

УДК 531.768

DOI: <http://doi.org/10.20535/0203-3771372019164539>

М. Г. Черняк<sup>1</sup>, доцент, к.т.н., В. О. Кривоноженков<sup>2</sup>, студент,  
Р. В. Чорноморець<sup>3</sup>, студент

## КАЛІБРУВАННЯ ТРИВІСНОГО БЛОКУ НАВІГАЦІЙНИХ АКСЕЛЕРОМЕТРІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

**En** This paper presents the alternative calibration technique of a triaxial accelerometer unit based on the ellipsoid fitting. The proposed method allows performing high-quality identification of the metrological model parameters of the unit in the absence of information about its spatial orientation. The fitting procedure is based on the geometry constraint of an ellipsoid and insensitiveness to small errors in the data.

The effectiveness of the proposed method was confirmed during the experiment using a block based on the navigation accelerometer A-17. The calibration results have been validated using professional calibration tools. Based on a series of tests, the measurement accuracy of this unit can reach  $3 \cdot 10^{-5}g$ , which means that the proposed method has high calibration accuracy and can meet the application requirements of the navigation triaxial unit of accelerometers.

Described technique can also be used with other sensors, such as gyroscopes or magnetometers. However, the inability to use the calibrated unit in the IMU orthogonal coordinate system results in the impossibility of calibrating several units in one coordinate system.

**Ru** В статье представлен новый способ калибровки трехосного блока навигационных акселерометров, основанный на использовании математического аппарата эллиптических функций. Способ позволяет с высокой точностью идентифицировать коэффициенты метрологической модели блока при отсутствии информации о его пространственной ориентации.

Эффективность предложенного способа подтверждена в ходе эксперимента по калибровке блока акселерометров на основе навигационного акселерометра А-17.

### Вступ

Тривісний блок навігаційних акселерометрів (БА) у складі інерціальної навігаційної системи (ІНС) рухомого об'єкту здійснює перетворення проєкцій уявного лінійного прискорення об'єкта на свої вимірювальні осі (ВО) у вихідні електричні сигнали трьох акселерометрів (АК) встановлених у БА. Розрахунок числових значень цих проєкцій здійснюється у ІНС по метрологічній моделі (ММ) БА, числові значення індивідуальних

<sup>1</sup> КПІ ім. Ігоря Сікорського

<sup>2</sup> КПІ ім. Ігоря Сікорського

<sup>3</sup> КПІ ім. Ігоря Сікорського

коефіцієнтів якої попередньо визначаються та паспортизуються шляхом калібрування БА в лабораторних умовах на відповідному за точністю стандартному обладнанні [1].

Традиційно при первинному калібруванні БА, у якості задавача його тестових положень відносно площини місцевого горизонту використовують прецизійні (похибка не більше 3..5 кут. сек. ( $3\sigma$ )) двовісні або тривісні поворотні стенди, вони мають дуже високу вартість і потребують практично ідеальних лабораторних умов використання, які є лише у виробників БА [2]. Це потребує значних затрат виробників на придбання відповідних стендів і суттєво обмежує можливості проведення повторних калібрувань БА в умовах його експлуатації.

У роботі [3] представлено альтернативний підхід до калібрування БА, що полягає в уточненні паспортних коефіцієнтів БА шляхом додавання до коефіцієнтів деяких приростів, розрахованих за ітеративним алгоритмом. Такий спосіб взагалі не потребує точного позиціонування, натомість необхідно обов'язково точно знати початкові паспортні коефіцієнти БА або акселерометрів, що входять до складу БА. Як правило, така інформація про БА або його АК не завжди відома.

### Постановка задачі

Метою даної статті є розробка нового способу калібрування БА, який не потребує ані точного позиціонування БА відносно вектору сили тяжіння, ані знання його початкових (паспортних) коефіцієнтів, та експериментальна перевірка якості калібрування навігаційного БА за цим способом.

### Метрологічна модель тривісного блоку акселерометрів

Представимо метрологічну модель (ММ) ідеального блоку акселерометрів у вигляді:

$$\mathbf{u} = K \cdot R(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad [\text{Вих}] \quad (1)$$

де  $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ ,  $[g]$  – вимірюваний вектор уявного прискорення;

$\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ ,  $[\text{Вих}]$  – вектор вихідних сигналів вимірювачів блоку;

$\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$ ,  $[g]$  – вектор зміщення нуля;  $K$ ,  $[\text{Вих}/g]$  – матриця коефіцієнтів перетворення виду (2), де  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  – коефіцієнти перетворення вимірювачів по осях чутливості вимірювачів;  $R$ ,  $[1]$  – матриця переходу від системи координат (СК)  $x_a y_a z_a$ , зв'язаної із вимірювальними осями акселерометрів  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  встановлених у БА, до ортогональної приладової СК БА  $x_b y_b z_b$  (рис. 1, а), що у загальному випадку

являє собою матрицю (3) розмірністю  $[3 \times 3]$ , елементи якої чисельно рівні косинусам кутів між відповідними осями інструментальної та ортогональної СК, які можна виразити за допомогою ортів цих СК

$$K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}, [\text{Вих}/g], \quad (2)$$

$$R = \begin{bmatrix} \hat{x}_b \cdot \hat{x}_a & \hat{x}_b \cdot \hat{y}_a & \hat{x}_b \cdot \hat{z}_a \\ \hat{y}_b \cdot \hat{x}_a & \hat{y}_b \cdot \hat{y}_a & \hat{y}_b \cdot \hat{z}_a \\ \hat{z}_b \cdot \hat{x}_a & \hat{z}_b \cdot \hat{y}_a & \hat{z}_b \cdot \hat{z}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \alpha_{yx} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{xy} & \alpha_y & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_z \end{bmatrix}, [1]. \quad (3)$$

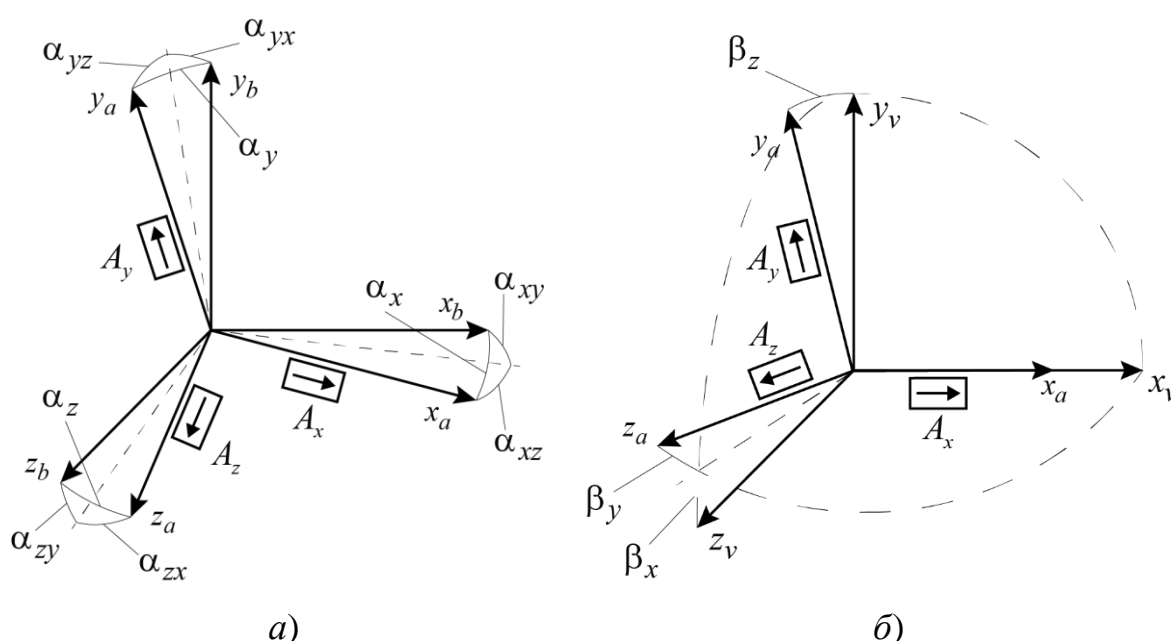


Рис. 1. Приладові системи координат: а) СК  $x_b, y_b, z_b$ ; б) СК  $x_v, y_v, z_v$

Числові значення цих коефіцієнтів визначаються та паспортизуються шляхом калібрування БА.

### Математична модель способу калібрування БА

Виразимо з узагальненої метрологічної моделі БА вимірюваний вектор  $l$

$$a = (K \cdot R)^{-1} \cdot (\hat{u} - b) = A \cdot (\hat{u} - b). \quad (4)$$

Матриця  $R$  містить дев'ять ненульових елементів, тому її визначення під час традиційного [1] калібрування потребує точного просторового позиціонування БА відносно вектора  $\vec{g}$ , що на стендовому обладнанні низької точності взагалі неможливе. Вирішенням цієї проблеми (прецизій-

ного калібрування БА на обладнанні низької точності) є використання для БА іншої, відмінної від  $x_b y_b z_b$ , приладової ортогональної системи координат  $x_v y_v z_v$ . Дана СК по своїй суті є уявною (не пов'язаною із базовими установчими поверхнями БА) та формується таким чином, що вісь  $x_v$  суміщається із відповідною вимірювальною віссю  $x_a$ , а вісь  $y_v$  розміщується у площині, заданій осями  $x_a$  та  $y_a$  (рис. 1, б). Тому зв'язок між системами  $x_v y_v z_v$  і  $x_a y_a z_a$  визначається всього трьома кутами  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  та  $\beta_z$ , що можна представити у вигляді матриці  $R_v$

$$R_v = \begin{bmatrix} 1 & \hat{x}_a \cdot \hat{y}_v & \hat{x}_a \cdot \hat{z}_v \\ 0 & \hat{y}_a \cdot \hat{y}_v & \hat{y}_a \cdot \hat{z}_v \\ 0 & 0 & \hat{z}_a \cdot \hat{z}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\beta_z & \cos\beta_x \sin\beta_y \\ 0 & \cos\beta_z & \cos\beta_y \sin\beta_x \\ 0 & 0 & \cos\beta_x \cos\beta_y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \beta_z & \beta_y \\ 0 & 1 & \beta_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Оскільки за будь якої просторової орієнтації блоку, модуль вимірюваного ним опорного вектора уявного прискорення  $\|\mathbf{a}\| = const$ , маємо

$$\|\mathbf{a}\| = \mathbf{a}^T \mathbf{a} = (\mathbf{A} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b}))^T (\mathbf{A} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b})) = const. \quad (6)$$

Розкриємо вираз (6), прийнявши  $\|\mathbf{a}\| = 1$ :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{A} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) - 1 &= 0; \\ (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{A} \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) - 1 &= 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H} \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{b}^T \mathbf{H} \mathbf{b} - 1 = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}} - 2\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{H} \mathbf{b} - 1 = 0,$$

де матриця  $\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  має вигляд

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_x^2} & -\frac{\beta_z}{k_x k_y} & \frac{\beta_x \beta_z - \beta_y}{k_x k_z} \\ -\frac{\beta_z}{k_x k_y} & \frac{\beta_z^2}{k_y^2} + \frac{1}{k_y^2} & -\frac{(\beta_x \beta_z - \beta_y) \beta_z}{k_y k_z} - \frac{\beta_x}{k_y k_z} \\ \frac{\beta_x \beta_z - \beta_y}{k_x k_z} & -\frac{(\beta_x \beta_z - \beta_y) \beta_z}{k_y k_z} - \frac{\beta_x}{k_y k_z} & \frac{(\beta_x \beta_z - \beta_y)^2}{k_z^2} + \frac{\beta_x^2}{k_x^2} + \frac{1}{k_z^2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Ретельно виконавши усі перетворення рівняння (7) з урахуванням (8), отримаємо нове рівняння:

$$au_x^2 + bu_y^2 + cu_z^2 + du_x u_y + eu_y u_z + fu_x u_z + hu_x + iu_y + ju_z - 1 = 0, \quad (9)$$

де:

$$\begin{aligned}
h &= -\frac{2(\beta_x\beta_z - \beta_y)b_z}{k_x k_z} + \frac{2b_y\beta_z}{k_x k_y} - \frac{2b_x}{k_x^2}; \\
i &= 2b_z \left( \frac{(\beta_x\beta_z - \beta_y)\beta_z}{k_y k_z} + \frac{\beta_x}{k_y k_z} \right) - 2b_y \left( \frac{\beta_z^2}{k_y^2} + \frac{1}{k_y^2} \right) + \frac{2b_x\beta_z}{k_x k_y}; \\
j &= -2b_z \left( \frac{(\beta_x\beta_z - \beta_y)^2}{k_z^2} + \frac{\beta_x^2}{k_z^2} + \frac{1}{k_z^2} \right) + 2b_y \left( \frac{(\beta_x\beta_z - \beta_y)\beta_z}{k_y k_z} + \frac{\beta_x}{k_y k_z} \right) - \frac{2(\beta_x\beta_z - \beta_y)b_x}{k_x k_z},
\end{aligned} \tag{10}$$

яке за формою є математичним рівнянням еліпсоїда [4]. Ліву частину рівняння еліпсоїда (9) можна трактувати як скалярний добуток двох векторів:

$$\alpha^T V = 0; \tag{11}$$

де  $\alpha = [a \ b \ c \ d \ e \ f \ h \ i \ j \ -1]$  – невідомий вектор, елементи якого зв'язані з шуканими коефіцієнтами метрологічної моделі (1) виразами (8) і (10);  $V = [u_x^2 \ u_y^2 \ u_z^2 \ u_x u_y \ u_y u_z \ u_x u_z \ u_x \ u_y \ u_z \ 1]$  – відомий вектор, елементи якого визначаються вихідними сигналами  $u_x, u_y, u_z$  БА.

Таким чином, задача визначення коефіцієнтів ММ (1) зводиться до визначення елементів вектора  $\alpha$  із подальшими розрахунками шуканих коефіцієнтів за формулами:

$$\begin{aligned}
k_x &= (A^{-1})_{11}; & k_y &= (A^{-1})_{22}; & k_z &= (A^{-1})_{33}; \\
\beta_x &= \frac{(A^{-1})_{23}}{(A^{-1})_{22}}; & \beta_y &= \frac{(A^{-1})_{13}}{(A^{-1})_{11}}; & \beta_z &= \frac{(A^{-1})_{12}}{(A^{-1})_{11}};
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{2} H^{-1} \begin{bmatrix} h \\ i \\ j \end{bmatrix}, \tag{13}$$

де  $A = \text{chol}(H)$  – розклад Холецького [5].

Повернемось до виразу (9). Нехай у результаті вимірювання опорного вектору  $\mathbf{a} = -\vec{g}$  за допомогою БА було отримано  $N$  наборів значень  $(u_{xi}; u_{yi}; u_{zi})$ , кожен із яких утворює відповідно вектор  $V_i$ . Тоді, невідомий вектор  $\alpha$  будемо шукати з наступної умови мінімуму

$$\sum_{i=1}^N \alpha^T V_i \rightarrow \min. \tag{14}$$

Зведемо вираз (14) до матричного вигляду, сформувавши додаткову матрицю  $D$  шляхом конкатенації векторів  $V_i$

$$D = [V_1; V_2; \dots; V_N]^T,$$

тоді

$$\sum_{i=1}^N \alpha^T V_i = \|D\alpha\|^2 = \alpha^T D^T D \alpha \rightarrow \min. \quad (15)$$

Доповнимо умову мінімуму (16) необхідною умовою існування еліпсоїда [4]:

$$4J - I^2 = 1, \quad (16)$$

де  $I = a + b + c$ ,  $J = ab + bc + ac - \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2 > 0$  – математичні величини, інваріантні до поворотів та переміщень еліпсоїда. Оскільки:

$$4J - I^2 = 2(ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$

то ми можемо привести вираз (16) за допомогою додаткової матриці  $C$  виду

$$C = \begin{bmatrix} C^* & 0_{[6 \times 4]} \\ 0_{[4 \times 6]} & 0_{[4 \times 4]} \end{bmatrix}; \quad C^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

до зручного матричного вигляду

$$4J - I^2 = \alpha^T C \alpha = 1.$$

Складемо на основі (15) та (16) функцію Лагранжа [6]

$$L(\alpha, \lambda) = \alpha^T D^T D \alpha + \lambda(1 - 4J + I^2) = \alpha^T D^T D \alpha + \lambda(1 - \alpha^T C \alpha). \quad (18)$$

Знайдемо частинні похідні від виразу (18) та, прирівнявши їх до нуля, сформуємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(\alpha, \lambda) = DD^T \alpha - \lambda C \alpha = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L(\alpha, \lambda) = 1 - \alpha^T C \alpha = 0, \end{cases}$$

яку перетворимо до вигляду

$$\begin{cases} DD^T \alpha = \lambda C \alpha \\ \alpha^T C \alpha = 1. \end{cases} \quad (19)$$

Згідно із [7] система (19) має лише один розв'язок. Оскільки матриця  $C$ , яка визначається за формулою (17), є розрідженою, розділимо матрицю  $DD^T$  та шуканий вектор  $\alpha$  наступним чином

$$DD^T = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ [6 \times 6] & [6 \times 4] \\ S_{21} & S_{22} \\ [4 \times 6] & [4 \times 4] \end{bmatrix}; \alpha_1 = [a \ b \ c \ d \ e \ f]^T; \alpha_2 = [h \ i \ j \ -1]^T.$$

Звідси, система (19) набуває вигляду:

$$\begin{cases} (S_{11} - \lambda C_1)\alpha_1 + S_{12}\alpha_2 = 0; \\ S_{21}\alpha_1 + S_{22}\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Звідки:

$$\begin{cases} C_1^{-1}(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})\alpha_1 = \lambda\alpha_1; \\ \alpha_2 = -S_{22}^{-1}S_{21}\alpha_1. \end{cases}$$

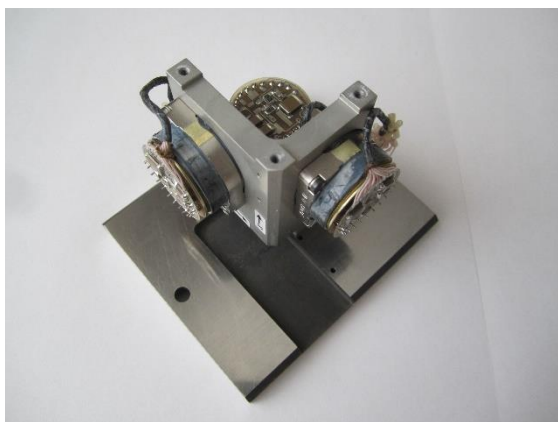
Тобто задача зводиться до пошуку власного вектора  $\alpha_1$ , що відповідає мінімальному додатному власному значенню  $\lambda$ .

Остаточний вигляд розв'язку

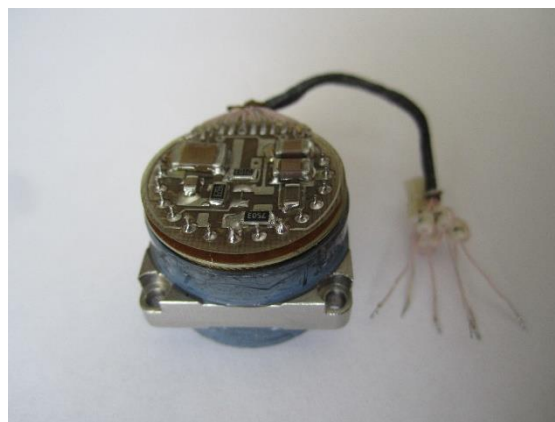
$$\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T.$$

### **Експеримент із калібрування БА за розробленим способом**

Об'єктом калібрування є навігаційний БА, показаний на рис. 2. *а*. БА побудований на основі прецизійних навігаційних акселерометрів А-17 (рис. 2, *б*), що призначені для вимірювання лінійних прискорень, у складі БІНС, транспортних ракет-носіїв, тактичних маневрених ЛА та наземних рухомих об'єктів [8]. Вихідні сигнали БА – аналогові у вигляді напруги постійного струму.



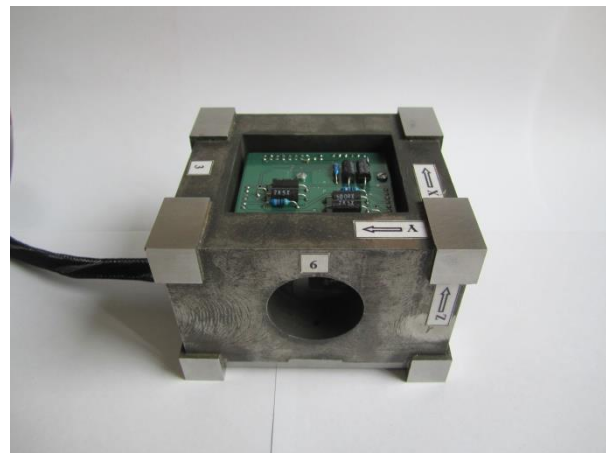
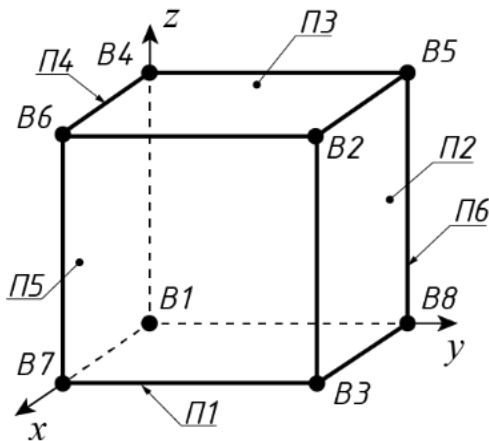
*а)*



*б)*

Рис. 2. Зовнішній вигляд БА (*а*) на базі акселерометрів А-17 (*б*)

Оскільки визначенню підлягають 9 коефіцієнтів метрологічної моделі БА (1), потрібно отримати не менше 9 різних вимірювань вихідних величин акселерометрів БА. Для цього БА встановлюється у кантувач, показаний на рис. 3. Кантувач має шість взаємно ортогональних поверхонь П1...П6, які у свою чергу визначають вісім вершин В1...В8. Така конструкція дає можливість при калібруванні БА встановити його у 14 тестових положень відносно відомого опорного вектора сили тяжіння  $\vec{a} = -\vec{g}$ .



а)

б)

Рис. 3. Поверхні і вершини (а) та зовнішній вигляд (б) кантувача із БА:

$x, y, z$  – осі кантувача; П1...П6 – основні тестові положення;  
В1...В8 – додаткові тестові положення

Задання шести основних положень П1...П6 відбувається шляхом встановлення кантувача відповідною гранню на горизонтальну поверхню (наприклад, вивірний стіл (рис. 4, а)). Додаткові вісім тестових положень задаються шляхом встановлення кантувача так, щоб відповідна вершина В1...В8 була спрямована вниз. Здійснити таку установку можна шляхом застосування допоміжного елемента типу труби із діаметром достатнім для забезпечення нерухомості положення кантувача із БА на горизонтальній поверхні столу (рис. 4, б).

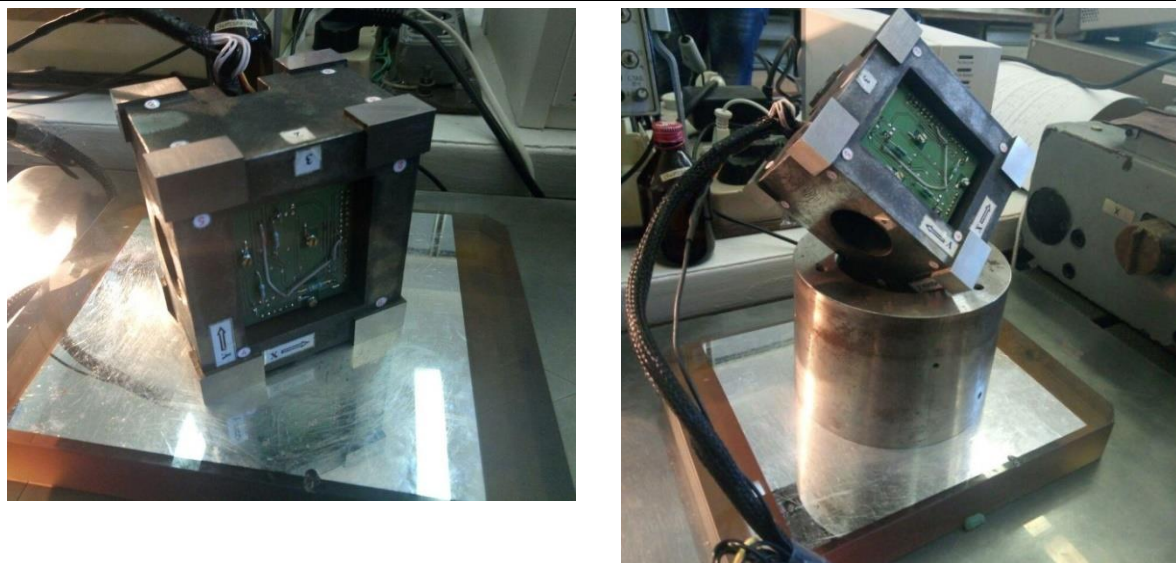
Результати калібрування БА за розробленим способом представлено у табл. 1.

Таблиця 1.

Коефіцієнти ММ БА, визначені в ході калібрування

$k_x, [B/g]$	-2,410618	$\theta_x, \cdot 10^{-5} [рад]$	625,454406	$b_x, \cdot 10^{-5} [g]$	564,518583
$k_y, [B/g]$	-2,403823	$\theta_y, \cdot 10^{-5} [рад]$	404,734018	$b_y, \cdot 10^{-5} [g]$	-288,4559
$k_z, [B/g]$	-2,371761	$\theta_z, \cdot 10^{-5} [рад]$	-65,046441	$b_z, \cdot 10^{-5} [g]$	463,952349





а)

б)

Рис. 4. Кантувач із БА, встановлений у положенні П1 (а) та В1(б)

Комплексна експериментальна перевірка якості калібрування БА за розробленим способом була виконана шляхом визначення похибки вимірювання модуля вектору сили тяжіння  $\Delta g$ , яка розраховується за формулою

$$\Delta g = \sqrt{\hat{g}_x^2 + \hat{g}_y^2 + \hat{g}_z^2} - g, [g] \quad (21)$$

У (21) складові вектора вимірювання  $[\hat{g}_x \hat{g}_y \hat{g}_z]^T$  попередньо розраховано за моделлю (4) у п'яти довільних перевірочних положеннях ПП1..ПП5, із використанням отриманих, під час калібрування, коефіцієнтів моделі БА (табл. 1).

Результати перевірки, наведені у табл. 2, показали можливість забезпечення визначення коефіцієнтів метрологічної моделі БА, шляхом його калібрування за розробленим способом, з точністю, яка задовольняє вимогам до навігаційного БА.

Таблиця 2.

Похибки вимірювання модуля прискорення сили тяжіння  
у перевірочних положеннях БА

№ ПП	ПП1	ПП2	ПП3	ПП4	ПП5
$\Delta g, \times 10^{-5} [g]$	-1,218286	1,684834	-2,989165	0,92949	-2,070008

## Висновки

Запропонований спосіб калібрування навігаційного БА забезпечує ідентифікацію всіх коефіцієнтів його лінійної метрологічної моделі (1) із

точністю не гірше  $3 \times 10^{-5} g$ . Суттєвою перевагою цього способу є те, що на відміну від існуючих, він не потребує, ані точного позиціонування БА відносно вектора сили тяжіння, ані знання початкових паспортних коефіцієнтів його акселерометрів.

Недоліком способу є неможливість (на теперішній час його відпрацювання) точного формування результатів вимірювань БА в ортогональній приладовій системі координат  $x_b y_b z_b$ , зв'язаної із базовими установчими поверхнями БА (рис. 1, а). Наслідком цього може бути невизначеність взаємного положення приладових систем координат БА і блоку гіроскопів у складі навігаційної системи. Усунення цього недоліку, шляхом аналітичного визначення взаємного положення приладових систем  $x_b y_b z_b$  та  $x_v y_v z_v$ , є метою подальших досліджень.

### Список використаної літератури

1. *Lawrence A.* Modern Inertial Technology: Navigation, Guidance and Control/ A. Lawrence. – Springer-Verlag. New York, 2004. –Р.280.
2. *Вавилова Н. Б.* Калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов [Текст] / Н. Б. Вавилова, Н. А. Парусников, И. Ю. Сазонов // Современные проблемы математики и механики, том I. – М.: МГУ, 2009. – С. 212-222.
3. Embedded navigation solution: Calibration // VectorNav. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.vectornav.com/support/library/calibration>.
4. *Fitzgibbon A.* Direct least square fitting of ellipses/ A. Fitzgibbon, M. Pilu, R. Fisher. – IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine intelligence, v.21(5), 1999. P.476 – 480.
5. *Вержбицкий В. М.* Основы численных методов [Текст] / В. М. Вержбицкий — М.: Высшая школа, 2009. — 840 с.
6. *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть 1 [Текст] / В. А. Зорич – М.: ФАЗИС, 1997. – 250 с.
7. *Qingde L., Griffiths, J.* Least squares ellipsoid specific fitting. Proceedings / L. Qingde, J. Griffiths. – Geometric Modeling and Processing, 2004. P. 335– 340.
8. *Збруцкий А. В.* Навигационные маятниковые компенсационные акселерометры для систем инерциальной навигации и управления подвижных объектов. Текст] / А. В. Збруцкий, Н. Г. Черняк // Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки: сб. допов. міжнар. наук.-техн. конф., 16–17 квітня 2017. –К., 2017. – с. 39 – 45.