інших коефіцієнтів, то кожному значенню a_1 будуть відповідати визначені значення всіх n коренів рівняння (8.42). Якщо далі на дійсній додатній числовій півосі a_1 відзначати

точки тих значень коефіцієнта a_1 , при яких змінюється число коренів характеристичного рівняння, що лежать ліворуч від уявної осі, то така числова піввісь може бути розбита на ряд відрізків залежно від того, всі чи не всі корені характеристичного рівняння лежать у площині коренів ліворуч від уявної осі. Очевидно, що у стиках таких відрізків один або декілька коренів лежать на уявній осі.

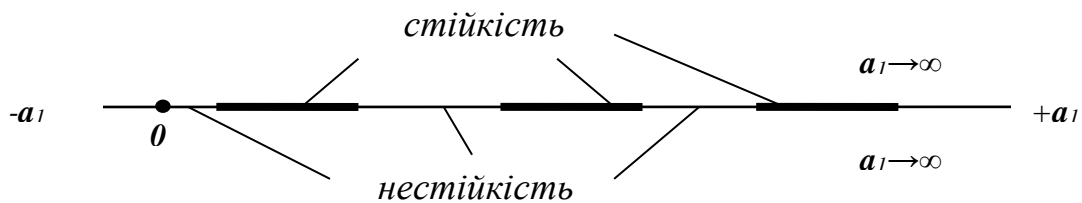


Рисунок 8.25 – Відрізки стійкості і нестійкості

Такий поділ дійсної півосі коефіцієнта a_1 рівняння (8.42) на відрізки стійкості (відзначені жирною лінією) і нестійкості приведені на рис. 8.25. Граничні стикові точки, мабуть, варто назвати границями стійкості за коефіцієнтом a_1 .

Припустимо тепер, що в рівнянні (8.42) можуть змінюватися два коефіцієнти, наприклад a_1 і a_{n-1} , а інші коефіцієнти, як і раніше, задані і незмінні. Якщо в площині координат a_1 і a_{n-1} узяти довільну точку, що відповідає значенням $a_1 > 0$ і $a_{n-1} > 0$, і підставити значення a_1 і a_{n-1} відповідній цій точці в рівняння (8.42), то в залежності від того, всі або не всі корені рівняння (8.42) будуть лежати ліворуч від уявної осі в площині коренів, цю точку варто віднести відповідно до стійкої або нестійкої області. Очевидно, що розглядаючи всі можливі точки в першому квадранті, можна цю частину площини розділити на дві області, де при всіх можливих значеннях a_1 і a_{n-1} усі корені лежать ліворуч від уявної осі, і область, де при будь-яких лежачих у її межах сполученнях значень a_1 і a_{n-1} хоча б один корінь лежить праворуч від уявної осі. Гранична крива цих областей виходить тоді, коли хоча б один з коренів рівняння (8.42) лежить на уявній осі. Отже, цю криву також варто назвати **границею області**

стійкості. Дослідження областей інших квадрантів не має сенсу робити, тому що значення a_1 і a_{n-1} за фізичним їх змістом додатні.

Розбивка площини коефіцієнтів a_1 і a_{n-1} рівняння (8.42) на області стійкості і нестійкості приведене на рис. 8.26. Узагалі таких областей може бути небагато або не бути жодної.

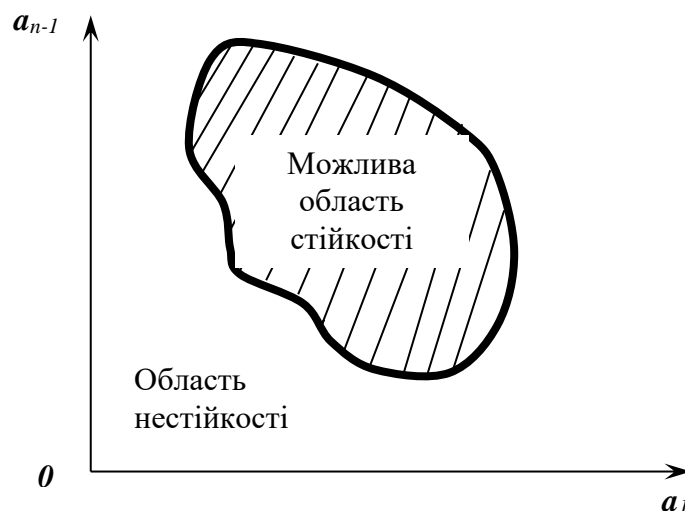


Рисунок 8.26 – Области стійкості і нестійкості

Очевидно, якщо в рівнянні (8.42) задані всі коефіцієнти, окрім трьох, наприклад a_1 , a_k і a_{n-1} , то, міркуючи аналогічним чином, можна в просторі коефіцієнтів виділити області (об'єми) стійкості і нестійкості. Кожна точка тривимірного простору з координатами a_1 , a_k і a_{n-1} , цілком буде визначати розташування коренів рівняння (8.42). Сукупності значень коефіцієнтів a_1 , a_k і a_{n-1} при яких усі корені характеристичного рівняння лежать ліворуч від уявної осі, будуть визначати точки області (обсягу) стійкості, а сукупності значень тих же коефіцієнтів, при яких хоча б один корінь буде лежати праворуч від уявної осі, будуть визначати точки області нестійкості. Очевидно, обсяги стійкості і нестійкості будуть розділятися поверхнею, що у цьому випадку варто назвати граничною поверхнею.

Одне з можливих розбивок тривимірного простору трьох коефіцієнтів a_1 , a_k і a_{n-1} рівняння (8.42) приведене на рис. 8.27.

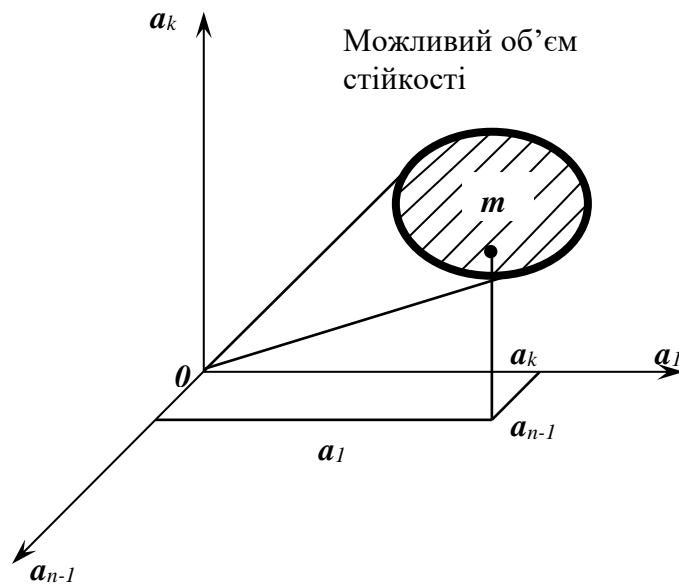


Рисунок 8.27 – Об'єми стійкості і нестійкості

Отже, сукупність коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ визначає точку багатомірного простору, по осях якого відкладаються значення цих коефіцієнтів. Кожній точці цього простору (простору коефіцієнтів) відповідають визначені значення коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n і, отже, визначені значення всіх n коренів характеристичного рівняння. Очевидно, у цьому просторі може існувати така область, де кожній точці відповідає характеристичне рівняння, у якого всі корені лежать ліворуч від уявної осі. Гіперповерхня, що обмежує цю область, називається границею області стійкості в просторі коефіцієнтів характеристичного рівняння. Для випадку одного коефіцієнта ця границя, як було наведено вище, визначається точками, для випадку двох коефіцієнтів ця границя окреслена плоскою кривою (наприклад, гіперболою Вишнеградського), для випадку трьох коефіцієнтів – звичайною тривимірною поверхнею і т.д.

Так як всі коефіцієнти a_i пов'язані з конкретними параметрами аналізованої системи (наприклад, постійними часу T , коефіцієнтами підсилення k і т.п.), то, очевидно, що можна побудувати в просторі яких завгодно параметрів системи керування зазначені області і виділити в ньому області стійкості, якщо такі взагалі існують.

В якості найпростішого прикладу виділення області стійкості можна розглянути характеристичне рівняння другого степеня:

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Корені цього рівняння будуть:

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Обидва корені p_1 і p_2 будуть мати від'ємну дійсну частину тільки тоді, коли $a_1 > 0$ і $a_2 > 0$.

У просторі коефіцієнтів a_1 і a_2 , тобто у випадку двовимірного простору, очевидно, областю стійкості буде тільки перший квадрант, усі точки якого задовольняють умовам $a_1 > 0$ і $a_2 > 0$ (рис. 8.28).

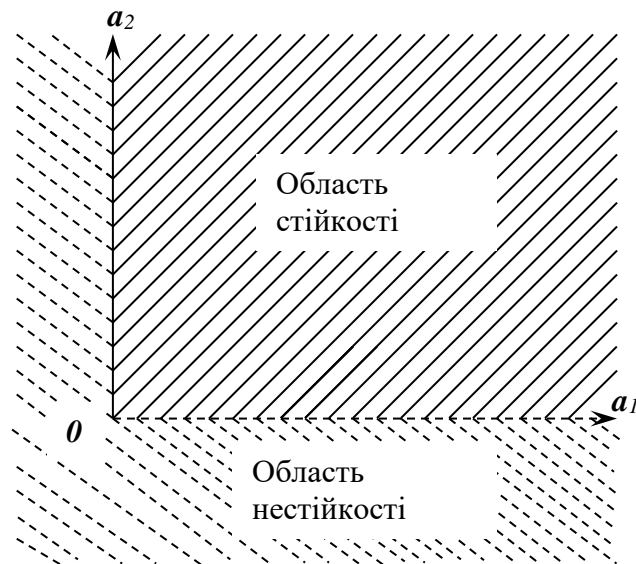


Рисунок 8.28 – Область стійкості в двовимірному просторі

Таким чином, взагалі, всі методи дослідження стійкості зводяться до розбивки простору параметрів системи керування на області стійкого і нестійкого поведіння системи.

У найбільш загальній формі інтерпретація уже відомих критеріїв стійкості представляється в такий спосіб:

а) Критерії Рауса і Гурвіца дають можливість визначити рівняння поверхонь, що у сукупності відокремлюють область стійкості від області нестійкості в просторі коефіцієнтів характеристичного рівняння.

б) Критерії Михайлова і Найквіста дають можливість виділити в характеристичному рівнянні будь-який один параметр і з'ясувати допустимі межі зміни цього параметра, якщо інші параметри задані. Ця операція відповідає виділенню в просторі параметрів однієї будь-якої осі і визначенню відрізків, на які розбивається ця вісь поверхнею, що обмежує в просторі параметрів область стійкості системи.

8.11 Поняття про D -розбивку простору коефіцієнтів характеристичного рівняння

Нехай дано характеристичне рівняння замкнутої системи звичайного виду:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0,$$

у якому всі коефіцієнти, крім двох – a_0 і a_n задані або всі коефіцієнти a_i , залежать від двох будь-яких параметрів. Припустимо, що дане рівняння має в площині коренів k коренів, що лежать ліворуч, і $n-k$ коренів, що лежать праворуч від уявної осі (рис. 8.29, а). Якщо зміна у визначених межах значень коефіцієнтів a_0 і a_n у розглянутому рівнянні не викликає зміни чисел коренів, розташованих у площині коренів праворуч і ліворуч від уявної осі, то завжди існує крива, що обмежує на площині a_0, a_n таку область (а взагалі в просторі коефіцієнтів – багатомірний об'єм), усі точки якої визначають такі частинні значення розглянутого характеристичного рівняння системи, що мають те саме розташування коренів щодо уявної осі. Область, обмежену цією кривою, позначимо $D(k, n-k)$ (рис. 8.29, б).

Якби в характеристичному рівнянні були задані не два, а три коефіцієнти, що можуть змінюватися, то довелось б, як уже відзначалося вище, розглянути тривимірний простір, відкладаючи по трьом осям координат коефіцієнти. Область трьох коефіцієнтів у цьому просторі виділялася б деякою поверхнею.

При великому числі коефіцієнтів приходиться розглядати відповідний багатовимірний простір коефіцієнтів і область $D(k, n-k)$ виділяється поверхнею.

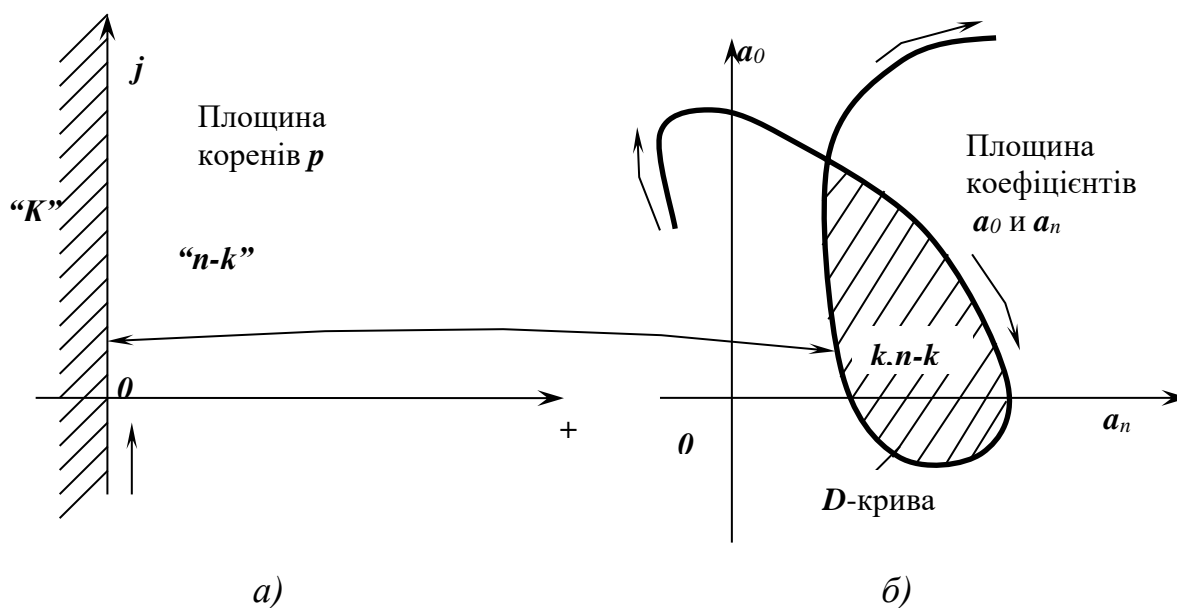


Рисунок 8.29 – Відображення уявної осі у вигляді D-кривої в площині двох параметрів

Число k , тобто число коренів, що лежать ліворуч від уявної осі, може мати будь-яке ціле значення $0 \leq k \leq n$, і, таким чином, у площині a_0 і a_n можна вказати області $D(k, n-k)$, що відповідають $n+1$ різним значенням k .

Так, наприклад, якщо характеристичне рівняння має четвертий степінь, тобто $n = 4$, то в просторі коефіцієнтів можна розглядати наступні області:

$$D(0, 4), D(1, 3), D(2, 2), D(3, 1), D(4, 0).$$

З цих областей тільки остання є областю стійкості, тому що тільки ця область має всі сполучення значень a_0 і a_n , при яких усі корені характеристичного рівняння системи лежать у лівій комплексній півплощині коренів.

Слід відмітити, що якщо, наприклад, у якомусь конкретному випадку при всіх заданих коефіцієнтах характеристичного рівняння, крім двох, не має можливості отримати область $D(4, 0)$, то це означає, що при будь-яких значеннях незаданих коефіцієнтів розглянута система не може бути зроблена стійкою. Таким чином, у деяких випадках площина коефіцієнтів може і не містити областей стійкості.

Розбивка простору коефіцієнтів на області стійкості і нестійкості називається D-розбивкою.

D -розбивка в просторі коефіцієнтів здійснюється n -мірною поверхнею, якщо число цих коефіцієнтів більше двох (або лінією у випадку двовимірного простору), причому одна ця поверхня (або лінія) виділяє всі області, що відповідають поліномам, у яких k коренів лежать ліворуч від уявної осі, для всіх можливих чисельних значень k .

Припустимо, що є характеристичне рівняння n -го степеню з k коренями в лівій півплощині при визначених значеннях усіх коефіцієнтів a_i рівняння. Будемо змінювати значення коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n цього рівняння. При цьому корені також змінюються, і при відповідній зміні коефіцієнтів один або декілька коренів можуть перейти з лівої в праву півплощину або навпаки; очевидно, що цей перехід у силу безперервної залежності коренів від коефіцієнтів може відбутися або через уявну вісь, або через нескінченно віддалену точку, причому корінь може бути дорівнювати нескінченності тільки у випадку $a_0 = 0$, тобто якщо понизиться степінь рівняння, а значить і зменшиться число його коренів. Отже, уявна вісь у площині коренів є відображення границі D -розбивки в просторі коефіцієнтів (або параметрів), і перехід через цю границю в просторі коефіцієнтів відповідає в площині коренів переходові коренів через уявну вісь. З наведеного випливає, що для визначення границі D -розбивки можна замінити в досліджуваному рівнянні p на $j\omega$ і змінювати ω від $-\infty$ до $+\infty$. Для кожного значення ω треба знаходити всі можливі сукупності значень коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n , що обертають ліву частину рівняння в нуль. Кожна така сукупність значень коефіцієнтів дасть точку в гіперпросторі. Геометричні місця всіх точок, отриманих таким чином, і дають границю розбивки гіперпростору на області з однаковим розподілом коренів. Інтерес викликає в остаточному підсумку тільки область стійкості, тобто область $D(n, 0)$. При цьому побудова D -розбивки виявляється найпростішим прийомом для знаходження границі області стійкості. Через те, що реально гіперповерхні не можуть бути наочно зображені, становить практичний інтерес виділення з простору n параметрів площини одного комплексного або двох дійсних параметрів. Це положення справедливе також ще

і тому, що в розпорядженні конструктора часто є обмежене число параметрів, на які є можливість впливати, інші ж параметри є зазвичай жорстко заданими.

8.12 D-розбивка площини одного комплексного параметра

8.12.1 Постановка задачі і знаходження D-кривої

У тому випадку, коли потрібно з'ясувати вплив на стійкість тільки одного параметра при заданих значеннях інших параметрів, доцільно ввести замість цього параметра комплексну величину, дійсна частина якої дорівнює досліджуваному параметрові. Нехай A є параметр (коефіцієнт), вплив якого на стійкість системи визначається. При цьому передбачається, що параметр входить у характеристичне рівняння лінійно, так що рівняння системи можна привести до наступного вигляду:

$$S(p) + AR(p) = 0, \quad (8.43)$$

або

$$A = -\frac{S(p)}{R(p)}.$$

Покладемо далі тимчасово, що A – комплексне число. Для побудови границі області стійкості, тобто для відображення уявної осі площини коренів p на площині коефіцієнта A , зробимо в (8.43) підстановку $p = j\omega$ і відокремимо дійсну частину від уявної:

$$A = A(j\omega) = -\frac{S(j\omega)}{R(j\omega)} = x(\omega) + jy\omega. \quad (8.44)$$

Задаючи різні значення ω , можна накреслити криву вектора $A(j\omega)$. Крива, що окреслюється, відображає на комплексній площині A уявну вісь комплексної площини коренів, тобто границю D-розбивки площини A . Ця границя в даному випадку симетрична щодо дійсної осі, тому для побудови всієї кривої досить побудувати її половину, що відповідає $0 < \omega < +\infty$, і потім доповнити дзеркальним відображенням щодо дійсної осі. Така побудова приведена на рис. 8.30.

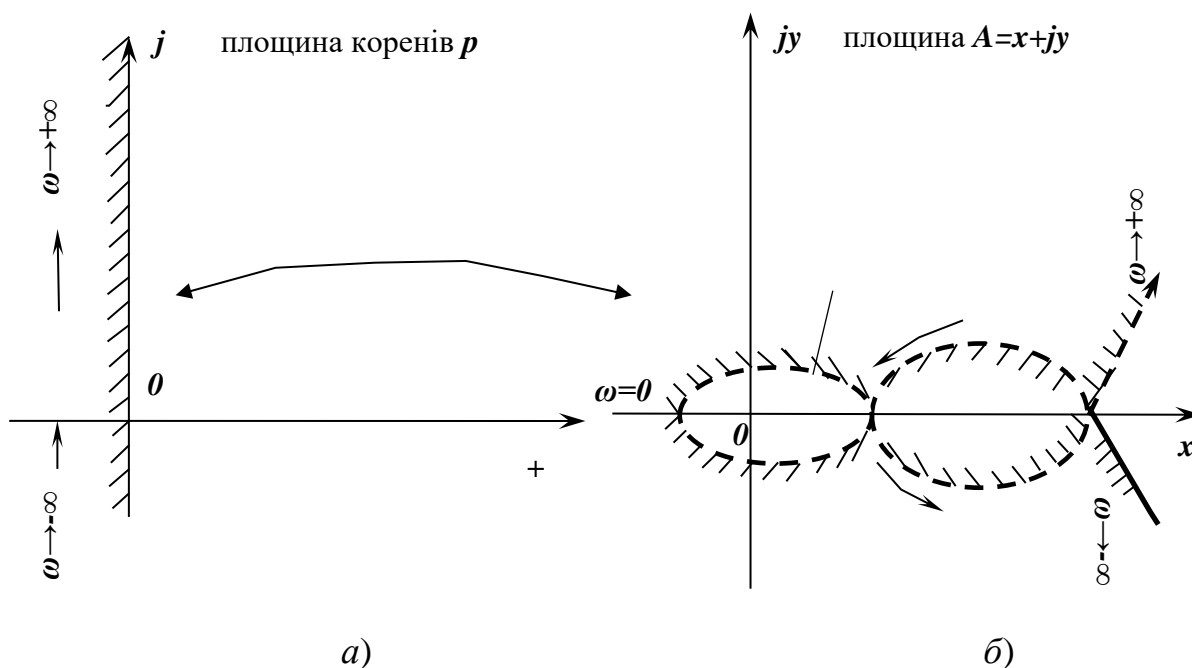


Рисунок 8.30 – Побудова D -кривої в площині одного комплексного параметра і визначення правила штрихування D -кривої

8.12.2 Правило штрихування

При русі по уявній осі в площині коренів (рис. 8.30, *a*) від $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$ та область, де повинні розташовуватися всі корені стійкої системи, буде увесь час ліворуч (на рис. 8.30, *a* наведена штрихуванням). У площині коефіцієнта A на D -кривій (рис. 8.30, *б*) необхідно відзначити напрямок руху, що відповідає зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$, і заштрихувати відповідно також ліву частину кривої стосовно цього руху. Та частина площини, у бік якої спрямовані штрихи, є відображенням лівої півплощини коренів, тому претендентом на область стійкості може бути тільки ця частина площини.

Якщо в площині коефіцієнта A при переході з однієї точки цієї площини до іншої перетинається D -крива і при цьому відбувається перехід із заштрихованої сторони на не заштриховану, то в площині коренів один корінь перетинає уявну вісь, переходячи з лівої півплощини в праву.

Якщо якій-небудь точці площини коефіцієнта A відповідає поліном, що має k коренів у лівій півплощині, то теж саме число цих коренів має поліном, що відповідає будь-якій точці площини коефіцієнта A , до якої можна перейти від першої, не перетинаючи границю D -розбивки.

Якщо перехід від однієї точки до іншої пов'язано з перетином границі D -розбивки, то при переході з незаштрихованої сторони на заштриховану новий точці відповідає поліном, що має ліворуч від уявної осі $k+1$ корінь, якщо штрихування одинарне, і $k+2$ корені, якщо штрихування подвійне (наприклад, при переході через точку перетину області D -кривої). Якщо точці a відповідає поліном, що має k коренів у лівій півплощині, і якщо в точку b можна потрапити з точки a , перетинаючи границю D -розбивки z раз, з них z_1 раз з боку штрихування і z_2 разів з незаштрихованої сторони, то точці b буде відповідати поліном, що має ліворуч від уявної осі $k+z_2-z_1$ коренів.

Отже, якщо знайти розподіл коренів в одній з областей у площині коефіцієнта A при якому-небудь одному сполученні значень x і y , то можна його також знайти у всіх інших областях при будь-яких сполученнях значень x і y . Приклад знаходження розподілу коренів наведено на рис. 8.31. При цьому вважається, що розподіл коренів для будь-якої однієї області був спочатку знайдений тим або іншим способом.

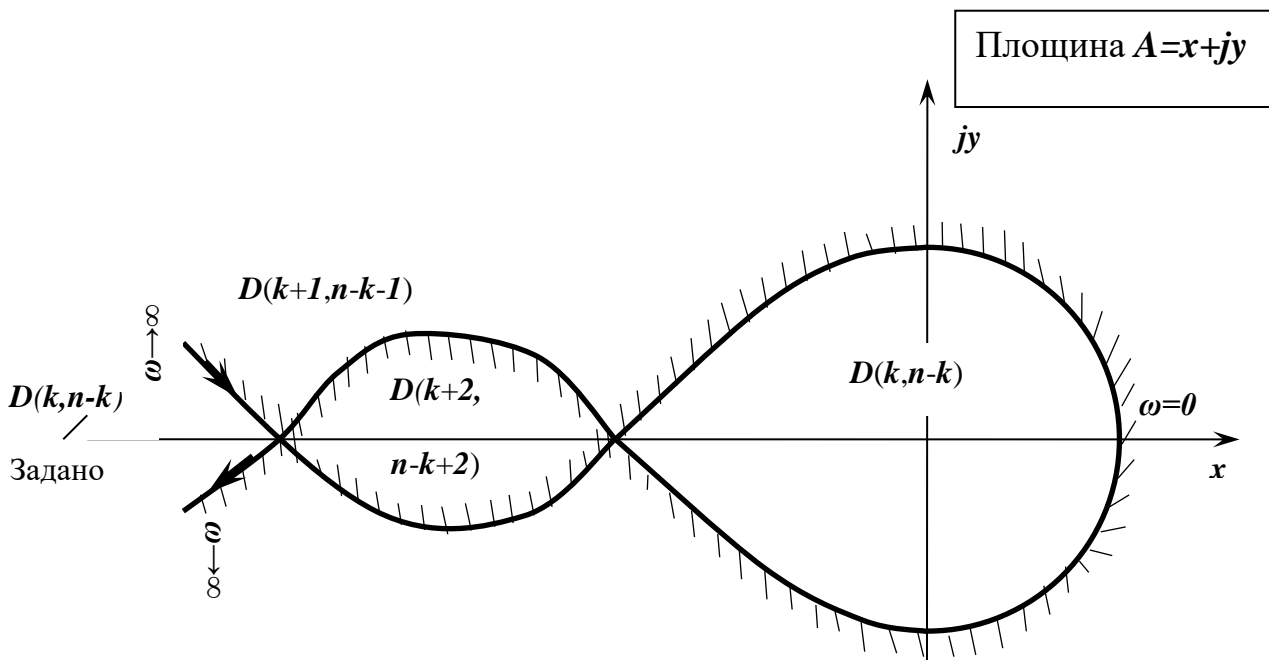


Рисунок 8.31 – Визначення розподілу коренів по D -кривій

Так як параметр A є звичайно за фізичним змістом дійсною величиною, то має сенс розглядати лише D -розбивку дійсної осі. Тільки ті відрізки дійсної осі, що лежать в області, оточеній внутрішнім штрихуванням, можуть бути відрізками стійкості, тому що в цій області число коренів, що лежать у лівій півплощині коренів, максимально.

Однак у деяких випадках може виявитися, що відрізків (а в загальному випадку областей) стійкості (для яких $k = n$) може і не бути. Щоб перевірити, чи є побудований відрізок дійсної осі дійсно відрізком стійкості, необхідно перевірити умову стійкості хоча б в одній точці відрізка.

8.13 D -розбивка площини двох параметрів

8.13.1 Постановка задачі

Допустимо, що серед параметрів, що визначають систему автоматичного керування, два параметри A та B можуть змінюватися, а інші параметри жорстко задані.

Якщо ці параметри лінійно входять у характеристичне рівняння системи, тобто якщо це рівняння не містить ні добутків A та B , ні їхніх степенів вище першої, то рівняння може бути представлене в наступному вигляді:

$$AP(p) + BQ(p) + R(p) = 0, \quad (8.45)$$

де $P(p)$, $Q(p)$ і $R(p)$ – поліноми, коефіцієнти яких не залежать від A і B . В окремому випадку деякі з них можуть дорівнювати нулю.

Потрібно зробити виділення областей стійкості (якщо такі існують) у площині двох змінних параметрів A та B .

8.13.2 Знаходження D -кривої

Підставивши в характеристичне рівняння замість p величину $j\omega$ і позначивши дійсні частини поліномів через x , а уявні через y з відповідним індексом, тобто

$$\left. \begin{aligned} P(j\omega) &= X_1(\omega) + jY_1(\omega); \\ Q(j\omega) &= X_2(\omega) + jY_2(\omega); \\ R(j\omega) &= X_3(\omega) + jY_3(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

можемо рівняння (8.45) записати так:

$$AX_1(\omega) + BX_2(\omega) + X_3(\omega) + j[AY_1(\omega) + BY_2(\omega) + Y_3(\omega)] = 0, \quad (8.47)$$

звідкіля для визначення параметрів A і B отримуємо два рівняння:

$$\left. \begin{aligned} AX_1(\omega) + BX_2(\omega) + X_3(\omega) &= 0; \\ AY_1(\omega) + BY_2(\omega) + Y_3(\omega) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь (8.48) щодо двох невідомих A і B , отримуємо:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} -X_3(\omega) & X_2(\omega) \\ -Y_3(\omega) & Y_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ Y_1(\omega) & Y_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{X_2(\omega)Y_3(\omega) - X_3(\omega)Y_2(\omega)}{X_1(\omega)Y_2(\omega) - X_2(\omega)Y_1(\omega)}, \quad (8.49)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} X_1(\omega) & -X_3(\omega) \\ Y_1(\omega) & -Y_3(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ Y_1(\omega) & Y_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{X_3(\omega)Y_1(\omega) - X_1(\omega)Y_3(\omega)}{X_1(\omega)Y_2(\omega) - X_2(\omega)Y_1(\omega)}. \quad (8.50)$$

Вирази (8.49) і (8.50) визначають одне-єдине значення для A та одне-єдине значення для B при кожному значенні ω тільки при тій умові, що рівняння (8.48) сумісні і лінійно незалежні. Досить часто рівняння (8.48) перестають бути лінійно незалежними при $\omega = 0$ і $\omega = \infty$. В цих випадках чисельники і знаменники виразів (8.49) і (8.50) можуть виявитися одночасно рівними нулю або нескінченності. Крім того, можуть бути деякі значення $\omega = \omega_i$, при яких також чисельник і знаменник виявляються одночасно рівними нулю. Це означає, що один з виразів (8.49) і (8.50) є при даному значенні ω_i наслідком іншого і тоді в площині двох параметрів A і B виходить не точка, а пряма лінія. Тому криволінійна границя D -розбивки, отримувана з виразів (8.49) і (8.50) при зміні ω від 0 до ∞ , повинна бути доповнена особливими прямими, рівняння яких виходять підстановкою у вираз (8.47) частот $\omega = 0$, $\omega = \infty$ і всіх $\omega = \omega_i$. Найпростіше рівняння особливих прямих для $\omega = 0$ і $\omega = \infty$ можуть бути отримані наступним чином: якщо вільний член і коефіцієнт при старшому члені

характеристичного рівняння залежать від параметрів A або B , то, прирівнявши нулю вільний член, отримуємо рівняння особливої прямої для $\omega = 0$, а прирівнявши нулю коефіцієнт при старшому члені, отримуємо рівняння особливої прямої для $\omega = \infty$. Очевидно, що якщо зазначені коефіцієнти характеристичного рівняння не залежать від A і B , то в цьому випадку особлива пряма проходить у нескінченність, і, отже, вона не окреслюється.

Крива D -розбивки (або D -крива) у площині двох параметрів не є симетричною щодо дійсної осі, але усі пари її точок, що відповідають ω і $-\omega$, збігаються, так як відповідно до виразів (8.49) і (8.50) параметри $A = f_1(\omega)$ і $B = f_2(\omega)$ є парними функціями ω , тобто $f(\omega) = f(-\omega)$, а визначник Δ є непарною функцією ω , тобто $\Delta(\omega) = -\Delta(-\omega)$. Звідси випливає, що область D -кривої, побудована для змін ω від $-\infty$ до 0 , пробігається вдруге при зміні ω від 0 до $+\infty$, але в зворотному напрямку. Тому досить побудувати D -криву тільки для додатних частот, тому що ця ж крива буде повторюватися для від'ємних частот.

Якщо головний визначник, тобто знаменник у виразах (8.49) і (8.50), буде дорівнювати нулю, то це означає, що крива D -розбивки не існує і вся розбивка площини двох параметрів здійснюється тільки особливими прямими.

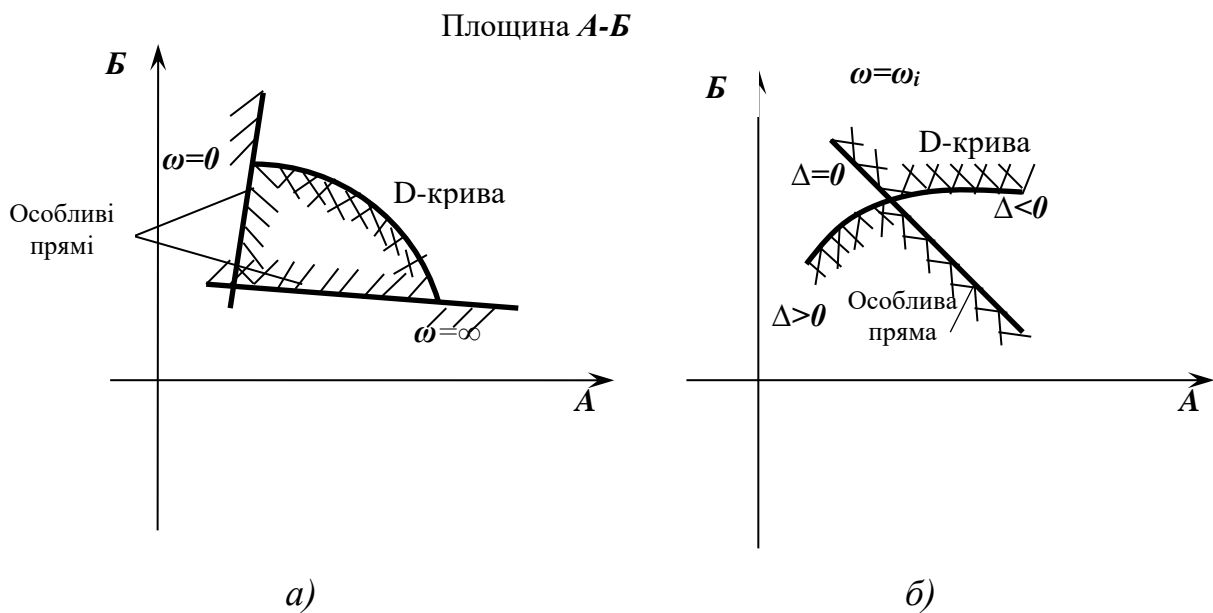
8.13.3 Правило штрихування

Для нанесення штрихування і виділення областей з найбільшим числом коренів, що лежать ліворуч від уявної осі, варто рухатися по D -кривій від $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$ штрихуючи при цьому ту або іншу сторону кривої залежно від знака головного визначника, обумовленого з виразу

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ Y_1(\omega) & Y_2(\omega) \end{vmatrix} = X_1(\omega)Y_2(\omega) - X_2(\omega)Y_1(\omega). \quad (8.51)$$

Якщо при визначених значеннях частоти і зазначеному напрямку руху $\Delta > 0$, то штрихується ліва сторона D -кривої; якщо ж при цьому виявиться, що $\Delta < 0$, то штрихується права сторона D -кривої. Очевидно, що при русі уздовж кривої знак визначника міняється тільки при перетинанні кривої з особливими прямими, тобто при $\omega = 0$, при $\omega = \infty$ і при всіх $\omega = \omega_i$. Так як D -крива зі зміною частоти від $-\infty$ до $+\infty$ проводиться двічі в протилежних напрямках, то вона

штрихується також двічі, але обидва рази з одного боку, тому що знак головного визначника при зміні знака частоти міняється на зворотний. Штрихування особливих прямих здійснюється у відповідності зі штрихуванням D -кривої; у цьому випадку потрібно, щоб одночасно заштриховані або одночасно незаштриховані сторони кривої і прямої розташовувалися навпроти один одному. При цьому особливі прямі для $\omega=0$ і $\omega=\infty$ штрихуються одинарним штрихуванням, а особливі прямі для всіх $\omega=\omega_i$ – подвійним штрихуванням. Можливі приклади D -розбивки площини двох параметрів і штрихування кривої і прямих приведені на рис. 8.32, a – z .



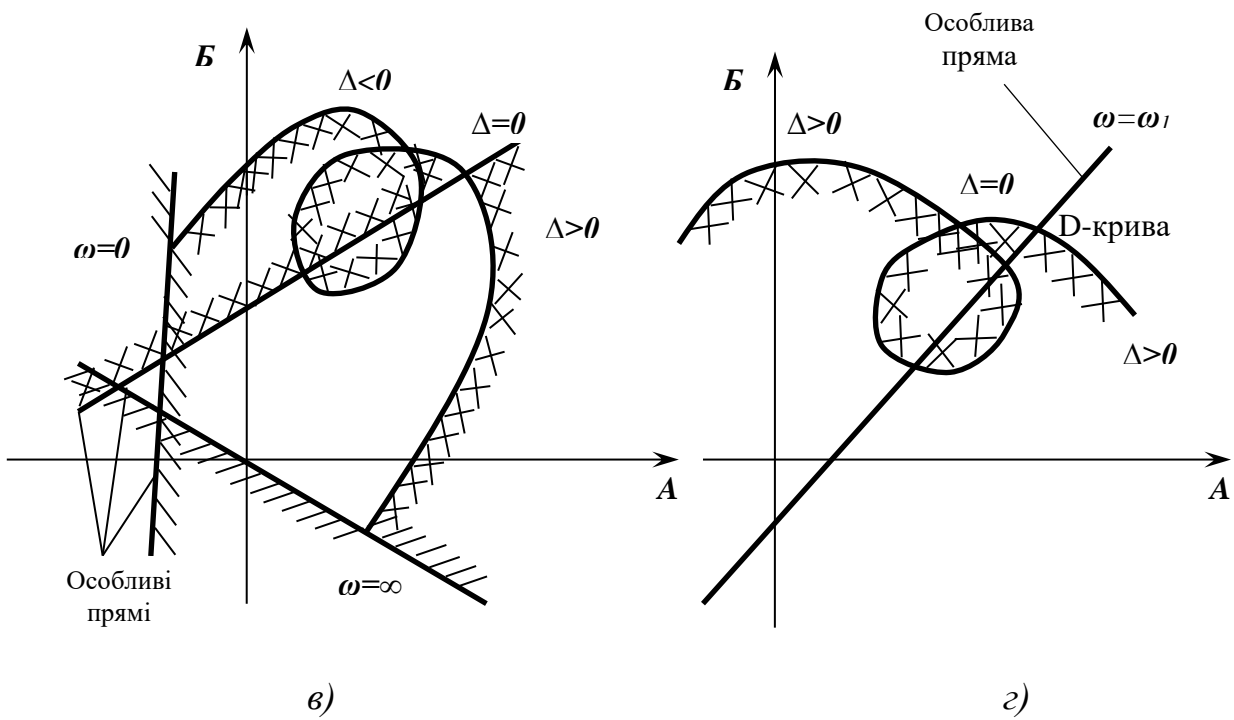


Рисунок 8.32 – Приклади D-розбивки за двома параметрами

Якщо при перетинах особливою прямою, побудованою для $\omega = \omega_i$, з D-кривою головний визначник не змінює знака, то особлива пряма не штрихується. Цей випадок наведено на рис. 8.32, г.

Якщо відомо розподіл коренів в одній з областей D-розбивки, то легко знайти розподіл коренів у всіх інших областях. Як і в попередньому випадку, перетин границі області з подвійним штрихуванням означає перехід двох коренів у площину коренів через уявну вісь, з однієї півплощини в іншу, а перетин границі з одинарним штрихуванням – відповідне переміщення одного кореня.

8.14 Інтегральні оцінки якості

Інтегральні оцінки якості є комбінованими критеріями – вони оцінюють у сукупності запас стійкості, швидкодію і сталу помилку. Інтегральні оцінки засновані на розроблених умовних інтегральних показниках, що характеризують досить просте відхилення перехідного процесу реальної системи від ідеального.

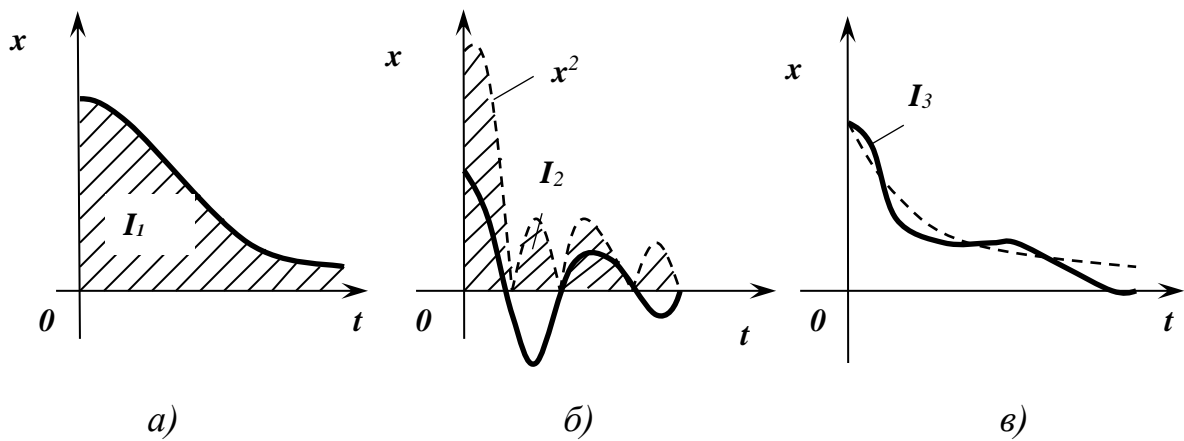


Рисунок 8.33 – Найпростіші інтегральні оцінки якості

Під ідеальним звичайно розуміють або східчастий процес, що протікає миттєво без перегулювання, або процес, що протікає по експоненті з заданими параметрами. Найпростішою інтегральною оцінкою може служити показник

$$I_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt. \quad (8.52)$$

де $x(t)$ – відхилення регульованої величини від нового заданого значення, тобто помилка системи.

Показник I_1 являє собою алгебраїчну суму площ під кривою перехідного процесу (рис. 8.33, а). Чим менше I_1 , тим швидше загасає перехідний процес і тем менше величина відхилення, тобто тим вище якість системи. Однак це справедливо тільки для систем з аперіодичними перехідними процесами без перегулювання, коли не міняється знак відхилення $x(t)$.

Якість систем з коливальними перехідними процесами характеризується квадратичною інтегральною оцінкою

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt. \quad (8.53)$$

запропонованою для АСК А.А.Красовським.

Розглянемо один з можливих способів обчислення інтеграла I_2 при стрибкоподібному зовнішньому впливі. Якщо зображення регульованої величини $y(t)$ являє собою дрібно-раціональну функцію

$$Y(s) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{p} \quad (8.54)$$

i

$$x(t) = y(t) - y(\infty) = y(t) - (b_m / a_n). \quad (8.55)$$

відхилення регульованої величини від нового сталого стану, то при $m < n$ інтеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} \sum_{k=0}^m B_k \Delta_k - \frac{b_m b_{m-1}}{a_n^2}, \quad (8.56)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & -a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & -a_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}. \quad (8.57)$$

$\Delta_k (k = m, m-1, \dots, 2, 1, 0)$ – визначники, що виходять шляхом заміни у визначнику

$\Delta (m-k+1)$ -го стовпчика стовпчиком $(a_{n-1} a_n \theta \dots \theta)'$ (штрих – знак транспонування),

а коефіцієнти B_m, B_{m-1}, \dots обчислюються за формулами:

$$B_m = b_m^2; B_{m-1} = b_{m-1}^2 - 2b_{m-2} b_m; \dots; B_k = b_k^2 - 2b_{k+1} b_{k-1} + 2b_{k+2} b_{k-2} + \dots + 2(-1)^k b_m b_{2k-m}; \dots; B_0 = b_0^2. \quad (8.58)$$

Показник I_2 тим менше, ніж швидше загасає перехідний процес і чим менше відхилення (рис. 8.33, б). Однак і квадратична оцінка не завжди є вдалою, тому що при такій оцінці якості сильно коливальний процес з великим перерегулюванням може виявитися кращим, ніж монотонний. Квадратична оцінка, по суті справи, не враховує близькість системи до коливальної границі стійкості.

Щоб виключити сильну коливальність, потрібно накласти обмеження не тільки на величину відхилення, але і на швидкість відхилення $x(t)$. Це дає так звану поліпшену квадратичну оцінку, запропоновану О.А.Фельдбаумом:

$$I_3 = \int_0^{\infty} [x^2(t) + T^2 \dot{x}^2(t)] dt, \quad (8.59)$$

де T – деяка постійна часу.

Мінімум показника I_3 означає, що отримано перехідний процес, близький до експоненти з постійною T . Дійсно,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\infty} [x^2(t) + T^2 x^2(t)] dt = \int_0^{\infty} [x(t) + Tx(t)]^2 dt - 2T \int_0^{\infty} x(t)x(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} [x(t) + Tx(t)]^2 dt - Tx^2(t) \Big|_0^{\infty}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Так як $x(\infty) = 0$, то, позначаючи $x(0) = x_0$, отримуємо

$$I_3 = \int_0^{\infty} [x(t) + Tx(t)]^2 dt - Tx_0^2. \quad (8.61)$$

Інтеграл має мінімум, якщо обертається в нуль підінтегральна функція, тобто показник I_3 мінімальний, якщо $x(t)$ задовольняє рівнянню

$$Tx + x = 0. \quad (8.62)$$

При цьому процес має вигляд експоненти, обумовленої рівнянням

$$x(t) = x_0 e^{-t/T}, \quad (8.63)$$

тобто у цьому випадку ідеалізованим перехідним процесом служить не східчаста функція, а експонента, до якої і повинен прагнути реальний перехідний процес (рис. 8.33, в). Таку оцінку доцільно застосовувати, коли можна вказати значення постійної часу T «оптимальної» експоненти.

Інтегральні оцінки використовують при виборі оптимального значення якого-небудь змінного параметра системи, що забезпечує мінімум такої оцінки.

Визначення інтегральних оцінок не вимагає розв'язання диференціальних рівнянь. Наприклад, оцінки I_2 можуть обчислюватися за формулами Релея, Мак-Леннона або Красовського.

Для більш повної оцінки якості перехідних процесів інтегральним методом потрібно користуватися старшими квадратичними інтегральними оцінками

$$I_k = \int_0^{\infty} \{x^2(t) + T_1^2 x^2(t) + \dots + T_k^2 [x^{(k)}(t)]^2\} dt. \quad (8.64)$$

Недоліком інтегральних оцінок є відсутність наочної відповідності між значеннями показників I і характеристиками перехідних процесів. Труднощі застосування інтегральних оцінок для визначення якості АСР складаються також

у відносній складності виразів, що пов'язують їхній параметр з параметрами системи.

Контрольні запитання до Розділу 8

1. Сформулюйте загальні теореми стійкості систем А. М. Ляпунова.
2. Які умови стійкості систем можна назвати алгебраїчними критеріями?
3. У чому полягає сутність критерію стійкості Рауса?
4. У чому полягає сутність критерію стійкості Гурвіца?
5. У чому полягає сутність критерію стійкості Найквіста?
6. У чому полягає сутність критерію стійкості Михайлова?
7. У чому полягає сутність логарифмічного критерію стійкості?
8. Які особливості стійкості систем з запізнюванням?
9. Як визначається запас стійкості по модулю і по фазі?
10. Постановка задачі і знаходження D-кривої.

9 ТИПОВІ ЗАКОНИ РЕГУЛЮВАННЯ

9.1 Пропорційні регулятори

АФХ розімкнутої системи (рис. 9.1, а) визначається виразом

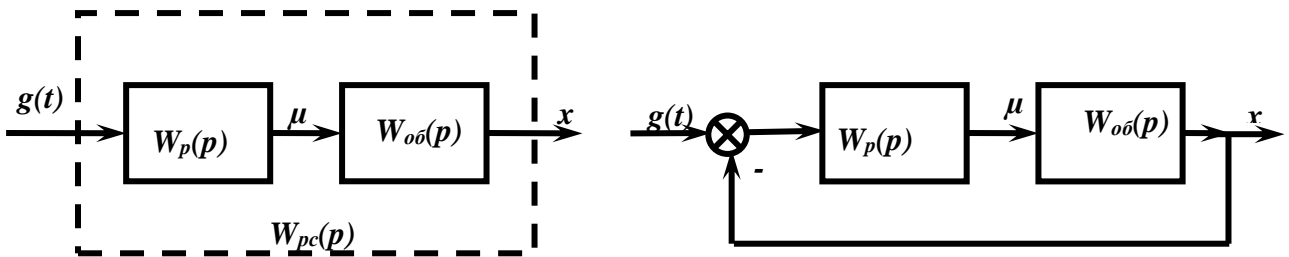
$$W_{PC}(j\omega) = W_P(j\omega) \cdot W_{OB}(j\omega), \quad (9.1)$$

де $W_P(j\omega)$ – АФХ регулятора; $W_{OB}(j\omega)$ – АФХ об'єкта.

З (9.1) випливає, що коефіцієнт передачі розімкнутої системи можна змінювати за допомогою автоматичного регулятора, якщо його АФХ буде мати вигляд

$$W_P(j\omega) = K_p, \quad (9.2)$$

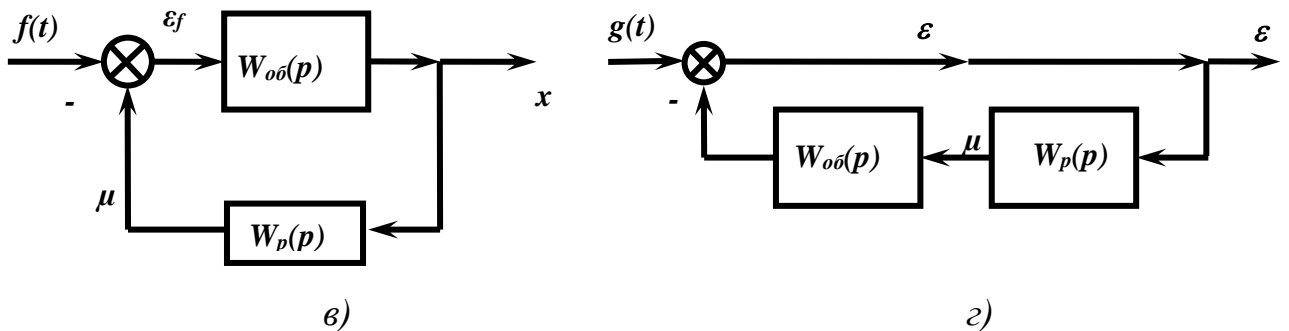
K_p – коефіцієнт передачі регулятора, що є його параметром налаштування.



де

а)

б)



в)

г)

- а – розімкнута система по каналу впливу, що задає; б – замкнута система по тому ж каналу; в – замкнута система, по каналу впливу, що збурює; г – замкнута система, по каналу помилки регулювання

Рисунок 9.1 – Структурні схеми АСР

Розглянемо більш докладно, що розуміється під терміном «**параметр налаштування**» регулятора.

З критерію стійкості Рауса-Гурвіца випливає, що постійні коефіцієнти диференційного рівняння ланки, системи або пристрою значною мірою визначають їхні динамічні властивості. У зв'язку з цим в автоматичних регуляторах передбачається можливість зміни деяких коефіцієнтів його диференційного рівняння, що називаються **параметрами налаштування регуляторів**.

Такими параметрами налаштування є «коефіцієнт передачі регулятора K_p », «постійна часу випереджання $T_{ВП}$ », «постійна часу ізодрома $T_{ІЗ}$ », «постійна часу диференціювання $T_{Д}$ », «постійна часу інтегрування T_I ». Змінюючи значення цих параметрів налаштування регулятора, тим самим змінюють його динамічні характеристики з метою забезпечення необхідної якості роботи автоматичної системи регулювання в цілому.

Значення параметрів налаштування регулятора, при яких досягається найкраща якість роботи системи, називаються **оптимальними**.

Слід зазначити, що значна частина регуляторів випускається заводами-виготовлювачами з неоцифрованими шкалами положень органів налаштування. У цьому випадку при виконанні налагоджувальних робіт на технологічному об'єкті попередньо в лабораторних умовах варто провести оцифрування шкал органів налаштування регулятора.

Крім органів налаштування, які безпосередньо змінюють коефіцієнт диференційного рівняння регулятора, регулятори здебільшого мають також органи налаштування, що побічно впливають на ці коефіцієнти і які змінюють параметри статичних характеристик регулятора або режими його роботи. Наприклад, органи налаштування, що змінюють чутливість регулятора, демпфірування вхідного сигналу, тривалість імпульсів при релейно-імпульсному способі формування закону регулювання і т.п.

Параметри регулятора, що залежать від положення цих органів налаштування, також називаються параметрами налаштування регулятора. Як

приклад, до таких параметрів налаштування регулятора можна віднести «нечутливість регулятора $\Delta_{HЧ}$ », «постійну часу демпфірування $T_{ДФ}$ », «тривалість імпульсів Δt_i » і т.д.

Регулятор виду (9.2) має один параметр налаштування «коефіцієнт передачі K_p ».

З урахуванням (9.2) АФХ розімкнутої системи (9.1) запишеться у вигляді

$$W_{pc}(j\omega) = K_p W_{об}(j\omega). \quad (9.3)$$

З (9.3) випливає, що при підключенні до об'єкта такого регулятора АФХ об'єкта збільшуються на кожній частоті пропорційно в K_p раз. Пропорційні регулятори скорочено називають П-регуляторами.

У динамічному відношенні П-регулятор є підсилювальною ланкою. Передавальна функція П-регулятора

$$W_{П}(p) = K_p. \quad (9.4)$$

Перехідні процеси в П-регуляторі описуються виразом

$$\mu = K_p \varepsilon, \quad (9.5)$$

де ε – вхідний вплив на регулятор, що дорівнює відхиленню регульованої величини від заданого значення; μ – вплив регулятора на об'єкт, що спрямований на ліквідацію відхилення регульованої величини від заданого значення.

При налаштуванні П-регулятора варто мати на увазі, що надмірне збільшення запасу стійкості погіршує якість регулювання, тому що при цьому затягується перехідний процес у системі (збільшується час регулювання), збільшуються динамічна помилка і постійна помилка регулювання по каналу, що задає, так і по впливу, що збурює.

З урахуванням цього для системи з П-регулятором мається визначене оптимальне значення коефіцієнта його передачі K_p , який і варто вибирати при настроюванні системи.

9.2 Інтегральні регулятори

Передавальна функція замкнутої АСР по каналу регулюючого впливу (рис. 9.1, б)

$$W(p) = \frac{W_p(p) \cdot W_{об}(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_{об}(p)}. \quad (9.6)$$

По каналу впливу, що збурює, (рис. 9.2, в) з боку регулюючого органа

$$W_f(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_{об}(p)}. \quad (9.7)$$

З (9.6) і (9.7) можна встановити, що при статичних об'єктах і регуляторі АСР буде статичною як по каналу, що задає, так і з впливу, що збурює. При астатичному об'єкті система буде астатичною по каналу впливу, що задає, і статичною по каналу впливу, що збурює.

Таким чином, АСР із П-регулятором завжди має постійну помилку регулювання по каналу впливу, що збурює, а при статичному об'єкті – і по каналу впливу, що задає.

Хоча, як вказувалося вище, шляхом вибору оптимального значення коефіцієнта передачі П-регулятора можна істотно зменшити сталу помилку регулювання, її повна ліквідація в системі з П-регулятором навіть теоретично неможлива.

Структурна схема замкнутої системи по каналу помилки регулювання представлена на рис. 9.1, г.

Передавальна функція системи на рис. 9.1, г

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_p(p) \cdot W_{об}(p)}. \quad (9.8)$$

Щоб у сталому режимі ($t \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$) була відсутня стала помилка ε_∞ регулювання, необхідно виконати умову $W_\varepsilon(p)_{p \rightarrow 0} \rightarrow 0$, тобто $W_\varepsilon(0) = 0$.

З (9.8) випливає, що $W_\varepsilon(0) = 0$ при $W_p(p)W_{об}(p)_{p \rightarrow 0} \rightarrow \infty$. Так як в загальному випадку коефіцієнт $a_n \neq 0$ у виразі передавальної функції об'єкта (об'єкт статичний) і, отже, $W_{об}(0) \neq \infty$, то для виконання умови $W_p(0)W_{об}(0) = \infty$ необхідно, щоб при $p=0$ передавальна функція $W_p(0)$ була рівною $W_p(0) = \infty$.

Таким чином, для цього потрібне застосування в системі астатичного регулятора з законом регулювання, обумовленим передавальною функцією

$$W_I(p) = 1/p,$$

або в більш загальному випадку

$$W_I(p) = K_p/p. \quad (9.9)$$

З урахуванням цього передавальна функція розімкнутої системи повинна мати вигляд

$$W_{pc}(p) = W_I(p) \cdot W_{об}(p) = \frac{K_p W_{об}(p)}{p}$$

Регулятор з передавальною функцією (9.9) є інтегруючою ланкою. Вихідна величина такого регулятора пропорційна інтегралові від вхідної величини:

$$\mu = K_p \int_0^t \varepsilon dt. \quad (9.10)$$

Інтегральний закон регулювання скорочено називають законом І-регулювання. Тому регулятори з таким законом регулювання називаються інтегральними або скорочено І-регуляторами.

Коефіцієнт передачі K_p є параметром налаштування І-регулятора. АФХ І-регулятора:

$$W_I(j\omega) = \frac{K_p}{\omega} e^{-j\pi/2}. \quad (9.11)$$

АФХ розімкнутої системи з І-регулятором визначається виразом:

$$W_{pc}(j\omega) = \frac{K_p}{\omega} e^{-j\pi/2} W_{об}(j\omega). \quad (9.12)$$

З (9.12) випливає, що в системі з І-регулятором вектор АФХ об'єкта на даній частоті збільшується в K_p/ω раз і повертається за годинниковою стрілкою на 90° .

Основне призначення закону І-регулювання – ліквідація сталої помилки регулювання.

Як самостійні, І-регулятори застосовуються рідко через повільне наростання регулюючого впливу на об'єкт при відхиленні регульованої величини. Дуже часто закон І-регулювання формується не самостійним регулятором, а блоком або пристроєм, що конструктивно є складовою частиною регулятора, що реалізує більш складний, наприклад, пропорційно-інтегральний закон регулювання.

Передавальну функцію І-регулятора часто записують у вигляді

$$W_I(p) = 1/(T_I p), \quad (9.13)$$

де $T_I p$ – постійна часу інтегрування – параметр налаштування регулятора.

Розглянемо фізичний зміст постійної часу інтегрування.

Закон І-регулювання І-регулятора з урахуванням (9.13) запишеться у вигляді:

$$\mu = \frac{1}{T_I} \int_0^t \varepsilon dt. \quad (9.14)$$

Припустимо, що на вхід регулятора надійшов постійний сигнал $\varepsilon = \varepsilon_0$. При цьому вихідний сигнал у відповідності з (9.14) буде змінюватися за законом

$$\mu = \varepsilon_0 \frac{t}{T_I}.$$

Після закінчення часу $t = T_I$ значення вихідного сигналу буде дорівнює $\mu = \varepsilon_0$.

Таким чином, постійна часу інтегрування І-регулятора дорівнює часові, протягом якого з моменту надходження на вхід регулятора постійного сигналу сигнал на виході регулятора досягне значення, рівного значенню вхідного сигналу.

9.3 Диференційні регулюючі пристрої

Пропорційні регулятори виробляють на об'єкт істотний регулюючий вплив, коли регульована величина вже має значне відхилення від заданого значення. Інтегральні регулятори роблять регулюючий вплив, постійно нарощуючи його по інтегральному закону. Таким чином, П- й І-регулятори не можуть випереджати очікувані відхилення регульованої величини, реагуючи тільки на вже наявні в даний момент порушення технологічного процесу. У той же час, якщо регульована величина в якийсь момент часу починає швидко відхилятися від заданого значення, то очевидно, що на об'єкт надійшли значні збурення і що відхилення регульованої величини в результаті цього впливу будуть значними. У цьому випадку бажано мати регулятор, що виробляв би

регулюючий вплив, пропорційний швидкості відхилення регульованої величини від заданого значення:

$$\mu = T_D d\varepsilon/dt. \quad (9.15)$$

Передавальна функція регулятора

$$W_D(p) = T_D p. \quad (9.16)$$

Такий регулятор при великій швидкості відхилення регульованої величини, коли в початковий момент П-регулятор виробляє слабкий регулюючий вплив на об'єкт, а І-регулятор тільки починає нарощувати регулюючий вплив, робив би істотний регулюючий вплив на об'єкт, ліквідуючи тим самим очікуване відхилення регульованої величини, причому, чим більше збурює вплив на об'єкт, тим швидше буде відхилятися регульована величина від заданого значення і тим значніше буде регулюючий вплив регулятора (9.15) на об'єкт, спрямований на нейтралізацію впливу, що збурює.

З урахуванням викладених розумінь для цілей автоматичного регулювання і введені в практику регулюючі пристрої, що формують закон регулювання, пропорційний швидкості відхилення регульованої величини (9.15).

Реалізація (9.16) у чистому вигляді практично нездійсненна. У зв'язку з тим, що Д-регулюючі пристрої використовуються як диференціатори з законом регулювання

$$T_D d\mu/dt + \mu = K_D T_D d\varepsilon/dt, \quad (9.17)$$

з передавальною функцією

$$W_D(p) = K_D T_D p / (T_D p + 1). \quad (9.18)$$

Перехідна характеристика $h(t)$ представлена на рис 9.2.

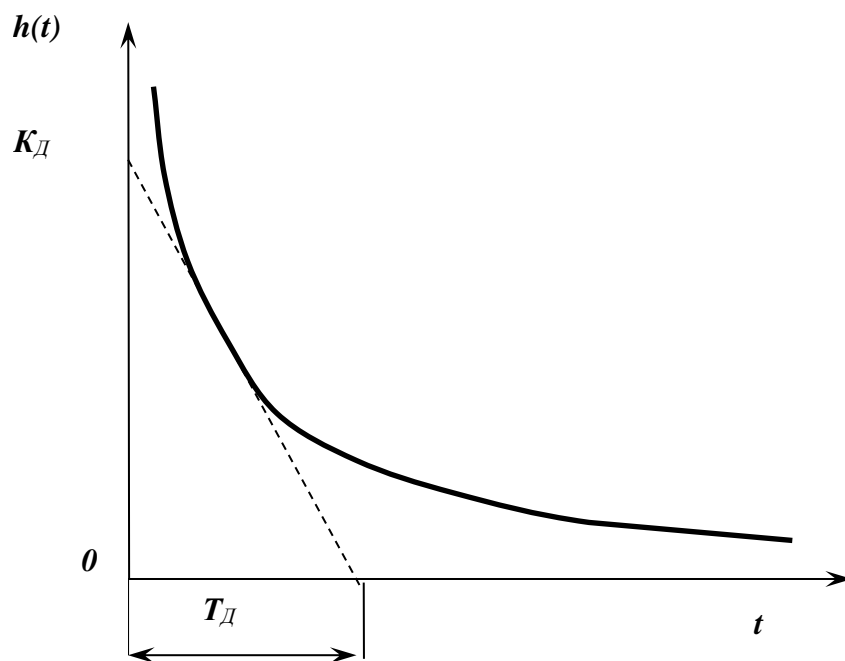


Рисунок 9.2 – Перехідна характеристика $h(t)$

АФХ $W(i\omega)$ представлена на рис. 9.3.

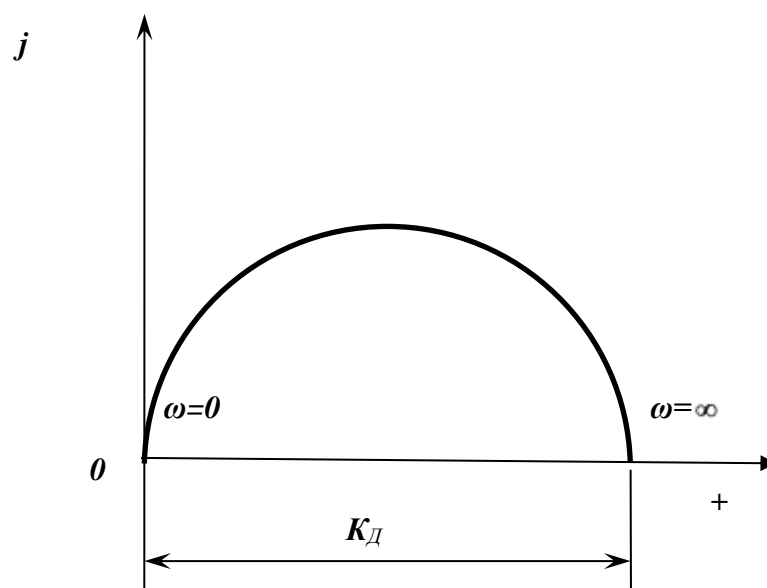


Рисунок 9.3 – АФХ $W(i\omega)$

АЧХ $A(\omega)$ представлена на рис. 9.4.

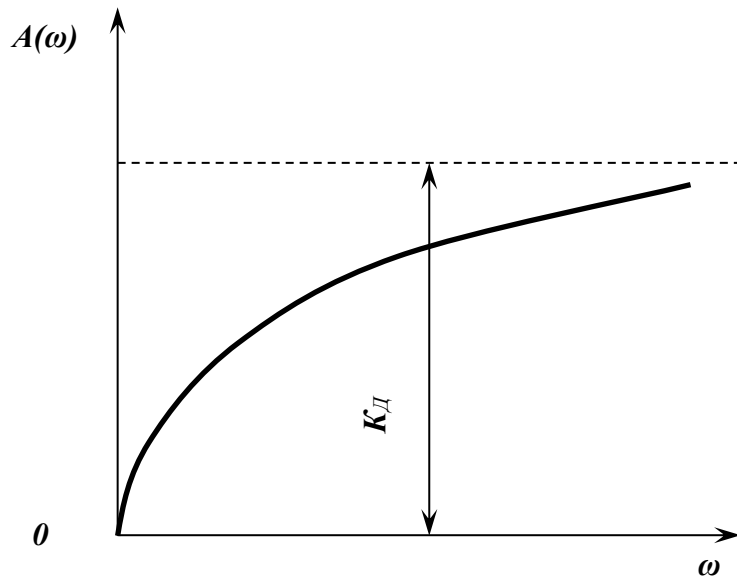


Рисунок 9.4 – АЧХ $A(\omega)$

ФЧХ $\varphi(i\omega)$ представлена на рис. 9.5.

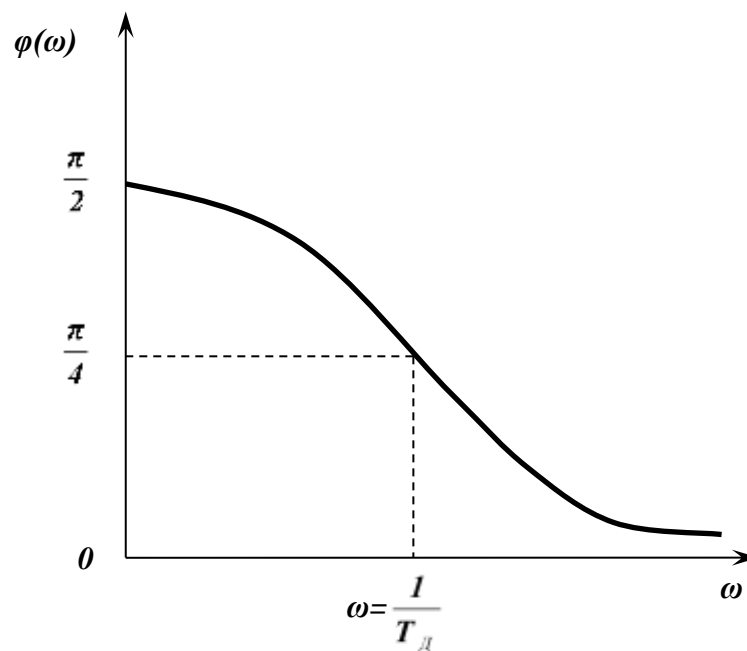


Рисунок 9.5 – ФЧХ $\varphi(i\omega)$

9.4 Пропорційно-інтегральні регулятори

Для комплексного використання переваг законів П- і І-регулювання в автоматичних системах широко застосовуються регулятори, що формують

закони як П-, так і І-регулювання одночасно. Такі регулятори називаються пропорційно-інтегральними або скорочено ПІ-регуляторами.

Пропорційно-інтегральні регулятори впливають на регульований орган пропорційно відхиленню й інтегралові від відхилення регульованої величини:

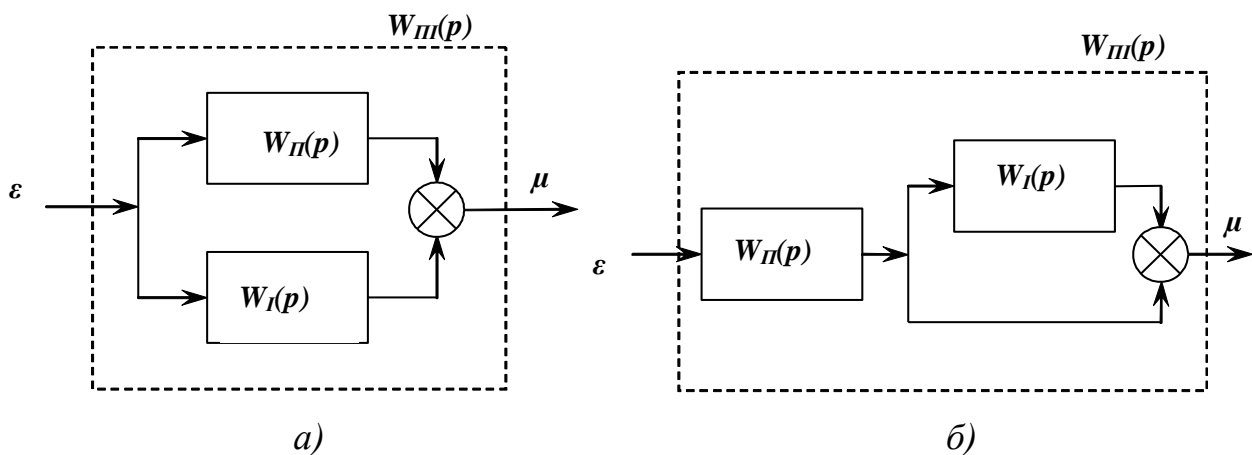
$$\mu = K_p \varepsilon + \frac{1}{T_I} \int_0^t \varepsilon dt. \quad (9.19)$$

Передавальна функція ПІ-регулятора

$$W_{PI}(p) = K_p + \frac{1}{T_I p}. \quad (9.20)$$

За структурою ПІ-регулятор еквівалентні паралельному з'єднанню П-регулятора з передавальною функцією $W_{PI}(p) = K_p$ та І-регулятора з передавальною функцією $W_I(p) = 1/T_I p$ (рис. 9.6, а).

Якщо при настроюванні ПІ-регулятора установити дуже велике значення постійної часу T_I , то він перетвориться в П-регулятор.



а – з передавальною функцією (9.20); б – з передавальною функцією (9.22)

Рисунок 9.6 – Структурна схема ідеальних ПІ-регуляторів

Якщо при настроюванні регулятора установити дуже малі значення K_p , то отримаємо І-регулятор з коефіцієнтом передачі по швидкості $1/T_I$.

Перехідна характеристика ПІ-регулятора з передавальною функцією (9.20) представлена на рис. 9.7 (пряма 1).

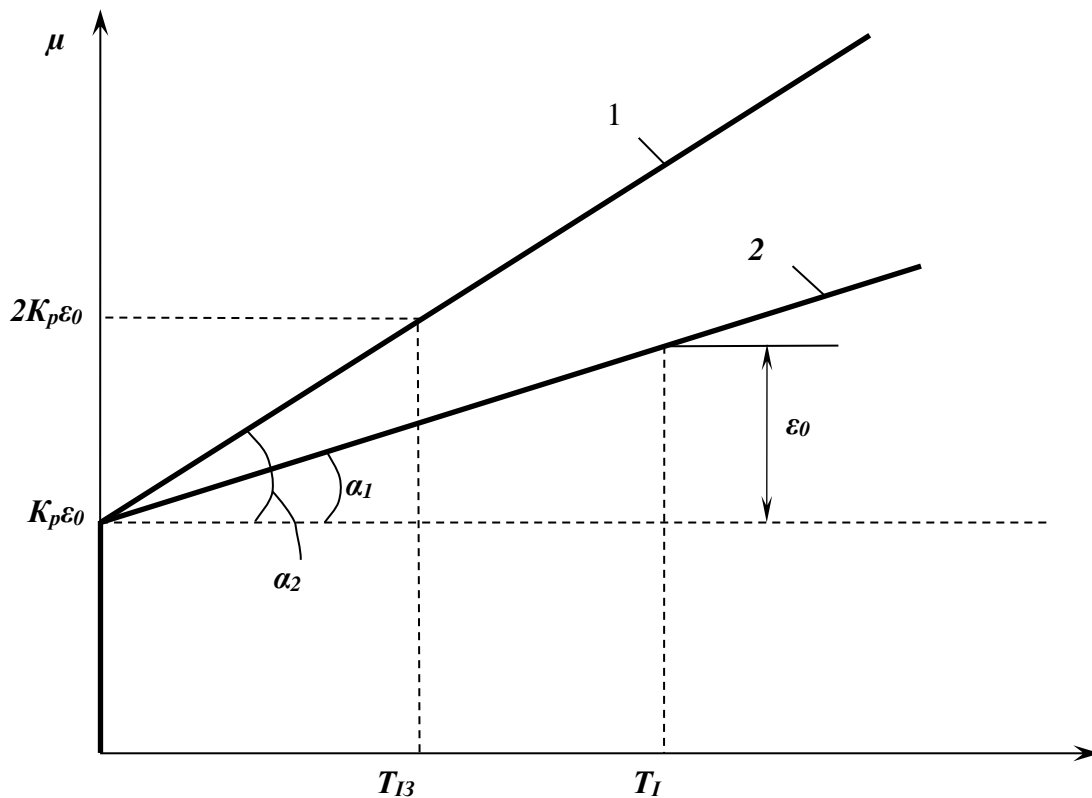


Рисунок 9.7 – Закон ПІ-регулювання регуляторів з передавальною функцією (9.20) (пряма 1) і з передавальною функцією (9.22) (пряма 2) при надходженні на вхід постійного сигналу ε_0 і при однаковому значенні коефіцієнта передачі K_p регуляторів

При стрибкоподібній зміні регульованої величини на значення $x=x_0=\varepsilon_0$ ідеальний ПІ-регулятор спочатку миттєво переміщує виконавчий механізм на величину $K_p \varepsilon_0$, пропорційну відхиленню x_0 регульованої величини, після чого виконавчий механізм регулятора додатково переміщується в той же бік зі швидкістю ε_0/T_I , пропорційно відхиленню регульованої величини. Отже, у ПІ-регуляторі при відхиленні регульованої величини від заданого значення миттєво спрацьовує пропорційна (статична) частина регулятора, а потім вплив на об'єкт поступово збільшується під дією інтегральної (астатичної) частини регулятора.

Параметрами налаштування регулятора є коефіцієнт підсилення K_p і постійна часу інтегрування T_I .

ІІІ-регулятор зі структурною схемою, приведеною на рис. 9.6, *а*, і передавальною функцією (9.20) має незалежний один від іншого параметри налаштування K_p і T_I .

Крім схеми на рис. 9.6, *а* на практиці широко застосовується структурна схема ІІІ-регулятора, представлена на рис. 9.6, *б*.

Схема на рис. 9.6, *б* реалізує закон регулювання виду

$$\mu = K_p \left(\varepsilon + \frac{1}{T_{I3}} \int_0^t \varepsilon dt \right). \quad (9.21)$$

Постійну часу T_{I3} прийнято називати (за термінологією заводів-виготовлювачів) постійною часу ізодрома або просто часом ізодрома.

Передавальна функція регулятора

$$W_{III}(p) = \frac{K_p (T_{I3} p + 1)}{T_{I3} p}. \quad (9.22)$$

Таким чином, ІІІ-регулятор зі структурною схемою, приведеною на рис. 9.6, *б*, має взаємозалежні параметри налаштування статичної й астатичної частин за коефіцієнтом посилення K_p . Так, при настроюванні коефіцієнта підсилення K_p буде змінюватися і постійна часу інтегрування:

$$T_I = T_{I3} / K_p. \quad (9.23)$$

Розглянемо фізичний зміст постійної часу ізодрома T_{I3} . Припустимо, що на вхід регулятора з законом ІІІ-регулювання (9.19) надійшов постійний сигнал ε_0 . Так як постійну величину можна виносити за знак інтеграла, то при цьому вираз (9.19) можна записати у вигляді

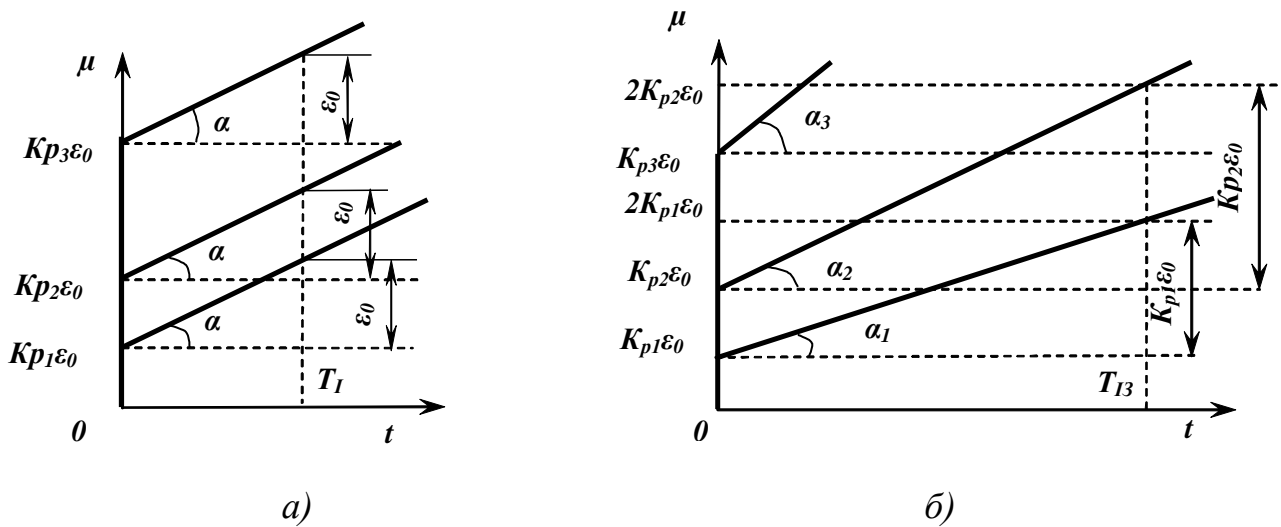
$$\mu = K_p \varepsilon_0 (1 + t / T_{I3}). \quad (9.24)$$

При надходженні на вхід регулятора постійного сигналу $\varepsilon = \varepsilon_0$ у початковий момент ($t = 0$) миттєво спрацьовує пропорційна складова і на виході регулятора з'являється сигнал $\mu_1 = K_p \varepsilon_0$. Надалі за законом (9.24) лінійно починає наростати вихідний сигнал від інтегральної складової і при $t = T_{I3}$ досягне значення $\mu_2 = 2 K_p \varepsilon_0$.

Таким чином, постійною часу ізодрома регулятора з ІІІ-законом регулювання (9.21) називається час, протягом якого від дії інтегральної

(астатичної) частини регулятора подвоюється пропорційна (статична) складового закону регулювання.

На рис. 9.7 наведені перехідні характеристики в ПІ-регуляторах (9.19) і (9.21) при надходженні на їхній вхід постійного сигналу x_0 при однакових значеннях коефіцієнта підсилення K_p . З рис. 9.7 добре видно геометричний зміст постійної часу інтегрування регулятора (9.19) і постійної часу ізодрома регулятора (9.21).



- a* – для регуляторів з передавальною функцією (9.20);
- б* – для регуляторів з передавальною функцією (9.22)

Рисунок 9.8 – Характер зміни законів ПІ-регулювання при різних постійних значеннях коефіцієнта підсилення K_p регуляторів

На рис. 9.7 приведені закони ПІ-регулювання при $K_p > 1$. Якщо $K_p < 1$, то кут нахилу α_1 інтегрального складового *1* закону ПІ-регулювання (9.19) буде більше кута нахилу α_2 інтегрального складового *2* закону ПІ-регулювання (9.21). У цьому випадку пряма *1* піде вище прямої *2*.

На рис. 9.8 наведені закони регулювання (9.19) і (9.21) при різних значеннях коефіцієнта підсилення K_p регуляторів ($K_{p1} > K_{p2} > K_{p3}$). З рис. 9.8, *a* видно, що при законі ПІ-регулювання (9.19) швидкість наростання інтегральної складової на виході регулятора при зміні K_p не змінюється. При законі ПІ-

регулювання (9.21) у випадку зміни K_p пропорційно змінюється і швидкість наростання інтегральної складової на виході регулятора.

Перехідна характеристика $h(t)$ представлена на рис. 9.9.

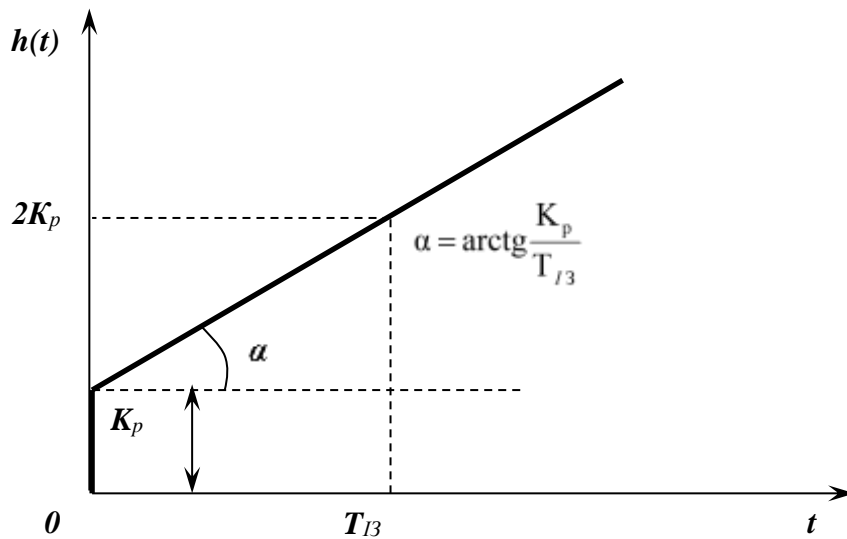


Рисунок 9.9 – Перехідна характеристика $h(t)$

АФХ $W(i\omega)$ представлена на рис. 9.10.

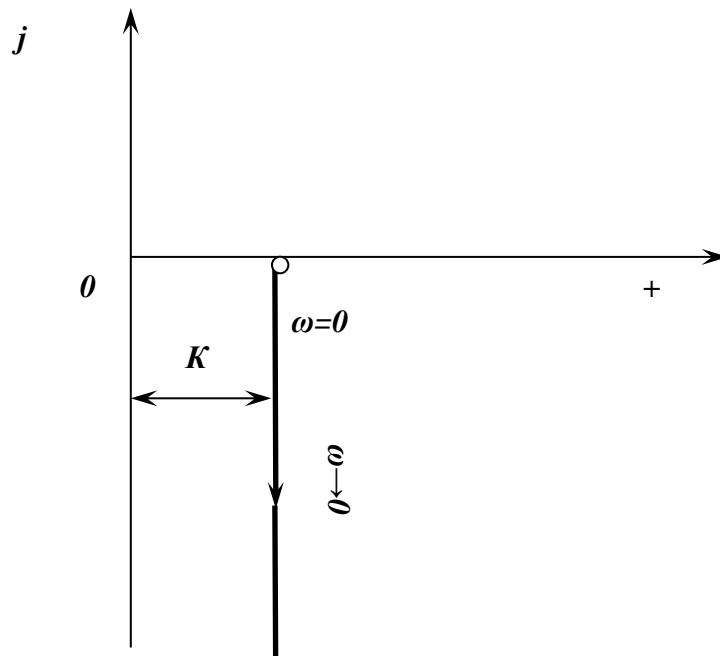


Рисунок 9.10 – АФХ $W(i\omega)$

АЧХ $A(\omega)$ представлена на рис. 9.11.

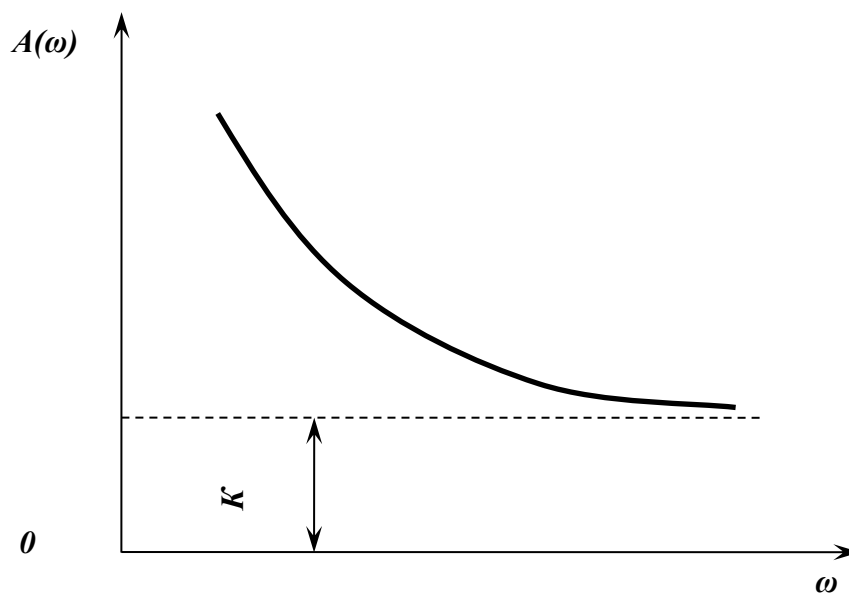


Рисунок 9.11 – АЧХ $A(\omega)$

ФЧХ $\varphi(i\omega)$ представлена на рис. 9.12.

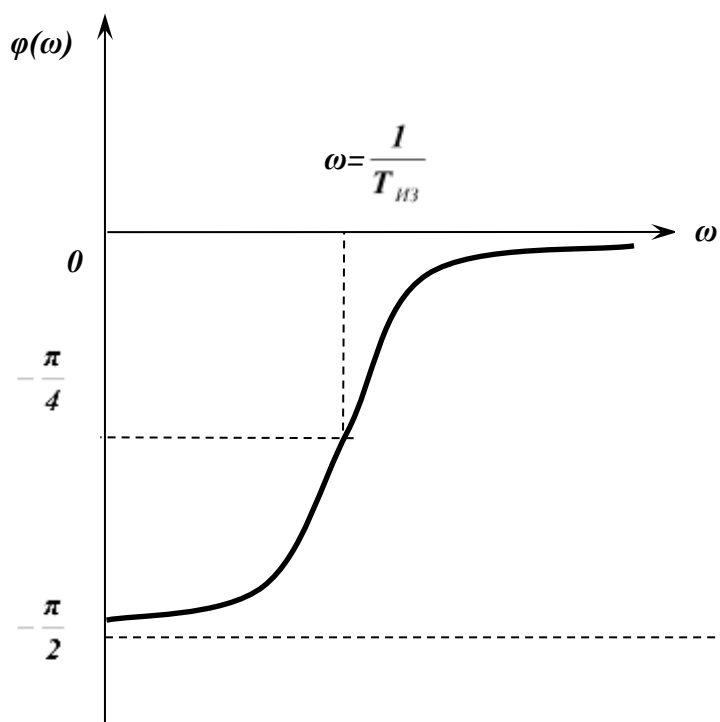


Рисунок 9.12 – ФЧХ $\varphi(i\omega)$

9.5 Пропорційно-інтегрально-диференційні регулятори

Ці регулятори впливають на об'єкт регулювання пропорційно відхиленню ε регульованої величини, інтегралові від цього відхилення і швидкості зміни регульованої величини:

$$\mu = K_p \varepsilon + \frac{1}{T_I} \int_0^t \varepsilon dt + T_D \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (9.25)$$

Приклад структурної схеми ПІД-регулятора подано на рис. 9.13. Так само, як і для законів ПІ- і ПД-регулювання, структурна схема ПІД-регулятора може мати різновиди з загальним коефіцієнтом підсилення для різних складових закону регулювання. Закон регулювання при цьому може мати вигляд

$$\mu = K_p \left(\varepsilon + \frac{1}{T_{IB}} \int_0^t \varepsilon dt + T_{IB} \frac{d\varepsilon}{dt} \right). \quad (9.26)$$

Передавальна функція ПІД-регулятора (9.25) має вигляд

$$W_{\text{ПІД}}(p) = K_p + \frac{1}{T_I p} + T_D p. \quad (9.27)$$

Передавальна функція ПІД-регулятора (9.26) має вигляд

$$W_{\text{ПІД}}(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_{IB} p} + T_{IB} p \right). \quad (9.28)$$

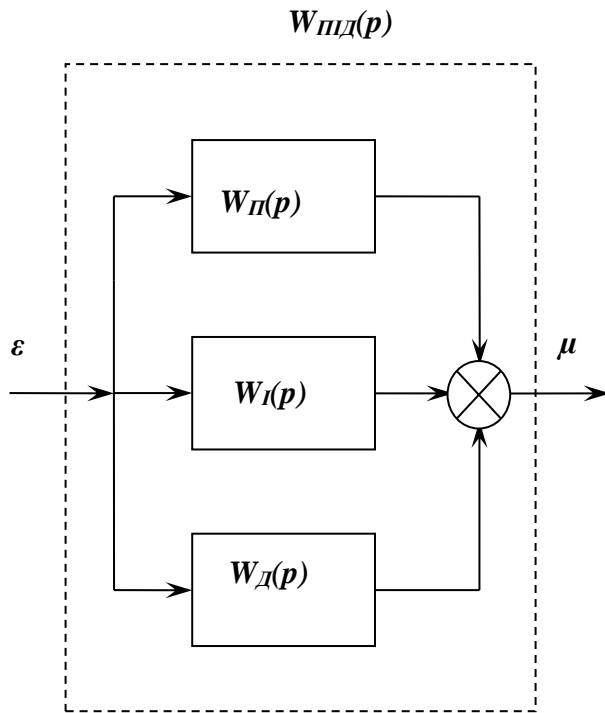


Рисунок 9.13 – Приклад структурної схеми ПІД-регулятора

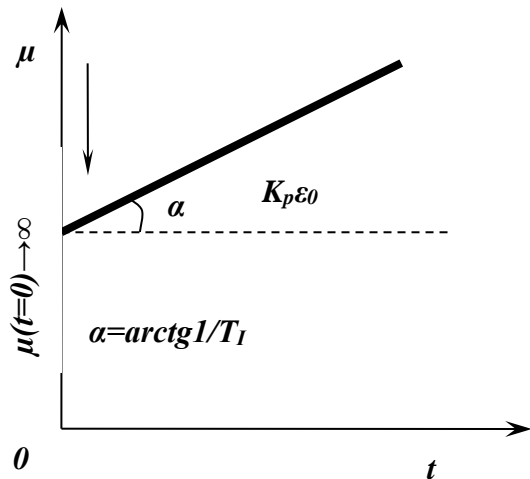


Рисунок 9.14 – Закон ПІД-регулювання при надходженні на вхід регулятора постійного сигналу $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$

При стрибкоподібній зміні регульованої величини ідеальний ПІД-регулятор у початковий момент часу робить миттєвий нескінченно великий вплив на об'єкт регулювання; потім величина впливу одразу падає до значення, обумовленого пропорційною частиною регулятора, після чого, як і в ПІ-регуляторі, поступово починає робити свій вплив астатична частина регулятора (рис. 9.14).

Параметрами налаштування ПІД-регулятора (9.27) є коефіцієнт пропорційності регулятора K_p , постійна часу інтегрування T_I і постійна часу диференціювання T_D .

Параметрами налаштування ПІД-регулятора (9.28) є K_p , T_{I3} і $T_{ВП}$.

Перехідна характеристика $h(t)$ представлена на рис. 9.15.

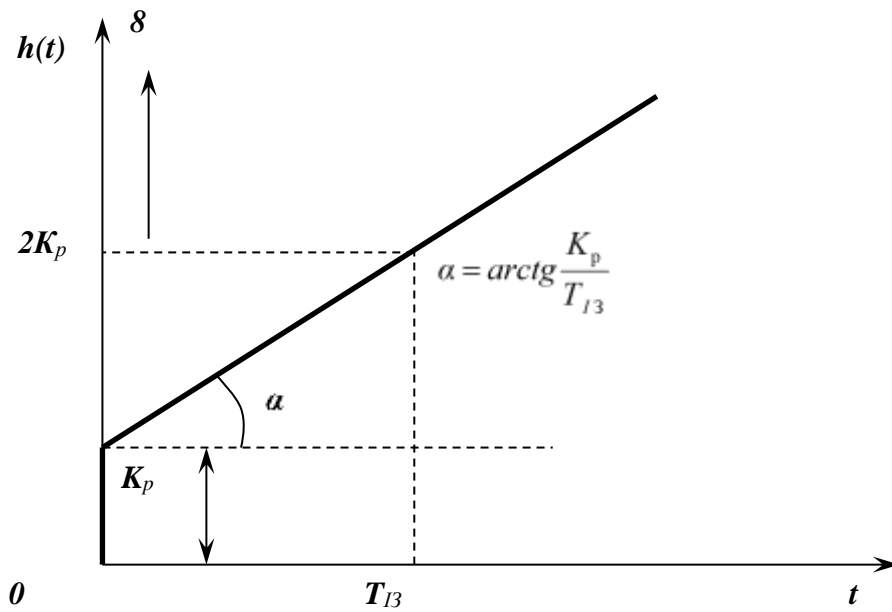


Рисунок 9.15 – Перехідна характеристика $h(t)$

АФХ $W(i\omega)$ представлена на рис. 9.16. АЧХ $A(\omega)$ представлена на рис. 9.17.

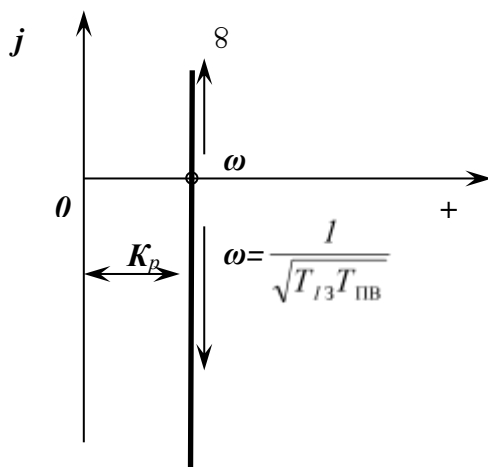


Рисунок 9.16 – АФХ $W(i\omega)$

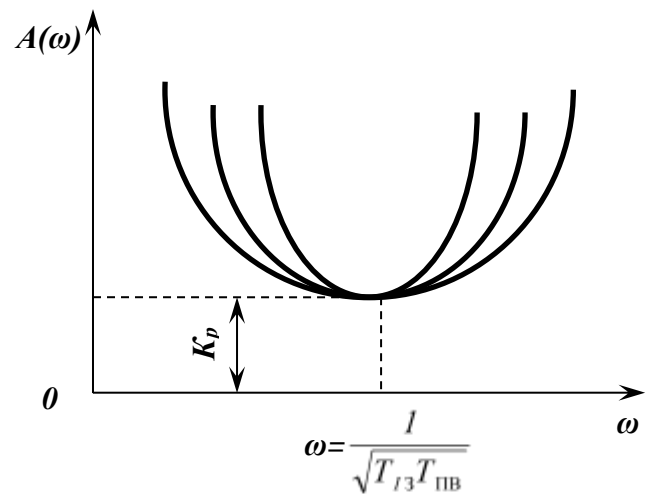


Рисунок 9.17 – АЧХ $A(\omega)$

ФЧХ $\phi(i\omega)$ представлена на рис. 9.18.

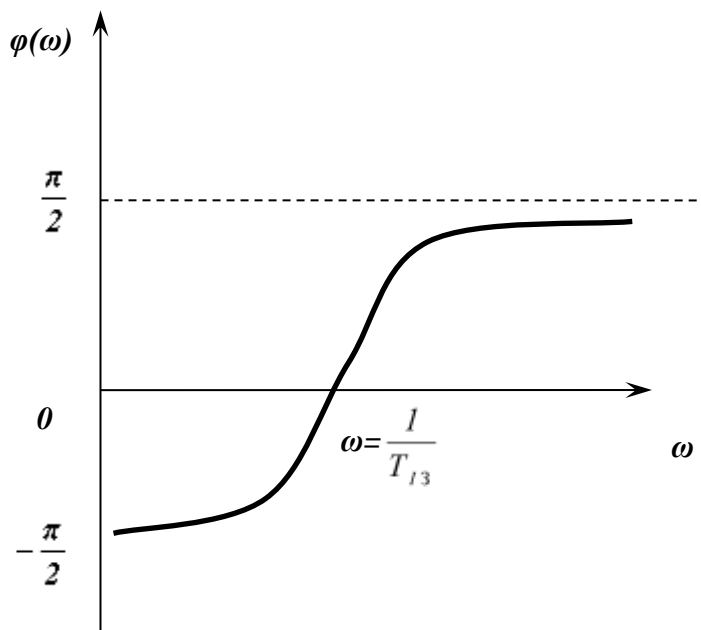


Рисунок 9.18 – ФЧХ $\varphi(i\omega)$

Закони керування типових регуляторів та їх передавальні функції зведені до табл. 9.1.

Таблиця 9.1 – Характеристики типових ПІ-, ПІД-регуляторів і диференціаторів

Вид характеристики	Характеристика регулятора типу		
	ПІ	ПІД	Диференціатора
Регулювання	$y = K_p \left(x + \frac{1}{T_{I3}} \int_0^t x dt \right)$	$y = K_p \left(x + \frac{1}{T_{I3}} \int_0^t x dt + T_{IВ} \frac{dx}{dt} \right)$	$T_d \frac{dy}{dt} + y = K_d T_d \frac{dx}{dt}$
Передавальна функція	$K_p \left(x + \frac{1}{T_{I3} p} \right)$	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_{I3} p} + T_{IВ} p \right)$	$\frac{K_d T_d}{T_d p + 1}$

Для таких регуляторів постійні часу інтегрування $T_I = T_{I3} / K_p$ і диференціювання $T_d = K_p T_I$ залежать від коефіцієнта передачі регулятора.

ПІД-регулятор за можливостями налаштування є більш універсальним порівняно з іншими регуляторами. З його допомогою можна здійснювати різні закони регулювання [7].

Так, при $T_D = 0$ і нескінченно великому значенні T_I (9.27) отримуємо П-регулятор (9.4); при $K_p = 0$ і $T_D = 0$ отримуємо І-регулятор (9.13); при $K_p = 0$ і $T_I = \infty$ отримуємо Д-регулятор (9.16); при $T_D = 0$ отримуємо ІІІ-регулятор (9.20).

Контрольні запитання до Розділу 9

1. Наведіть основні властивості пропорційного регулятора.
2. Що розуміється під терміном «параметр настроювання» регулятора?
3. Наведіть основні властивості інтегрального регулятора.
4. Наведіть основні властивості диференціатора.
5. Наведіть основні властивості пропорційно-інтегральних регуляторів.
6. Наведіть основні властивості пропорційно-інтегрально-диференціальних регуляторів.

10 СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

10.1 Метод розширених амплітудно-фазових характеристик

Розглянемо послідовність розрахунку системи автоматичного регулювання на заданий ступінь загасання ψ і прийоми побудови лінії рівного ступеня загасання, якщо відомі аналітичні вирази розширених амплітудно-фазових характеристик (РАФХ) об'єкта і регулятора.

Послідовність розрахунку системи регулювання на заданий ступінь загасання та сама, що й при розрахунку стійкості. Однак, якщо у випадку розрахунку стійкості визначається область, що обмежує стійкий характер процесу регулювання, то в даному випадку необхідно побудувати лінії рівного загасання і на них – знайти конкретні значення параметрів регулятора, що настроюються.

Розглянемо порядок розрахунку.

Дано розширену амплітудно-фазову характеристику об'єкта, яка виражена залежно від обраного значення m , частоти ω і параметрів об'єкта:

$$W(m, i\omega)_{ob} = A(m, \omega)_{ob} e^{-i\varphi(m, \omega)_{ob}}. \quad (10.1)$$

Дано розширену амплітудно-фазову характеристику регулятора, яка виражена залежно від обраного значення ступеня загасання ψ , частоти ω і параметрів налаштування C_0 , C_1 і C_2 :

$$W(m, i\omega)_p = A(m, \omega)_p e^{-i\varphi(m, \omega)_p}. \quad (10.2)$$

Виходячи з умови

$$W(m, i\omega)_{ob} W(m, i\omega)_p = 1, \quad (10.3)$$

маємо:

$$A(m, \omega)_p e^{-i\varphi(m, \omega)_p} = \frac{1}{A(m, \omega)_{ob}} e^{i\varphi(m, \omega)_{ob}}. \quad (10.4)$$

Це рівність двох комплексних чисел можлива в тому випадку, якщо рівні модулі векторів, а аргументи відрізняються на $2\pi n$ (звичайно можна обмежитися випадком $n = 0$), тобто

$$\begin{cases} A(m, \omega)_p = \frac{1}{A(m, \omega)_{об}} \\ \varphi(m, \omega)_p = \varphi(m, \omega)_{об} \end{cases} \quad (10.5)$$

Розв'язують систему рівнянь (10.5) із двома невідомими, у якості яких вибирають параметри регулятора, що настроюються.

$$C_0 = f_0(m, \omega, C_2), \quad (10.6)$$

$$C_1 = f_1(m, \omega, C_2). \quad (10.7)$$

Підставляють у ці рівняння чисельні значення параметрів об'єкта, обрану величину ступеня коливальності m і отримують остаточно:

$$C_0 = F_0(\omega, C_2), \quad (10.8)$$

$$C_1 = F_1(\omega, C_2). \quad (10.9)$$

Якщо розрахунок ведуть для регулятора з двома параметрами налаштування, наприклад C_0 і C_1 , то вважають, що $C_2=0$. Якщо ж регулятор із трьома параметрами налаштування, то визначають C_0 і C_1 залежно від частоти для різних значень C_2 .

Підставляють у рівняння (10.8), (10.9) чисельні значення частоти від нуля до значення, при якому C_0 стає від'ємною величиною, або частоти «зрізу», якщо при цьому значенні частоти параметр C_0 продовжує залишатися додатною величиною.

Будують у координатах C_0, C_1 залежність між параметрами налаштування регулятора. Отримана крива є лінією рівного ступеня загасання процесу регулювання. Параметри налаштування, що лежать всередині області, обмеженої даною кривою, забезпечать процес регулювання зі ступенем загасання більше заданої, а ті, що лежать поза цією кривою – зі ступенем загасання менше заданої.

В даний час не існує єдиного погляду на те, яка саме степінь загасання є оптимальною. Впевнено можна лише сказати, що в більшості випадків оптимальний степінь загасання знаходиться в межах $0,75 \div 0,90$. Більш визначений вибір ступеня загасання виробляється залежно від конкретних вимог, зокрема до максимально допустимого відхилення регульованої величини, до тривалості перехідного процесу, а також з урахуванням інтегрального критерію

якості. Досвід експлуатації показує, що значення ступеня загасання **0,75** може задовольняти багатьом вимогам практики.

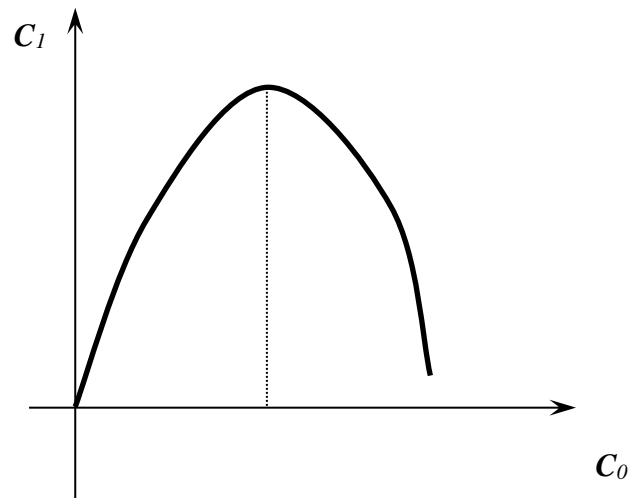


Рисунок 10.1 – Залежність між параметрами налаштування регулятора

10.2 Дисперсійний метод

У цьому методі якість регулювання оцінюють за значенням дисперсії помилки регулювання σ_ε^2 . Якщо вплив, що задає, $x(t) = \text{const}$, а вплив, що збурює $\varphi(t)$ прикладений до виходу об'єкта регулювання, то

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \left| \frac{1}{1 + W_{oo}(j\omega)W_p(j\omega)} \right|^2 d\omega, \quad (10.10)$$

де $S_\varphi(\omega)$ – спектральна щільність збурення $\varphi(t)$;

$W_{oo}(j\omega)$, $W_p(j\omega)$ – АФХ об'єкта і регулятора відповідно.

Рухаючись вздовж границі області заданого ступеня коливальності, можна побудувати за (10.10) залежність $\sigma_\varepsilon^2 = f(K_p)$ аналогічно тій, що зображена на рис. 10.2 і за критерієм $\sigma_\varepsilon^2 = \min$ обрати оптимальні значення K_p і T_I .

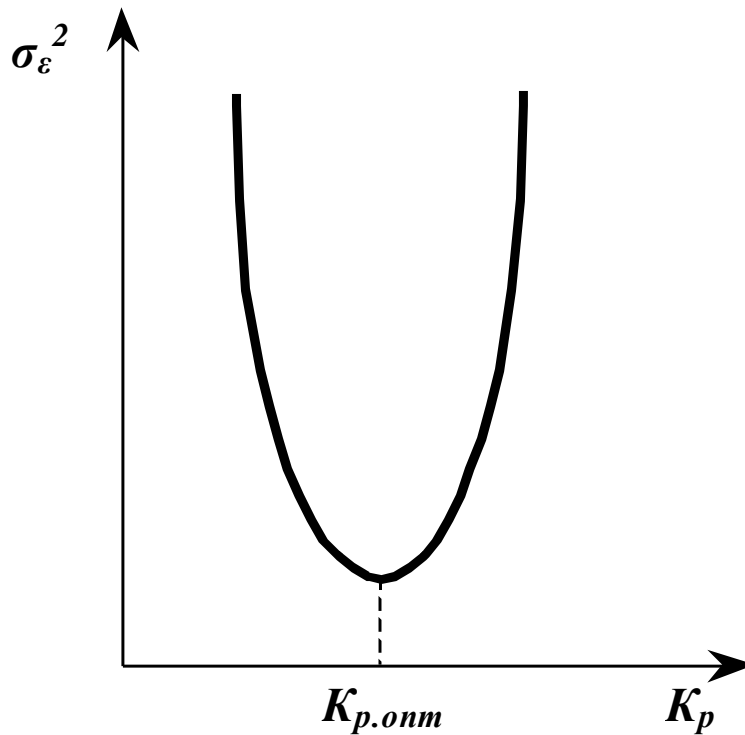


Рисунок 10.2 – Залежність $\sigma_\varepsilon^2 = f(K_p)$ вздовж границі області заданого ступеня стійкості

10.3 Інформаційний метод

Одноконтурна АСР, зображена на рис. 10.3, шляхом найпростіших перетворень приводиться до виду, що наведено на рис. 10.4. У цьому випадку її можна розглядати як замкнутий канал передачі інформації $x \rightarrow y$.

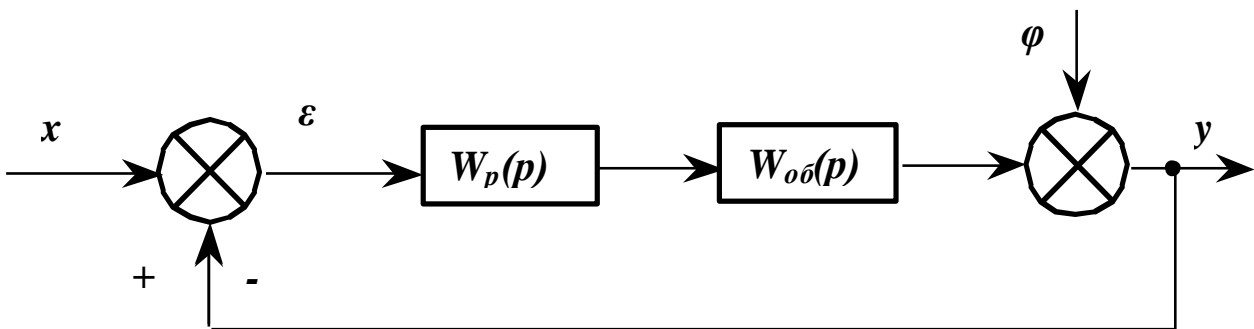


Рисунок 10.3 – Структурна схема одноконтурної АСР

З інформаційних позицій точність роботи такого каналу тим вище, чим більше його пропускна здатність

$$R_x = \int_0^F \ln \left[1 + \frac{S_x(f) |W_{об}(jf) W_p(jf)|^2}{S_\varphi(f)} \right] df, \quad (10.11)$$

де $f = \omega/2\pi$; $S_x(f)$ і $S_\varphi(f)$ – спектральні щільності сигналів $x(t)$ і $\varphi(t)$;

$W_{об}(jf)$ і $W_p(jf)$ – АФХ об'єкта і регулятора;

$F = \omega_{зріз}/2\pi$ – частота зрізу $S_\varphi(f)$.

В інформаційній теорії регулювання для оптимізації розглянутої системи застосовують критерій $R = \max$, що при нормальних видах одномірної щільності розподілу ймовірностей $x(t)$ і $\varphi(t)$ збігається з критерієм мінімуму дисперсії помилки регулювання.

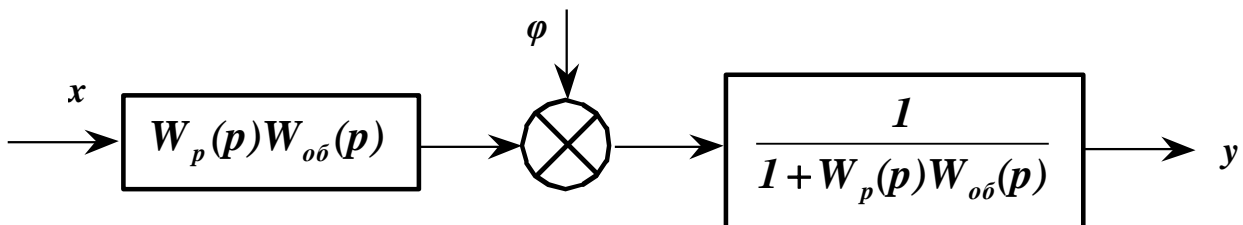


Рисунок 10.4 – Перетворена схема одноконтурної АСР

Для АСР із ПІ-регулятором при $R_x = \max$ оптимальні параметри налаштування c_0 і c_1 знаходять аналітично зі спільного розв'язання системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= f(c_1); \\ F + (dc_0/dc_1 - c_0/c_1) \arctg[(c_1/c_0)F] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

де перше рівняння визначає в аналітичній формі границю області заданого ступеня коливальності АСР.

Для визначення величини F використовують рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_0^F S_\varphi(f) df = a\sigma_\varphi^2, \quad (10.13)$$

де a – досить мале число, що залежить від точності визначення $S_\varphi(f)$ у реальних умовах і заданій точності розв'язок поставленої задачі.

Наприклад, для багатьох процесів кореляційну функцію $K_\varphi(\tau)$ у довірчому інтервалі $0,1\sigma_\varphi^2$ з довірчою імовірністю $0,9$ можна апроксимувати виразом

$$K_{\varphi}(\tau) = \sigma_{\varphi}^2 e^{-\gamma|\tau|}, \quad (10.14)$$

Якщо на підставі прийнятих міркувань прийняти $a = 0,05$, то з (10.13) і (10.14) маємо

$$F = 2\gamma. \quad (10.15)$$

10.4 Метод максимуму амплітудно-частотної характеристики

Пояснимо метод на прикладі АСР із ПІ-регулятором. Послідовність розрахунків у цьому випадку наступна (рис. 10.5):

1) намалювати $W_{об}(j\omega)$ і задати кілька частот ω :

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n; \quad (10.16)$$

2) для кожної з частот ω_i провести вектор $W_{об}(j\omega)$ (вектор OA й аналогічні йому на рис. 10.5);

3) за частотною характеристикою об'єкта $W_{об}(j\omega)$ побудувати сімейство частотних характеристик розімкнутої системи для $K_p = 1$ і декількох значень T_{I3} :

$$W_I(j\omega) = (1 - j/T_{I3}\omega) W_{об}(j\omega). \quad (10.17)$$

Для цього варто задати кілька значень T_{I3} : $T_{I31}, T_{I32}, \dots, T_{I3n}$, потім кожен вектор $W_{об}(j\omega)$ при частоті ω , повернути на кут 90° і розділити на $\omega_i T_{I3}$. Вийде ряд нових векторів, аналогічних AC і відповідній частотній характеристиці розімкнутої системи при $\omega = \omega_i$ і $T_{I3} = T_{I3i}$. Точки C_i з'єднати плавними кривими;

4) провести пряму OE під кутом

$$\gamma = \arcsin(1/M); \quad (10.18)$$

5) шляхом підбору провести коло з центром на осі абсцис і радіусом r , що дотикається одночасно прямої OE і $W_I(j\omega)$ для даного T_{I3} ;

6) для заданого T_{I3} коефіцієнт передачі регулятора

$$K_p = M / ((M^2 - 1)r), \quad (10.19)$$

де r визначається згідно п. 5;

7) побудувати за результатами розрахунку в площині $K_p - K_p/T_{I3}$ (або $K_p - T_{I3}$) границю області заданого ступеня коливальності АСР. Подальші розрахунки з визначення оптимальної точки на цій границі аналогічні приведеним вище.

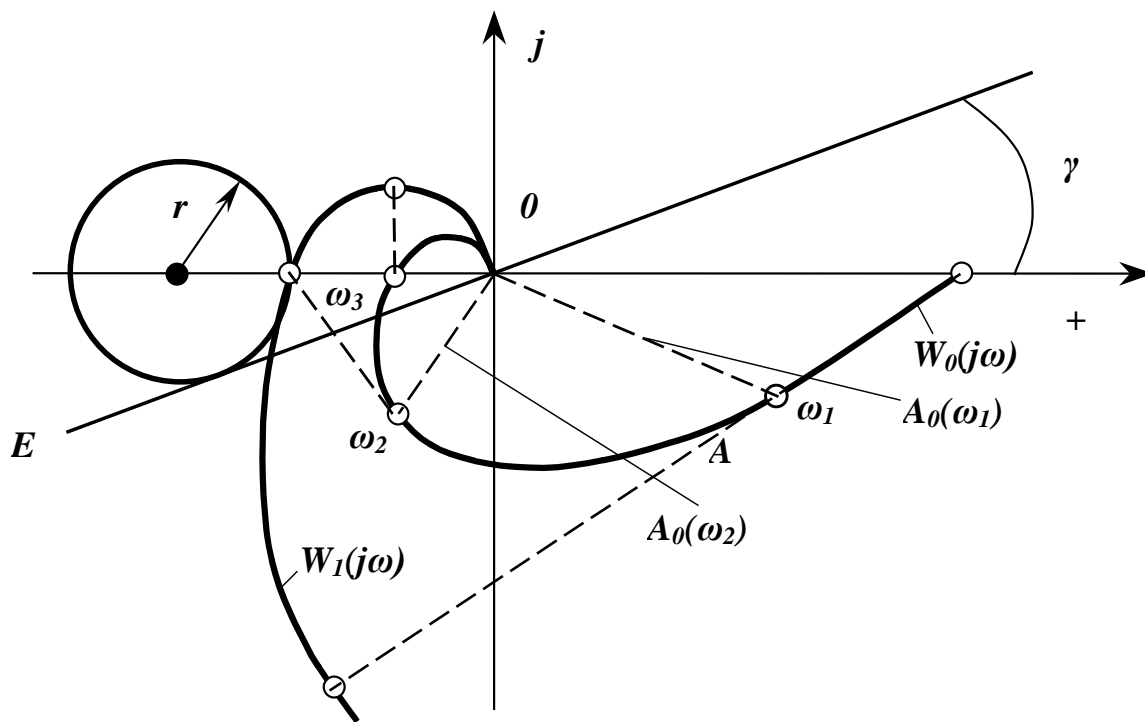


Рисунок 10.5 – Побудова границі області заданого запасу стійкості АСР методом максимуму АЧХ

Контрольні запитання до Розділу 10

1. Наведіть послідовність розрахунку систем регулювання методом розширених амплітудно-фазових характеристик об'єкта і регулятора.
2. Наведіть послідовність розрахунку систем регулювання методом максимуму амплітудно-характеристик.
3. Розкрийте зміст дисперсійного методу розрахунку систем регулювання.
4. Розкрийте зміст інформаційного методу розрахунку систем регулювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – 2-ге вид., – К.: Либідь, 2007. - 656 с.
2. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: курс лекцій (частина перша) – К.: НУХТ, 2004. – 124 с.
3. Гоголюк П.Ф. Теорія автоматичного керування: навч. посіб. / П.Ф. Гоголюк, Т.М. Гречин; Мін-во освіти і науки, молоді та спорту України, Нац. ун-т "Львівська політехніка". – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 279 с.
4. Сучасна теорія управління. Частина 2. Прикладні аспекти сучасної теорії управління [Електронний ресурс] : підручник для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», спеціалізацій «Автоматизоване управління технологічними процесами», «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси та виробництва» / Ю. М. Ковриго, О. В. Степанець, Т. Г. Баган, О. С. Бунке ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,98 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 155 с.
5. Теорія автоматичного управління. Навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. технології», освітньо-професійна програма «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем»; КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. Й. Штіфзон, П. В. Новіков, В. П. Бунь. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,25 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 144 с.
6. Теорія автоматичного керування. Терміни, поняття, визначення: Довідник для студ. напряму "Автоматизація та комп'ютерно-ігтегровані технології" / А.І. Жученко, Т.В. Аверіна; НТУУ "КПІ". - К.: НТУУ "КПІ", 2006. – 52 с.
7. Astrom K.J. Advanced PID Control [Текст] / Astrom K.J., Hagglund T. - Instrumentation, Systems, and Automation Society, USA, 2006. – 250 p.