

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЯДЕРНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

О. П. Кобушкін, Я. Д. Кривенко-Еметов

ЯДЕРНА ФІЗИКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З РОЗВ'ЯЗКАМИ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Прикладна фізика»
спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»*

Видання 2-е, перероблене та доповнене

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2023

Рецензенти: *Давидовський В.В.* д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співр., гол. наук. співр., зав. відділу теорії ядерних процесів ІЯД НАНУ
Єрмоленко Р.В., к. фіз.-мат. наук, доцент каф. ядерної фізики, КНУ ім. Тараса Шевченка
Кондаков В.О., к. фіз.-мат. наук, доцент каф. прикладної фізики, НТУУ “КПІ”

Відповідальний редактор *Литвинова Т.В.*, к. т. наук, доцент, в.о. директора ФТІ КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 09.12.2021 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту (протокол № 20 від 29.11.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Кобушкін Олександр Петрович, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Кривенко-Еметов Ярослав Дмитрович, канд. фіз.-мат. наук

ЯДЕРНА ФІЗИКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З РОЗВ’ЯЗКАМИ

Ядерна фізика: Збірник задач з розв’язками: [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спец. 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / О. П. Кобушкін, Я. Д. Кривенко-Еметов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Вид. 2-е, переробл. та доповн. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,25 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 120 с.

У посібнику розглянуто задачі та методи їх розв’язування відповідно до навчальної програми з курсу «Ядерна фізика». Для студентів, аспірантів і викладачів фізичних та фізико-технічних спеціальностей.

© О. П. Кобушкін, Я. Д. Кривенко-Еметов, 2023
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

Зміст

Передмова до другого видання	5
1. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ СТАБІЛЬНИХ ЯДЕР (Заняття 1)	6
§ 1.1. Задачі	7
§ 1.2. Відповіді та розв'язки	9
2. НАЙЛЕГШІ ЯДРА ТА ВЛАСТИВОСТІ ЯДЕРНИХ СИЛ (Заняття 2)	14
§ 2.1. Задачі	17
§ 2.2. Відповіді та розв'язки	17
3. ЯДЕРНІ МОДЕЛІ (Заняття 3 та 4)	20
§ 3.1. Задачі	22
§ 3.2. Відповіді та розв'язки	25
4. РАДІОАКТИВНІ ЯДРА (Заняття 5 та 6)	35
§ 4.1. Задачі	37
§ 4.2. Відповіді та розв'язки	39
5. ПОДІЛ ЯДЕР (Заняття 7 та 8)	44
§ 5.1. Задачі	46
§ 5.2. Відповіді та розв'язки	47
6. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ (Заняття 9)	51
§ 6.1. Задачі	52
§ 6.2. Відповіді та розв'язки	56
7. ЯДЕРНІ ПРОЦЕСИ У ЗІРКАХ (Заняття 10)	69
§ 7.1. Задачі	70
§ 7.2. Відповіді та розв'язки	71
8. КОСМІЧНІ ПРОМЕНІ (Заняття 11)	73
§ 8.1. Задачі	75
§ 8.2. Відповіді та розв'язки	76

9. ГОЛОВНІ БАРІОНИ ТА МЕЗОНИ (Заняття 12)	77
§ 9.1. Задачі	79
§ 9.2. Відповіді та розв'язки	79
10. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КВАРКОВОЇ МОДЕЛІ (Заняття 13)	82
§ 10.1. Задачі	83
§ 10.2. Відповіді та розв'язки	85
11. ДИСКРЕТНІ СИМЕТРІЇ (Заняття 14)	90
§ 11.1. Задачі	91
§ 11.2. Відповіді та розв'язки	91
12. ЛЕПТОНИ (Заняття 15)	93
§ 12.1. Задачі	94
§ 12.2. Відповіді та розв'язки	94
13. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ У РІЗНИХ ТИПАХ ВЗАЄМОДІЙ (Заняття 16)	97
§ 13.1. Задачі.....	98
§ 13.2. Відповіді та розв'язки	99
14. ОСНОВИ СТАНДАРТНОЇ МОДЕЛІ (Заняття 17)	102
§ 14.1. Задачі	104
§ 14.2. Відповіді та розв'язки	105
15. ВЕЛИКЕ ОБ'ЄДНАННЯ. ФІЗИКА ЧАСТИНОК ТА ВСЕСВІТ (Заняття 18)	106
§ 15.1. Задачі	110
§ 15.2. Відповіді та розв'язки	113
Список рекомендованої літератури	118

Передмова до другого видання

У другому виданні деякі недоліки та опечатки, виявлені в першому виданні, були виправлені, а розв'язки отримали доповнення.

За основу даного збірника взято задачі з ядерної фізики [1], які протягом двадцяти років (2000-2020 рр.) розглядались на семінарських заняттях і опрацьовувались у розрахункових роботах студентів при підготовці бакалаврів зі спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» на Фізико-технічному інституті Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського".

Задачі охоплюють широке коло принципів питань з ядерної фізики. Велика кількість задач є оригінальними, проте постановка більшості класичних задач взята з відомих підручників [2, 4-9]. Так частину курсу склали умови задач № 1.3; 2.1; 3.1, 3.11; 4.2, 4.6; 5.3; 6.2, 6.3, 6.9, 6.11; 7.4; 8.1, 8.2; 9.4, 9.5; 10.1, 10.2, 10.4, 10.5, 10.6; 12.1; 13.4 зі збірника [5], які протягом 1996-1999 рр. використовувались на семінарських заняттях з курсу ядерної фізики. У даному посібнику авторами було змінено умови частини задач та надано оригінальні розв'язки. Звичайно, самі відповіді, з врахуванням вказаних вище змін, збігаються з розв'язками для класичних задач. Для допомоги студентам при вивченні предмету до усіх задач подано розв'язки та/або відповіді. Задачі розташовані за темами відповідно до послідовності викладання лекційного матеріалу. Для більш глибокого закріплення знань студентам запропоновано задачі підвищеного рівня складності з книг [10-13].

Ілюстративні матеріали, які обрано із загальнодоступних ресурсів, було відредаговано та зроблено посилання на відповідні джерела. Частина малюнків – оригінальні. Зокрема, проф. О. П. Кобушкін зробив для розділів 1 та 3 оригінальні малюнки, а для інших розділів надав малюнки зі свого циклу лекцій.

На жаль, передчасна смерть не дозволила проф. О. П. Кобушкіну завершити працю – ним було написано розділи 1 “Загальні властивості стабільних ядер” та 3 “Ядерні моделі”, і проведено початкову загальну редакцію тексту¹. Тому уся остаточна редакційна робота була виконана співавтором Я. Д. Кривенко-Еметовим. Сподіваюсь, що посібник передає початкову концепцію та методику викладання ядерної фізики. Переконали, що науково-педагогічна спадщина професора О.П. Кобушкіна має бути збереженою.

Збірник задач може допомогти студентам (та всім зацікавленим) в освоєнні курсу “Ядерна фізика”, який є обов'язковою компонентною освітньої програми «Прикладна фізика» спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали».

На завершення хочу виразити щире подяку своїй мамі, кандидату технічних наук, провідному науковому співробітнику КНУБА Кривенко Ользі Петрівні, за уважне читання книги та слушні зауваження, які значно сприяли її покращенню.

Я.Д. Кривенко-Еметов

¹ Протокол засідання кафедри прикладної фізики №1 від 28.08.2020 р.

1. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ СТАБІЛЬНИХ ЯДЕР

(Заняття 1)

Електричний заряд. Маса ядра. Ізотопи та ізобари. Енергія зв'язку ядра. Ізоспін. Розміри ядра. Парність. Механічний та магнітний моменти. Квадрупольний момент ядра.

1.) В ядерній фізиці, як правило, використовується система одиниць, в якій $\hbar = c = 1$. У цій системі енергія, імпульс і маса мають однакову розмірність: $[E] = [p] = [m]$, а довжина і час мають розмірність оберненої енергії: $[r] = [t] = [E]^{-1}$. Для переходу від «енергетичних» одиниць (MeV або MeV) до одиниць довжини (фм або Fm) зручно використовувати співвідношення:

$$\hbar c = 197,3 [\text{MeV} \cdot \text{фм}].$$

2.) Розмір ядра визначається формулою:

$$R_{\text{я}} = r_0 A^{1/3}, \quad (1.1)$$

де $r_0 = 1,2 \div 1,4$ фм, A – масове число (загальна кількість нуклонів у ядрі).

3.) Енергія зв'язку ядра, яке складається з Z протонів та N нейтронів, визначається як:

$$E_{\text{зв}} = (Zm_p + Nm_n - M_{\text{я}})c^2 = W(A, Z), \quad (1.2)$$

де m_p , m_n та $M_{\text{я}}$ – маси протона, нейтрона та ядра, відповідно.

Часто також розглядають густину енергії зв'язку:

$$\varepsilon(A, Z) = W(A, Z)/A,$$

де $A = N + Z$ — масове число. Залежність густини енергії зв'язку від A наведено на Рис. 1.1.

У розрахунках зручніше (оскільки є багато таблиць дефектів мас) використовувати формулу:

$$E_{\text{зв}} = (Z\Delta_H + N\Delta_n - \Delta_{\text{я}})c^2,$$

де Δ_H (або Δ_p), Δ_n та $\Delta_{\text{я}}$ – надлишок (дефект) маси водню (або протона), нейтрона та ядра, які, зазвичай, знаходять з відповідних таблиць. Дефект маси – це різниця між масою спокою атомного ядра даного ізотопу, вираженої в атомних одиницях маси, і сумою мас спокою складових його нуклонів.

4.) Повний механічний момент атома F дорівнює сумі повного механічного моменту електронів J та спіну ядра I :

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}.$$

Отже, при фіксованому J момент F приймає одне з наступних значень:

$$F = J + I, J + I - 1, \dots, |J - I|. \quad (1.3)$$

Правило відбору $\Delta F = 0, \pm 1$, за виключенням переходів $0 \rightarrow 0$.

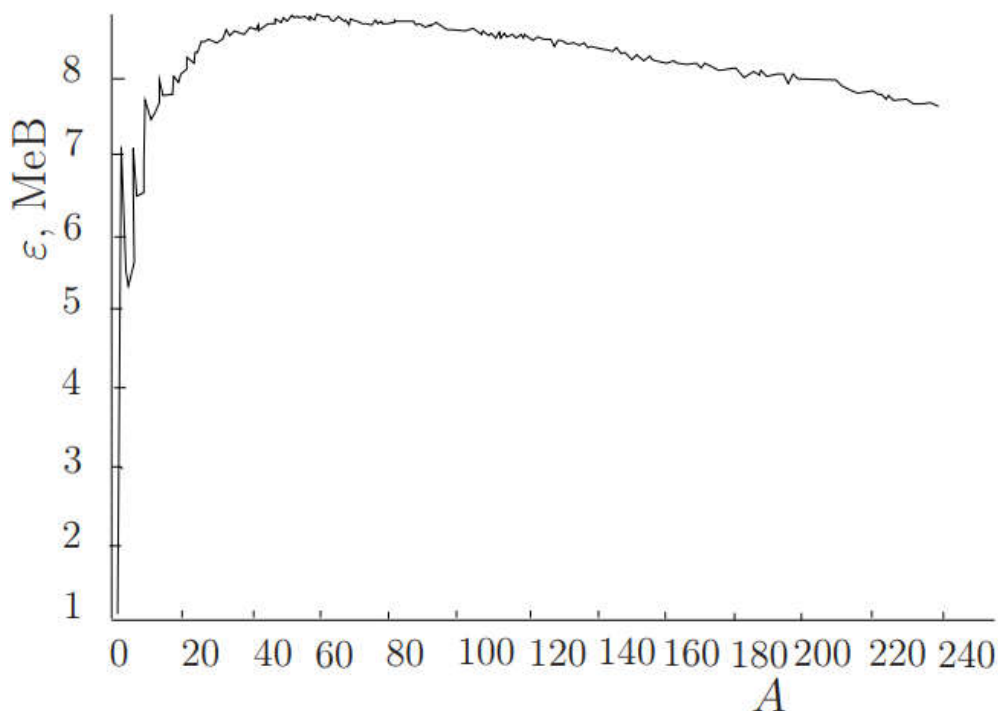


Рис. 1.1. Густина енергії зв'язку нуклона у ядрі [3]

§1.1. Задачі

1.1. а) Оцінити нуклонну (n_A) та масову (ρ) щільності у ядрі.

б) Оцінити щільність електричного заряду ρ_e у наступних ядрах: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{27}_{13}\text{Al}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$ та ${}^{238}_{92}\text{U}$. У якості параметра r_0 узяти його середнє значення $r_0 = 1,3$ фм.

в) Записати кулонівську енергію V_c (у [MeV]) взаємодії двох ядер, які мають заряди eZ_1 та eZ_2 і знаходяться на відстані r (у [фм], $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м} = 10^{-5} \left[\frac{\text{м}}{\text{А}} \right]$). Ядра вважати точковими.

1.2. У 1934 р Юкава припустив, що сильна взаємодія здійснюється через деяке поле, так само, як взаємодія між зарядами здійснюється через електромагнітне поле. Юкава запропонував назвати поле, через яке здійснюється сильна взаємодія, мезонним, а частинки, які є його квантами – мезонами.

а) Оцінити "динамічну масу" мезона ($\pi^{(0)}, \pi^{(+)}, \pi^{(-)}$), вважаючи, що мезон є віртуальною частинкою, яка переносить ядерну взаємодію між двома нуклонами.

б) Оцінити час, за який нуклон (протон чи нейтрон) з середньою кінетичною енергією $T = 1 \text{ MeV}$ пролітає відстань порядку розміру ядра R , де $R \sim 10$ фм.

1.3. Оцінити радіус R ядра ${}^3_2\text{He}$, розглядаючи останнє як сферу радіуса R , в якій рівномірно розподілений заряд протонів. Вважати, що різниця енергій зв'язку ΔE_{36} дзеркальних ядер (при $A=3$) ${}^3_1\text{H}-{}^3_2\text{He}$ повністю зумовлена кулонівською енергією взаємодії протонів у ядрі ${}^3_2\text{He}$.

- а) $\Delta E_{36} = 1,3 \text{ MeV}$,
- б) $\Delta W = \Delta E_{36} = 0,763 \text{ MeV}$.

1.4. На Рис. 1.2 зображено координатну залежність деяких сучасних реалістичних нуклон-нуклонних потенціалів. Порядок "притягальної" та "відштовхувальної" частини цього потенціалу можна отримати, вважаючи, що потенціал формується за рахунок, відповідно, легких і важких мезонів.

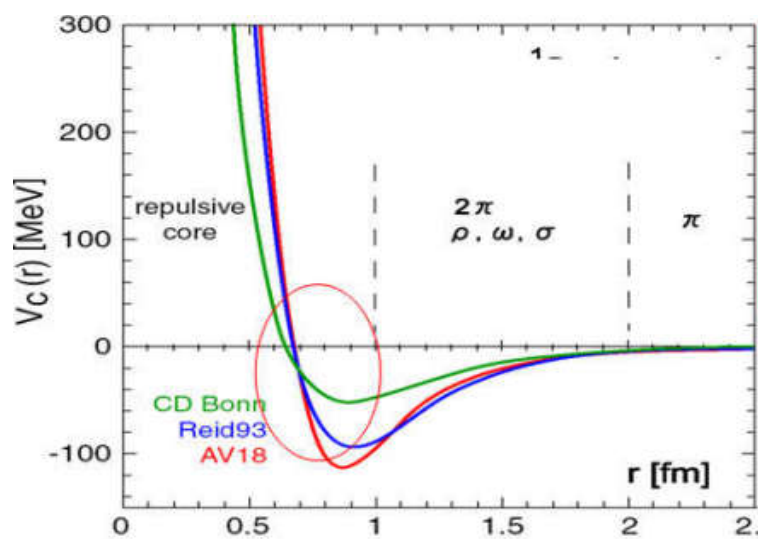


Рис. 1.2. Координатна залежність сучасних реалістичних нуклон-нуклонних потенціалів (CD Bonn, Reid93, AV18), червоним виділення розбіжність у передбаченнях моделей [16]

З цих теоретичних засад, знайти оцінку для мінімального радіусу дії ядерних сил, якщо маса мезонів $\rho^0, \rho^{(+)}, \rho^{(-)} \approx 775,5 \text{ MeV}$, а $\pi^{(0)}, \pi^{(+)}, \pi^{(-)} = 135 \div 140 \text{ MeV}$.

1.5. Знайти мінімальну енергію, яка необхідна для поділу ядра ${}^{16}_8\text{O}$ на:

- а) α -частинку (ядро ${}^4_2\text{He}$) та ядро ${}^{12}_6\text{C}$;
- б) чотири α -частинки,

якщо відома енергія зв'язку у ядрах: $W({}^{16}\text{O}) = 127,62$; $W({}^{12}\text{C}) = 92,16$; $W(\alpha) = 28,30$ (у MeV). Кінетичною енергією ядер у кінцевому стані знехтувати.

1.6. Яка виділиться енергія при злитті двох дейтронів у α -частинку ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow \alpha + \gamma$? Енергії зв'язку $W(\alpha) = 28.3 \text{ MeV}$, $W({}^2_1\text{H}) = 2.2 \text{ MeV}$.

1.7. Ядро ${}^{238}_{92}\text{U}$ розвалюється на два дочірніх ядра, масові числа яких відносяться як 2:3. Виходячи з Рис. 1.1, оцінити виділену енергію реакції.

1.8. Визначити виділену енергію Q реакції утворення двох α -частинок та протона у результаті синтезу ядер ${}^3\text{He}$ і ${}^6_3\text{Li}$, якщо відомо, що густини енергії зв'язку в ядрах ${}^3\text{He}$, ${}^4_2\text{He}$ і ${}^6_3\text{Li}$ дорівнюють 2,57; 7,08 і 5,33 Мев, відповідно.

1.9. На скільки підрівнів розщепляться основні стани атомів водню та дейтерію за рахунок надтонкої взаємодії, яким значенням моменту F ці підрівні відповідають?

1.10. Одним з методів визначення спіну ядра є підрахунок числа компонент надтонкої структури атома. При цьому вважається, що електронний терм оболонки атома відомий. Вказати, при якій умові на I та J цей метод не можна використовувати.

1.11. Визначити спіни ядер, електронні терми яких є ${}^2S_{1/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$, а кількість компонент їх надтонкого розщеплення дорівнюють 2 та 4, відповідно.

1.12. Вказати усі переходи, які дозволені правилами відбору між станами надтонкого розщеплення переходу ${}^2S_{1/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$, в атомі ${}^{35}_{17}\text{Cl}$, спин ядра якого $I = 3/2$. Враховуючи те, що у збудженому стані атома величиною надтонкого розщеплення можна знехтувати, знайти число компонент надтонкого розщеплення спектральної лінії вказаного переходу.

1.13. Знайти відношення інтервалів між сусідніми підрівнями надтонкого розщеплення зі значеннями $F, F+1, F+2, \dots$. Як відносяться інтервали між сусідніми підрівнями в атомі ${}^{35}_{17}\text{Cl}$ переходу, розглянутому у Задачі 1.12?

§1.2. Відповіді та розв'язки

1.1. а) За означенням нуклонна щільність: $n_A = \frac{A}{V}$, де $V_R = \frac{4}{3}\pi R^3$ – об'єм ядра, $R_A(A)$ – його радіус. Використовуючи формулу (1.1), одержимо

$$n_A = \frac{3}{4\pi r_0^3} = (9 \cdot 10^{37} - 1,4 \cdot 10^{38}) \text{ А/см}^3.$$

Відповідно, помноживши цю величину на середню масу нуклона (протона або нейтрона) $m_{a.o.m.} = 1,66 \cdot 10^{-24}$ г., одержимо:

$$\rho = \frac{M}{V} = m_{a.o.m.} \frac{A}{V} = m_{a.o.m.} n_y,$$

де введено позначення $n_y = n_A$.

Для оцінки приймемо, що ядро, яке складається з A нуклонів, має форму кулі, радіус якої визначається за формулою (1.1), де $r_0 = 1,2 \div 1,4$ фм. Тоді

$$n_y = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} \approx (0,09 \div 0,14) \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3} = (0,09 \div 0,14) \text{ фм}^{-3},$$

$$\rho = m_{a.o.m.} n_y \approx (1,4 \div 2,3) \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3 = (1,4 \div 2,3) \cdot 10^{13} \text{ кг/м}^3.$$

б) Якщо припустити, що електричний заряд визначається як $Q = eZ$, тоді оціночна щільність електричного заряду в ядрі буде

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{Q}{V} = \frac{en_y}{2} = \frac{1}{2} (0,09 \div 0,14) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл/фм}^3 = \\ &= (0,07 \div 0,11) \cdot 10^{-19} \text{ Кл/фм}^3 = (0,07 \div 0,11) \cdot 10^{20} \text{ Кл/см}^3. \end{aligned}$$

Якщо скористатись точнішою формулою (як це впливає з формули Вайцзекера), тоді для цих елементів шукана щільність електричного заряду буде, відповідно: $(0,085, 0,083, 0,081, 0,069, 0,068, 0,067) \times 10^{-19} \text{ Кл/фм}^3$. Тут взято середнє значення $r_0 = 1,3$ фм.

в) Використаємо гаусівську систему одиниць, в якій стала тонкої структури $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$, а $\hbar c = 197,3 [\text{МеВ} \cdot \text{фм}]$. Тоді маємо:

$$V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \alpha \hbar c \frac{Z_1 Z_2}{r} \approx \frac{197,3}{137} \cdot \frac{Z_1 Z_2}{r} \approx 1,44 \frac{Z_1 Z_2}{r} \text{ МеВ} \cdot \text{фм}.$$

1.2. а) Враховуючи оцінки для радіусу дії ядерних сил (1.1) (у даному випадку $A = 2$, $r_0 = 1,2$ фм), з принципу невизначеності Гейзенберга $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, отримуємо:

$$\Delta E = \Delta \left(\sqrt{p^2 c^2 + m_\pi^2 c^4} \right) = \Delta m_\pi^* c^2 = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{\hbar c}{\Delta r} = \frac{\hbar c}{r_0 A^{1/3}} = 130 \text{ МеВ}.$$

Тут припускається, що середня "динамічна маса" мезона пов'язана відомими релятивістськими формулами з, так званою, "масовою поверхнею"

$$\langle m_\pi^* c^2 \rangle = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E = \sqrt{p^2 c^2 + m_\pi^2 c^4} \text{ (насправді частинки, які переносять}$$

взаємодію, знаходяться поза масовою поверхнею).

б) Знайдемо швидкість нуклона $v = \sqrt{\frac{2T}{M_N}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{940}} c \approx 0,046 c$. Тоді

$$\tau = R/v \sim 10^{-21} \text{ с}.$$

1.3. а) З припущення про рівномірний розподіл заряду у ядрі випливає, що густина заряду одного протону є:

$$\rho_e = \frac{e}{V_R}, \text{ де } V_R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

З електростатики відомо потенціал рівномірно зарядженої сфери, що має заряд e . Цей потенціал можна, також, знайти, розв'язуючи рівняння Пуассона $\Delta\phi = -4\pi\rho$ для сфери, або, як нижче, виходячи з теореми Гауса-Остроградського $4\pi E r^2 = \int \rho(r) dr$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Тобто

$$dE = V_{r'} dr' = \begin{cases} \left(\frac{e}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3 r'\right)} \right) 4\pi r'^2 dr', & r < r' \\ \left(\frac{e}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3 r\right)} \right) 4\pi r'^2 dr', & r \geq r' \end{cases}$$

$$V_C = e\phi = e \left[\int_0^r V_{r'}(r') dr' + \int_r^R V_{r'}(r') dr' \right] = \frac{3e^2}{2R} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right),$$

тут r – радіус шару у середині сфери.

Звідси кулонівська енергія сфери отримується інтегруванням цього потенціалу по r від 0 до радіуса ядра R :

$$\Delta E_C = \int_0^R \frac{V_C 4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} dr = \frac{6e^2}{5R} = 1,37 \text{ MeV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{6e^2}{5 \cdot 1,37} \cong 1,26 \cdot 10^{-15} \text{ м} = 1,26 \text{ фм}.$$

б) У внутрішній області ядра виріжемо сферичний шар радіуса r' і нескінченно малої ширини dr' (рис. 1.3). Потенціальна енергія, яку створює цей шар у довільній точці r при дії на заряд e , відома з класичної електродинаміки:

$$dV_C(r', r) = \begin{cases} 4\pi e \rho r' dr', & r < r' \\ 4\pi \frac{e\rho}{r} (r')^2 dr', & r \geq r' \end{cases}$$

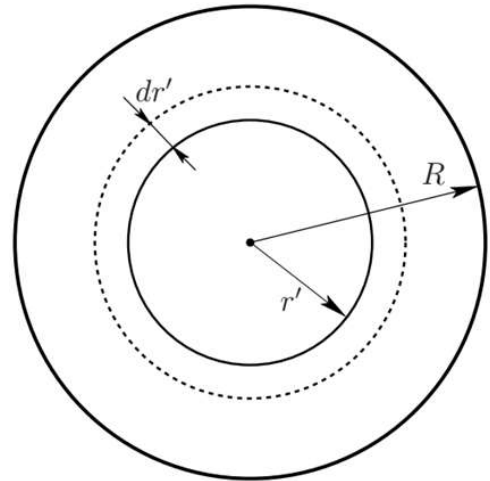


Рис. 1.3: До задачі 1.3

Повний кулонівський потенціал $V_C(r)$ дорівнює сумі інтегралів по внутрішній та зовнішній областях ядра відносно шару радіуса r :

$$V_C(r) = \int_0^r 4\pi \frac{e\rho}{r} (r')^2 dr' + \int_r^R 4\pi e \rho r' dr' = 2\pi e \rho \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) = \frac{3e^2}{2R^3} \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right).$$

Отже, кулонівська енергія взаємодії протонів в ядрі ${}^3_2\text{He}$ буде:

$$\Delta E_C = \Delta W = \int_0^R \frac{\rho}{e} V_C(r) d^3r = \frac{6}{5} \cdot \frac{e^2}{R}.$$

Використовуючи результат Задачі 1.1, одержуємо таку оцінку радіуса ядра ${}^3_2\text{He}$:

$$R = \frac{6}{5} \cdot \frac{e^2}{\Delta W} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1,44}{0,763} = 2,26 \text{ фм.}$$

1.4. За аналогією до Задачі 1.2, маємо:

$$r_{2\pi} = \frac{\hbar c}{2m_\pi c^2 A^{1/3}} = 0,92 \text{ фм}; \quad r_\rho = \frac{\hbar c}{M_\rho c^2 A^{1/3}} = 0,2 \text{ фм.}$$

1.5. а) Різниця енергій зв'язку початкового ядра та кінцевих продуктів розпаду дає відповідну енергію поділу:

$$Q = \Delta E_{36}({}^{16}\text{O}) - \Delta E_{36}({}^4\text{He}) - \Delta E_{36}({}^{12}\text{C}) = 127,62 - 92,16 - 28,30 = 7,16 \text{ MeV},$$

$$\text{б) } Q = \Delta E_{36}({}^{16}\text{O}) - 4\Delta E_{36}({}^4_2\text{He}) = 127,62 - 4 \cdot 28,3 = 14,4 \text{ MeV.}$$

$$\text{1.6. } E = W(\alpha) - 2W({}_1^2\text{H}) = 23,9 \text{ MeV.}$$

1.7. Згідно з умовою задачі масові числа дочірніх ядер є $A_1 = 95$ і $A_2 = 143$. Користуючись Рис. 1.1, знаходимо густини енергії зв'язку $\varepsilon(95) = 8,7 \text{ MeV}$; $\varepsilon(143) = 8,5 \text{ MeV}$ та $\varepsilon(238) = 7,7 \text{ MeV}$. Виділена енергія реакції буде:

$$Q = 95 \cdot 8,7 + 143 \cdot 8,5 - 238 \cdot 7,7 = 209,4 \text{ MeV.}$$

1.8.

$$Q = 2W({}_2^4\text{He}) - W({}_3^6\text{Li}) - W({}_2^3\text{He}) = 2 \cdot 4\varepsilon({}_2^4\text{He}) - 6\varepsilon({}_3^6\text{Li}) - 3\varepsilon({}_2^3\text{He}) = \\ = 8 \cdot 7,08 - 6 \cdot 5,33 - 3 \cdot 2,57 = 16,95 \text{ MeV.}$$

1.9. В основному стані атома водню та дейтерію $J = \frac{1}{2}$, а спіни ядер дорівнюють, відповідно, $I = \frac{1}{2}$ та 1. Отже, на основі формули (1.3) для водню $F = 1$ і 0, а для дейтерію $F = \frac{3}{2}$ і $\frac{1}{2}$. В обох випадках надтонке розщеплення має дублетний характер.

1.10. З (1.3) випливає, що при $I \leq J$ кількість компонент надтонкої структури атома дорівнює $N = 2I + 1$ і тому $I = \frac{N-1}{2}$. У випадку $I > J$ кількість компонент дорівнює $N = 2J + 1$ і тому визначити I за цим методом неможливо.

1.11. В обох випадках $I \leq J$. Тому умова того, що метод підрахунку компонент надтонкого розщеплення дає правильний результат (див. Задачу 1.10), виконується. Відповідно отримуємо $I = \frac{1}{2}$ та $\frac{3}{2}$.

1.12. Усі переходи показані на Рис. 1.4. Маємо чотири компоненти надтонкого розщеплення спектральної лінії:

$$\omega(2 \rightarrow 3), \omega(1 \rightarrow 2) = \omega(2 \rightarrow 2), \omega(1 \rightarrow 1) = \omega(2 \rightarrow 1) \text{ і } \omega(1 \rightarrow 0).$$

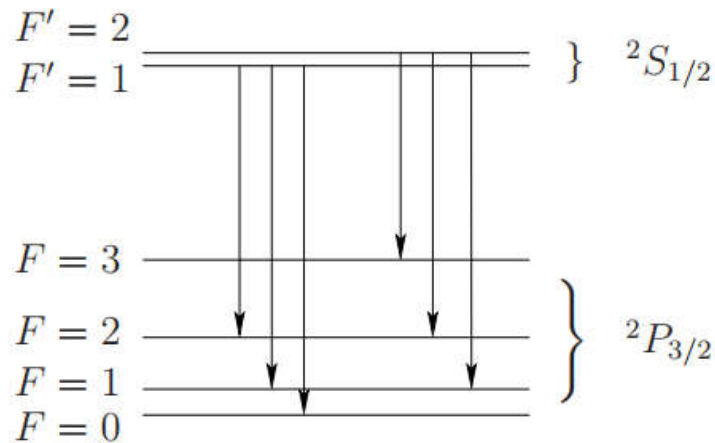


Рис. 1.4. До Задачі 1.12

1.13. Надтонке розщеплення відбувається внаслідок взаємодії магнітних моментів $\vec{\mu}$ та $\vec{\mu}_I$, які, в свою чергу, пропорційні спіну ядра $\mathbf{I}$ та повному електронному механічному моменту атома $\mathbf{J}$, відповідно. Тому енергія підрівня

$$E_F \sim \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)]$$

і сусідні рівні надтонкого розщеплення, які відповідають значенням повного механічного моменту атома $F, F+1, F+2, \dots$, відносяться як

$$(F+1):(F+2):(F+3): \dots$$

2. НАЙЛЕГШІ ЯДРА ТА ВЛАСТИВОСТІ ЯДЕРНИХ СИЛ (Заняття 2)

Узагальнений принцип Паулі. Відкриття дейтрона. S і D радіальні компоненти хвильової функції у дейтроні. Тринуклонні системи (третій та гелій-3). Гелій-4. Властивості ядерних сил. Тринуклонні сили.

1.) Експериментально з'ясовано, що величина сильної взаємодії між будь-якою парою нуклонів є майже однаковою, незалежно від того, чи взаємодіють вони як нейтрони, чи як протони. Тому, замість того, щоб розглядати протони та нейтрони як абсолютно різні частинки, вони розглядаються як різні ізоспінові стани однієї основної частинки, яка називається нуклоном. Так само, якщо брати до уваги лише сильну взаємодію, три піони π^0 , π^+ , π^- здаються лише трьома різними станами однієї частинки. Ізоспін є математично схожим на спін, хоча за своєю природою він не має нічого спільного з спіновим кутовим моментом. Правила додавання ізоспінів такі самі, як і для спіну.

2.) Протон й нейтрон мають ізотопний спін $1/2$. Але у випадку протона ізоспін має проекцію «вгору», а ізоспін нейтрону – «вниз».

3.) Важливою перевагою впровадження ізоспіну є те, що такий підхід значно спрощує опис сильної взаємодії. Таким чином, для взаємодії двох нуклонів замість того, щоб мати справу з чотирма зарядовими станами (нейтрон-нейтрон, протон-протон, протон-нейтрон, нейтрон-протон), ми маємо справу лише з двома ізоспіновими станами, $I = 1$ та $I = 0$.

3.) Форма запису ядерної взаємодії через оператори Майорани, Бартлетта та Гейзенберга є більш загальною, ніж у явному вигляді, оскільки, за *узагальненим принципом Паулі*, згідно з яким функція системи нуклонів має бути антисиметричною, маємо: $\tilde{P}_\sigma \tilde{P}_\tau \tilde{P}_r = -1$. Оператори:

$$\tilde{P}_r = -\tilde{P}_\sigma \tilde{P}_\tau = -\frac{1}{4}(1 + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2))(1 + (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)),$$

$$\tilde{P}_\sigma = -\frac{1}{2}(1 + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)), \quad \tilde{P}_\tau = -\frac{1}{2}(1 + (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)),$$

є операторами обміну просторових (*оператор Майорани*), спінових (*обмінний оператор Бартлетта*) та ізоспінових координат двох нуклонів (*обмінний оператор Гейзенберга*). Квадрати цих операторів дорівнюють одиниці.

5.) Перший ізоспіновий стан безпосередньо реалізується у природі у вигляді *дейтрона* – зв'язаної системи нейтрона та протона (у якій на малих відстанях проявляються кварк-глюонні ступені вільності, див. тему 10).

S - та D - компоненти радіальної хвильової функції дейтрона, що обчислені для деяких сучасних реалістичних потенціалів, представлені на Рис. 2.1.

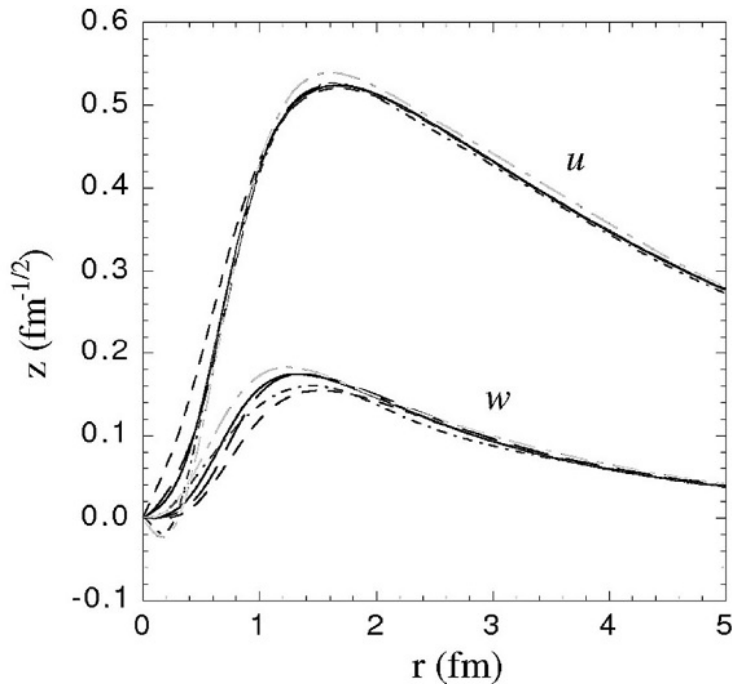


Рис. 2.1. Радіальні хвильові функції дейтрона для ${}^3S_1(u)$ і ${}^3D_1(w)$ компонент, що отримані з «реалістичних» потенціалів: *AV18* (суцільна), *Paris* (довгий пунктир), *CD – Bonn* (короткий пунктир), *IIB* (короткий штрих-пунктир), *W16* (довгий штрих-пунктир), малюнок взято з [16]

6.) Характерною властивістю ядерних сил є не тільки залежність від відстані між нуклонами, а й те, що вони є, одночасно, також, обмінними й тензорними силами. Уперше ядерні обмінні сили ввів В. Гейзенберг (1932 р.) за аналогією із силами хімічного зв'язку. Гейзенберг вважав, що взаємодія між протоном і нейтроном відбувається за рахунок обміну між ними електроном. То ж сили, що були введені Гейзенбергом, у загальному розумінні, це є заряд-обмінні сили. За такими силами в подальшому закріпилася назва сили Гейзенберга. Але ці сили не пояснювали наявності істотно більш високої енергії зв'язку альфа-частинки у порівнянні з дейтроном та те, що міжнуклонні сили, для запобігання колапсу, на зовсім малих відстанях повинні характеризуватися великим відштовхуючим кором. Для врахування цих обставин, Майорана висунув ідею про існування іншого класу міжнуклонних сил, які реалізуються між нуклонами одного типу – між протонами або між нейтронами, і які приводять лише до їх перестановки у просторі (тобто обміну просторовими координатами).

Експериментальне доведення D -стану у дейтроні мало важливе значення для розуміння структури ядерних сил, оскільки являється проявом наявності нецентральної сили між нуклонами. Це призвело до введення тензорних сил S_{12} які залежать не тільки від відстані між нуклонами, а й від кута між напрямком сумарного спіну нуклонної пари I та вектора r , що з'єднує центри нуклонів.

Загалом залежність потенціалу ядерних сил від спінових та ізоспінових змінних можна подати у вигляді, що має наочну фізичну інтерпретацію, а саме:

$$\tilde{V}_{яд} = V_W(r) + V_M(r)\tilde{P}_r + V_B(r)\tilde{P}_\sigma + V_H(r)\tilde{P}_\tau + V_{TW}(r)\tilde{S}_{12} + V_{TM}(r)\tilde{S}_{12}\tilde{P}_r. \quad (2.1)$$

В (2.1) складові відповідно називають силами Вігнера, Майорани, Бартлетта, Гейзенберга, *тензорними силами*, *тензорними силами Майорани*. Оператор $\tilde{S}_{12}$ задається формулою $\tilde{S}_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{n}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$.

Здавалось, що знайшовши двонуклонні ядерні сили та розв'язавши відповідну задачу двох тіл, цей розв'язок можна у подальшому використовувати як своєрідний “атом водню” ядерної фізики для складніших ядер. Але виявилось, що це не так. Вже система трьох та чотирьох нуклонів (навіть у наближенні піонних і нуклонних обмінів) взаємодіє зовсім інакше, ніж двонуклонна система (див. Рис. 2.2.)

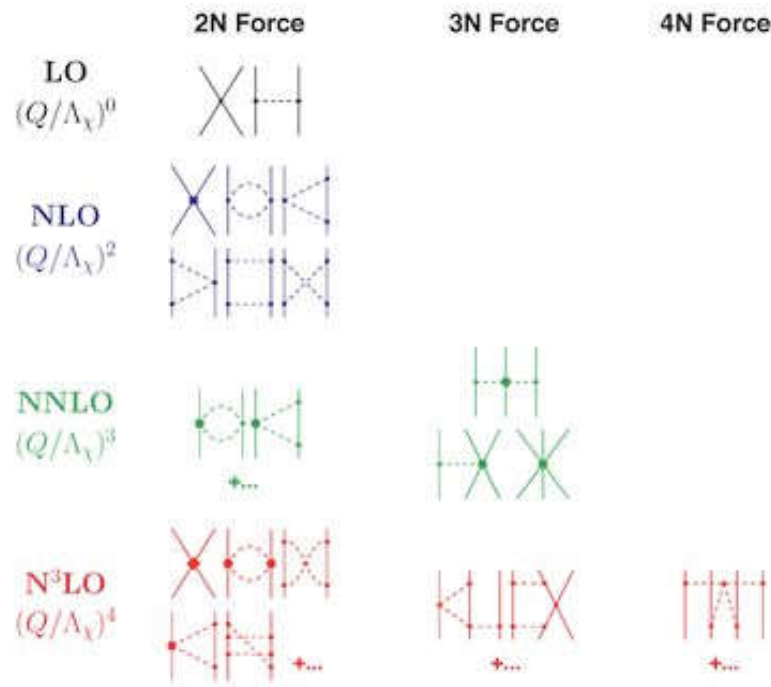


Рис. 2.2. Ієрархія ядерних сил: суцільні лінії – нуклони, пунктирні лінії – піони, маленькі крапки й великі суцільні кружечки позначають різні, так звані, вершини взаємодії [28]

Це явище у більш важких ядрах поступово приводить до залежності ядерних сил від густини нуклонів, що реалізується так званими силами Скірма (Skyrme forces). Існує десятки подібних сил, але їх розгляд виходить за межі даного курсу. Хто цікавиться, може звернутись до відповідної літератури [13].

§2.1. Задачі

2.1. Деталі електромагнітної структури атомних ядер можна вивчати за допомогою розсіяння швидких електронів лише тоді, коли довжина хвилі де Бройля λ падаючого електрона помітно менша за розміри ядер. Оцінити енергію електронів, для яких довжина відповідної хвилі де Бройля є меншою, ніж радіуси надлегких і надважких ядер.

2.2. У першому наближенні, для пояснення нуклон-нуклонного розсіювання достатньо припустити, що обмінні сили на 25% є силами Гейзенберга і на 75% – силами Майорани. Позначаючи енергію «гейзенбергівського» зв'язку як ε , а енергію «майоранівського» зв'язку як 3ε , показати, що без урахування сил Майорани неможливо пояснити істотно сильніший зв'язок нуклонів в альфа-частинці (ядра гелію-4) у порівнянні з дейтроном.

2.3. Розписати формулу (2.1) для сильної двонуклонної взаємодії та пояснити чому запис через сили Вігнера, Майорани, Бартлетта та Гейзенберга є більш загальним.

2.4. Виходячи з узагальненого принципу Паулі довести, що, якщо спін зв'язаної системи нуклонів дорівнює 1, тоді єдиним можливим зв'язаним станом буде система протон-нейтрон (дейтрон), а зв'язані стани протон-протон та нейтрон-нейтрон – заборонені.

§2.2. Відповіді та розв'язки

2.1.3 означення хвилі де Бройля, та враховуючи, що, за енергій більших за енергію спокою, електрон є ультрарелятивістським ($E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc$), отримуємо при $A = 3 \div 240$:

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{E} \Rightarrow E \approx \frac{hc}{\lambda} > \frac{hc}{r_0 A^{1/3}} \approx 145 \div 660 \text{ MeV.}$$

P.S. При розрахунках ми вважали r_0 близьким до значення, яке отримано з експериментів по розсіянню нейтронів на ядрах:

E_n (MeV)	r_0 (фм)
14 – 15	1,40
90	1,37
1400	1,28

2.2. Використаємо наступну схему (Рис. 2.3):

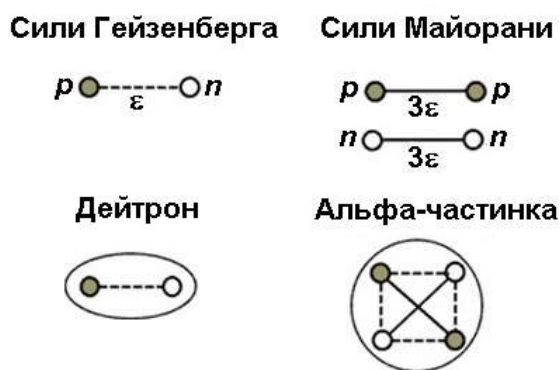


Рис. 2.3 Схематичне представлення взаємодії нуклонів силами Гейзенберга та Майорани

Розрахуємо питому енергію зв'язку дейтрона й альфа-частинки (у відсутності та при наявності сил Майорани).

1) Є тільки обмінні сили Гейзенберга (відповідний міжнуклонний зв'язок позначено на Рис. 2.3 пунктиром).

Дейтрон: сумарна енергія зв'язку – це енергія одного зв'язку Гейзенберга, тобто дорівнює ε . Питома енергія зв'язку дорівнює $\varepsilon/2$.

Альфа-частинка: сумарна енергія зв'язку – це сума енергій 4-х гейзенбергівських зв'язків, тобто 4ε . Питома енергія зв'язку дорівнює $4\varepsilon/4 = \varepsilon$.

Отже, питома енергія зв'язку альфа-частинки є лише в два рази більшою, ніж у дейтрона. Це сильно відрізняється від експериментальних даних, згідно з якими для дейтрона ця енергія становить 1.112 MeV; для альфа-частинки – 7.074 MeV.

2) Є як обмінні сили Гейзенберга, так і сили Майорани (міжнуклонний майоранівський зв'язок позначено на Рис. 2.3 суцільною лінією).

Дейтрон: сумарна енергія зв'язку – це як і раніше енергія одного зв'язку Гейзенберга, тобто дорівнює ε . Питома енергія зв'язку залишається рівною $\varepsilon/2$.

Альфа-частинка: сумарна енергія зв'язку – це сума енергій 4-х гейзенбергівських зв'язків і двох майоранівських. З огляду на те, що енергія майоранівського зв'язку в три рази вища за гейзенбергівську, отримуємо для сумарної енергії зв'язку альфа-частинки: $4\varepsilon + 2 \times 3\varepsilon = 10\varepsilon$. Питома енергія зв'язку дорівнює: $10\varepsilon/4 = 2,5\varepsilon$.

Тобто питома енергія зв'язку альфа-частинки при наявності сил Майорани в 5 разів вища за відповідну питому енергію зв'язку дейтрона. Це значно краще узгоджується з експериментальними даними для відношення відповідних енергій зв'язку: $7,074/1,112 \approx 6,4$ рази.

Таким чином, слабкий зв'язок дейтрона, тобто його пухкість, пояснюється не тільки тим, що в нього лише один міжнуклонний зв'язок, але й тим, що цей зв'язок не забезпечується силами Майорани. У даний час

відомо, що сили Майорани реалізуються обміном нейтральними піонами (π^0), а сили Гейзенберга – обміном зарядженими піонами ($\pi^\pm$).

2.3. Форма запису ядерної взаємодії через оператори Майорани, Бартлетта та Гейзенберга є більш загальною, ніж у явному вигляді, оскільки за узагальненим принципом Паулі, згідно з яким функція системи нуклонів має бути антисиметричною, маємо для добутку власних значень операторів перестановки спіну, часу та координати: $\hat{P}_\sigma \hat{P}_\tau \hat{P}_r = -1$ (або, виконуючи циклічну перестановку, $\hat{P}_r \hat{P}_\sigma \hat{P}_\tau = -1$). Тому, після заміни $\hat{P}_\tau = -\hat{P}_\sigma \hat{P}_r$ останню формулу можна використовувати також, коли формалізм ізотопічного спіну явно не застосовується.

Незалежний від швидкості ядерний потенціал взаємодії двох нуклонів, який задовольняє умови трансляційної і ротаційної інваріантності відносно інверсій та ізотопічної симетрії, має такий загальний вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\text{яд}} = & V_C(r) + V_\sigma(r)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + V_\tau(r)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + V_{\sigma\tau}(r)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + \\ & + V_T(r)\hat{S}_{12} + V_{T\tau}(r)\hat{S}_{12}(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2), \end{aligned}$$

де оператор $\hat{S}_{12}$ задається формулою:

$$\hat{S}_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{n}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2).$$

2.4. Для ізоспіна потрібно проводити подібні міркування, як для спіна. Але у цьому разі треба використовувати узагальнений принцип Паулі, який стверджує, що загальна хвильова функція нуклонів повинна бути антисиметричною. Координатна частина хвильової функції – симетрична (ймовірності ~95% в S -хвилі та ~5% в D -хвилі).

Експериментально відомо, що спін шуканої частинки дорівнює одиниці. Тому, як відомо з квантової механіки, спінова частина хвильової функції системи мусить симетричною.

То ж для збереження узагальненого принципу Паулі необхідно, щоб ізоспінова частина хвильової функції була антисиметричною. Це відповідає лише одному варіанту зв'язку нуклонів, а саме зв'язаній системі протон-нейтрон (дейтрон).

Варіанти нейтрон-нейтрон і протон-протон є симетричними комбінаціями щодо ізоспіну, та є забороненими узагальненим принципом Паулі.

3. ЯДЕРНІ МОДЕЛІ (Заняття 3 та 4)

Крапельна модель. Напівемпірична формула Вайцзекера. Її застосування. Недоліки крапельної моделі ядра. Модель ядерних оболонок. Магічні ядра. Спін-орбітальна взаємодія. Одночастинкові рівні у ядрі. Застосування моделі оболонок. Узагальнена модель ядра. Деформовані ядра.

1.) Модель рідкої краплі виходить з того, що, як і у рідини, ядерна матерія є практично нестисливою. Енергія зв'язку ядра в цій моделі визначається напівемпіричною формулою Вайцзекера:

$$E = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = \\ = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 Z^2 A^{-1/3} - a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta(A, Z), \quad (3.1)$$

де

W_1 – об'ємна енергія сильної взаємодії між нуклонами ($a_1 \approx 15,56$ MeB);

W_2 – поверхнева енергія, пропорційна радіусу ядра у квадраті ($a_2 \approx 17,23$ MeB);

W_3 – енергія кулонівської взаємодії між протонами ($a_3 \approx 0,711$ MeB);

W_4 – член, який відповідає за приблизну рівність кількості нейтронів і протонів у ядрі та пов'язаний з обмінними силами ($a_4 \approx 23,7$ MeB);

W_5 – член, який відповідає за спіновий стан ядра та природа якого полягає у наявності (чи ні) надплинних станів у ядрі ($a_5 \approx 34$ MeB).

Останній доданок в (3.1) залежить від парності масового числа A та числа Z

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} \delta A^{-1/2} & , \quad \text{для парних } A \text{ та } Z \\ 0 & , \quad \text{якщо } A \text{ непарне} \\ -\delta A^{-1/2} & , \quad \text{для парного } A \text{ та непарного } Z \end{cases} \quad (3.2)$$

де $\delta = 12$ MeB,

або

$$\delta'(A, Z) = \begin{cases} \delta' A^{-3/4} & , \quad \text{для парних } A \text{ та } Z \\ 0 & , \quad \text{якщо } A \text{ непарне} \\ -\delta' A^{-3/4} & , \quad \text{для парного } A \text{ та непарного } Z \end{cases}$$

де $\delta' = 34$ MeB.

2.) Модель фермі газу. У цій моделі ядро розглядається як вироджений фермі-газ нуклонів, які знаходяться в сферичній потенційній ямі глибиною V_0 і радіуса R_γ (рис. 3.1). Максимальна енергія ε_F , яку має нуклон при нульовій температурі ядра, називається енергією Фермі, а імпульс $p_F = \sqrt{2\varepsilon_F m_N}$ – імпульсом Фермі.

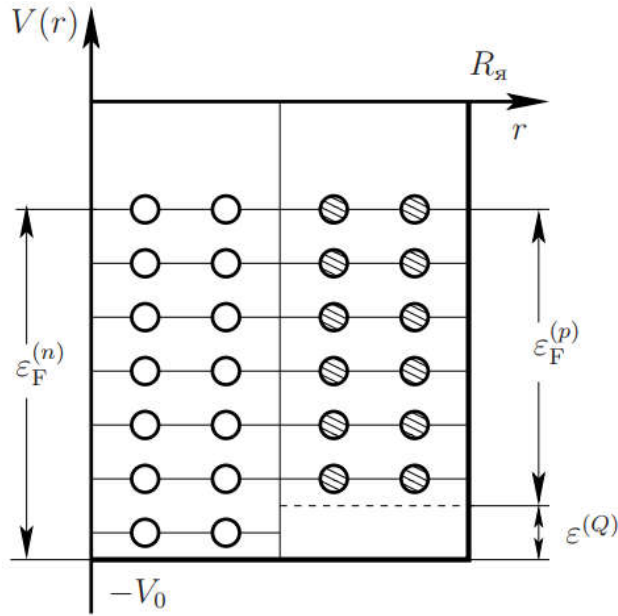


Рис. 3.1. Газова модель ядра:
світлі кружечки – нейтрони,
заштриховані –протони;
 $\varepsilon_F^{(n)}$ і $\varepsilon_F^{(p)}$ – енергія Фермі
нейтронів і протонів, відповідно;
 $\varepsilon^{(Q)}$ – кулонівська взаємодія між
протонами

3.) Модель ядерних оболонок допускає, що кожний протон і нейтрон у ядрі знаходиться у стані, який характеризується певним значенням орбітального ℓ та повного j моментів. На Рис. 3.2 схематично зображені енергетичні рівні, які відповідають станам n, ℓ, j у рамках трьох моделей: гармонічного осцилятора, ями скінченної глибини та з урахуванням спіно-орбітальної взаємодії. Рівні заповнюються відповідно до принципу Паулі.

Згідно з оболонковою моделлю ядра, спин та магнітний момент з непарним A визначаються повним моментом і магнітним моментом останнього «валентного» нуклона:

$$\hat{I} = \hat{L} + \hat{S}, \quad \hat{\mu}_I = \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_S = g_L \hat{L} + g_S \hat{S},$$

де g_L та g_S – гіромагнітні множники для орбітального моменту та спіну протона та нейтрона в ядрі, які відповідно дорівнюють:

$$g_L = \begin{cases} \frac{q_0}{2m_p c} \cong 1 & \text{- для протона} \\ 0 & \text{- для нейтрона} \end{cases};$$

$$g_S = \begin{cases} 2 \frac{\mu_p}{\mu_{\text{яд.м.}}} \frac{q_0}{2m_p c} \cong 5,58 & \text{- для протона} \\ 2 \frac{\mu_n}{\mu_{\text{яд.м.}}} \frac{q_0}{2m_n c} \cong -3,83 & \text{- для нейтрона} \end{cases};$$

де $\mu_{\text{яд.м.}} = \mu_{\text{я}} = \frac{q_0 \hbar}{2m_p c}$ – ядерний магнетон.

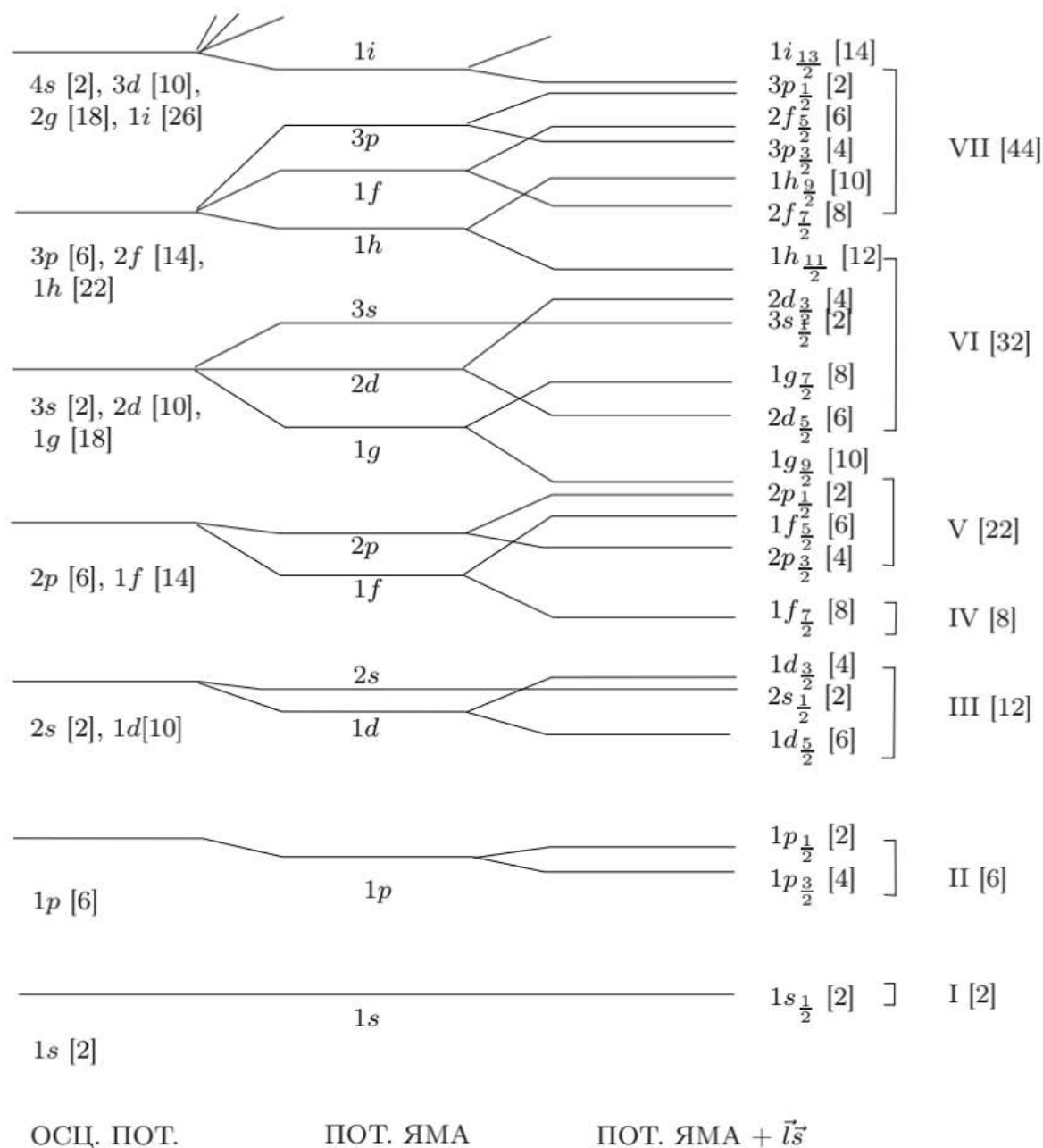


Рис. 3.2. Схематичний розподіл енергетичних рівнів нейтронів у ядрі [3]; оболонки пронумеровані римськими цифрами, поряд з якими у квадратних дужках вказано максимальне число нуклонів на оболонці

§3.1. Задачі

3.1. Використовуючи формулу Вайцекера, знайти коефіцієнт натягу оболонки ядра. В якості параметра r_0 взяти середнє значення: $r_0 = 1,3$ фм.

3.2. Використовуючи формулу Вайцекера, знайти атомний номер стабільного ядра, якщо ядро містить у собі 27, 112 чи 207 нуклонів.

3.3. У газовій моделі ядра вважається, що нуклони утворюють квазіідеальний газ, який займає об'єм ядра і підпорядковується розподілу Фермі. Оцінити з цих міркувань максимальну кінетичну енергію нуклонів у ядрі та глибину потенціальної ями. Вважати, що кількість протонів дорівнює кількості нейтронів. Газ вважати ідеальним.

3.4. У газовій моделі ядра та подібних моделях (моделі Томаса-Фермі) енергія фермі нуклонів (при умові рівності мас протона та нейтрона) у стабільному ядрі $E_f = 40$ MeV. Оцінити максимальну та середню швидкість нуклонів у ядрі. Чи доцільним є використання релятивістських поправок? Оцінити час прольоту нуклоном ядра з атомним числом $A = 20 \div 238$.

3.5. Знайти густину імпульсного розподілу нуклонів у ядрі $\rho(p)$ в рамках газової моделі ядра, розглядаючи ядро як куб, об'єм якого дорівнює об'єму ядра. Для простоти вважати, що кількість протонів дорівнює кількості нейтронів.

3.6. Користуючись результатами Задачі 3.5, визначити в газовій моделі ядра імпульс та енергію Фермі, середню енергію нуклона та глибину ями V_0 . Робота виходу нейтрона з ядра приблизно складає $S_n \approx 8$ MeV.

3.7. Знайти кулонівський бар'єр, який потрібно подолати двом дочірнім ядрам при оберненій реакції злиття у ядро урану ${}^{238}_{92}\text{U}$. Виходити з середньої енергії зв'язку на нуклон для ядра урану і те, що ці два уламки (дочірні ядра) з середини періодичної таблиці Менделєєва. Загальну енергію злиття вважати у 200 MeV.

3.8. За сучасними уявленнями ядерні оболонки є частинним випадком загальної теореми про те, що у скінченній фермі-системі з періодичними орбітами ферміонів у потенціалі обов'язково з'являється оболонкова структура, яка призводить до, так званої, "оболонкову поправку" до гладкої (необолонкової) складової енергії (у випадку ядер прикладом такої гладкої структури є, наприклад, формула Вайцзекера). Конкретні модельні розрахунки з урахуванням спин-орбітального зв'язка дають таку класифікацію оболонкових рівнів у ядрі (див. Рис. 3.3).

За допомогою моделі атомних оболонок записати конфігурацію основних станів ядер ${}^7_3\text{Li}$, ${}^{13}_6\text{C}$, ${}^{25}_{12}\text{Mg}$.

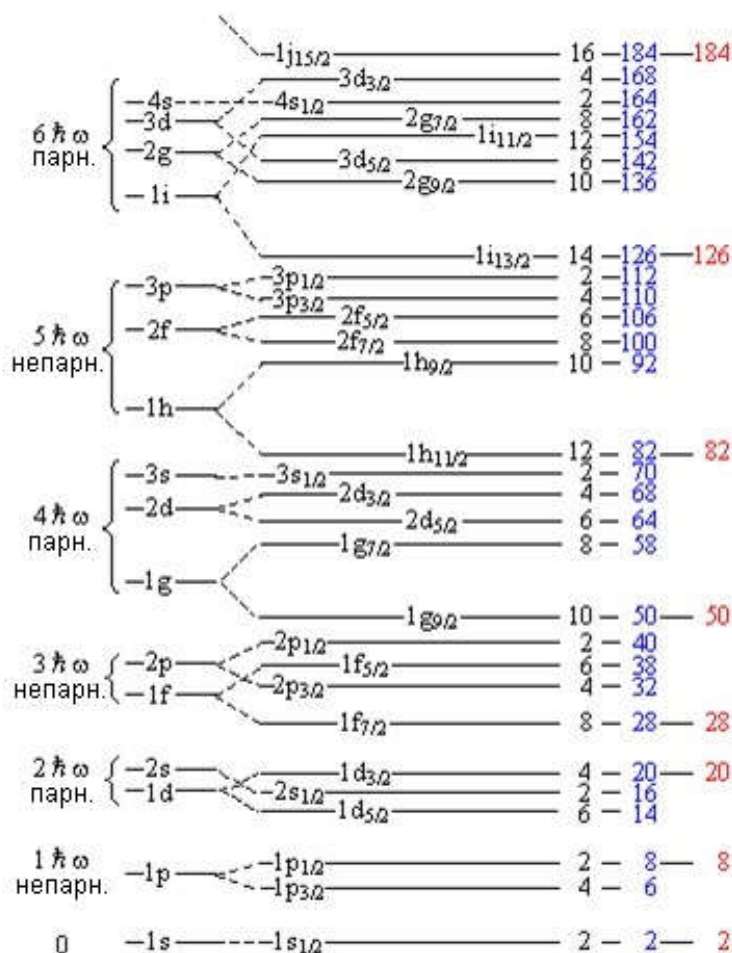


Рис. 3.3. Схематичний розподіл енергетичних рівнів нейтронів у ядрі [22], так само, як на Рис. 3.2, тут ураховано парність і підсумовування нуклонів по оболонкам (синім і червоним)

3.9. Визначити за допомогою моделі ядерних оболонок спін та парність основного стану ядер $^{13}_6\text{C}$, $^{13}_7\text{N}$.

3.10. За допомогою моделі ядерних оболонок знайти спін, парність, магнітні моменти ядер основного стану наступних ядер: ^3_1H , ^3_2He , $^{15}_7\text{N}$, $^{15}_8\text{O}$.

3.11. Найпростішою моделлю ядерних сил є трьохвимірний гармонічний осцилятор. Вважаючи, що потенціальна яма ядра для протона та нейтрона має однакову глибину:

$$U(R_{\min} = 0) = U_0 = -70 \text{ MeV}, (\partial U(R_{\min})/\partial R = 0,$$

а $U(R_0) = 0$, де $R_0 = 10^{-13}$ см, оцінити енергію зв'язку нуклона для ядра кисню $^{16}_8\text{O}$. Яка енергія одонуклонного збудження в цій моделі?

3.12. Гіромагнітні множники для протона і нейтрона у ядрі дорівнюють

$$g_l = \frac{q_0}{2m_p c} \cong 1, \quad g_s = 2 \frac{\mu_p}{\mu_{\text{яд.м.}}} \frac{q_0}{2m_p c} = 5,58 \quad \text{і} \quad g_l = 0, \quad g_s = 2 \frac{\mu_n}{\mu_{\text{яд.м.}}} \frac{q_0}{2m_p c} = -3,83,$$

відповідно. Знайти магнітні моменти протона і нейтрона.

3.13. Знайти магнітний момент системи двох нуклонів через їх магнітні моменти.

3.14. Написати конфігурації основних станів наступних ядер ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{25}_{11}\text{Na}$, які вони мають відповідно до моделі оболонок.

3.15. Чому дорівнюють спин та парність ядер, що розглянуті у Задачі 3.14?

3.16. Чому дорівнюють магнітні моменти ядер, що розглянуті у Задачі 3.14?

3.17. Сферично-симетрична яма радіусу R з нескінченно глибокими стінками підпадає під малу деформацію, приймаючи вигляд еліпсоїда з півсями $a = b$ і c . Знайти поправку до рівня енергії в ямі у s -стані.

§3.2. Відповіді та розв'язки

3.1. У рівняння Вайцеккера явним чином площа входить лише у другий доданок, тому:

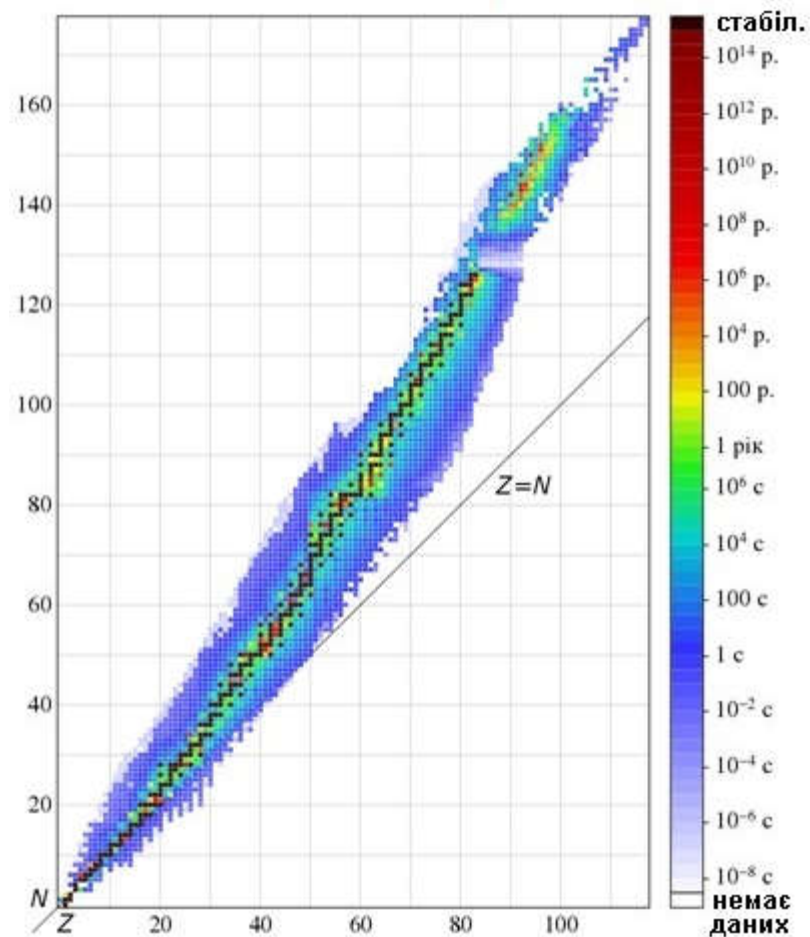
$$\sigma = \frac{\partial E}{\partial S} = \frac{a_2}{4\pi r_0^2} = 0,87 \frac{\text{MeV}}{\text{фм}^2}.$$

3.2. У рівняння Вайцеккера явним чином заряд входить лише у третій та четвертий доданки, тому:

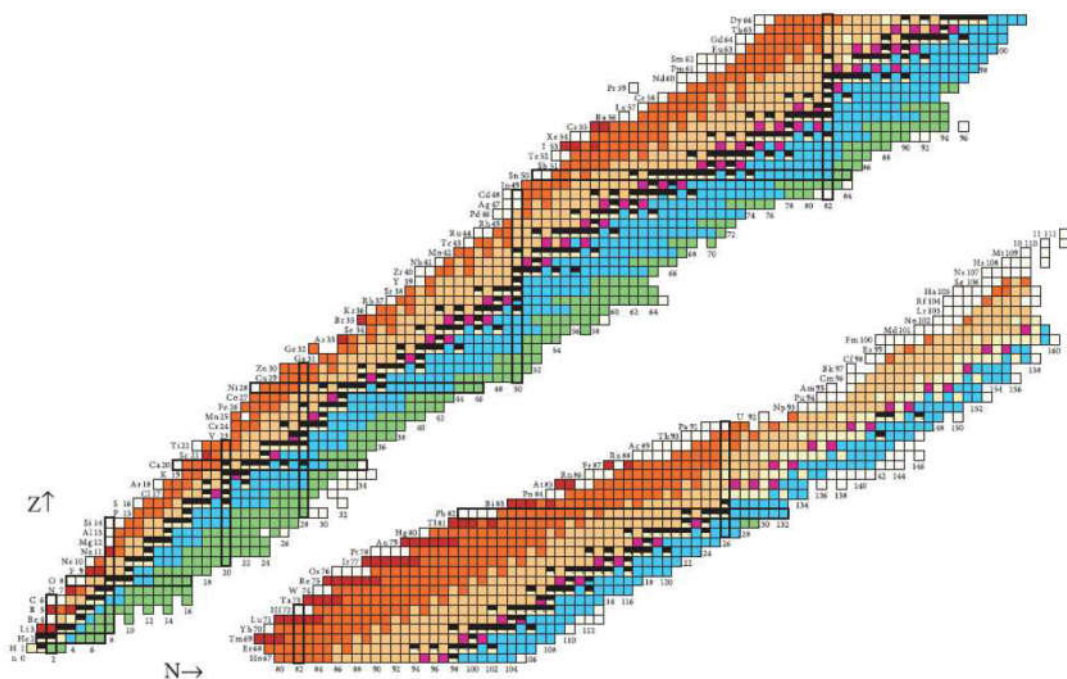
$$\frac{\partial E}{\partial Z} = 0, \Rightarrow Z \cong \frac{A}{2 + 0,014 A^{2/3}}. \quad (3.3)$$

З формули (3.3) витікає, що значенням $A=27$, 112 та 207 відповідають такі стабільні ядра: ${}^{27}_{13}\text{Al}$, ${}^{112}_{48}\text{Cd}$ та ${}^{207}_{82}\text{Pb}$.

Отриманий зв'язок між Z та A визначає, так звану, "долину стабільності" існуючих у природі атомних ядер (див. Рис. 3.4).



а)



б)

Рис. 3.4. Залежності кількості нейтронів N ($N = A - Z$) від кількості протонів Z у атомних ядрах: (а) загальна залежність [23],
(б) зведена залежність з вказаними елементами [3]

3.3. При $N_n = N_p$ маємо:

$$\varepsilon_F^p = \left(\frac{2Z}{A} \right)^{2/3} \left(\frac{m}{m_p} \right)^{2/3} \varepsilon_F \approx \varepsilon_F^n = \left(\frac{2Z}{A} \right)^{2/3} \left(\frac{m}{m_n} \right)^{2/3} \varepsilon_F \approx 34 \text{ MeV},$$

де $m = m_{a.o.m.}$, та

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3}.$$

Оскільки $Z \approx N \approx A/2$, тому $n = n_n = \frac{1}{2 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3}$,

$$V_0 = \varepsilon_F + E_s \approx 34 + 8 = 42 \text{ MeV}.$$

3.4. Оскільки $E_f \approx 40 \text{ MeV} \ll m_{p,n} c^2$, тому

$$E_f = E_{max} \approx 40 \text{ MeV} = \frac{p_f^2}{2m} \Rightarrow \frac{2p_f^2}{2m^2 c^2} = \frac{2E_f}{mc^2} = \frac{v_{max}^2}{c^2} \approx 0,085$$

$$\Rightarrow p_f / m_p = v_{max} \approx 0,29 c.$$

З іншого боку згідно з визначенням середнього маємо:

$$\bar{E} = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{d^3 k}{\exp \left[\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) / (k_B T) \right] + 1} = \frac{3}{5} E_f A = 12 A \text{ MeV} \Rightarrow$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\bar{E}}{A} = 24 \text{ MeV},$$

$$\frac{2\bar{p}^2}{2m^2 c^2} = \frac{2\bar{\varepsilon}}{mc^2} = \frac{\bar{v}^2}{c^2} \approx 0,05 \Rightarrow \bar{v} \approx 0,2 c.$$

Оскільки релятивістські ефекти переважно залежать від множника

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - (v/c)^2} \cong (1,022 \div 1,045),$$

тому в багатьох задачах релятивістськими ефектами у ядрах можна знехтувати. Час прольоту визначається так:

$$\tau = \frac{R}{v} = \frac{r_0 A^{1/3}}{(0,2 \div 0,3)c} = \frac{1,4}{(0,2 \div 0,3)} \cdot 10^{-23} A^{1/3} = 2,3 \cdot 10^{-23} A^{1/3} = 14,3 \cdot 10^{-23} [c],$$

(де $A = 238$).

$$\tau' = \frac{R'}{v} = \frac{r'_0 A^{1/3}}{(0,2 \div 0,3)c} = \frac{1,3}{(0,2 \div 0,3)} \cdot 10^{-23} A^{1/3} = 1,44 \cdot 10^{-23} A^{1/3} = 3,9 \cdot 10^{-23} [c],$$

(де $A = 20$).

3.5. Якщо об'єм ядра досить великий, тоді форма поверхні ядра істотно не впливає на розподіл $\rho(\mathbf{p})$ і тому ядро можна розглядати як куб з ребром L таким, що

$$V = \frac{4}{3} \pi R_{\text{я}}^3 = L^3.$$

Густина $\rho(\mathbf{p})$ визначається як відношення кількості нуклонів $\Delta N(\mathbf{p})$, значення імпульсу яких лежить у межах $\mathbf{p} \div \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}$, до $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$:

$$\rho(\mathbf{p}) = \frac{\Delta N(\mathbf{p})}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}. \quad (3.4)$$

Вважаючи, що центр мас куба збігається з початком координат, хвильова функція нуклона приблизно буде

$$\psi(\mathbf{r}) \sim \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z), \quad (3.5)$$

де хвильовий вектор $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$, а кожна з координат змінюється в інтервалі від $-L/2$ до $L/2$.

Умова невильоту нуклонів з ядра означає, що хвильова функція (3.5) дорівнює нулю на кожній з граней куба і, в свою чергу, визначає квантування хвильового вектора

$$k_x \frac{L}{2} = \pi n_x, \quad k_y \frac{L}{2} = \pi n_y, \quad k_z \frac{L}{2} = \pi n_z, \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

звідки випливає

$$\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z.$$

Оскільки в комірці мінімального розміру $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$ дискретних векторів $\mathbf{n}$ буде міститися чотири нуклона з однаковою енергією (два протони та два нейтрони, спіни яких направлені в різні сторони), маємо

$$\Delta N(\mathbf{p}) = 4 \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{2}{3\pi^2} \left(\frac{r^0}{\hbar} \right)^3 A \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z.$$

Використовуючи означення густини (3.4), одержимо

$$\rho(\mathbf{p}) = \begin{cases} \frac{2}{3\pi^2} \left(\frac{r^0}{\hbar} \right)^3 A, & \text{при } p \leq p_F, \\ 0, & \text{при } p > p_F. \end{cases} \quad (3.6)$$

3.6. Виходячи з ознаки густини $\rho(\mathbf{p})$, масове число $A \in$

$$A = \int \rho(\mathbf{p}) d^3 p \quad (3.7)$$

(вважається, що підсумування по дискретному імпульсу можна замінити на інтеграл по імпульсу). Підставляючи в (3.7) знайдений в Задачі 3.5 вираз (3.6) для $\rho(\mathbf{p})$, одержимо

$$p_F = \frac{\hbar}{r^0} \sqrt[3]{\frac{9\pi}{8}} = 250 \text{ MeV/c},$$

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_N} \approx 34 \text{ MeV}.$$

Знайдемо повну енергію нуклонного газу:

$$E = \int \frac{p^2}{2m_N} \rho(\mathbf{p}) d^3 p = \frac{8A}{3\pi} \frac{1}{2m_N} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{3}{5} A \varepsilon_F.$$

Звідси випливає, що середня енергія на нуклон складає $\bar{\varepsilon} = \frac{E}{A} = \frac{3}{5} \varepsilon_F = 20 \text{ MeV}$.

З Рис. 3.1 видно, що глибина потенціальної ями дорівнює

$$V_0 = S_n + \varepsilon_F = 42 \text{ MeV}.$$

3.7. З аналізу Рис. 3.5, який побудований на основі підгонки формули Вайцекера під існуючі експериментальні дані для енергій зв'язку, видно, що при $A_{1,2} = 120$ енергія зв'язку, приблизно, на 0,8 MeV більша, ніж за атомного числа урану $A = 238$, тому:

$$\begin{aligned} Q^* &= E_{36,1} A_1 + E_{36,2} A_2 - E_{36,U} A \approx \\ &\approx 0,8 \text{ MeV} \cdot 238 = 190,4 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Звідси маємо, що приблизно 10 MeV витрачається на подолання, так званого, кулонівського бар'єру, оскільки

$$Q = Q^* + 10 \text{ MeV} = 200 \text{ MeV}.$$

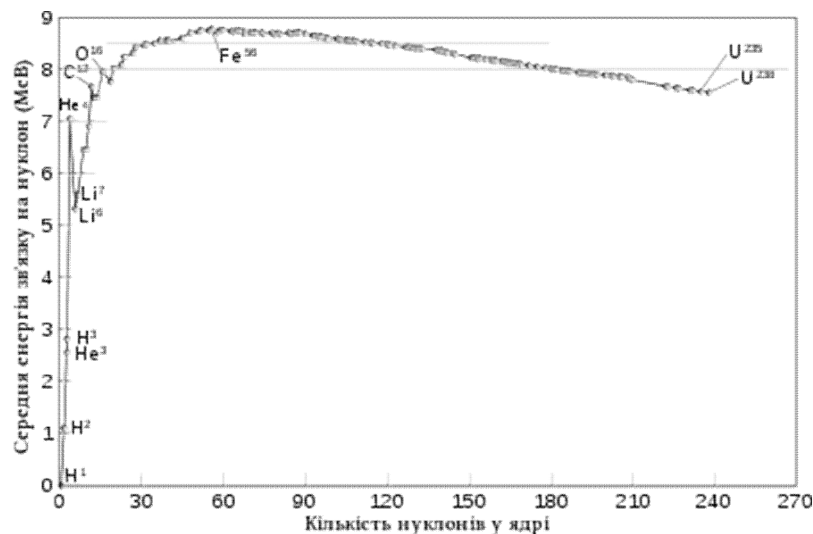


Рис. 3.5. Середня енергія зв'язку в залежності від кількості нуклонів A [3]

Цей результат за порядком збігається з результатом Задачі 1.1, де у формулі

$$V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \alpha \hbar c \frac{Z_1 Z_2}{r} \approx \frac{197,3}{137} \cdot \frac{Z_1 Z_2}{r} \approx 1,44 \frac{Z_1 Z_2}{r}$$

необхідно покласти $r = r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$, $A = A_1 + A_2$.

3.8. З Рис. 3.3 легко отримати наступну класифікацію:

$${}^7_3\text{Li} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{1p2n};$$

$${}^{13}_6\text{C} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{4p4n} 1p_{1/2-}^{0p1n};$$

$${}^{25}_{12}\text{Mg} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{4p4n} 1p_{1/2-}^{2p2n} 1d_{5/2+}^{4p5n}.$$

Тут при верхніх індексах "p" та "n" позначено кількість протонів та нейтронів, відповідно.

3.9. У моделі оболонок спіні визначається або останнім незаповненим рівнем нуклона, або першим після заповненого рівня:

$$\vec{J}_{A\pm 1} = \vec{J}_A \pm \vec{j} = 0 \pm \vec{j} \Rightarrow |\vec{J}_{A\pm 1}| = |\vec{j}|,$$

а парність визначається за формулою:

$$P_{A\pm 1} = (-1)^l \text{ (дійсно, } P_A = P_{A\pm 1} p = +1 \Rightarrow P_{A\pm 1} = p = (-1)^l \text{)},$$

де l – орбітальний момент неспареного нуклона або "дірки".

Тому, враховуючи, що для неспарених протона та нейтрона на p -оболонці: $l = 1$, отримуємо $P_{6+1} = (-1)^l = (-1)^1 = -1$, або в іншому записі:

$$J^P({}^{13}_6\text{C}) = J^P({}^{13}_7\text{N}) = \left(\frac{1}{2}\right)^-$$

3.10. ${}^3_1\text{H} - 1s_{1/2+}^{1p2n}; {}^3_2\text{He} - 1s_{1/2+}^{2p1n};$

$${}^{15}_7\text{N} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{4p4n} 1p_{1/2-}^{1p2n};$$

$${}^{15}_8\text{O} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{4p4n} 1p_{1/2-}^{2p1n}$$

або для стійкого ізотопу

$${}^{16}_8\text{O} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{4p4n} 1p_{1/2-}^{2p2n}.$$

Тут, як і в Задачі 3.8, числами при верхніх індексах "p" та "n" позначено кількість протонів та нейтронів, відповідно.

3.11. Відповідно до оболонкової моделі розпишемо колективні нуклонні рівні у ядрі кисню:

$${}^{16}_8O - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{4p4n} 1p_{1/2-}^{2p2n} \Rightarrow n=1, l=1.$$

Підставляючи ці значення у вираз для енергії тривимірного осцилятора, отримуємо:

$$E_{n,l} = \hbar\omega(2n+l-1/2) \Rightarrow E_{1,1} = \frac{5}{2}\hbar\omega.$$

З іншого боку $U(R_0) = U_0 + \frac{M\omega^2}{2}R_0^2 = 0$, тому $\omega = \sqrt{\frac{2U_0}{MR_0^2}}$. Енергія зв'язку в

цій моделі – це енергія переходу нуклона з рівня з квантовими числами $n=1, l=1$ у стан, коли нуклон стає вільним, або $E = U(R_0) = 0$. Тому маємо:

$$E_s = |U_0| - \frac{5}{2} \frac{\hbar c}{c} \sqrt{\frac{2U_0 c^2}{Mc^2 R_0^2}}.$$

3.12. Відповідно до визначення повного моменту та гіромагнітного співвідношення:

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s = g_l \vec{L} + g_s \vec{S} = g_j \vec{J} = \frac{1}{2}(g_l + g_s)(\vec{L} + \vec{S}) + \frac{1}{2}(g_l - g_s)(\vec{L} - \vec{S});$$

$$g_j = \frac{1}{2j(j+1)} \{g_j[j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)] + g_s[j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)]\} =$$

$$= \frac{1}{2}(g_l + g_s) + \frac{1}{2}(g_l - g_s) \left[\frac{l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)} \right].$$

Поклавши $s = \frac{1}{2}$ та $j = l \pm \frac{1}{2}$, отримуємо

$$|\mu_{p,n}| = g_j j = \left(g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l+1} \right) j.$$

Підставляючи сюди відповідні значення

$$g_l = \frac{q_0}{2m_p c} \cong 1 \text{ та } g_s = 2 \frac{\mu_p}{\mu_{яд.м.}} \frac{q_0}{2m_p c} \cong 5,58,$$

отримуємо для протона:

$$|\mu_p| = \left(1 - \frac{2,29}{j+1} \right) j \text{ при } j = l - \frac{1}{2} \text{ та } |\mu_p| = j + 2,29 \text{ при } j = l + \frac{1}{2}.$$

Поклавши $g_l = 0$ та $g_s = 2 \frac{\mu_n}{\mu_{яд.м.}} \frac{q_0}{2m_n c} \cong -3,83$, отримуємо для нейтрона:

$$|\mu_n| = \left(\frac{1,91}{j+1} \right) j \text{ при } j = l - \frac{1}{2} \text{ та } |\mu_n| = -1,91 \text{ при } j = l + \frac{1}{2}.$$

3.13. Послідовно маємо:

$$\vec{\mu} = g_j \vec{j} \quad (j=1,2); \quad g_j \vec{j} = g_1 \vec{j}_1 + g_2 \vec{j}_2,$$

де $\vec{j}^2 \psi_{n,j} = j^2 \psi_{n,j} = \hbar^2 j(j+1) \psi_{n,j}$ – власне значення оператора квадрата повного моменту системи нуклонів.

З рівностей $\vec{j}_1 = \vec{j} - \vec{j}_2$ та $\vec{j}_2 = \vec{j} - \vec{j}_1$ отримуємо, відповідно

$$2\vec{j} \vec{j}_2 = \vec{j}^2 - \vec{j}_1^2 + \vec{j}_2^2 \quad \text{та} \quad 2\vec{j} \vec{j}_1 = \vec{j}^2 - \vec{j}_2^2 + \vec{j}_1^2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} g_j \vec{j} \vec{j} &= g_1 \vec{j}_1 \vec{j} + g_2 \vec{j}_2 \vec{j} = \frac{g_1}{2} (\vec{j}^2 - \vec{j}_2^2 + \vec{j}_1^2) + \frac{g_2}{2} (\vec{j}^2 - \vec{j}_1^2 + \vec{j}_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} (g_1 + g_2) \vec{j}^2 + \frac{1}{2} (g_1 - g_2) [\vec{j}_1^2 - \vec{j}_2^2] \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (g_1 + g_2) j(j+1) + \frac{1}{2} (g_1 - g_2) [j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)] &= g_j j(j+1) \\ \Rightarrow \\ \vec{\mu} = g_j \vec{j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{|\vec{\mu}_1|}{|\vec{j}_1|} + \frac{|\vec{\mu}_2|}{|\vec{j}_2|} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\vec{\mu}_1|}{|\vec{j}_1|} - \frac{|\vec{\mu}_2|}{|\vec{j}_2|} \right) \frac{(j_1 - j_2)(j_1 + j_2 + 1)}{j(j+1)} \vec{j}. \end{aligned}$$

3.14.

$${}^9_4\text{Be} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{3p2n};$$

$${}^{17}_8\text{O} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{4p4n} 1p_{1/2-}^{2p2n} 1d_{5/2+}^{0p1n};$$

$${}^{25}_{11}\text{Na} - 1s_{1/2+}^{2p2n} 1p_{3/2-}^{4p4n} 1p_{1/2-}^{2p2n} 1d_{5/2+}^{3p6n},$$

де з правої сторони від позначення підоболонки числами при верхніх індексах "p" та "n" позначено кількість протонів та нейтронів, відповідно.

3.15.

$${}^9_4\text{Be} - (3/2)^-;$$

$${}^{17}_8\text{O} - (5/2)^+;$$

$${}^{25}_{11}\text{Na} - (5/2)^+.$$

3.16. Як і в атомній фізиці магнітний момент ядра $\vec{\mu}_I$ здійснює прецесію навколо спіна ядра $\mathbf{I}$, тому слід говорити про проекцію b_{μ_I} на спін ядра,

$$\mu_I \rightarrow \mu_{\pi} g_I \mathbf{I},$$

де g_I – множник Ланд'є для ядра.

Звідси випливає, що найбільша проекція магнітного моменту ядра (яку і прийнято називати магнітним моментом ядра) є:

$$\mu_I = [(\gamma_I + \gamma_s) \mathbf{I}(\mathbf{I} + 1) + (\gamma_s - \gamma_I)(3/4 - \ell(\ell + 1))]/(2\mathbf{I}(\mathbf{I} + 1)), \quad \mathbf{I} = \ell \pm 1/2.$$

Для розглядуваних ядер ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{23}_{11}\text{Na}$ валентними нуклонами є: протон в стані $p_{3/2}$, нейтрон в стані $d_{5/2}$ та нейтрон в стані $d_{5/2}$, відповідно. Отже магнітні моменти відповідних нуклонів будуть: 3,79, 1,15 та 1,15 ядерних магнетнів.

3.17. Запишемо гамільтоніан у декартових координатах:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{R^2}{a^2} - 1 \right) (\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) + \left(\frac{R^2}{c^2} - 1 \right) \Delta_{zz} \right] = \hat{H}_0 + \frac{\beta}{3m} (\hat{p}^2 - 3\hat{p}_z^2).$$

Хвильові функції візьмемо з задачі (№ 7.5) про знаходження хвильових функцій у нескінченній сферичній ямі (Збірник задач з квантової механіки / О.П. Кобушкін, Я.Д. Кривенко-Еметов; КІП ім. Ігоря Сікорського. – Київ, 2019 [11]).

Будемо вважати, що еліпсоїд слабо відрізняється від сфери з радіусом $R = (a^2 c)^{1/3}$, а $|\beta| \ll 1$ виражає ступінь деформації сфери, тобто:

$$a \approx R \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \quad \text{та} \quad c \approx R \left(1 + \frac{2\beta}{3} \right).$$

Як відомо з курсу квантової механіки (див., наприклад, [10, 11]), хвильова функція у s -стані є: $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin(n\pi r/R)}{r}$.

Тому матричний елемент збурення буде:

$$\langle n00|V|n00\rangle = \frac{2}{3}\beta E_{n0}^{(0)} + \beta \frac{\hbar^2}{M} \langle n00 \left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right| n00 \rangle = \frac{2}{3}\beta E_{n0}^{(0)} - \beta \frac{\hbar^2}{M} \iint \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 r^2 dr d\Omega.$$

З іншого боку маємо $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \psi$, тому

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\beta E_{n0}^{(0)} - \langle n00|V|n00\rangle &= \beta \frac{1}{2\pi R} \frac{\hbar^2}{M} \iint \left| \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin(n\pi r/R)}{r} \right) \right|^2 r^2 dr d\Omega = \\ &= \beta \frac{2}{3R} \frac{\hbar^2}{M} \int_0^R \left[\frac{(nk)^2 \cos^2(nkr)}{r^2} + \frac{\sin^2(nkr)}{r^4} + \frac{(nk)\sin(2nkr)}{r^3} \right] r^2 dr = \\ &= V_{n00}^{(1)1} + V_{n00}^{(1)2} + V_{n00}^{(1)3}. \end{aligned}$$

Тут

$$V_{n00}^{(1)1} = \beta \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 \frac{\hbar^2}{3M}, \quad V_{n00}^{(1)2} = \beta \left(\frac{n\pi}{R^2} \right) \frac{2\hbar^2}{3M} [\text{Si}(2\pi n)],$$

$$V_{n00}^{(1)3} = -\beta \left(\frac{n\pi}{R^2} \right) \frac{2\hbar^2}{3M} [\text{Si}(2\pi n)] = -V_{n00}^{(1)2},$$

де

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^R \frac{\sin^2(nkr)}{r^2} dr = \frac{\pi n}{R} \text{Si}(2\pi n), \quad \int_0^R \frac{(nk) \sin(2nkr)}{r} dr = \frac{\pi n}{R} \text{Si}(2\pi n).$$

Тоді маємо:

$$V_{100}^{(1)1} = \beta \left(\frac{\pi}{R} \right)^2 \frac{\hbar^2}{3M}, \quad V_{100}^{(1)2} = \beta \left(\frac{\pi}{R^2} \right) \frac{2\hbar^2}{3M} [\text{Si}(2\pi) \times 1,42] = 0,95 \beta \left(\frac{\pi}{R^2} \right) \frac{\hbar^2}{M}.$$

Остаточно отримуємо

$$\langle n00|V|n00 \rangle = \frac{2}{3} \beta E_{n0}^{(0)} - \beta V_{n00}^{(1)1} = \beta \frac{\hbar^2}{3M} \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 - \beta \left(\frac{n\pi}{R} \right)^2 \frac{\hbar^2}{3M} = 0.$$

Тобто, у першому порядку теорії збурень деформація у s -стані не приводить до зсуву рівня енергії.

4. РАДІОАКТИВНІ ЯДРА (Заняття 5 та 6)

Умови радіоактивного розпаду. Період напіврозпаду. Закон радіоактивного розпаду. Радіоактивні ряди. Альфа-розпад. Закон Гейгера-Неттола. Тонка структура альфа-розпаду. Оцінка розміру ядра на основі альфа-розпаду. Бета-розпад. Три типи бета-розпаду. Аналіз законів збереження енергії та імпульсу у бета-розпаді та відкриття нейтрино. Закон збереження лептонного числа.

Енергетичні умови бета-плюс та бета-мінус розпадів. Незбереження парності у бета-розпаді. Слабкі взаємодії. Чотирьохферміонна теорія Фермі слабких взаємодій. Гамма-розпад. Правила відбору електричних та магнітних переходів. Внутрішня конверсія. Ефект Мессбауера. Ядерна ізомерія.

1.) Радіоактивний розпад. Радіоактивність є властивістю атомного ядра. Для даного типу ядер, які знаходяться у певному енергетичному стані, ймовірність радіоактивного розпаду за одиницю часу є сталою. Оскільки процес розпаду є спонтанним, тому зміна ΔN кількості ядер N через розпад за проміжок часу Δt визначається лише кількістю радіоактивних ядер N в момент часу t , і вона є пропорційною проміжку часу Δt :

$$-\Delta N = \lambda N \Delta t, \quad (4.1)$$

де λ – стала, що характеризує швидкість розпаду. Величина λ називається сталою радіоактивного розпаду, яка має розмірність $[s^{-1}]$ і характеризує ймовірність розпаду одного атома за одну секунду.

2.) Кількість ядер зменшується за експоненційним законом

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t). \quad (4.2)$$

Цей закон справедливий лише при достатньо великій кількості частинок, оскільки відноситься до статистичних середніх величин.

3.) Середній час життя для даного радіоактивного ізотопу. При експоненційному законі радіоактивного розпаду в будь-який момент часу t ймовірність знайти ядра, що не розпалися, є відмінною від нуля. Час життя цих ядер перевищує t . Інші ядра, що розпалися до цього часу, прожили різний час, що є меншим за t . Середній час життя для даного радіоактивного ізотопу визначається так:

$$\bar{t} = \frac{\int_0^\infty t N(t) dt}{\int_0^\infty N(t) dt} = \tau. \quad (4.3)$$

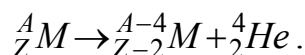
4.) Період піврозпаду T дорівнює часу, протягом якого розпадається половина наявної кількості атомів:

$$N(t) = N_0 / 2.$$

Враховуючи (4.2), маємо:

$$T \approx \frac{0,692}{\lambda}.$$

5.) *Явище α -розпаду* полягає в тому, що ядро спонтанно випускає α -частинку і перетворюється в інше ядро, масове число якого на 4 одиниці є меншим, і з атомним номером, який є меншим на 2 одиниці:



Початкова кінетична енергія α -частинки, утвореної при розпаді ядра, знаходиться в діапазоні 1,8-15 МеВ. При цьому, зі збільшенням масового числа ізоотопів одного і того самого елемента відбувається зменшення енергії відповідних α -частинок (рис. 4.1).

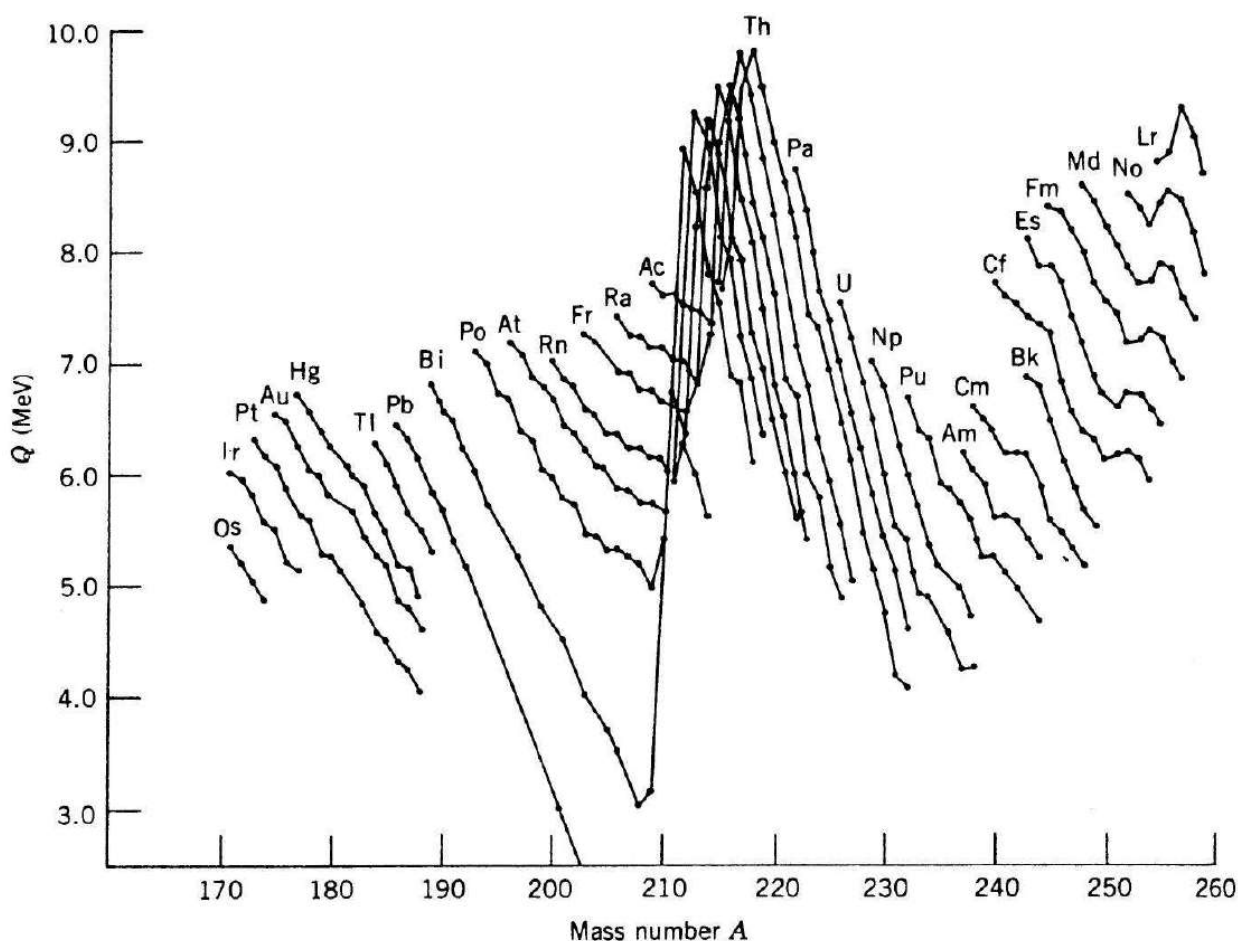


Рис.4.1. Залежність енергії альфа-частинки від масового числа A [3]

6.) β -розпад – це процес перетворення стабільного ядра в ізобару-ядро з зарядом, який є відмінним від вихідного на $\Delta Z = \pm 1$. Цей процес супроводжується випусканням електрона (позитрона) або захопленням електрона з оболонки атома. Одночасно ядро випускає нейтрино або антинейтрино. Періоди піврозпаду β -активних ядер знаходяться у межах від 10^{-2} секунд до 10^{18} років. На відміну від α -розпаду, який спостерігається винятково у важких ядрах, β -розпад є властивим ядрам як з малими, так і з великими значеннями масового числа A .

7.) Види β -розпаду. Відомі три види β -розпаду:

1) Як показано на Рис. 4.2 енергія електрона при електронному β^- -розпаді змінюється неперервно від мінімального до максимального значення, а, отже, з закону збереження енергії, електричного й лептонного заряду (див. Розділ 1.) при β^- -розпаді вилітає електрон і антинейтрино ($\bar{\nu}$) і утворюється ядро з таким самим масовим числом, але зі збільшеним на одиницю атомним номером ($\Delta Z = +1$);

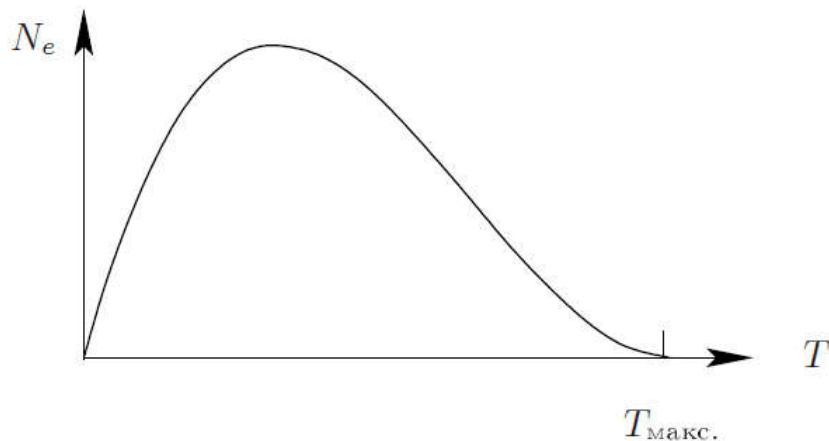


Рис. 4.2. Енергетичний спектр електронів у бета-розпаді [3]:
по вертикальній осі відкладена ймовірність вильоту електронів,
по горизонтальній – кінетична енергія електронів

2) позитронний або β^+ -розпад, при якому з ядра вилітають позитрон і нейтрино, при цьому нове ядро має атомний номер на одиницю менше ($\Delta Z = -1$);

3) електронне захоплення, при якому ядро захоплює електрони з атомної оболонки і випускає нейтрино. Найчастіше захоплення відбувається з K -оболонки, і тому процес називається K -захопленням. Але захоплення можливе і з інших оболонок.

§4.1. Задачі

4.1. Довести, що множник у показнику експоненти в законі радіоактивного розпаду $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$ має вигляд $\lambda = \frac{1}{\tau}$, де τ – середній час життя радіоактивного ядра $\tau = \bar{t}$.

4.2. Виходячи з закону радіаційного розпаду знайти ймовірність розпаду ядер за час t .

4.3. Знайти кількість нукліда N_2 , якщо він виникає за рахунок розпаду нукліда N_{01} та знайти час, за який нуклід N_2 досягне своєї максимальної

кількості. Вважати, що сталі розпаду відомі. Дослідити різні випадки відношення між собою цих сталих розпаду.

4.4. а) В експерименті дріт ніобію (Nb) радіусом $0,25\text{ мм}$ занурений у рідкий гелій ($T = 4,2^\circ\text{K}$) і по ньому пропускається струм в 300 А . Чи залишається провід надпровідним? Вважати, що залежність напруженості магнітного поля від температури є:

$$B_{c(T)} = B_{c(0)} \left| 1 - (T/T_c)^2 \right|,$$

де критична температура для ніобію дорівнює $T_c = 9,3^\circ\text{K}$.

б) Як вплине можлива зміна магнітного поля Землі на енергію зв'язку торію ^{232}Th , якщо кожен рік дипольний магнітний момент Землі змінюється приблизно на $1/4000$? Якою була швидкість напіврозпаду 12000 років тому, якщо середнє напруження магнітного поля Землі складає приблизно $0,5\text{ Гс}$, а критична температура та магнітне поле торію відповідно дорівнюють:

$$T = 1,4^\circ\text{K} \text{ та } B_c = 0,00016\text{ Тл}.$$

4.5. Ядро полонію розпадається на альфа-частинку та дочірнє ядро свинцю: $^{211}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{207}_{82}\text{Pb} + ^4_2\text{He}$. При цьому дочірнє ядро опинилось безпосередньо в основному стані. Знайти повну енергію альфа-розпаду, якщо кінетична енергія альфа-частинки $8,34\text{ МеВ}$. Яка швидкість віддачі дочірнього ядра?

4.6. У деякому експерименті альфа-розпад ядра полонію ($^{212}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{208}_{82}\text{Pb} + ^4_2\text{He}$) відбувається за двома каналами: один – безпосередньо з утворенням стабільного дочірнього ядра, а другий – з утворенням збудженого проміжного стану (ізомер). Знайти енергію гама-кванта, який випромінюється під час реакцій, та енергію реакцій, якщо розпад проходить по двох каналах з енергією альфа-частинок $5,3$ та $4,5\text{ МеВ}$, відповідно.

4.7. Альфа-частинка з кінетичною енергією $K_0 = 1\text{ МеВ}$ пружно розсіюється на нерухомому ядрі літію ^7_3Li . Знайти кінетичну енергію ядра віддачі, яке відлетіло під кутом 30° до руху альфа-частинки.

4.8. В експерименті вимірюється переріз і відносні імпульси налітаючих і розсіяних частинок у реакції $n + \nu \rightarrow p + e^-$. Знайти спін нейтрино, якщо переріз $\sigma \approx 4 \cdot 10^{-4}\text{ см}^2$, а відносні імпульси $p \approx 2\text{ МеВ}$, $p' \approx 4 \cdot 10^2\text{ МеВ}$.

4.9. Енергія реакції розпаду ізотопу ядра гелію ^6_2He дорівнює $3,5\text{ МеВ}$. Під яким кутом до напрямку руху електрона вилітає антинейтрино, якщо електрон з енергією $0,6\text{ МеВ}$ вилетів під прямим кутом до ядра віддачі.

4.10. Ядра нукліда після K -захоплення перетворюються в дочірні ядра та нейтрино. Знайти кінетичну енергію дочірніх ядер. Енергією “ K -зв’язку” електрона у ядрі знехтувати.

4.11. Розрахувати максимальний імпульс електрона, який утворився в результаті β -розпаду ядра берилію. Енергія реакції $Q \approx 0,8$ MeV.

4.12. Розрахувати максимальний імпульс електрона, який утворився в результаті β -розпаду ядра берилію (${}^{10}_4\text{Be}$), якщо відомо, що дочірні ядра опинились в основному стані.

4.13. Порахувати коефіцієнт прозорості ядра з зарядом Z по відношенню до:

- а) альфа-розпаду;
- б) виходу протонів.

4.14*. (Додаткова задача на самостійну роботу)

Як вплине можлива зміна магнітного поля Землі на час напіврозпаду ізоотопу ${}^{14}_6\text{C}$, який вважається рівним $T_{1/2} = 5730 \pm 40$ рокам, якщо кожен рік дипольний магнітний момент Землі змінюється приблизно на $1/4000$? Якою була швидкість напіврозпаду 8000 років тому, якщо середнє напруження магнітного поля Землі складає приблизно $0,5$ Гс? Оцінити спін-орбітальну взаємодію.

§4.2. Відповіді та розв’язки

4.1. Застосувавши (4.2) та позначивши $\lambda t = x$, отримуємо

$$\tau = \frac{\frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty t N(t) dt}{\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty N(t) dt} = \frac{1}{\lambda} \frac{\int_0^\infty x e^{-x} dx}{\int_0^\infty e^{-x} dx} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}.$$

4.2. $N(t)$ визначає скільки ядер залишилось після розпаду, який проходив на протязі часу t . Якщо спочатку було N_0 ядер, тоді кількість ядер, що розпались за цей час, буде $N_0 - N(t)$, а ймовірність розпаду, відповідно, буде:

$$w = \int_0^t \rho(t) dt = \int_0^t \frac{N(t)}{\tau N_0} dt = \frac{N_0 - N(t)}{N_0} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

де $\rho(t) = \frac{N(t)}{\tau N_0}$ – густина ймовірності розпаду.

4.3. Використовуючи закон радіоактивного розпаду й розв’язавши відповідну систему диференціальних рівнянь (які є його наслідком), отримуємо:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Взявши похідну, знаходимо максимальний час:

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right).$$

Графічно можна дослідити різні випадки відношень сталих розпаду (див. Рис. 4.3)

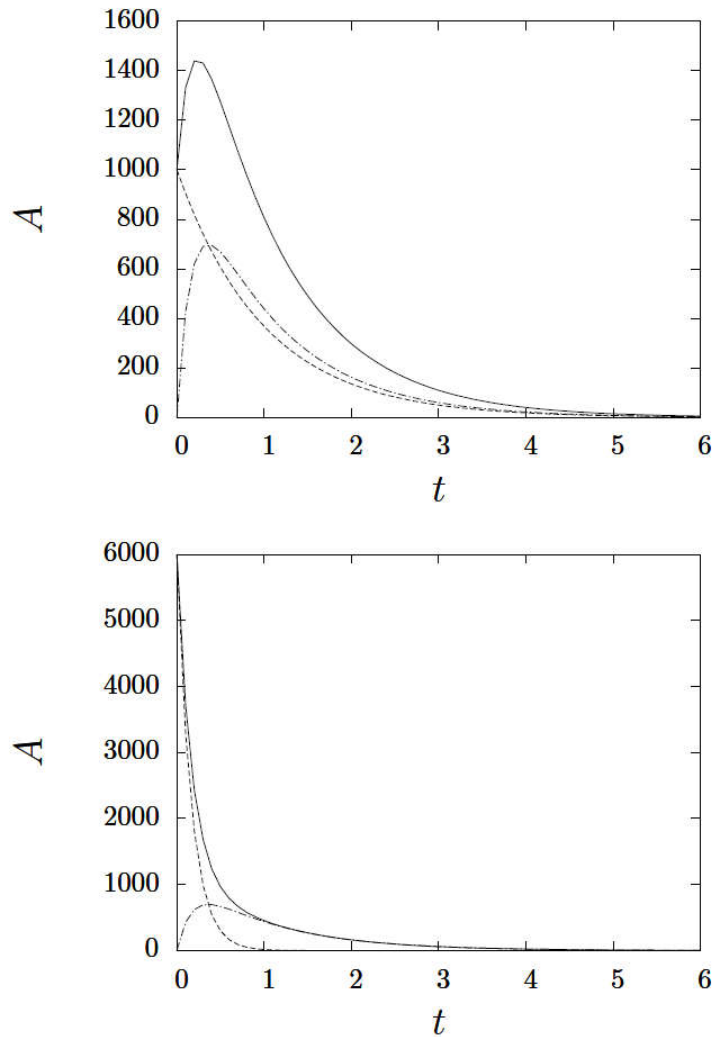


Рис. 4.3. Активності материнського (пунктир) та дочірнього (штрих-пунктир) ядер [3]: суцільна крива є сумарною активністю ядер; верхній малюнок для випадку $\lambda_1 < \lambda_2$, нижній – для випадку $\lambda_1 > \lambda_2$

4.4. а) Магнітне поле яке виникає у провіднику можна визначити за радіусом дроту та струмом. Критичне магнітне поле можна визначити з формули залежності напруженості магнітного поля від температури $B_c = B_c(T)$. Якщо прикладене магнітне поле більше критичного поля, тоді надпровідність в дроті ніобію (Nb) руйнується. Величина критичного поля буде:

$$B_c(4,2^\circ K) = B_c(0) \left[1 - \left(\frac{4,2^\circ K}{9,3^\circ K} \right)^2 \right] = (0,20 \text{ Тл})(0,80) = 0,16 \text{ Тл}.$$

Поле на поверхні дроту буде:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

де a – відстань від центральної осі дроту. Для дроту з ніобію, це поле буде:

$$B = \frac{(4\pi 10^{-7} \text{ Тл м/А})(300 \text{ А})}{2(2,5 10^{-4} \text{ м})} = 0,24 \text{ Тл}.$$

Оскільки отримане значення B перевищує критичне 0,16 Тл, тому провід не залишається надпровідним.

б) З останнього доданка формули Вайцеккера, яке відповідає надплинному стану, маємо:

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} \delta A^{-1/2} & , \quad \text{для парних } A \text{ та } Z \\ 0 & , \quad \text{якщо } A \text{ непарне} \\ -\delta A^{-1/2} & , \quad \text{для парного } A \text{ та непарного } Z \end{cases}.$$

Для торію кількість нуклонів є парним числом ($A = 232$). Також він має парну кількість протонів ($Z = 90$). Тому з приведеної формули отримуємо, що внесок надплинності буде 0,79 MeV. Критичне магнітне поле Землі дорівнює 1,6 Гс. Магнітне поле Землі 12000 років тому було більше 2 Гс й руйнувало надплинний стан торію. Тобто, енергія зв'язку торію на той час була меншою на 0,79 MeV.

4.5. Закон збереження можна записати так:

$$M_1 c^2 = M_2 c^2 + M_3 c^2 + T_2 + T_3.$$

У нерелятивістському випадку різниця енергій спокою дає енергію реакції. Тоді, з закону збереження енергії отримуємо:

$$Q = T_\alpha + T_{\text{Pb}} = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Pb}}} \right) \approx 8,5 \text{ MeV}.$$

4.6. Ізомерні стани є нестабільними. У середньому за час τ вони переходять у стабільний стан. Тому:

$$Q = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Pb}}} \right); \quad Q' = E'_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Pb}}} \right) \Rightarrow$$

$$E_\gamma = \hbar\omega = Q - Q' = E_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Pb}}} \right) - E'_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Pb}}} \right) \approx 0,8 \text{ MeV}.$$

4.7. Використовуючи закони збереження енергії-імпульсу для цього процесу, отримуємо:

$$\begin{cases} T_0 = T' + T'_a \\ \vec{p}_\alpha = \vec{p}'_\alpha + \vec{p}'_a \end{cases} \Rightarrow T'_a = \frac{4M_\alpha M_a}{(M_\alpha + M_a)^2} T_0 \cdot \cos^2(\theta).$$

4.8. Запишемо принцип детальної рівноваги для цієї реакції:

$$(2S_n + 1)(2s_v + 1)(2I + 1)\sigma p^2 = (2S_p + 1)(2s'_e + 1)(2I' + 1)\sigma' p'^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow s_v = \frac{1}{2}.$$

4.9. Оскільки енергія електрона порівнянна з енергією спокою, тоді:

$$p_e c = \sqrt{T_e(T_e + 2m_e c^2)} \approx 0,97 \text{ MeV}.$$

Використовуючи закони збереження енергії-імпульсу для цього процесу, отримуємо:

$${}^6_2\text{He} \rightarrow {}^6_3\text{Li} + e + \bar{\nu} \Rightarrow p_{\text{Li}}^2 = p_{\bar{\nu}}^2 - p_e^2 \Rightarrow p_{\text{Li}}^2 = p_e^2 + p_{\bar{\nu}}^2 + 2p_e p_{\bar{\nu}} \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{p_{\text{Li}}^2 - p_e^2 - p_{\bar{\nu}}^2}{2p_e p_{\bar{\nu}}} = -\frac{p_e}{p_{\bar{\nu}}};$$

$$Q - T_e = \frac{p_{\text{Li}}^2}{M_{\text{Li}}} + p_e c \approx 2,9 \text{ MeV};$$

$$\frac{p_{\bar{\nu}}^2}{M_{\text{Li}}} + p_{\bar{\nu}} c - \left(\frac{p_e^2}{M_{\text{Li}}} + 2,9 \right) = 0;$$

$$p_{\bar{\nu}} c \approx -M_{\text{Li}} c^2 + M_{\text{Li}} c^2 \sqrt{1 + \frac{5,8}{M_{\text{Li}} c^2}} \approx 2,9 \text{ MeV};$$

$$\cos(\alpha) = -\frac{0,97}{2,9} \approx -0,33 \Rightarrow \alpha = 121,4^\circ.$$

4.10. Оскільки, за сучасними уявленнями, маса нейтрино є меншою за 0,28 еВ (але не нульовою) та набагато меншою за енергію зв'язку (якою, за умовою, нехтуємо), тому, враховуючи різницю мас протона з електроном та маси нейтрона, отримуємо:

$$\begin{cases} \Delta M c^2 = T'_a + T'_v < 1 \text{ MeV} \\ 0 = \vec{p}_a + \vec{p}_v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_a c < -M c^2 \pm M c^2 \sqrt{1 + \frac{2 \text{ MeV}}{M c^2}} \Rightarrow p'_a c = p'_v c < 1 \text{ MeV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T'_a < (0,003 \div 0,1) 10^{-3} \text{ MeV} = 3 \div 100 \text{ eV}, (A = 300 \div 5).$$

Оскільки дочірнє ядро набагато порядків є масивнішим за нейтрино, тому майже вся енергія, що виділилася, уноситься нейтрино.

4.11. Як і у попередній задачі, кінетична енергія дочірнього ядра є набагато меншою за кінетичну енергію електрона. Крім того, з закону збереження імпульсу отримуємо:

$$p_e^2 = p_B^2 + p_{\bar{\nu}}^2 + 2p_B p_{\bar{\nu}} \cos(\varphi).$$

Максимальний імпульс електрона буде при $\varphi = 2\pi$. Оскільки імпульси антинейтрино й бора довільні, тому виберемо з тією ж точністю $p_B = 0$. Тоді $p_{\bar{\nu}} = p_e$, маємо:

$$Q = \frac{p_B^2}{2M_B} + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 + p_{\bar{\nu}} c \approx \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 + p_e c \Rightarrow$$

$$p_e c = Q (Q + 2m_e c^2) / (2(Q + m_e c^2)).$$

4.12. Відповідна реакція є ${}^{10}_4\text{Be} \rightarrow {}^{10}_3\text{B} + e + \bar{\nu}$.

Оскільки маса ${}^{10}_4\text{Be} = 10,0135$ а.о.м., а маса ${}^{10}_3\text{B} = 10,0125$ а.о.м, тому

$$(M_{{}^{10}_4\text{Be}} - M_{{}^{10}_3\text{B}})c^2 = p_{\bar{\nu}} c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} = 0,55 \text{ MeV}.$$

Виконавши розрахунки, аналогічно Задачі 4.11, отримуємо

$$p_e c = (0,55^2 - m_e^2 c^4) / (2 \cdot 0,55) \text{ MeV}.$$

4.13. Як відомо у трьохвимірному випадку коефіцієнт прозорості (фактор Гамова) є:

$$D = e^{-2ab},$$

де $a = R/\lambda_B$; $b = \sqrt{B_k/K} \cdot (\arccos \sqrt{B_k/K} - \sqrt{1 - B_k/K})$; $\lambda_B = \hbar / \sqrt{2mB_k}$.

Тут K – кінетична енергія вилітаючої частинки, B_k – кулонівський бар'єр, λ_B – довжина хвилі, що відповідає енергії кулонівського бар'єру.

При $B_k \gg K$ маємо

$$D = e^{-2\pi R B_k / (\hbar v)} = e^{-2\pi Z z e^2 / (\hbar v)}.$$

Для коефіцієнта прозорості при виході протону з алюмінію за кінетичної енергії $K_p = 1 \text{ MeV}$, отримуємо:

$$R = 4,2 \cdot 10^{-13} \text{ см}, B_k = 4,3 \text{ MeV} \Rightarrow D \sim 0,005.$$

При виході альфа-частинки:

$$B \sim B_0 \frac{2Z}{A^{1/3}} \sim 5 \cdot 10^{-10} \text{ MeV}; a \sim 4,2/2,5 \sim 2; b \sim 1 \div 3 \Rightarrow D \sim 0,018 \div 0,000006.$$

Тобто для альфа-частинок кулонівський бар'єр є менш прозорим, ніж для протонів.

4.14*. Додаткова задача на самостійну роботу.

Вказівка: Використати результати Задачі 4.4 і те, що при великих напруженнях $\mu B \geq \Delta$ зникає надплинний стан.

5. ПОДІЛ ЯДЕР (Заняття 7 та 8)

Вимушений та спонтанний поділ ядер. Основні властивості поділу ядер. Поділ ядер в моделі рідкої краплі. Параметр поділу. Труднощі моделі рідкої краплі при поясненні окремих властивостей поділу ядер. Поділ ядра під дією нейтронів.

Ізмерія атомних ядер. Ядерні ізомери форми. Оболонкова поправка. Надважкі елементи, “острів Стабільності”

1.) *Поділ ядра* – це процес (явище), при якому важке ядро розпадається на декілька ядер з меншою масою. Поділ слід відрізняти від реакцій радіоактивного розпаду, при яких виділяються гамма-кванти, альфа- і бета-частинки, а маса ядра та його атомний номер змінюються незначно, або зовсім не змінюються. При поділі первинне ядро розпадається на великі шматки і як наслідок виникають відносно важкі ядра із середини періодичної таблиці Менделєєва.

2.) *Важкі ядра* – це ядра, які знаходяться наприкінці таблиці Менделєєва. Вони характеризуються властивістю розпадатись на два, а, в окремих випадках, і на три ядра приблизно однакової маси. Поділ ядер може відбуватися як в результаті збудження ядра при його взаємодії з іншими частинками (найчастіше нейтронами), так і мимовільно (тобто, не зумовлений ніякими зовнішніми чинниками). У першому випадку говорять про *вимушений* поділ ядер, а в другому – про *спонтанний* поділ ядер.

Найчастіше спостерігається поділ важкого ядра на два уламки. Поділ ядра на три частини спостерігається тільки при великих енергіях збудження.

3.) *Уламки ядра*. Ядра, що утворились після поділу (їх називають уламками ядра) знаходяться в збудженому стані та перенасичені нейтронами. Тому поділ ядра супроводжується утворенням нейтронів, гама-квантів, електронів, антинейтрино і легких ядер (зазвичай альфа-частинок).

4.) Експериментально встановлено, що найімовірнішим процесом поділу буває процес, коли кількість нуклонів і уламків знаходиться у відношенні як 2:3.

5.) Поділ ядер є *екзотермічним процесом*. Добре відомо (див. Задачу 3.7.), що для ядер з кінця таблиці Менделєєва енергія зв'язку на один нуклон приблизно на 0,8 MeV менша, ніж для ядер із середини періодичної таблиці. Таким чином, в результаті поділу важкого ядра з масовим числом A виділяється енергія $Q = 0,8A$ MeV.

6.) Умова енергетичної вигідності процесу поділу ядра: $Z^2/A > 17$. Величину Z^2/A називають *параметром поділу ядра*, де Z – кількість протонів, A – загальна кількість нуклонів.

7.) Умова енергетичної вигідності починає виконуватися з ядер срібла $^{47}_{108}\text{Ag}$. Проте досвід показує, що поділ ядер відбувається тільки для самих важких ядер ^{90}Th , ^{91}Pa і ^{92}U . Це пов'язано з тим, що невеликі деформації ядра приводять до виникнення потенційного бар'єру, який перешкоджає поділу (див. Рис. 5.1).

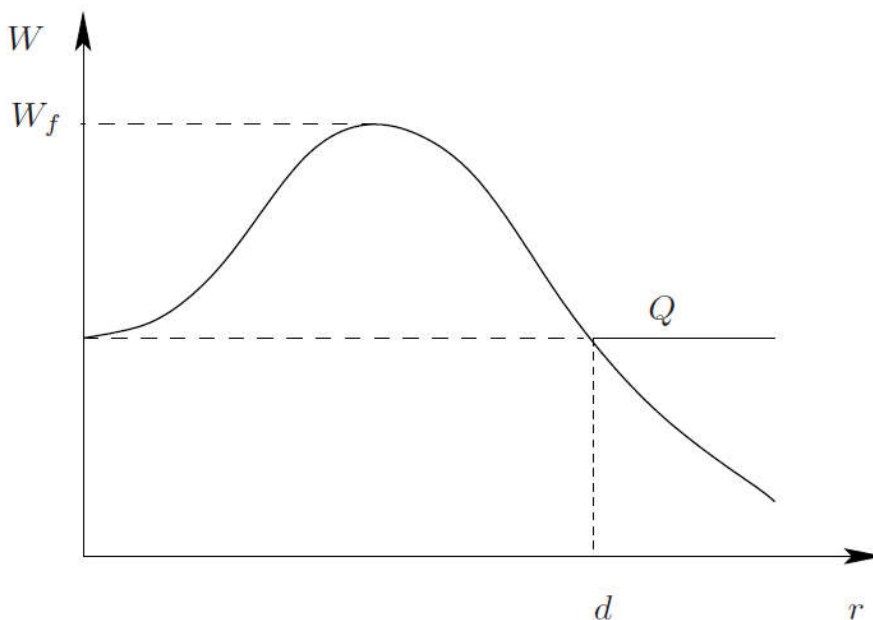


Рис. 5.1. Енергія деформації ядра в залежності від величини деформації [3]

8.) Критичне значення параметра поділу ядра $Z^2/A=49$ відповідає ядрам з $Z \approx 120$. У разі, коли параметр поділу стає більше критичного значення, величина $2E_{\text{нов}} - E_{\text{к}}$ (де $E_{\text{нов}}$, $E_{\text{к}}$ – поверхнева і кулонівська енергії, відповідно) стає від'ємною і ядра стають нестійкими відносно спонтанного поділу. Отже, такі ядра існувати не можуть.

9.) Для ядер урану $Z^2/A \approx 36$ енергетичний бар'єр стає настільки великим, що спонтанний поділ стає малоімовірним. Для ядер з великим значенням параметра Z (і, отже, великим значенням параметра поділу) ймовірність спонтанного поділу збільшується.

10.) Експерименти виявили десятки ізомерів з властивостями, що є подібними до $^{242}_{95}\text{Am}^*$, а також з'ясували основні їхні особливості:

а) усі ізомери мають високу ймовірність спонтанного поділу, яка у середньому в 10^{26} разів перевищує ймовірність поділу ядер в основному стані;

б) має місце сильне пригнічення γ -переходів із ізомерного до основного стану;

в) ізомери мають невисоке значення спінів;

г) для ізомерних станів характерним є висока енергія збудження відносно основного стану.

11.) Елементи, що зустрічаються на Землі закінчуються 92-м елементом, ураном. Це пов'язано з тим, що час життя елементів із $Z > 92$ (їх називають трансурановими елементами) виявляється набагато меншим за час життя Землі. Тому всі вони отримані штучно. До теперішнього часу відомо 26 трансуранових елементів.

12.) *Острів стабільності* – гіпотетична трансуранова область на карті ізотопів (рис. 5.2), для якої (відповідно до оболонкової моделі ядра Марії Гепперт-Маєр та Ганса Енсена) внаслідок граничного заповнення в ядрі протонних і нейтронних оболонок (так звані подвійно магічні ядра) час життя ізотопів значно перевищує час життя «сусідніх» трансуранових ізотопів.



Рис 5.2 Острів стабільності на карті ізотопів (взято з [15])

§5.1. Задачі

5.1. Мішень ${}^7_3\text{Li}$ бомбардується нейтронами з кінетичною енергією $T_0 = 1$ MeV. Знайти енергію збудження ядер, яка виникає під час непружного зіткнення, якщо енергія нейтронів, розсіяних під прямим кутом до налітаючого пучка, дорівнює $T' = 0,33$ MeV.

5.2. Надважкі хімічні елементи з атомним номером, що є більшим за 100, можна отримати тільки в реакціях злиття в прискорювачах заряджених частинок. В цих реакціях важке ядро-мішень обстрілюється більш легкими ядрами-снарядами. Ядра нових елементів виникають в разі точного попадання і злиття ядер снаряду і мішені.

Чи можна отримати надважкий елемент у реакціях 1) $^{238}\text{U} + ^{34}\text{S}$, 2) $^{244}\text{Pu} + ^{48}\text{Ca}$? Що це за елементи? Поясніть чому вони виникають. Які реакції також можливі?

5.3. Довести, що розсіяння нейтронів з енергією до $E = 5 \text{ MeV}$ є сферично-симетричним у системі центра мас.

5.4. Знайти формулу для середню довжину пробігу нейтронів $\langle l \rangle$, що мають середню кінетичну енергію $T_0 = 10 \text{ MeV}$ у воді.

5.5. Яка повинна бути товщина d свинцевої пластинки, щоб паралельний пучок нейтронів $E_k^0 = 10 \text{ MeV}$ при проходженні через неї зменшився в “ e ” разів? Вважати, що переріз взаємодії визначається за формулою $\sigma \approx 2\pi(R + \lambda)^2$, а ізоотп свинцю на якому відбувається поглинання складає 0,6% у природній суміші.

5.6. Знайти функцію розподілу налітаючих нейтронів з енергією $T_0 \leq 5 \text{ MeV}$ після другого зіткнення.

5.7. Знайти кількість зіткнень, яка необхідна для уповільнення нейтронів у воді від енергії $T_0 = 5 \text{ MeV}$ до теплової енергії.

5.8. Скільки енергії виділиться при поділі всіх ядер урану з сумарною масою 1 г?

§5.2. Відповіді та розв’язки

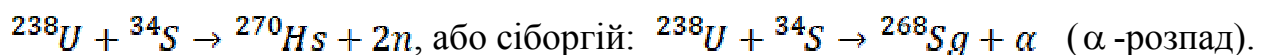
5.1. Враховуючи, що при такому процесі маси спокою ядра у початковому та кінцевому станах різняться, закони збереження енергії-імпульсу запишемо у такому вигляді:

$$\begin{cases} T_0 + Mc^2 = T' + M^*c^2 + T_{Li} \\ \vec{p}_n = \vec{p}'_n + \vec{p}'_{Li} \end{cases} \Rightarrow$$

Звідси, згідно з визначенням енергії збудження, виконавши нескладні проміжні математичні викладки, отримуємо:

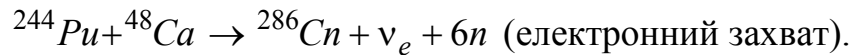
$$E_{z6} = (M^* - M)c^2 \approx T_0 - T' - \frac{m}{M}(T_0 + T) = 0,5 \text{ MeV}.$$

5.2. а) У результаті реакції отримується надважкий елемент хассій, що є найбільш стабільним ізоотпом ^{270}Hs (час напіврозпаду складає 4-10 секунд). У цього елемента є заповненою нуклонна оболонка. Вперше він був отриманий в Німеччині у 1984 році. Відповідна реакція:



б) У результаті реакції отримується надважкий елемент флеровій, що є найбільш стабільним ізотопом ^{289}Fl (час напіврозпаду складає 2,6 секунд). Вперше він був отриманий в 1998 році. Відповідні реакції:

$^{244}\text{Pu} + ^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{289}\text{Fl} + 3n$; або ніхоній: $^{244}\text{Pu} + ^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{288}\text{Nh} + \alpha$
(α -розпад); або коперницій:



5.3. При взаємодії з ядрами нейтронів кулонівський бар'єр відсутній. Але при $l \neq 0$ існує відцентровий бар'єр висотою $B_u^N = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_n R^2}$ (для $\frac{1}{2}H$ мінімальним значенням є $B_u^N = 20 \text{ MeV}$).

Для ефективної (надбар'єрної) взаємодії з ядрами при $l \neq 0$ кінетична енергія нейтронів повинна задовольняти умові $T > B_u^N$. Якщо енергія нейтронів є фіксованою, тоді ця умова означає, що нейтрони з цією енергією ефективно взаємодіють з ядрами лише при $l < l_T$, де

$$l_T(l_T + 1) < 2m_n R^2 T / \hbar^2 = (R/\lambda)^2 \Rightarrow l_T < R/\lambda \text{ (при великих } l \text{)}.$$

В загальному випадку, вводячи прицільний параметр $b = R_T$, отримуємо

$$pb = \hbar \sqrt{l(l+1)} \Rightarrow l = 0$$

(оскільки орбітальний момент пробігає цілі значення).

5.4. Зміна кількості нейтронів є прямо-пропорційною їх початковій кількості, густині розсіюючих центрів, перерізу взаємодії та довжині пройденого шляху, тому:

$$dN = -Nn\sigma dr \Rightarrow N(r) = N_0 e^{-\sigma n r};$$

$$\sigma \sim \frac{1}{n\langle l \rangle} \Rightarrow \langle l \rangle \sim \frac{1}{n\sigma}.$$

Оскільки за таких енергій поглинанням нейтронів можна знехтувати, тому для перерізу розсіяння можна наближено використати формулу для геометричного перерізу

$$\begin{aligned} \sigma_S &\approx \pi(R^2 + \lambda)^2 = \pi \cdot 10^{-24} (0,83 + 0,1)^2 = \\ &= 2,71 \cdot 10^{-24} [\text{см}^2] = 2,71 [\text{барн}] = 2,71 \cdot 10^{-28} [\text{м}^2]. \end{aligned}$$

Вода має щільність $n_g = 2\text{-}8 \text{ ммоль/дм}^3$, яку потрібно помножити на 3 (оскільки за енергій у 10 МеВ розсіяння відбувається на окремих атомах).

5.5. Логарифмуючи формулу попередньої задачі та враховуючи, що $N(d) = N_0 e^{-\sigma n d}$, отримуємо:

$$d = \frac{1}{n\sigma} \ln\left(\frac{N_0}{N(d)}\right) = \frac{1}{n\sigma} \ln(e) = \frac{1}{n\sigma} \approx \frac{1}{n\pi(R^2 + \lambda)^2}.$$

Густина свинцю дорівнює

$$\rho_{\text{Pb}} = 11340 [\text{кг}/\text{см}^3] = 11,35 [\text{г}/\text{см}^3] = m_{a.o.m.} n_{\text{Pb}},$$

де $m_{a.o.m.} = 1,66 \cdot 10^{-24} [\text{г}]$.

Звідси маємо:

$$\begin{aligned} n_{\text{Pb}} &= \frac{\rho_{\text{Pb}}}{m_{a.o.m.}} = \frac{11,35}{1,66} \cdot 10^{24} = 6,84 \cdot 10^{24} [\text{см}^{-3}] = \\ &= 6,84 \cdot 10^{24} \cdot 10^{-39} = 6,84 \cdot 10^{-15} \text{ фм}^{-3}. \\ &\quad (1 \text{ см}^3 = 10^{39} \text{ фм}) \end{aligned}$$

Оскільки де-бройлівська довжина хвилі нейтронів

$$\lambda_n = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 T_n}} = \frac{197,3}{\sqrt{938 \cdot 2 \cdot T_n}} 10^{-13} [\text{см}] = \frac{4,55 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{T_n [\text{MeV}]}]} = 0,1 \cdot 10^{-12} [\text{см}],$$

а

$$R = r_0 A^{1/3} = 1,4 \cdot (207)^{1/3} = 0,83 \cdot 10^{-12} [\text{см}],$$

тому

$$\begin{aligned} \sigma_S &\approx \pi (R^2 + \lambda^2) = \pi \cdot 10^{-24} (0,83 + 0,1)^2 = \\ &= 2,71 \cdot 10^{-24} [\text{см}^2] = 2,71 [\text{барн}] = 2,71 \cdot 10^{-28} [\text{м}^2]. \end{aligned}$$

Ізотоп свинцю, на якому відбувається поглинання нейтрона, у природній суміші становить $\approx 0,6\%$. При цьому

$$\sigma \approx \sigma_{el} + \sigma_a \approx 2\pi (R^2 + \lambda^2),$$

де σ_{el} та σ_a – перерізи пружного розсіювання та поглинання, відповідно

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{k \cdot n_{\text{Pb}} \sigma} \approx \frac{1}{0,006 n_{\text{Pb}} 2\pi (R^2 + \lambda^2)} = \\ &= \frac{1}{0,006 \cdot 2 \cdot 6,84 \cdot 2,71} = 4,17 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,17 \text{ см}. \end{aligned}$$

Отриманий результат показує, що, за вказаних умов, свинець дуже добре поглинає нейтрони.

5.6. При першому зіткненні функція розподілу є однорідною, оскільки, як це було показано в одній з попередніх задач (див. Задача 5.3), розсіювання при таких енергіях (до 5 MeV) не залежить від кутів (тобто відбувається у s -хвилі) і не залежить від енергії нейтронів, тобто до енергій T_0 воно є рівномірним:

$$f_1(T) dT = \left(\frac{dT}{T_0} \right)$$

або кількість нейтронів в районі dT' біля енергії T' цього спектру (з енергією до T_0) буде

$$dN = \left(\frac{dT'}{T_0} \right).$$

При другому зіткненні налітаючі нейтрони будуть мати всі енергії від 0 до T' . Тому після другого зіткнення, за аналогією до першого зіткнення, ці нейтрони матимуть такий внесок у інтервал dT спектру:

$$\Delta N = \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT'}{T'} \right) dT.$$

А загальний внесок у інтервал dT від усіх нейтронів з $T' > T$ буде:

$$\frac{dT}{T_0} \int_T^{T_0} \frac{dT'}{T'} = \frac{dT}{T_0} \ln \frac{T_0}{T}.$$

Тоді маємо

$$f_2(T) = \frac{1}{T_0} \ln \frac{T_0}{T}.$$

5.7. Узагальнюючи формулу попередньої задачі на n зіткнень, маємо:

$$f_n(T) = \frac{1}{(n-1)! T_0} \left(\ln \frac{T_0}{T} \right)^{n-1}.$$

Після усереднення, де значення середньої кількості зіткнень $\bar{n}$ визначається за усіма значеннями n , вважаючи енергію T сталою,

$$\bar{n} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n f_n(T)}{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(T)} = \ln \frac{T_0}{T} + 1,$$

отримуємо, підставляючи сюди $T_0 = 5 \text{ MeV}$ та теплову енергію $T = kT^\circ = 0,025 \text{ eV}$, $\bar{n} \sim 19$.

5.8. 1-й метод:

$$M_{92}^{235}\text{U} = Zm_p + (A-Z)m_n - E_{38}/c^2 = Zm_p + (A-Z)m_n - Z\Delta_p - (A-Z)\Delta_n + \Delta_U \approx \\ \approx 235,04 \text{ a.o.m.} \approx 390,21 \cdot 10^{-24} \text{ г};$$

$$1/M_U = 2,56 \cdot 10^{21} \Rightarrow Q = 2,56 \cdot 10^{21} \cdot 200 = 512 \cdot 10^{21} \text{ MeV} = 0,8 \cdot 10^8 \text{ кДж}.$$

2-й метод: знайти за допомогою молярної маси та числа Авогадро (для самостійної роботи студента).

6. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ (Заняття 9)

Закон збереження енергії в ядерних реакціях. Екзоенергетичні та ендоенергетичні реакції. Закон збереження баріонного числа. Резонансне розсіювання нейтронів на ядрах. Формула Брейта-Вігнера. Спосіб вимірювання розміру ядер за розсіюванням нейтронів на ядрах.

1.) *Ядерна реакція* – це сильна взаємодія ядра з іншим ядром (частинкою), яка супроводжується перетворенням ядра з вильотом нових (або зміною (перебудовою) початкових частинок). Ядерні реакції відбуваються в результаті бомбардування ядер іншими ядрами або частинками (наприклад нейтронами, зарядженими частинками, γ -квантами, кулонівського збудження ядра без потрапляння в нього частинки, тощо). Як і при хімічних реакціях, продукти реакції відрізняються від початкових. Енергії частинок, що беруть участь в ядерних реакціях, змінюються в дуже широких межах. Так в сучасних експериментах вони досягають декількох ТеВ.

Частинки, що зіштовхуються, називають початковими (початковим(або вхідним) каналом, а частинки, що утворилися в результаті реакції, – кінцевими (або вихідним) каналом.

2.) Ядерні реакції супроводжуються зміною кінетичної енергії взаємодіючих частинок. Під час ядерних реакцій зберігаються Z , A , енергія, імпульс, повний момент та ізоспін (при цьому в електромагнітних процесах зберігається тільки проекція ізоспіна, у слабких взаємодіях ізоспін і його проекція не зберігаються).

Також існує низка особливих законів збереження, притаманних ядерній взаємодії, наприклад, закон збереження баріонного заряду.

Енергію ядерної реакції (або тепловий ефект Q) можна визначити як зміну кінетичної енергії в процесі реакції:

$$Q = E_{02} - E_{01} = T_2 - T_1, \quad (6.1)$$

де

$$E_{01} = M_A c^2 + m_a c^2 \text{ та } E_{02} = M_B c^2 + m_b c^2 - \text{енергії спокою;}$$

$$T_1 = T_A + T_a \text{ та } T_2 = T_B + T_b - \text{кінетичні енергії.}$$

Тоді (6.1) буде

$$Q = c^2 [(M_A + m_a) - (M_B + m_b)] \quad (6.2)$$

Маси спокою для даного у реакції набору ядер і частинок мають цілком певне значення, тому Q набуває характерного значення для кожної ядерної реакції.

Залежно від зміни маси ядер і частинок, що беруть участь в реакції, Q може набувати значення $Q > 0$, $Q < 0$. Реакції з $Q > 0$ називають *екзоенергетичними* (екзотермічними). В цьому випадку кінетична енергія

виділяється за рахунок зменшення енергії спокою, тобто частина енергії спокою вихідного ядра A і взаємодіючої частинки a перетворюються в кінетичну енергію продуктів реакції, при цьому маса останніх зменшується. Реакції з $Q < 0$ називають *ендоенергетичними* (ендотермічними). Так

$$T_1 = |Q| + T_2.$$

Екзоенергетичні реакції можуть відбуватись і при нульовій кінетичній енергії взаємодіючих частинок, якщо їх наближенню не заважають кулонівські сили відштовхування.

3.) Баріонний заряд (іноді баріонне число) властивий лише баріонам, приймає значення 1 для частинок та -1 для античастинок. Для решти частинок, включаючи мезони та лептони, баріонний заряд дорівнює нулю. Таким чином, різниця кількості баріонів та антибаріонів в системі залишається сталою. Одним з наслідків закону збереження баріонного заряду є неможливість розпаду протона.

4.) Коефіцієнт розмноження нейтронів k – це відношення кількості нейтронів наступного покоління до кількості нейтронів попереднього покоління у всьому обсязі розмножувального нейтронного середовища (активної зони ядерного реактора, тощо).

5.) У релятивістському випадку формула Брейта-Вігнера набуває вигляду:

$$\sigma(E) = \sigma_{\max} \frac{M_0^2 \Gamma^2}{(s - M_0^2)^2 + \Gamma(s)^2 M_0^2},$$

де
$$M_0 = E_R, \sigma_{\max} = 4\pi\lambda^2 g, g = \frac{(2J+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)},$$

J – спін утвореного складеного ядра (резонансу); s_1, s_2 – спіни двох початкових частинок.

§6.1. Задачі

6.1. Знайти порогову кінетичну енергію (у лабораторній системі) падаючої нерелятивістської частинки з масою m_a , яка викликає ендоенергетичну реакцію $p + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + n$, якщо маса ядра-мішені дорівнює M_A , а енергія реакції:

$$Q' = -0,079 \text{ а.о.м.} = -0,079 \cdot 931,494 \text{ Мев} = -73,588 \text{ Мев}.$$

Чи можливі реакції при $Q \neq Q'$?

6.2. Знайти геометричний переріз розсіяння для частинки з енергією E на ядрі радіусу R .

6.3. За кімнатної температури приблизно $f = 20\%$ γ -розпадів $^{119}_{50}\text{Sn}$ у сполученні з BaSnO_3 відбувається без віддачі. Оцінити, якою повинна бути товщина джерела, для того щоб в ньому не відбувалося помітного самопоглинання месбауерських γ -квантів. Густина BaSnO_3 – $\rho = 3 \text{ г/см}^3$, процентна частина ізоотопу $^{119}_{50}\text{Sn}$ в природній суміші – $\varepsilon = 8\%$, енергія γ -квантів $E = 25 \text{ кеВ}$.

6.4. У лабораторній системі координат знайти частку η початкової кінетичної енергії E_k^0 , яку втрачає нейтрон при пружному лобовому зіткненні на ядрах ^4_2He , $^{16}_8\text{O}$, $^{238}_{92}\text{U}$.

6.5. У лабораторній системі координат знайти частку η початкової кінетичної енергії E_k^0 , яку втрачає нейтрон при пружному розсіянні під кутом на ^4_2He , якщо кут дорівнює 30° , 90° і 150° .

6.6. а) Оцінити величину перерізу нейтронів з енергією $T_n = 10 \text{ МеВ}$, що пружно розсіюються на ядрі $^{208}_{82}\text{Pb}$.

б) Знайти функціональну залежність перерізу радіаційного захоплення нейтронів при наступних припущеннях: $T_n \ll T_{01}$, $\Gamma_\gamma \approx \text{const}$, $\Gamma_n \ll \Gamma_\gamma$.

с) Оцінити величину перерізу захоплення нейтронів з енергією $< 0.1 \text{ еВ}$, що розсіюються на ядрі $^{235}_{92}\text{U}$, якщо відомо, що глибина потенціальної ями у наближенні середнього поля $U_0 = 50 \text{ МеВ}$.

6.7. Нейтрони з енергією $T_n = E = 9 \text{ МеВ}$ розсіюються на урановій мішені $^{235}_{92}\text{U}$. Знайти повний переріз розсіяння, вважаючи, що при цих енергіях $k \approx k_0$ та $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma + \Gamma_\alpha + \dots \approx \Gamma_n$, а переріз поглинання майже дорівнює перерізу ділення (як, наприклад, для значно менших енергій це показано на Рис. 6.1.), а $r_0 = 1,1 \text{ фм}$.

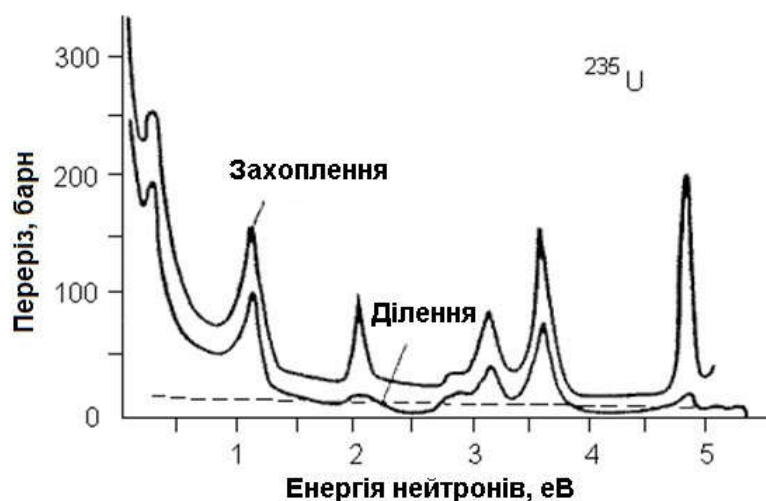


Рис. 6.1. Залежність перерізу захоплення і перерізу поділу ^{235}U нейтронами від їх енергії: верхня лінія – переріз захоплення, нижня – переріз поділу, пунктирна лінія – переріз розсіювання нейтронів

6.8. Джерело теплових нейтронів встановлено в центрі графітового куба. З плином часу нейтрони, після багаторазового розсіювання на ядрах вуглецю та часткового поглинання, розповсюджуються по всьому об'ємові. Оцінити ефективний розмір області, яку в результаті займають нейтрони, якщо ефективний переріз розсіювання нейтронів – $\sigma_s = 4,8 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, поглинання – $\sigma_a = 4,8 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$. Густина графіту $\rho_C = 2,2 \text{ г/см}^3$.

6.9. Яка повинна бути товщина d алюмінієвої пластинки, щоб паралельний пучок теплових нейтронів при проходженні через неї зменшився в “e” разів?

6.10. Обчислити коефіцієнт заломлення нейтронів з енергією $E = 20 \text{ мев}$ у металевому ^9Be , якщо амплітуда розсіяння $f = 0,77 \cdot 10^{-12} \text{ см}$. Чому дорівнює кут повного внутрішнього відбиття нейтронів $\rho = 1,84 \text{ г/см}^3$?

6.11. Вихід ядерної реакції можна визначити таким чином: це частка Λ падаючих на ядра мішені частинок первинного пучка, що зазнала ядерної взаємодії. Знайти переріз ядерної реакції, якщо $\Lambda = 10^{-6}$, товщина тонкої мішені $x = 0,1 \text{ мм}$ і густина ядер мішені $n = 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

6.12. У чому фізичний зміст коефіцієнта розмноження? Скільки нейтронів буде у сотому поколінні, якщо процес поділу починається з $N_0 = 1000$ нейтронів і $k = 1,05$?

6.13. Оцінити проміжок часу, який необхідний для поділу $1 \text{ кг } {}^{235}_{92}\text{U}$ у нескінченному урановому ядерному середовищі, якщо середня енергія поділу урану є $1,6 \text{ MeV}$. Переріз поділу урану $\sigma_U \approx 2,0 \text{ барн}$ ($1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2 = 100 \text{ фм}^2$), $k = 1,001$. Вважати, що в початковий момент поділ почався з одного ядра.

6.14. У скільки разів за одну секунду збільшиться кількість нейтронів, якщо нейтрони містять $0,68\%$ запізнілих (запізнюючих) нейтронів з середнім часом напіврозпаду $\bar{t} = 15 \text{ с}$. Вважати, що коефіцієнт розмноження нейтронів у суміші урану $k = 1,0025$.

6.15. Знайти “період реактора”, якщо коефіцієнт розмноження $k = 1,01$ та $\tau = 0,1 \text{ с}$.

Додаткові задачі для самостійної роботи.

6.16*. Знайти функціональну залежність інтенсивності проходження гамма-випромінення від довжини хвилі та атомного номеру матеріалу поглинача. Приблизно оцінити порядок відношення інтенсивностей поглинання алюмінію, міді та свинцю, якщо потік гамма-променів спрямований перпендикулярно до пластини алюмінію (міді, свинцю), а їх густина, відповідно, є: $\rho_{Al} = 2,7 \text{ г/см}^3$, $\rho_{Cu} = 8,96 \text{ г/см}^3$, $\rho_{Pb} = 11,35 \text{ г/см}^3$.

6.17*. Запропонувати ядерні реакції з утворенням золота. Обґрунтуйте відповідь. Який час життя утворених ізотопів?

6.18*. Оцінити величину перерізу нейтронів з енергією 200 eV , що пружно розсіюються на ядрі ${}^{232}\text{Th}$, якщо залежність повного перерізу реакції представлена на Рис. 6.2.

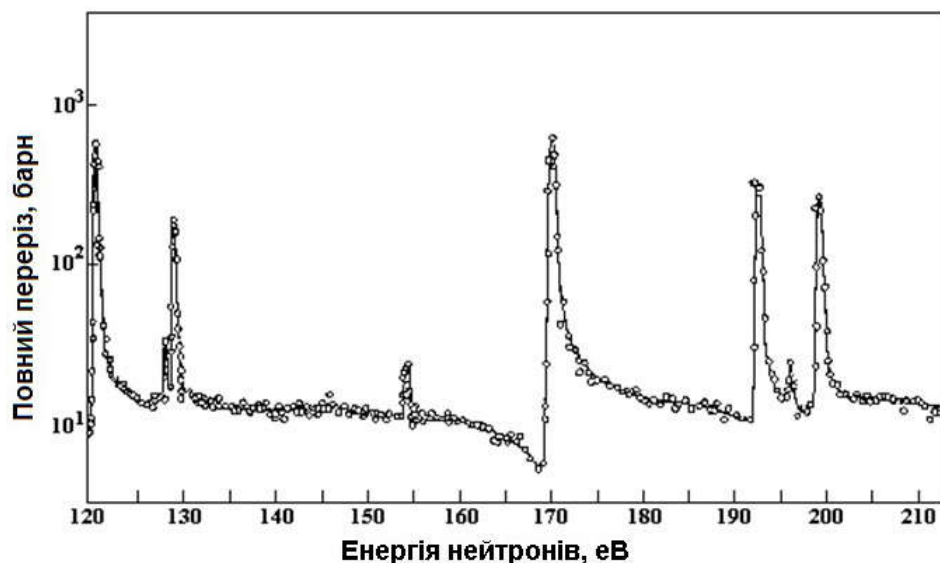


Рис. 6.2. Залежність повного перерізу (σ_t) на ядрі ${}^{232}\text{Th}$ від енергії нейтронів

6.19*. Оцінити ефективний переріз ділення ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ нейтронами з енергією $E \approx 10^{-2} \text{ eV}$ (див. Рис. 6.1, 6.4, 6.5), якщо відомо, що переріз ділення приблизно дорівнює перерізу захоплення, а повна ширина ділення приблизно дорівнює подвійній ширині радіаційного захоплення ($\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma \approx 2\Gamma_\gamma \approx 0,1 \text{ eV}$), глибина ядерного потенціалу $U_0 = 40 \text{ MeV}$.

6.20*. Скільки атомів урану містилось у реакторах РБМК-1000, якщо процентний вміст Урану-235 доходив до 1,8-3,6%, а самі реактори розраховані на 190-220 т ядерного палива?

6.21*. Знайти масу частинки, якщо релятивістські-інваріантний переріз відповідного їй розсіяння π^+ -мезона на протоні дорівнює 200 мбарн при кінетичній енергії 190 MeV.

§6.2. Відповіді та розв'язки

6.1. Оскільки $Q < 0$, тому при такій реакції зростає енергія спокою, завдяки зменшенню кінетичної енергії. (Такі реакції, на відміну від екзоенергетичних реакцій, які проходять при довільній енергії з $Q > 0$, називаються ендоенергетичними) (рис. 6.3).

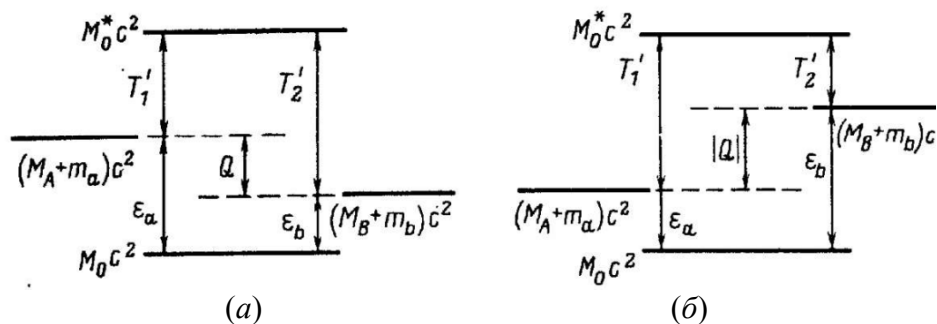


Рис. 6.3. Екзоенергетичні (а) та ендоенергетичні (б) реакції (малюнок з [7])

Ендоенергетичні реакції можуть відбуватись лише при достатньо великій кінетичній енергії:

$$Q = (T_3 + T_4) - (T_1 + T_2) < 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = |Q| + T_3 + T_4 \geq 0.$$

Знак рівності відповідає найменшій кінетичній енергії, при якій реакція ще є можливою.

Можна переконатись, що реакція дійсно є ендоенергетичною (дані взяті для найпоширеніших ізотопів):

$$m_p + M_{{}_3^7\text{Li}} = \begin{pmatrix} 1,007a.o.m. + 6,938a.o.m. = \\ = 7,945a.o.m \end{pmatrix} < M_{{}_4^7\text{Be}} + m_n = \begin{pmatrix} 7,016a.o.m. + 1,008a.o.m. = \\ = 8,024a.o.m. \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$Q' = -0,079 a.o.m. = -0,079 \cdot 931,494 \text{ MeV} = -73,588 \text{ MeV}.$$

Зрозуміло, що у лабораторній системі реакція може відбуватись, коли енергія налітаючої частинки витрачається лише на утворення нових частинок:

$$(T'_1)_{min} = Q. \quad (6.3)$$

Сумарна кінетична енергія у системі центра інерції дорівнює:

$$T' = m_u \cdot \frac{v^2}{2} = T'_1 = \frac{M_A}{M_A + m_a} T_a,$$

де m_u – приведена маса, T_a – кінетична енергія першої частинки.

Внаслідок закону збереження імпульсу, енергія налітаючої частинки у лабораторній системі координат витрачається на рух проміжного ядра ($m_a = m_p$):

$$T_0 = \frac{m_a}{M_A + m_a} T_a$$

та на його збудження, що чисельно дорівнює сумарній кінетичній енергії у

$$\text{с.ц.і.} \quad (T'_1 = \frac{M_A}{M_A + m_a} T_a) : \quad (6.4)$$

$$T_a = T'_1 + T_0 = \frac{M_A}{M_A + m_a} T_a + \frac{m_a}{M_A + m_a} T_a.$$

Оскільки у л.с.к. поріг реакції відбувається при таких мінімальних значеннях енергій налітаючої частинки, коли реакція ще можлива (6.3), тому, використовуючи (6.4), отримуємо умову для порогової енергії у лабораторній системі координат ($m_a = m_p$):

$$(T_{m_p})_{min} = \frac{M_A + m_a}{M_A} Q = \frac{M_{^7Li} + m_p}{M_{^7Li}} |Q| = |Q| + (T_0)_{min} = 12.9 \text{ MeV}.$$

У випадку $Q \neq Q'$ реакція відбувається на малопоширених ізотопах.

6.2. Введемо прицільний радіус розсіяння у l -стані:

$$\rho_l = \lambda \sqrt{l(l+1)}.$$

Тоді площа, що відповідає кожному такому прицільному радіусу, є

$$S_l = \frac{\pi}{2} (\rho_{l+1}^2 - \rho_{l-1}^2),$$

Загальна площа отримується підсумовуванням за усіма такими площами до максимального значення, яке визначається з умови $l_{max} = R/\lambda$. Відповідно геометричний переріз є:

$$\sigma_S = \lambda^2 \sum_{l=0}^{R/\lambda} \pi(2l+1) = \pi(R + \lambda)^2.$$

Тобто для потрапляння в зону дії ядерних сил, його прицільний параметр не повинен перевищувати величини $R + \lambda$ (де $\lambda = \hbar/\sqrt{2mE}$).

6.3. Використовуючи формулу для середньої довжини пробігу, а для перерізу формулу геометричного перерізу $\sigma_S = \pi(R + \lambda)^2$, отримуємо:

$$\langle l \rangle \approx \frac{1}{\sigma n} = \frac{A m_p E_\lambda^2}{\varepsilon f r \pi \hbar^2 c^2} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

6.4. Доля енергії, яка втрачається нейтроном, є:

$$\eta = \frac{T_0 - T_n}{T_0} = 1 - \left| \frac{p_n}{p_0} \right|^2,$$

де T_0 і p_0 – кінетична енергія і імпульс налітаючого нейтрона;

T_n і p_n – кінетична енергія і імпульс нейтрона після розсіювання.

Запишемо закон збереження енергії-імпульсу у л.с.к.:

$$T_0 = T_n + T_A \text{ та } \vec{p}_0 = \vec{p}_n + \vec{p}_A \Rightarrow$$

$$p_A^2 = p_0^2 + p_n^2 - 2 p_0 p_n \cos \varphi \text{ та } p_A^2 = A(p_0^2 - p_n^2).$$

Звідси отримуємо рівняння:

$$(A+1) \left(\frac{p_n}{p_0} \right)^2 - 2 \frac{p_n}{p_0} \cos \varphi + (1-A) = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є:

$$\frac{p_n}{p_0} = \frac{\cos \varphi + \sqrt{A^2 - \sin^2 \varphi}}{A+1}.$$

Звідси знаходимо шукану залежність:

$$\eta = 1 - \left| \frac{p_n}{p_0} \right|^2 = 1 - \left| \frac{\cos \varphi + \sqrt{A^2 - \sin^2 \varphi}}{A+1} \right|^2.$$

У випадку лобового зіткнення при $\cos \varphi = -1$ отримуємо:

$$\eta = 1 - \left| \frac{A-1}{A+1} \right|^2 = \frac{4A}{(A+1)^2} \Rightarrow$$

$$\eta_{\text{He}} = 1 - \left| \frac{4-1}{4+1} \right|^2 = 1 - 0,36 = 0,64, \quad \eta_{\text{O}} = 1 - \left| \frac{16-1}{16+1} \right|^2 = 1 - 0,78 = 0,22,$$

$$\eta_{\text{U}} = 1 - \left| \frac{238-1}{238+1} \right|^2 = 1 - 0,98 = 0,02.$$

Тобто, елементи з малим атомним номером A краще розсіюють енергію нейтронів. На практиці для уповільнення найчастіше використовується "важка вода", у якій замість атомів водню знаходяться атоми дейтерію, або тритію (${}^2_1\text{H}$, ${}^3_1\text{H}$).

6.5. Використаємо формулу попередньої задачі для випадку $A = 4$. Тоді маємо:

$$\eta = 1 - \left| \frac{p_n}{p_0} \right|^2 = 1 - \left| \frac{\cos\varphi + \sqrt{16 - \sin^2\varphi}}{5} \right|^2 \Rightarrow$$

$$\eta_{30^\circ} = 1 - \left| \frac{0,86 + \sqrt{16 - 0,25}}{5} \right|^2 = 1 - 0,93 = 0,07, \quad \eta_{90^\circ} = 1 - \left| \frac{\sqrt{16 - 1}}{5} \right|^2 = 1 - 0,6 = 0,4,$$

$$\eta_{150^\circ} = 1 - \left| \frac{-0,86 + \sqrt{16 - 0,25}}{5} \right|^2 = 1 - 0,36 = 0,64.$$

Тобто найбільш втрачається енергії при розсіюванні на великі кути.

6.6. а) При енергіях більших за кулонівський бар'єр поглинанням можна знехтувати й обмежитись пружним розсіянням нейтронів. Для пружного перерізу можна наближено використати формулу геометричного перерізу. Оскільки де-Бройлівська довжина хвилі нейтронів:

$$\lambda_n = \frac{4,55 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{T_n [MeV]}} = 1,44 \cdot 10^{-13} [\text{см}], \text{ а } R = r_0 A^{1/3} = 1,4 \cdot 208^{1/3} = 8,29 \cdot 10^{-13} [\text{см}],$$

тому

$$\sigma_S \approx \pi(R + \lambda)^2 = \pi \cdot 10^{-26} (8,29 + 1,44)^2 = 2,97 \cdot 10^{-24} [\text{см}^2] = 2,97 [\text{барн}] = 297 [\text{фм}^2].$$

б) За низьких енергій ймовірність розпаду складеного ядра в одиницю часу є:

$$W = W_{nn} + W_{n\gamma} = \lambda_{nn} + \lambda_{n\gamma} = \frac{1}{\tau_{nn}} + \frac{1}{\tau_{n\gamma}},$$

де W_{nn} та $W_{n\gamma}$ – ймовірності розпаду компаунд-ядра по нейтронному та радіаційному каналах у припущенні, що інших каналів немає (при $T_n \ll T_{01}$ це припущення справджується), τ_{nn} та $\tau_{n\gamma}$ – відповідні середні часи життя.

Таким чином, відносні ймовірності розпаду складеного ядра по каналах (n, n) і (n, γ) будуть дорівнювати, відповідно

$$\zeta_{nn} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \text{ та } \zeta_{n\gamma} = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma},$$

а перерізи

$$\sigma_{nn} = \sigma_a \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \text{ та } \sigma_{n\gamma} = \sigma_a \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma},$$

де σ_a – переріз утворення компаунд-ядра

$$\sigma_a = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma \Gamma_n}{(T - T_0)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad g = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2s + 1)}.$$

Оскільки з умови задачі випливає, що $\Gamma \cong \Gamma_n + \Gamma_\gamma \approx \Gamma_\gamma$, тоді

$$\sigma_a = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma \Gamma_n}{(T - T_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \approx \sigma_{n\gamma} = \pi \lambda^2 \Gamma_n \frac{\pi g \Gamma_\gamma}{(T_{01})^2 + (\Gamma_\gamma/2)^2}.$$

Квантовомеханічні розрахунки показують, що $\Gamma_n \approx v_n$, де v_n – відносна швидкість нейтрона та ядра-мішені, а $\Gamma_\gamma \approx \text{const}$, тому при низьких енергіях

$$\sigma_{n\gamma} = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma \Gamma_n}{(T - T_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} = \lambda^2 \Gamma_n \frac{\pi g \Gamma_\gamma}{(T_{01})^2 + (\Gamma/2)^2} \approx 4 \lambda^2 \pi g \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} \approx \frac{1}{v_n}.$$

$$(\text{За енергій на малюнку } \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} \approx 0,2 \text{ барн; } g = \frac{2J+1}{(2I+1)(2s+1)})$$

Таким чином, проаналізувавши формулу Брейта-Вігнера для перерізу радіаційного захоплення та врахувавши вказані три припущення, отримуємо, що переріз радіоактивного розпаду спадає обернено-пропорційно швидкості нейтронів $1/v_n$. Ця функціональна залежність добре простежується, наприклад, на Рис. 6.4 та Рис. 6.5).

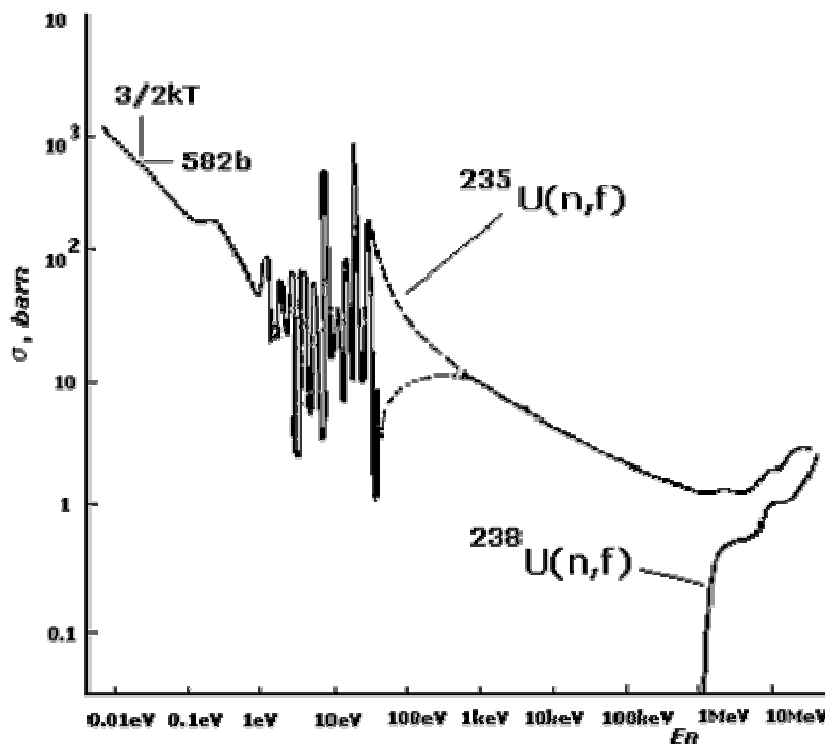


Рис. 6.4. Ефективні перерізи реакції поділу ізоотопів урану під дією нейтронів $\sigma(n, f)$ як функції кінетичної енергії нейтрона. За обома осями логарифмічний масштаб

Очевидно, що в області малих енергій ($k \ll K$) далеко від резонансу, переріз утворення складеного ядра є істотно меншим за $\pi \lambda^2$.

с) Переріз утворення складеного ядра нейтронами при малих енергіях в області нижче першого резонансу, відповідно до Рис. 6.1, приблизно дорівнює отриманому вище перерізу захоплення й є:

$$\sigma_{ac} = \pi \lambda^2 P_0 = 4\pi/(kK) = \frac{2\pi \hbar^2}{\varepsilon^{1/2} U_0^{1/2} m} \sim 1/v,$$

де $k = (2m\varepsilon)^{1/2} / \hbar$ – хвильове число частинки поза ядра,

$K = (2m(\varepsilon + U_0))^{1/2} / \hbar$ – хвильове число частинки в ядрі,

m, ε – маса і енергія частинки, U_0 – глибина ядерного потенціалу,

v – швидкість нейтрона.

Тоді маємо:

$$\sigma_{ac} = \frac{2\pi\hbar^2}{\varepsilon^{1/2}U_0^{1/2}m} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ фм}^2 = 1300 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2 = 1100 \text{ барн.}$$

Отриманий результат розрахунків дещо перевищує експериментальні дані (рис. 6.5). Проте, зважаючи на грубість проведених наближень, збіг є задовільним.

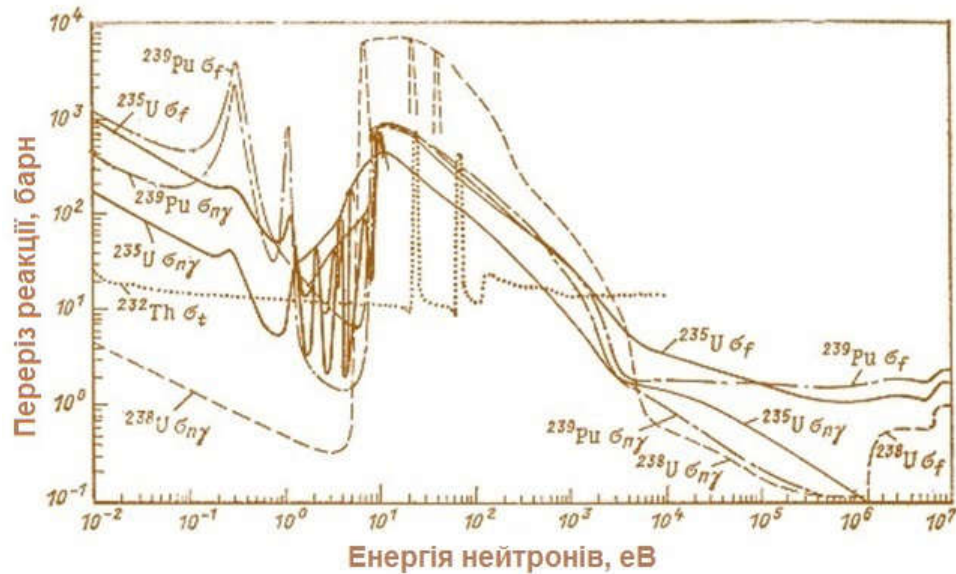


Рис. 6.5. Залежність перерізів реакцій радіаційного захоплення (σ_f), поділу (σ_p) і повного перерізу (σ_t) від енергії нейтронів

6.7. При енергіях більших за середню енергію зв'язку $T_0 = 14 \text{ MeV} > \bar{T}_{зв} \approx 8 \text{ MeV}$, ширини гама-розпаду (Γ_γ) є набагато меншими за відстань між рівнями $\Delta\Gamma_\gamma \ll \Gamma \ll \Delta$, та, внаслідок наявності у протона та альфа-частинки кулонівського бар'єру, ширини альфа-розпадів та розпадів з виходом протона менші за нейтронні ширини ($\Gamma_\alpha \ll \Gamma_n$) й ($\Gamma_p \ll \Gamma_n$). Тому з усіх можливих каналів реакції достатньо врахувати лише канал розпаду компаунд-ядра на нуклони $\Gamma_n : (\Gamma \sim \Gamma_n)$.

Отже, повний переріз розсіяння складається з пружного розсіяння нейтронів і непружного каналу виходу нейтронів з компаунд-ядра:

$$\sigma_{nn} = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n^2}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4} + 4\pi R^2 + 4\pi R\lambda \frac{\Gamma_n^2(E - E_r)}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4},$$

де Γ_i – ширина i -го непружного процесу, а $T_{0i} = E_r = \varepsilon_r$ – енергія резонансу.

Перший член в співвідношенні описує резонансне пружне розсіяння нейтронів з утворенням складеного ядра. Другий член в цьому співвідношенні – переріз потенційного розсіювання. Третій – описує інтерференцію між резонансним і потенційним розсіюванням. Тут враховано, що якщо спіни налітаючої частинки, спіни ядра мішені та спіни складеного ядра відповідно дорівнюють s , I та J , тоді в формулу для перерізу для доданків, що відповідають резонансному розсіянню, повинен бути введений множник $(2J+1)/((2I+1)(2s+1))$. Залишаючи в сумі лише один доданок з $\Gamma \sim \Gamma_n$ й використовуючи, що $k \approx k_0$, отримуємо:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{res} + \sigma_{el} \sim 4\pi(\lambda^2 + R^2) \sim 6 \text{ барн},$$

що, за порядком, збігається з експериментом (див. Рис. 6.5).

6.8. Розповсюдження теплових нейтронів можна описати за допомогою дифузійного рівняння, оскільки тепловий нейтрон може мати багато зіткнень з ядрами до захоплення (довжина захоплення набагато більша за довжину розсіяння):

$$\lambda_a / \lambda_s > 1.$$

При цьому виконується умова застосування дифузійного наближення – малість зміни густини нейтронів ρ на протязі зміни довжини розсіяння λ_s . Як відомо дифузійне рівняння має такий вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \rho - \frac{\rho}{\tau_{зах}} + q,$$

де $\rho(\vec{r}, t)$ – густина теплових нейтронів, Δ – оператор Лапласа; D – коефіцієнт дифузії; $\tau_{зах}$ – середній час життя теплових нейтронів до захоплення; q – густина джерел теплових нейтронів.

У випадку теплових нейтронів $D = \lambda_s v / 3$, рівняння у наближенні "точкового" джерела нейтронів набуває вигляду:

$$D \Delta \rho - \frac{\rho}{\tau_{зах}} = 0.$$

Звідси з урахуванням $\tau_{зах} = \lambda_a / v$ та $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(t) \exp(-\vec{r}/L)$ легко знаходимо:

$$L = \sqrt{D \tau_{зах}} = \sqrt{(\lambda_s v / 3) \cdot (\lambda_a / v)} = \sqrt{\frac{1}{3n^2 \sigma_s \sigma_a}}.$$

6.9. Розв'язком попередньої задачі на дифузію теплових нейтронів (див. Задача 6.8) є:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(t) \exp(-\vec{r}/L),$$

де

$$L = \sqrt{D \tau_{зах}} = \sqrt{\frac{1}{3n^2 \sigma_s \sigma_a}}.$$

Логарифмуючи вираз для густини теплових нейтронів та враховуючи, що

$$r = L \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho(\vec{r}, t)} \right) = L \ln(e) = L = \sqrt{\frac{1}{3n^2 \sigma_s \sigma_a}} \approx \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{3\pi(R + \lambda)^2 \lambda^2 4\pi g \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma}}},$$

при $\Gamma_n \approx 0,7 \cdot 10^{-6} [\text{eV}]$ і $\Gamma_\gamma \approx 0,1 [\text{eV}]$ маємо

$$\sigma_a = \pi \lambda^2 g \frac{\Gamma \Gamma_n}{(T - T_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \approx \sigma_{n\gamma} = \pi \lambda^2 \Gamma_n \frac{\pi g \Gamma_\gamma}{(T_{01})^2 + (\Gamma_\gamma/2)^2},$$

$$\pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma} \approx 0,2 \text{ барн}; \quad g = \frac{2J+1}{(2I+1)(2s+1)}.$$

Оскільки де-бройлівська довжина хвилі теплових нейтронів:

$$T_n = \frac{3}{2} k_B T = 1,5 \cdot 8,6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ eV} = (2,5 \cdot 10^{-8} \div 0,38 \cdot 10^{-4}) \text{ MeV};$$

$$\lambda_n = \frac{4,55 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{T_n [\text{MeV}]}} = 2,88 \cdot 10^{-9} = 2880 \cdot 10^{-12} \text{ см},$$

тому

$$\sigma_S \approx \pi(R + \lambda)^2 \approx \pi \lambda^2 = 10^{-24} \cdot 2880^2 = (9 \cdot 10^6) \cdot 10^{-24} [\text{см}^2] = (9 \cdot 10^6) [\text{барн}].$$

Густина алюмінію $\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ г/см}^3 = m_{a.o.m.} n_{\text{Al}}$, де $m_{a.o.m.} = 1,66 \cdot 10^{-24} [\text{г}]$.

Тому, в припущенні, що нейтрони 100% поглинаються на ядрах природного Al, отримуємо:

$$n_{\text{Al}} = \frac{\rho_{\text{Al}}}{m_{a.o.m.}} = \frac{2,7}{1,66} \cdot 10^{24} = 1,63 \cdot 10^{24} \text{ см}^3.$$

Оскільки де-бройлівська довжина хвилі теплових нейтронів:

$$\lambda_n = \frac{4,55 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{T_n [\text{MeV}]}} = (73,8 \div 91,0) \cdot 10^{-12} [\text{см}],$$

а

$$R = r_0 A^{1/3} = 1,4 \cdot 27^{1/3} = 0,42 \cdot 10^{-12} [\text{см}],$$

тому

$$\sigma_S \approx \pi(R + \lambda)^2 = \pi \cdot 10^{-24} (74,2 \div 91,4)^2 = ((1,72 \div 2,63) \cdot 10^4) \cdot 10^{-24} [\text{см}^2] =$$

$$= (1,72 \div 2,63) \cdot 10^4 [\text{барн}].$$

Остаточно отримуємо:

$$\langle r \rangle = L = \frac{1}{n_{\text{Al}}} \sqrt{\frac{1}{3\sigma_s \sigma_a}} \approx \frac{1}{1,63 \cdot 10^{24} \sqrt{3 \cdot 1,72 \cdot 0,23}} = (0,56 \div 0,43) \cdot 10^{-2} [\text{см}].$$

Нейтронні перерізи для деяких нуклідів

Елемент	Нуклід	% атомів у природній суміші	Період напіврозпаду утвореного нукліда	Переріз, барн		
				Поглинання σ_a	активація $\sigma_{\text{акт}}$	Розсіяння $\langle \sigma_s \rangle$
H	^2H	0,015	12,3 лет	—	$5,7 \cdot 10^{-4}$	7
Li	—	—	—	71	—	1,4

	${}^6\text{Li}$	7,52	—	945 (на)	$2,8 \cdot 10^{-2}$	—
	${}^7\text{Li}$	92,48	0,85 с	—	$3,3 \cdot 10^{-2}$	—
Be	${}^9\text{Be}$	100	$2,7 \cdot 10^6$ років	10^{-2}	$9 \cdot 10^{-4}$	7
B	—	—		755	—	4
	${}^{10}\text{B}$	19,8	-	3813 (на)	0,5	—
	${}^{11}\text{B}$	80,2	0,03 с	—	$5 \cdot 10^{-3}$	—
C	—	—	—	$3,8 \cdot 10^{-3}$	—	4,8
	${}^{12}\text{C}$	98,89	—	—	$3,3 \cdot 10^{-3}$	—
	${}^{13}\text{C}$	1,11	5570 років	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	—
O	—	—	—	$2 \cdot 10^{-4}$	—	4,2
F	${}^{19}\text{F}$	100	11 с	$< 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-3}$	3,9
Na	${}^{23}\text{Na}$	100	15 годин	0,53	0,53	4
Al	${}^{27}\text{Al}$	100	2,3 хв	0,23	0,21	1,4
V	—	—	—	4,98	—	5
	${}^{50}\text{V}$	0,24	—	250	—	—
	${}^{51}\text{V}$	99,76	3,76 хв	—	4,5	—
Cu	—	—	—	3,77	—	7,2
	${}^{63}\text{Cu}$	69,1	12,8 годин	4,5	4,5	—
	${}^{65}\text{Cu}$	30,9	5,15 хв	2,2	1,8	—
Ag	—	—	—	63	—	6
Cd	—	—	—	2540	—	7
	${}^{113}\text{Cd}$	12,26	—	20000	—	—
In	—	—	—	196	—	2,2
	${}^{115}\text{In}$	99,77	54,2 хв	—	155	—
I	${}^{137}\text{I}$	100	25 хв	6,22	$5,6 \cdot 10^{-3}$	3,6
Au	${}^{197}\text{Au}$	100	2,7 доби	98,8	96	9,3
U	—	—	—	7,68	—	8,3
	${}^{238}\text{U}$	99,28	23,5 хв	2,75	2,74	11,2

Тут α_a і $\alpha_{акт}$ – перерізи для теплових нейтронів (2200 м/с); $< \alpha_s >$ – усереднені перерізи для досить широкого інтервалу енергій.

13	${}^{26}\text{Al}$	—	-0,013100	—	β^+	6,35 с	3,21
	${}^{27}\text{Al}$	5/2	-0,018465	100			
	${}^{28}\text{Al}$	3	-0,018092	—	β^-	2,26 хв	2,85

З таблиці знаходимо, що переріз поглинання теплових нейтронів становить 0,23 барн, що приблизно відповідає теоретичному розрахунку.

Якщо вважати, що довжина пробігу нуклонів, в основному, визначається перерізом поглинання та активації, тоді ($d = < r >$):

$$\langle r \rangle \approx \frac{1}{n_{Al}\sigma_a} \approx \frac{1}{1,63 \cdot (0,23 \div 0,21)} \approx (2,7 \div 2,9) [\text{см}].$$

Якщо поглинання відбувається на ізотопах, вміст яких у природній суміші $\ll 0,1\%$, тоді

$$\langle r \rangle = \frac{1}{n_{Al}} \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 0,001 \cdot \sigma_s \sigma_a}} \approx \frac{1}{1,63 \cdot \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 1,72 \cdot 0,23}} = 0,18 [\text{см}].$$

6.10. Визначимо ефективний потенціал, як:

$$\bar{U}_{ef} = \frac{1}{a^3} \int_{\text{по кристалу}} U_{ef} dV = N \int_{\text{по коміріці}} U_{ef} dV.$$

Амплітуда розсіяння у борнівському наближенні:

$$f(0) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U_{ef} dV = -b.$$

Тоді з визначення коефіцієнта заломлення:

$$n = \frac{v'}{v} = \sqrt{1 - \frac{\bar{U}_{ef}}{T}} = \sqrt{1 - \frac{N}{T} \int U_{ef} dV} = \sqrt{1 - \frac{Nf\lambda^2}{\pi}} \approx 1 - 6 \cdot 10^{-6}.$$

6.11. Загальний переріз ядерної взаємодії $\sigma_{tot} \sim \frac{1}{nx}$, тому переріз виходу ядерної реакції, згідно з визначенням, буде:

$$\sigma \sim \frac{\Lambda}{nx} = 10^{-24} \text{ см}^2 = 1 \text{ барн}.$$

6.12. Коефіцієнт розмноження нейтронів показує у скільки разів збільшилась (чи зменшилась) кількість нейтронів наступного покоління відносно попереднього. Тому

$$N = N_0(k)^{100-1} = 10^3(1,05)^{99} \approx 1,3 \cdot 10^5.$$

6.13. Згідно з визначенням коефіцієнта розмноження нейтронів, та враховуючи, що відповідно до умов задачі, цей поділ ядра буде відбуватись до останнього атома урана, тому геометрична прогресія з коефіцієнтів поділу визначається відношенням маси речовини до маси ядра урану. Вона визначає максимальну кількість нейтронів. Отримуємо:

$$1 + k + k^2 + \dots + k^N = \frac{k^N - 1}{k - 1} = \frac{M}{m} = \frac{10^3}{M_U} = 2,56 \cdot 10^{24} = C \cdot 10^3 \Rightarrow N \sim \frac{\ln[C]}{\ln[k]}$$

$$\frac{t}{\tau} = N = n\sigma r \Rightarrow t = N\tau.$$

У свою чергу $\tau = \frac{m}{n\sigma p}$ (маса нейтрона 939 MeV/c²), тому $t = \frac{Nm}{n\sigma\sqrt{2mE}}.$

Як відомо, середня масова густина ядерного середовища $\rho \approx 10^{17} \text{ кг/м}^3$, що відповідає $n_{\text{я}} \sim 0,14 \div 0,16 \text{ [1/фм}^3]$, отже масова густина урана $2 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$, відповідає $n \sim 10^{-13} \text{ [1/фм}^3]$. Тому, підставляючи значення усіх величин, отримуємо $t \sim 10^{18} \text{ [с]}$.

6.14. Загальний час напіврозпаду, який складається зі звичайних і запізнених нейтронів, є:

$$\tau = 0.993 \cdot 10^{-3} + 0.007 \cdot 15 \approx 0,1 \text{ [с]}.$$

Підставляючи це значення у розв'язок рівняння на кількість нейтронів

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(k-1)n}{\tau},$$

отримуємо $n(t) = n_0 e^{(k-1)t/\tau} \approx 1,25 n_0$.

6.15. “Період реактора” визначається як час, за який кількість нейтронів збільшиться у e разів:

$$n(t) = e n_0 = n_0 e^{(k-1)t/\tau} \Rightarrow t = \frac{\tau}{k-1} = 10 \text{ [с]}.$$

Вказівки до задач на самостійну роботу.

6.16*. Очевидно, що чим більший шлях пройде випромінення, тим його інтенсивність зменшиться. Вона пропорційна інтенсивності початкового пучка, тому, проводячи розрахунки подібні, як і у Задачах 5.4 й 5.5, маємо:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (6.5)$$

де μ – коефіцієнт поглинання.

Зрозуміло, що коефіцієнт поглинання залежить, як і вище, від кількості поглинаючих та розсіюючих центрів, тому

$$\mu x = \rho \mu_{\rho_0} x = \mu_{\rho_0} \frac{m}{S},$$

де ρ – густина поглинач, μ_{ρ_0} – питомий коефіцієнт поглинання, m – маса речовини, яку пройшов пучок, S – площа перерізу пучка.

Будемо вважати, що залежність сили утримання електронів в атомному остові (як це зазвичай роблять у простих моделях коливань у твердому тілі) при відхиленні x описується гармонічним законом:

$$F \sim k v^2 x.$$

Тоді середня енергія відхилення буде:

$$W \sim \int_0^{x_T} F(x) dx \sim v^2 x_T^2, \quad \text{де } x_T = (\lambda/c)^2 \frac{eE}{4m_e}.$$

Таким чином $W \sim v^2 \lambda^4$. Оскільки $h\nu = E \sim R e^2 Z^2$, тоді $W \sim Z^4 \lambda^4$.

Середня швидкість (інтенсивність) поглинання енергії атома буде:

$$\frac{dW}{dt} \sim \frac{W}{T} = W \frac{c}{\lambda} \sim Z^4 \lambda^3.$$

Оскільки для оцінки потрібно порахувати питомий коефіцієнт поглинання, тому скористаємося, що густина, на яку потрібно поділити останню формулу, пропорційна Z . Остаточо отримуємо:

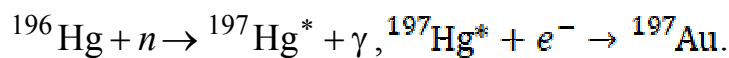
$$\mu_p = \left(\frac{dW}{dt} \right) / (I\rho) \sim Z^3 \lambda^3.$$

Для отримання чисельної відповіді потрібно підставити у (6.5) відповідні густини: $\rho_{Al} = 2,7 \text{ г/см}^3$, $\rho_{Cu} = 8,96 \text{ г/см}^3$, $\rho_{Pb} = 11,35 \text{ г/см}^3$.

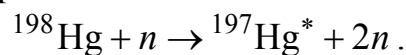
6.17*. У 1941 році Р. Шерр, К. Бейнбрідж і Х. Андерсон при розсіянні швидких нейтронів на ртуті (природній суміші ізотопів 196, 198, 199, 200, 201, 202 і 204) отримали золото, хоча і нестабільне (ізотопи 198, 199 і 200).

Наприклад: $^{198}\text{Hg} + n \rightarrow ^{198}\text{Au} + p.$

Зазначені ізотопи золота за рахунок бета-розпаду невдовзі перетворювались знову на ртуть. Стабільний ізотоп золота ^{197}Au в 1947 р. отримали Марк Інгрем, Девід Хесс і Річард Хейден. Вони опромінювали ртуть не швидкими нейтронами, а повільними, з утворенням ртуті-197, яка потім, шляхом К-захоплення електрона з однієї з атомних оболонок, перетворюється на золото-197:



Пізніше виявилось, що ртуть-197 можна також отримати при опроміненні природного ізотопу ртуті-198 швидкими нейтронами, проте ефективний переріз такої реакції є малим:



Виявляється, що ціна «штучного» золота є незрівнянно вищою, ніж природного. Для отримання його у значних кількостях необхідно реалізувати опромінення потоками нейтронів дуже високої інтенсивності.

6.18*. В області резонансу переріз резонансного розсіювання є набагато більшим за переріз потенційного розсіювання. Повна ширина рівня Γ є сумою ширин резонансного розсіювання Γ_s і реакції Γ_{reac} . Остання в свою чергу є сумою парціальних ширин, що відповідають можливим каналам реакції. Для повільних нейтронів єдиною енергетично можливою реакцією зазвичай є випромінювання гамма-квантів. Тоді $\Gamma_{reac} \sim \Gamma_{rad}$, де Γ_{rad} – радіаційна ширина. Оскільки $\Gamma_s = \Gamma_n$, тому $\Gamma = \Gamma_{rad} + \Gamma_n$. Для досить малих енергій нейтронів радіаційна ширина є більшою за нейтронну ширину, тобто захоплення нейтронів є більш імовірним, ніж розсіювання. Отже $\Gamma \sim \Gamma_\gamma$. З цих міркувань можна порахувати σ_{tot} .

6.19*. Аналогічно до попередньої задачі. Враховати, що $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma \approx 2\Gamma_\gamma \approx 0,1$. Переріз буде визначатись перерізом радіаційного захвату, який вже розраховувався у Задачі 6.7:

$$\sigma_{ac} = \pi \tilde{\lambda}^2 P_0 = 4\pi/(kK) = \frac{2\pi\hbar^2}{\varepsilon^{1/2} U_0^{1/2} m} \sim 1/v,$$

де $k = (2m\varepsilon)^{1/2}/\hbar$ – хвильове число частинки поза ядра; $K = (2m(\varepsilon + U_0))^{1/2}/\hbar$ – хвильове число частинки в ядрі; m, ε – маса і енергія частинки; U_0 – глибина ядерного потенціалу; v – швидкість нейтрона.

6.20*. Молярна маса ізотопу Урану-235 і Урану-238 відповідно є 235 і 238 г/моль. У 80-і роки в реакторах РБМК-1000, після збагачення процентний вміст Урану-235 доходив до 1.8-3.6%, тобто разом $\sim 0,025 \cdot 235 = 5,875$ г/моль. В одному молі міститься $6,022140857(74) \cdot 10^{23}$ атомів урану. У реакторі приблизно $5,3 \cdot 10^6$ грам Урану-235. Тобто $5,3 \cdot 10^6 / 5,875 = 0,91 \cdot 10^6$ моль = $= 0,91 \cdot 10^6 \cdot 6,022140857(74) \cdot 10^{23} = 5,46 \cdot 10^{29}$ атомів. Трильйон за короткою шкалою (CI) становить 10^{12} , а за довгою шкалою – 10^{18} .

6.21*. З релятивістської формули Брейта-Вігнера при умовах резонансу та враховуючи спіни початкових частинок та спіні дельта резонансу ($s_1 = 0, s_2 = 1/2, J = 3/2$), отримуємо:

$$\sigma_{max} = 8\pi\tilde{\lambda}^2, (g = 2).$$

Розв'язуючи це рівняння для релятивістської хвилі де-Бройля, отримуємо:

$$M_{\Delta^{++}} \sim 1300 \text{ MeV}/c^2.$$

Експериментальне значення з довідників $M_{\Delta^{++}} \sim 1232 \text{ MeV}/c^2$ (див. Рис. 6.6).

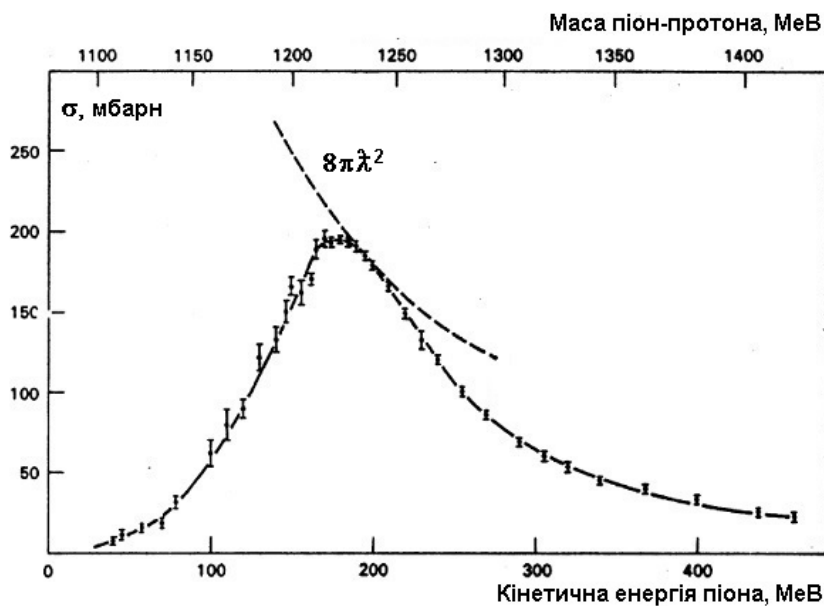


Рис. 6.6. Застосування релятивістської формули Брейта-Вігнера для знаходження мас частинок [30] (вісь абсцис $\sqrt{s}$).

7. ЯДЕРНІ ПРОЦЕСИ У ЗІРКАХ (Заняття 10)

Первинний нуклеосинтез. Зоряний нуклеосинтез. Розподіл елементів у Всесвіті. Утворення гелію у протон-протонному циклі. Утворення гелію у CNO-циклі. Утворення елементів важчих за залізо. Утворення елементів важчих за цинк.

1.) Зорі – це «фабрики з виробництва» хімічних елементів з періодичної таблиці Менделєєва. Їх переважна частина до заліза, включно, виникла в зорях внаслідок термоядерних реакцій, а та частина, що вище від заліза, – під час зіткнення нейтронних зірок і вибухів масивних зірок з сильним магнітним полем ("магнітообертальних гіпернових"). Синтез хімічних елементів відбувається у зорях впродовж усього їхнього життя поступово: від гелію на початку, до заліза наприкінці.

2.) Зіткнення нейтронних зірок запускає ланцюжок хімічних реакцій, називається r -процесом. В r -процесі атомні ядра зірок захоплюють нейтрони з навколишнього середовища, що і приводить до утворення більш важких елементів (див. Рис. 7.1)

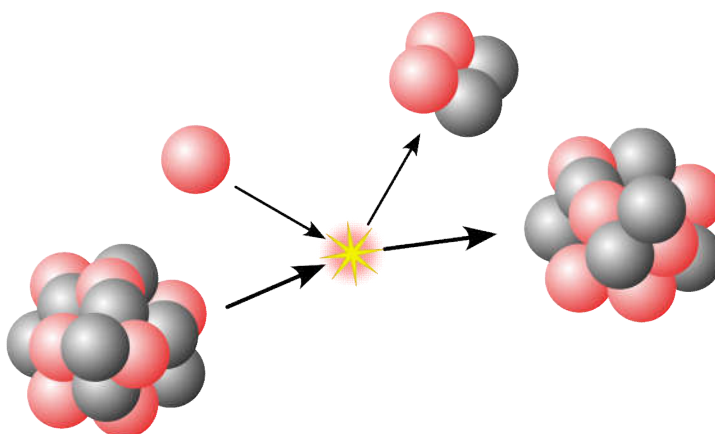


Рис.7.1. Типовий r -процес захоплення ядрами нейтронів з утворенням більш важких елементів [24]

3.) Елементи, що важчі за залізо, утворюються в r -процесі, який спостерігається при злитті нейтронних зірок. Проте нещодавно було зафіксовано новий спосіб появи важких елементів у результаті вибуху зірки, що швидко обертається, з сильним магнітним полем і масою приблизно в 25 разів більшою за масу Сонця.

4.) До недавнього часу вважалося, що злиття нейтронних зірок є єдиним способом виробництва важких елементів, що є важчими за цинк. В той же час відомо, що важкі елементи вперше виникли невдовзі після Великого вибуху, коли Всесвіт був дуже молодим. Разом з тим, минуло ще недостатньо часу для того, щоб нейтронні зірки навіть змогли з'явитися.

Необхідно було знайти інше джерело виникнення ранніх важких елементів, щоб пояснити їхню присутність в Чумацькому Шляху. Сценарієм появи цих елементів у Чумацькому Шляху стали вибухи магнітообертальних гіпернових у найраніші епохи зореутворення Всесвіту (див. Рис. 7.2).

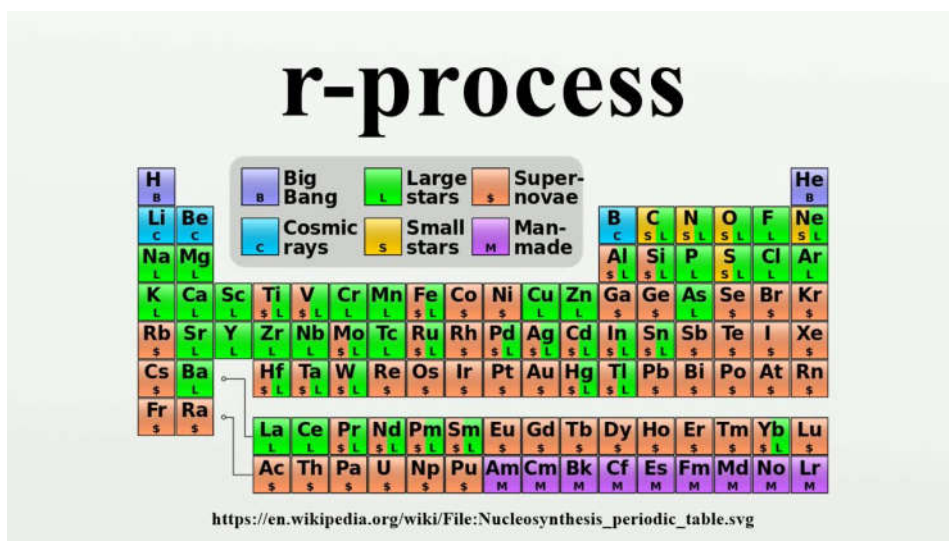


Рис.7.2. Різні шляхи утворення елементів у Всесвіті [24]

§7.1. Задачі

7.1. Визначити енергію, що виділяється при утворенні двох α -частинок в результаті синтезу ядер ${}^2\text{H}$ і ${}^6_3\text{Li}$, якщо відомо, що енергії зв'язку на один нуклон в цих ядрах дорівнюють ${}^2\text{H}$ -1,11; ${}^4_2\text{He}$ -7,08 і ${}^6_3\text{Li}$ -5,33 MeV, відповідно.

7.2. Обчислити енергію, яка виділиться при повному згоранні 1г термоядерного пального з дейтерію і тритію в результаті реакції ${}^2_1\text{He} + {}^3_1\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + n$.

7.3. Вважаючи, що в Сонці відбуваються запропоновані Бете ланцюгові реакції (протон-протонний та вуглецевий цикли), знайти енергію цих ланцюгових реакцій.

7.4. Знайти ефективну енергію термоядерної реакції на Сонці, якщо температура Сонця $T_c = 14 \cdot 10^6$ [K], а кулонівський бар'єр $B_k \approx 0,5$ [MeV].

7.5. Дейтерієва плазма з концентрацією ядер $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ знаходиться при температурі $T = 1[\text{KeV}/k_B]$ (k_B – константа Больцмана). Знайти середній час життя дейтерію по відношенню до реакції dd .

§7.2. Відповіді та розв'язки

7.1. Різниця енергій зв'язку початкового ядра та кінцевих продуктів розпаду визначає відповідну енергію поділу:

$$Q = 2\Delta E_{36}({}^4\text{He}) - \Delta E_{36}({}^2\text{H}) - \Delta E_{36}({}^6\text{Li}) = 2 \cdot 4\bar{\epsilon}({}^4\text{He}) - 2\bar{\epsilon}({}^2\text{H}) - 6\bar{\epsilon}({}^6\text{Li}) = \\ = 2 \cdot 4 \cdot 7,08 - 2 \cdot 1,11 - 6 \cdot 5,33 = 22,44 \text{ MeV}.$$

$$7.2. M_d + M_t = 2m_p + 3m_n - E_{36(d)} - E_{36(t)} \approx 5,03 \text{ а.о.м.} \approx 8,35 \cdot 10^{-24} \text{ з},$$

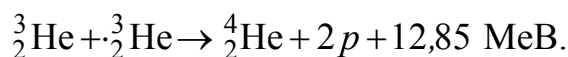
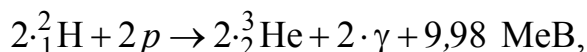
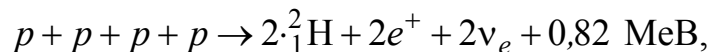
$$1/(M_d + M_t) = 1,2 \cdot 10^{23},$$

$$Q = (M_d + M_t - M_\alpha - m_n)c^2 = (\Delta_d + \Delta_t - \Delta_\alpha - \Delta_n)c^2 \approx 17,6 \text{ MeV},$$

$$Q_{(12)} \approx 1,2 \cdot 10^{23} \cdot 17,6 \approx 2,1 \cdot 10^{24} \text{ MeV} = 3,4 \text{ кДж}.$$

7.3. У 1939 році Ханс Бете проаналізував, у яких реакціях може синтезуватися гелій з водню. Він визначив, що найефективнішими є два процеси: протон-протонний цикл, який домінує в невеликих зірках, і CNO-цикл (відкрив Карл Вайцеккер у 1938 р. незалежно від Бете), який грає найбільшу роль для зірок важчих за 1,5 сонячних мас.

Перша ланцюгова реакція – протон-протонний цикл, домінує в зірках з масою порядку маси Сонця або менше. На нього припадає до 98% енергії, що виділяється:



"Додавши" праву й ліву частини ланцюга та "скоротивши" на однакові ядра, отримуємо, що у протон-протонному циклі виділяється енергія, приблизно, 23,65 MeV.

CNO-цикл – термоядерна реакція перетворення водню в гелій, в якій вуглець, кисень і азот виступають як каталізатори. Цей цикл вважається одним з основних процесів термоядерного синтезу в масивних зірках головної послідовності. Він є сукупністю трьох зчеплених один з одним циклів (або, точніше, циклів що частково перекриваються). Найпростішим з них є CN-цикл (цикл Бете, або вуглецевий цикл). Аналогічно попередньому знаходимо, що у вуглецевому циклі виділяється енергія, приблизно, 26 MeV.

7.4. Вихід реакції визначається формулою

$$J = f \cdot \sigma,$$

де $f = e^{-E/(k_B T)}$ – функція розподілу Больцмана, а переріз термоядерної реакції дорівнює $\sigma = \sigma_0 D$.

Коефіцієнт проходження $D = \exp[-2\pi Zze^2/(\hbar v)]$ вже був підрахований у розділі 4 (див. Задача 4.13), тому:

$$J = J_0 e^{-(av^2-b)/v} = J_0 e^{-\varphi(v)}.$$

Енергію знаходимо з умови екстремуму цього виразу. Звідки:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \Rightarrow \varphi(v_{ef}) = (b/a)^{1/3}.$$

Звідси маємо:

$$a = \frac{m}{2k_B T}, \quad b = \frac{2\pi Zze^2}{\hbar}.$$

Тоді

$$J = A \exp[-C/T^{1/3}], \text{ де } C = \frac{3}{2} \left(\frac{4\pi^2 Z^2 z^2 e^4 m}{\hbar^2 k_B} \right)^{1/3}.$$

Остаточно маємо

$$E_{ef} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left[\frac{\pi Zze^2 2k_B T}{\hbar m} \right]^{2/3} = 7,1 \text{ кеВ.}$$

7.5. При розрахунках будемо виходити з відомого експериментального інваріанта термоядерної реакції dd . Тоді:

$$\langle \sigma v \rangle_{dd} \approx 3 \cdot 10^{-4} \frac{\exp(-19/T^{1/3})}{T^{2/3}} \Rightarrow \tau = \frac{1}{n \langle \sigma v \rangle_{dd}} = 6 \cdot 10^6 \text{ с.}$$

Цей результат узгоджується з критерієм Лоусона:

$$n\tau \geq \frac{k_B T}{E_\alpha \langle \sigma v \rangle_{dd}} \approx 10^{20} \div 10^{22} [\text{м}^{-3} \text{с}].$$

8. КОСМІЧНІ ПРОМЕНІ (Заняття 11)

Відкриття космічних променів. Первинні та вторинні промені. Жорстка та м'яка компоненти космічних променів. Відкриття позитронів. Відкриття мюонів. Властивості мюонів. Відкриття заряджених піонів у космічних променях. Відкриття дивних частинок у космічних променях.

У серпні 1912 року австрійський фізик Віктор Гесс здійснив історичний політ на аеростаті. Піднімаючись на 5300 метрів, він виміряв швидкість іонізації в атмосфері та виявив, що вона приблизно втричі більша, ніж на рівні моря. Він дійшов висновку, що проникаюче випромінювання потрапляє в атмосферу зверху. Так було відкрито космічні промені.

Космічні промені – це високоенергетичні частинки, що надходять з космічного простору, складаються в основному (89%) з протонів – ядрами водню, що є найлегшим і найпоширенішим елементом у Всесвіті. Але ці частинки також включають ядра гелію (10%) і важчі ядра (1%), аж до урану. Потрапляючи на Землю, вони стикаються з ядрами атомів у верхніх шарах атмосфери, створюючи більше частинок, переважно піонів (рис. 8.1). Заряджені піони можуть швидко руйнуватися, випускаючи частинки, так звані мюони. На відміну від піонів, мюони, як лептони, сильно не взаємодіють з речовиною і тому більш вільно можуть просуватися по атмосфері й навіть проникати під землю. Швидкість мюонів, що надходять на поверхню Землі, така, що, приблизно, за одну секунду проходить відстань у 10-20 см.

1.) У перших дослідках з вивчення процесів народження нових частинок і дослідження їхніх властивостей використовувалися космічні промені, як джерело частинок високої енергії. Було виявлено, що джерело випромінювання знаходиться поза Землею і його слід шукати в космосі. Тому промені, які йому відповідали, були названі космічними променями.

2.) До складу космічних променів входять, зокрема, електрони досить високої енергії. В космічних променях, що утворюються в результаті активності Сонця, частинки досягають енергій до 10^{10} еВ. Для прикладу відмітимо, що на сучасних прискорювачах енергії частинок досягають величини $\sim 10^{13}$ еВ.

3.) Космічні промені мають дві компоненти: *жорстку* та *м'яку*. Було встановлено, що м'яка компонента в основному складається з електронів, а жорстка – з мюонів.

4.) Космічним променям притаманне явище утворення "зливів". Під зливами розуміють групу частинок, народження яких корельовано один з одним. Природа утворення зливів пов'язана з процесом народження електрон-позитронних пар (рис. 8.1, рис. 8.2, рис 8.3.).

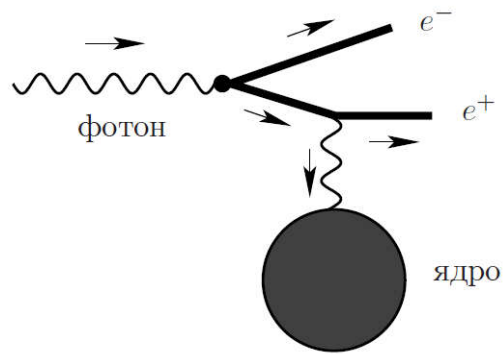


Рис.8.1. Утворення електрон-позитронної пари при проходженні електрона поблизу ядра [3]

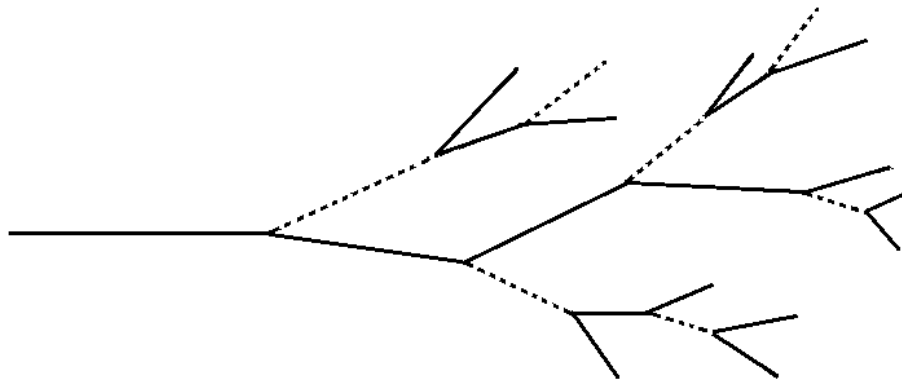


Рис. 8.2. Утворення “злив” у космічних променях [3]

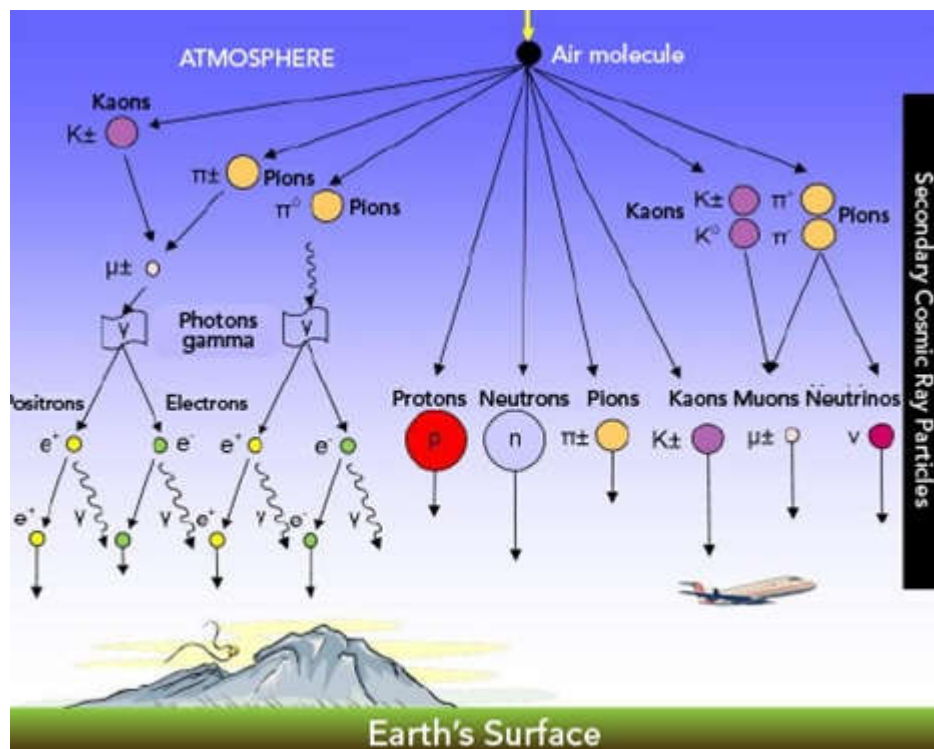


Рис. 8.3 Типові продукти й складові космічних “злив” [21]

§8.1. Задачі

8.1. Після того, як мюон потрапив у свинцеву пластинку, він дуже швидко уповільнюється, опиняючись на K -оболонці ядра $^{208}_{82}Pb$, та існує там приблизно $\bar{t} = 10^{-8} \text{ c}$. Цей час приблизно в 100 разів менший за час життя вільного мюона. Порівняйте розміри мюонної оболонки з розмірами ядра свинцю. Взаємодія з яким із нуклонів обмежує час існування мюона? Написати відповідну реакцію і оцінити повний переріз розсіяння.

8.2. Ізотоп ^{37}Ar розпадається за рахунок K -захоплення. Час його життя складає 35 днів. Оцінити переріз слабкої взаємодії в реакції $p + e^{-} \rightarrow n + \nu_e$.

8.3. Внаслідок взаємодії вторинного нейтрона від космічних променів з деякою частинкою у атмосфері (рис. 8.4) народилось $2\pi^{+}$, π^{-} , α -частинка, $4n$, $2p$, π^0 та нейтрон. З якою частинкою була взаємодія?

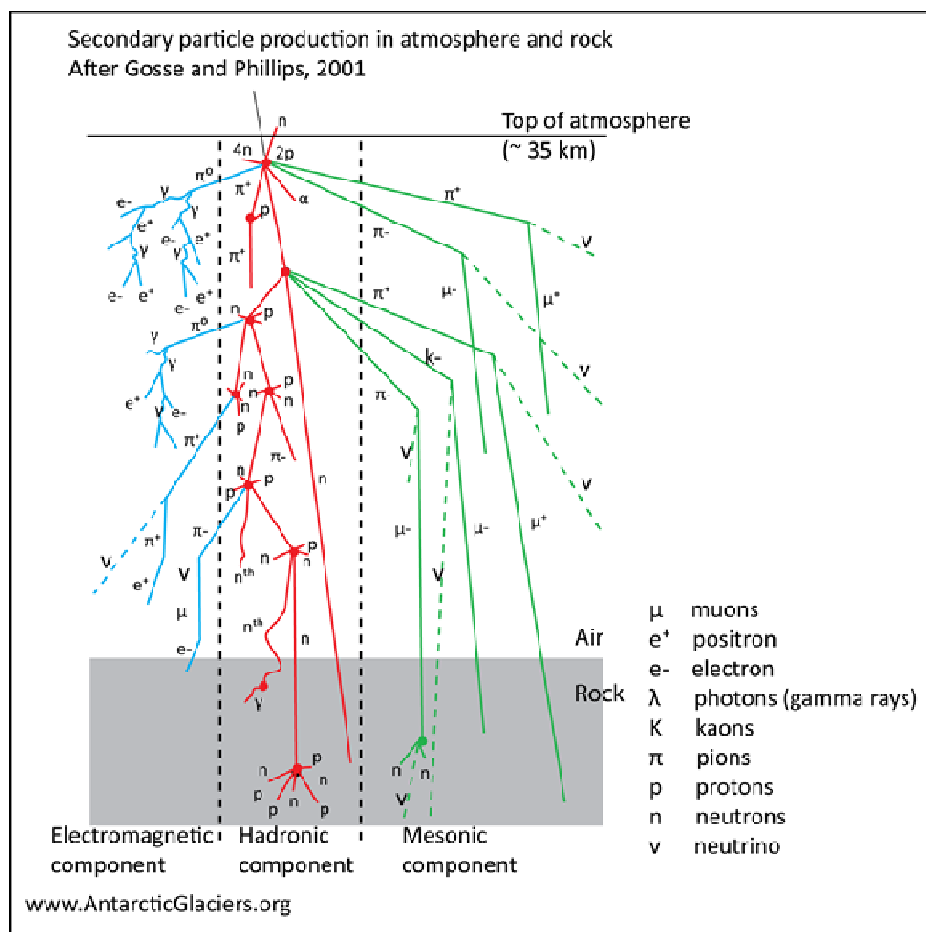


Рис. 8.4. Взаємодія нейтрона з деякою частинкою “ X ” космічних променів

§8.2. Відповіді та розв'язки

8.1. За законами збереження квантових чисел відповідною реакцією є:

$$p + \mu^- \rightarrow n + \nu_\mu.$$

Крім того, завдяки тому, що $\tau_\mu \ll \tau_p$, час життя мюонів у атомі буде визначатись величиною перерізу цієї реакції, густиною протонів, початковою кількістю мюонів та довжиною вільного пробігу мюонів:

$$\begin{aligned} dN_\tau \sim dN_x &\approx -\sigma n N_x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-t/\tau_\mu} &= N(x) = N_0 e^{-\sigma_{cl} n p x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma &\sim \frac{t}{\tau n \langle l \rangle} \sim \frac{4\pi r_0^3 A}{3\tau Z \langle v \rangle}; \quad v = \frac{\hbar}{m_\mu R_{B\mu}} = \frac{\hbar}{m_e R_B}, \end{aligned}$$

де R_B та $R_{B\mu}$ – електронний борівський радіус та мюонний “борівський” радіус. Маємо

$$\sigma \sim 10^{-7} - 10^{-8} A^2 \text{ (у ангстремах квадратних).}$$

8.2. Повторюючи міркування попередньої задачі, отримуємо:

$$\sigma \sim \frac{t}{\tau n \langle l \rangle} \sim \frac{4\pi r_0^3 A}{3\tau Z \langle v \rangle}; \quad v = \frac{\hbar}{m_e R_B}.$$

8.3. Зі закону збереження електричного заряду, враховуючи кваркову структура протона, нейтрона та π -мезона та “скорочуючи” на початковий і кінцевий нейтрон, отримуємо:

$$1u1\bar{d}(\pi^+); 4u8d(4n); 4u2d(2p); 6u6d(\alpha).$$

Тобто з законів збереження зарядів (електричного та баріонного) частинка має складатися з $15u$ та $15d$ кварків. Відповідний заряд легко порахувати. Він дорівнює 5:

$$Q = -e(15 \times 2 + 1 - 16)/3 = -5e, \quad e - \text{заряд електрона.}$$

Оскільки бор є п'ятим елементом періодичної таблиці Менделєєва, тому шукана частинка є ${}^{10}_5B$. Одна з подібних можливих реакцій, яка йде через проміжні ядра, показана на Рис. 8.5.

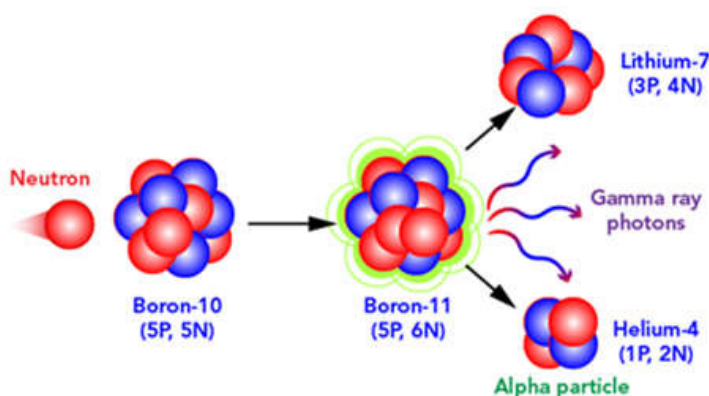


Рис. 8.5. Одна з можливих реакцій взаємодії нейтрона з ядром бору, яка відбувається через проміжні ядра [21]

9. ГОЛОВНІ БАРІОНИ ТА МЕЗОНИ (Заняття 12)

Три типи взаємодій, сильні, електромагнітні та слабкі. Лептони та адрони. Баріони та мезони. Теорія ядерних сил Юкави. Властивості дивних частинок. Схема Гелл-Манна – Нішиджими. Дивність, гіперзаряд, формула Гелл-Манна-Нішиджими. Властивості К-мезонів. Резонанси. Відкриття дельта-резонансу. Відкриття с-, b- та t-кварків.

1.) Основою сучасної теорії елементарних частинок є так звана Стандартна модель, що описує *сильну, електромагнітну і слабку взаємодію* всіх елементарних частинок. Стандартна модель, яка об'єднує сучасні уявлення про будову мікросвіту, не може претендувати на завершену теорію, оскільки не пояснює результатів деяких експериментів і не містить у собі теорію гравітації. Об'єднання цих трьох типів вказаних взаємодій є наслідком постулату, що відповідні вихідні лагранжиани теорій, що описують ці взаємодії, є симетричним щодо трьох відповідних типів калібрувальних перетворень.

Дослідження ядерних реакцій виявили, що деякі процеси відбуваються дуже швидко, з характерним часом порядку 10^{-23} с, а інші процеси – відносно повільно, з характерним часом порядку 10^{-10} с. Це свідчило про те, що у світі ядер і елементарних частинок існують два види взаємодії, які назвали сильною та слабкою взаємодією.

Сильна ядерна взаємодія була вперше описана японським вченим-фізиком Хідекі Юкава в 1935 р. з використанням обмінних частинок – мезонів. Сучасний опис сильної взаємодії надає квантова хромодинаміка. Сильна ядерна взаємодія є найпотужнішою з взаємодій. Проте вона проявляється на малих відстанях (порядку 10^{-15} м), які є співмірні з розміром ядра атома. Вона пов'язує разом кварки, а також пов'язує протони та нейтрони в ядрі атома.

2.) Відповідно до Стандартної моделі всі елементарні частинки можна за способом взаємодії розділити на дві групи – *адрони та лептони*. Адрони приймають участь у сильній та електрослабкій взаємодії (об'єднанні слабкої та електромагнітної взаємодій). Лептони не приймають участь у сильній взаємодії – вони приймають участь тільки в слабкій та електромагнітній взаємодії. Згідно з КХД адрони “складаються” з фундаментальних частинок – кварків. У той же час лептони самі є фундаментальними частинками.

3.) Адрони, в свою чергу, можна поділити на *мезони*, які зазвичай “утворюються” двома “структурними” кварками (під “структурним” кварком розуміється валентний кварк, що “одягнений” у кварк-антикваркову та глюонну “шуби”), та *баріони*, які зазвичай “утворюються” трьома “структурними” кварками (див. Задачу 10.8).

Баріони – субатомні частинки, що мають напівціле значення спіну, клас адронів. Назва баріон походить від грецького важкий – на момент їх відкриття всі інші частинки були легшими за них. Оскільки баріони зазвичай

“складаються” з трьох валентних кварків так, що баріонні числа кварків ($1/3$ або $-1/3$) додаються, вони мають значення баріонного заряду 1 або -1 . Найвідомішими баріонами є протон і нейтрон, що є основними складовими атомного ядра. Кожному баріону відповідає своя античастинка, що має протилежний електричний і баріонний заряд. Нещодавно було знайдено також пентакварки, які “складаються” з п’яти валентних кварків.

Мезони – родина елементарних частинок, “складаються” з кварка та антикварка, це адрони з цілим спіном. Вони є нестабільними частинками – найдовший час життя мають заряджені піони ($2,6 \cdot 10^{-8}$ с). Від класу баріонів (які теж є адронами) відрізняються відсутністю баріонного заряду і цілим спіном. Як частинки із цілим спіном мезони належать до бозонів. Беруть участь у всіх трьох видах взаємодії (сильній, електромагнітній та слабкій). При цьому на близьких відстанях сильна взаємодія превалює. Також нещодавно було знайдено тетракварки, що “складаються” з чотирьох кварків та глюоболі, що є зв’язаними станами глюонів без валентних кварків.

4.) За аналогією до сил хімічного зв’язку Гейзенберг ввів ядерні обмінні сили (1932 р.). За фізичною інтерпретацією ці сили розглядаються як такі, що виникають між двома нуклонами внаслідок обміну третьою частинкою. Відмітимо, що поняття «обмін» не потрібно розуміти буквально, оскільки обмін здійснюється віртуальними частинками, які не існують у вільному стані. У 1935 році Юкава теоретично припустив, що цей обмін реалізується частинкою великої маси. Він запропонував теорію, яка дозволила обчислити масу цієї гіпотетичної частинки, приблизно у 200 разів важчої за електрон. Ця частинка згодом дістала назву «мезон». Потенціал, введений Юкавою у цій теорії, має вигляд:

$$V = -g^2 \frac{e^{-kr}}{r},$$

де V – потенціал взаємодії, g – константа, що описує інтенсивність взаємодії, k – величина обернена радіусу ядерної взаємодії r , знак мінус вказує на притягання. Потенціал спадає експоненціально. Через це сильну взаємодію називають короткодіючою, оскільки вже на відстані в кілька фермі (або, інакше, фемтометрів) вона падає до нуля.

5.) Для врахування зв’язку електричного заряду з дивністю японський фізик Казухіко Нісідзіма (Нішиджима) (разом з Тадао Накано) у в 1953 році запропонував формулу:

$$Q = I_z + \frac{1}{2}(B + S).$$

Цю ж формулу незалежно в 1956 році запропонував Мюррей Гелл-Манн. Сучасна версія формули пов’язує всі квантові числа аромату (ізоспін вгору і вниз, дивність, чарівність, нижчість і вершина) з баріонним числом та електричним зарядом:

$$Q = I_z + \frac{1}{2}(B + S + C + B' + T). \quad (9.1)$$

Ця формула носить назву: «формула Гелл-Манна – Нісідзіми» (або у іншій транскрипції «формула Гелл-Манна – Нішиджими»). Тут і вище:

Q – електричний заряд адрону (в одиницях елементарного заряду), B – його баріонна число, I_z – проекція ізоспіна, S – дивина (або дивність), C – чарівність, B' – принадність (або краса), T – істинність (або правдивість).

§9.1. Задачі

9.1. Знайти релятивістську формулу, яка зв'язує енергії в лабораторній системі та у системі центру інерції для випадку розсіяння двох частинок однакової маси.

9.2. Як відомо, доданки у виразі потенціалу сильної взаємодії, які враховують взаємодії спін-спінові, ізоспін-ізоспінові та спін-ізоспінові взаємодії називають *силами Майорани, Бартлетта та Гейзенберга*. З урахуванням явного вигляду сил Майорани, Гейзенберга, Бартлетта знайти віртуальні частинки, обмін якими приводить до виникнення цих сил.

9.3. Довести, що переріз реакцій $p + d \rightarrow d + n + \pi^+$ в два рази є більшим за переріз реакції $p + d \rightarrow d + n + \pi^0$:

$$\frac{d\sigma(p + d \rightarrow d + n + \pi^+)}{d\sigma(p + d \rightarrow d + n + \pi^0)} = 2.$$

9.4. На основі кваркової моделі знайти “дивність” електронейтрального адрону з проекцією ізотонічного спіну $I_z = 1/2$ та баріонним зарядом $B = -1$. Врахувати, що адрон також має нульові заряди чарівного, красивого та справжнього кварків: $C = 0$, $B' = 0$, $T = 0$.

9.5. В ефективному перерізі пружного процесу $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ за $T_\pi = 190 \text{ MeV}$ спостерігається резонанс з напівшириною $\Gamma/2 = 100 \text{ MeV}$, який називається Δ^{++} -ізобарою. Визначити середній час існування цієї частинки.

§9.2. Відповіді та розв'язки

9.1. При перетвореннях координат зберігаються релятивістські інваріанти s, t, u (див. Рис. 9.1):

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t = (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2,$$

$$u = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2,$$

які пов'язані між собою співвідношенням

$$s + u + t = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$

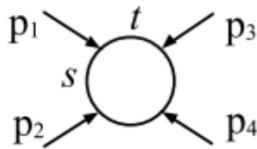


Рис. 9.1. Загальний вигляд чотирьохчастинкової діаграми (чотирьохвосткої діаграми), в якій всі 4-імпульси спрямовані до центру, показано s та t – канали реакції

Тому, записавши, наприклад, s -інваріант в лабораторній системі та у системі центру інерції, отримуємо:

$$E_{\text{л}} = \frac{s}{2m} - mc^2, \quad s = (p_1 + p_2)^2 = 4E_{\text{ц.і.}}^2 / c^2.$$

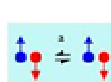
9.2. Сили, які виникають у результаті обміну нейтральними π -мезонами, є силами Вігнера. Якщо нуклони обмінюються просторовими координатами при незмінних спінових змінних, тоді обумовлені таким обміном процеси породжують сили Майорани (обмін зарядженими π -мезонами при збереженні спіна нуклонів).

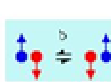
Якщо нуклони обмінюються спіновими змінними при незмінних просторових координатах, тоді між нуклонами, що виникають при такому способі обміну, з'являються сили Бартлетта (обмін нейтральними π -мезонами зі зміною спіну, кварками й антикварками одного аромату, ін.).

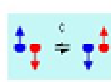
Spin-and Isospin-Exchange Interactions

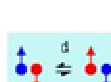
Fermions are indistinguishable $\rightarrow$ wave function $\Psi(q_1, q_2) = -\Psi(q_2, q_1)$ antisymmetric : exchange operators $\mathbf{P}_M(\mathbf{S})\mathbf{P}_B(\mathbf{I})\mathbf{P}_H(\mathbf{T}) = -1$,

Different force components mediated by different mesons $\rightarrow$ experiment input (scattering)

Wigner forces

 $\text{No change: } \rightarrow \hat{P}_W \Psi(\vec{r}) = \hat{I} \Psi(\vec{r}) \rightarrow V_W(\vec{r}) \text{ regular attractive central}$

Majorana forces

 $\text{Exchange of positions (like parity operation } \hat{\Pi}), \text{ no change in spins:}$
 $\rightarrow \hat{P}_M \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \begin{cases} \Psi(\vec{r}) & \pi = +(\text{even } \ell) \\ -\Psi(\vec{r}) & \pi = -(\text{odd } \ell) \end{cases} \rightarrow V_M(\vec{r}) \begin{cases} < 0 & \pi = +(\text{even } \ell) \\ > 0 & \pi = -(\text{odd } \ell) \end{cases}$

Bartlett forces

 $\text{Spin exchange: } \rightarrow \hat{P}_B \chi_{12} = \chi_{21} = \begin{cases} \chi_{12} & S = 1 \\ -\chi_{12} & S = 0 \end{cases} \rightarrow V_B \begin{cases} < 0 & S = 1 \\ > 0 & S = 0 \end{cases}$

Heisenberg forces

 $\text{Position and spin exchange: } \hat{P}_M \hat{P}_B \Psi(\vec{r}) = \begin{cases} \Psi(\vec{r}) & (S = 1, \text{even } \ell), (S = 0, \text{odd } \ell) \\ -\Psi(\vec{r}) & (S = 0, \text{even } \ell), (S = 1, \text{odd } \ell) \end{cases}$
 $\text{equivalent isospin exchange: } \hat{P}_H \Psi(\vec{r}) = \begin{cases} \Psi(\vec{r}) & T = 0(\text{antisymm.}) \\ -\Psi(\vec{r}) & T = 1(\text{symmetric}) \end{cases} \rightarrow V_H(\vec{r}) \begin{cases} < 0 & T = 0(\text{antisymm.}) \\ > 0 & T = 1(\text{symmetric}) \end{cases}$

W. Udo Schroefer, 2012

Рис. 9.2. Обміни віртуальними мезонами, що приводять до сил Вігнера, Майорани, Бартлетта та Гайзенберга (взято з [25])

Якщо нуклони одночасно обмінюються спіновими і просторовими координатами, тоді виникаючі при цьому обмінні сили є силами Гейзенберга (обмін зарядженими π -мезонами при зміні спіна нуклонів, кварки й антикварки різних ароматів, та ін.).

Відповідь: віртуальні нейтральні мезони (π^0 -мезони, ρ_0 -мезони, та ін.) та віртуальні заряджені мезони (π^+ -мезони, π^- -мезони та ін.), кварки й антикварки див. Рис. 9.2).

9.3. Оскільки дейтрон присутній, як у початковому, так і у кінцевому станах, та враховуючи $T_d = T_{3,d} = 0$ (ізотопічний спін та його проекція), тому на нього можна "скоротити" праву й ліву частини реакцій:

$$p \rightarrow \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}_{(T=1/2)}^+ \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \end{pmatrix}_{(T=1)},$$

$$\Psi_{1/2}^{1/2} = -\sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{1/2}^{1/2} \phi_0^1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{-1/2}^{1/2} \phi_1^1.$$

Квадрати коефіцієнтів при хвильових функціях відповідних станів (1/2 та 2/3) дають ймовірності цих процесів. Отже відношення цих коефіцієнтів, що дорівнює 2, дає відношення перерізів, що й потрібно було довести.

9.4. Підставляючи значення квантових чисел і зарядів у формулу Гелл-Мана – Нісідзіми (9.1), отримуємо:

$$Q = I_z + \frac{1}{2}(B + S + C + B' + T) = 0 \Rightarrow S = 0.$$

9.5. Вважатимемо, що розпад резонансу відбувається за законом радіоактивного розпаду. Адже ймовірність цього процесу не залежить від передісторії резонансу. Тоді, вважаючи, що до моменту часу t резонанс не розпався, маємо, що густина ймовірності буде як і при виводі формули Брейта-Вігнера:

$$|\Psi|^2 \sim \exp(-\omega t) = \exp(-t/\tau) = \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar} t\right).$$

Нормуючи цю густину ймовірності та підставляючи в означення середнього, отримуємо:

$$\tau = \int_0^\infty t \rho(t) dt = \frac{\hbar}{\Gamma} = 0,3 \cdot 10^{-23}.$$

10. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КВАРКОВОЇ МОДЕЛІ (Заняття 13)

Унітарні мультиплети мезонів та баріонів. Кварки, їх квантові числа. Кваркова структура найпростіших мезонів та баріонів. Колір та аромат кварків. Поняття про глюони.

У фізиці елементарних частинок кваркова модель є класифікаційною схемою для адронів з точки зору їх валентних кварків – кварків та антикварків, які породжують квантові числа адронів. В основі кваркової моделі лежить симетрія “аромату $SU(3)$ ” та успішна класифікаційна схема “вісімкового шляху”, що організовує велику кількість легших адронів, які були відкриті впродовж 1950-х і 1960-х років.

Модель була незалежно запропонована фізиками Мюрреєм Гелл-Манном, який назвав їх “кварками”, та Джорджем Цвейгом. На сьогодні модель по суті є складовою усталеної калібрувальної квантової теорії поля сильних (квантова хромодинаміка (КХД) та електрослабких взаємодій (об’єднаної калібрувальної теорії електромагнітних (КЕД) та слабких взаємодій) частинок, яка отримала назву Стандартна модель (див. розділ 14).

За моделлю адрони насправді не є “елементарними” й їх можна розглядати як пов’язані стани їхніх “валентних кварків” та антикварків, які породжують квантові числа адронів. Ці квантові числа є “мітками”, що ідентифікують адрони. Вони бувають двох видів. Один набір походить від симетрії Пуанкаре – JPC (J^{PC}), де J , P і C означають сумарний кутовий момент, P -симетрію та C -симетрію, відповідно. До іншого набору відносяться квантові числа “аромату”, такі як слабкий ізоспін, баріонне число, “дивність”, “чарівність”, “краса”, тощо. Сильні взаємодії, що зв’язують кварки, нечутливі до цих квантових чисел, тому їх комбінація приводить до систематичних взаємозв’язків маси та зв’язків між адронами в одному мультиплеті аромату.

Усім кваркам присвоєно баріонне число $1/3$. Істині, чарівні та верхні кварки мають електричний заряд $+2/3$, тоді як красиві, дивні та нижні кварки мають електричний заряд $-1/3$. Антикварки мають протилежні квантові числа. Кварки мають спін $1/2$, а отже є ферміонами. Кожен кварк або антикварк підпорядковується формулі Гелла-Манна-Нішідзіма індивідуально, тому будь-яка їх комбінація у адронах також буде відповідати цій формулі.

З метою збереження принципу Паулі для тотожних кварків у деяких адронах Б.В. Струмінський на початку 1965 р. (на прикладі $\Omega^-(1232)$) у трьох працях (друга та третя праці разом з М.М.Боголюбовим та А.Н.Тавхелідзе) запропонував ввести для кварків додаткове квантове число назване пізніше “колір” (ця ідея лягла в основу КХД, лагранжіан якого є симетричним відносно кольорової $SU(3)$ -симетрії.)

Мезони складаються з валентної пари кварк-антикварк (таким чином, мають баріонне число 0), тоді як баріони складаються з трьох кварків (таким чином, мають баріонне число 1). Існують теоретичні узагальнення кваркової моделі щодо більшої кількості ароматів, але ці моделі не знайшли свого експериментального підтвердження.

§10.1. Задачі

10.1. Побудувати з кварків p , n , Λ , Σ , Ω -частинки.

10.2. При зіткненні K^- -мезона з протоном зафіксовано народження Ω^- -гіперону або π^- -мезона. Які частинки при цьому ще народжуються?

10.3. Відповідно до квантової хромодинаміки (КХД) – фундаментальної теорії сильної взаємодії, яка прийшла на зміну теорії Юкави, переносником сильної взаємодії є віртуальні глюони. При низьких енергіях, які відповідають максимальному радіусу сильної взаємодії, у рамках КХД обмін цим віртуальним глюоном описується, наприклад, непертурбативною "діаграмою Фейнмана" (рис. 10.1), яку для врахування, так званої, власної енергії глюона, потрібно доповнити нескінченною кількістю флуктуацій цього глюона на нові кварк-антикваркові пари.

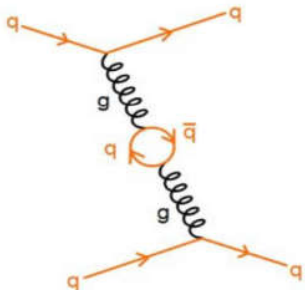


Рис. 10.1. "Діаграма Фейнмана" що відповідає флуктуації глюона на кварк-антикваркову пару.
(Зображення певних інтегралів, які зустрічаються в квантовій теорії поля, за допомогою малюнків, було запропоновано Річардом Фейнманом)

Оскільки цих флуктуацій може бути нескінченно багато, тому, якщо б ми могли на це глянути зі сторони (що неможливо, оскільки віртуальні частинки принципово неспостережні), тоді ефективно це виглядало б як обмін π -мезоном ($\pi = (q, \bar{q})$).

Інша діаграма Фейнмана (рис. 10.2) описує випадок, коли сильна взаємодія реалізується безпосередньо за рахунок обміну кварків між баріонами.

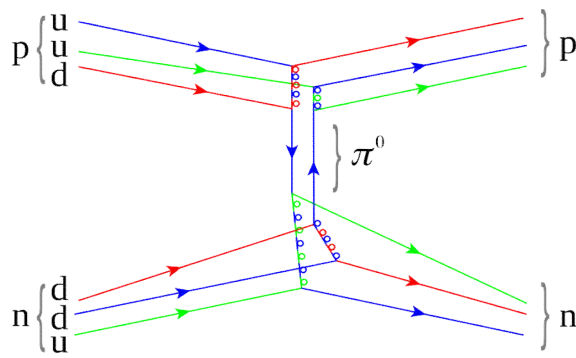


Рис. 10.2. Діаграма Фейнмана, що відповідає випадку, коли сильна взаємодія реалізується безпосередньо за рахунок обміну кварків між баріонами [26]

Враховуючи ці дані, розв'язати Задачу 1.2 про релятивістські маси $\pi^{(0)}$ -, $\pi^{(+)}$ -, $\pi^{(-)}$ -мезонів, виходячи з характерних масштабів ядерної взаємодії, вважаючи, що, згідно з кварковою моделлю, мезон "складається" з кварк-антикваркової пари.

10.4. За великих значень енергії ($E \gg 10$ Гев) повний переріз розсіяння (pp) є $\sigma_{pp} = 40$ мбарн, та, згідно з теоремою Померанчука, приблизно дорівнює повному перерізу розсіяння протона на антипротоні. Також відомо, що повний переріз каон-нуклонного розсіяння $\sigma_{KN} = 19$ мбарн. Вважаючи структури піона та протона кварковими (див. Рис. 10.3), оцінити величину повного перерізу розсіяння $\sigma_{p\bar{p}}$, σ_{pn} , $\sigma_{\pi p}$, $\sigma_{\Lambda p}$, $\sigma_{\Xi p}$ за цих умов.

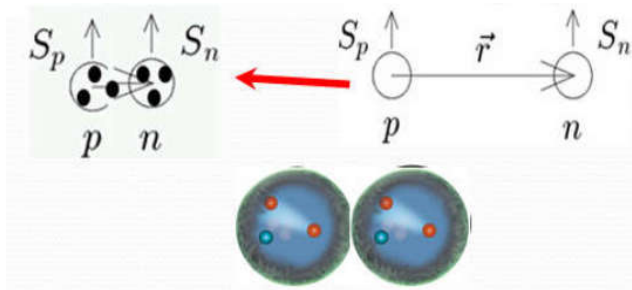


Рис. 10.3. Кваркова модель дейтрона (зверху) та наближений малюнок, що показує взаємодію протонів з урахуванням валентних кварків

10.5. Довести, що оператори магнітних моментів кварків 2-го покоління визначаються, подібно до електрона, за формулою $\hat{\mu}_i = 2 \cdot \frac{q_i \hat{S}_3}{2m_{q_i} c}$, де q_i і m_{q_i} – заряд і маса кварка, відповідно.

10.6. Виходячи з кваркової моделі, знайти хвильові функції протона і нейтрона. Довести, що ймовірність паралельних спінів кварків всередині адрону вища за антипаралельних.

10.7. У рамках кваркової моделі оцінити відношення магнітних моментів нейтрона і протона.

10.8. Вважаючи, що протон та нейтрон складаються з валентних кварків і кварків моря та глюонів, знайти скільки процентів маси приходить на валентні кварки.

10.9. Виходячи з кваркової моделі, знайти хвильові функції дельта-баріона Δ^+ .

10.10. Показати, що без введення квантового числа «колір», яке приймає три значення, кваркова структура Δ^{++} , Δ^- , Ω^- суперечить принципу Паулі.

Додаткова задача для самостійної роботи.

10.11*. У рамках кваркової моделі оцінити відношення магнітних моментів Λ -гіперона та протона.

§10.2. Відповіді та розв'язки

10.1. Прирівнявши квантові числа відповідних баріонів і сумарні квантові числа валентних кварків, отримуємо:

$$(uud, ddu, uds, suu, sss).$$

10.2. Зі законів збереження зарядів, отримуємо:

$$K^-(\bar{u}s) + p(uud) \rightarrow \Sigma^+(suu) + \pi^-(\bar{u}d) \quad \text{або}$$

$$K^-(\bar{u}s) + p(uud) \rightarrow \Omega^-(sss) + K^+(\bar{s}u) + K^0(\bar{s}d).$$

10.3. Враховуючи оцінки для радіусу ядра, отримаємо оцінку для радіусу дії ядерних сил $R_{\text{я}} = r_0 A^{1/3}$ (у даному випадку $A = 2$, $r_0 = 1,2$ фм). Після чого з принципу невизначеності Гейзенберга, отримуємо:

$$\Delta E = \Delta \left(\sqrt{p^2 c^2 + m_{\pi}^2 c^4} \right) = \Delta m_{\pi}^* c^2 = \frac{\hbar c}{\Delta r} = \frac{\hbar c}{r_0 A^{1/3}} = 130 \text{ MeV},$$

де $m_{\pi}^* = 130 \text{ MeV}/c^2$ – ефективна релятивістська (динамічна) маса π -мезону.

10.4. З факту “зарядонезалежності” ядерних сил, правил кваркового рахування та асимптотичної свободи при високих енергіях ($E \gg 10 \text{ GeV}$), повний переріз адронів можна подати як суму перерізів валентних кварків:

$$\frac{\sigma_{p\bar{p}}}{\sigma_{pp}} = \frac{9\sigma_{q\bar{q}}}{9\sigma_{qq}} = 1 \Rightarrow \sigma_{p\bar{p}} = \sigma_{pp} = \sigma_{np} = 40 \text{ мбарн}.$$

Що частково підтверджується експериментом (див. рис. 10.4).

$$\frac{\sigma_{\pi p}}{\sigma_{pp}} = \frac{6\sigma_{qq}}{9\sigma_{qq}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sigma_{\pi p} = \frac{2}{3}\sigma_{pp} \cong 26 \text{ мбарн}$$

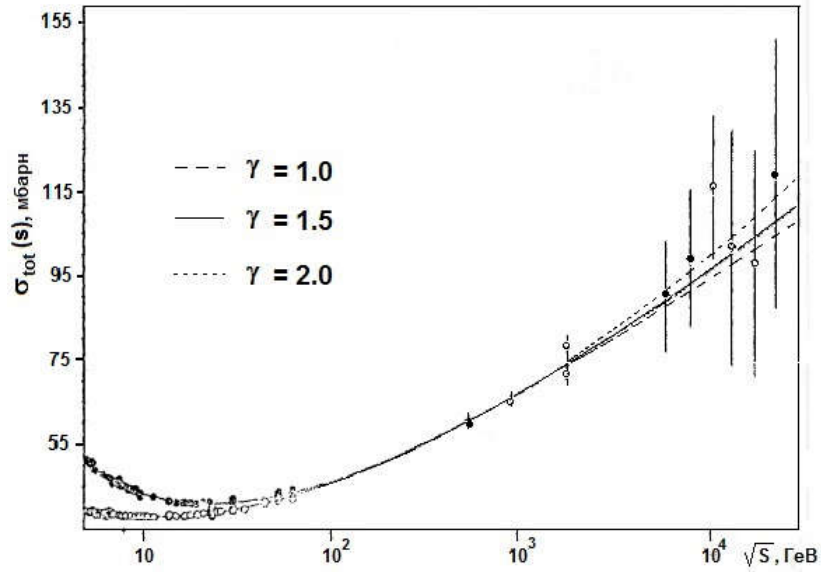
(дані відповідного експерименту див. на Рис. 10.5).

$$9\sigma_{qq} = 40 \text{ мбн} \Rightarrow \sigma_{qq} = 4,4 \text{ мбарн};$$

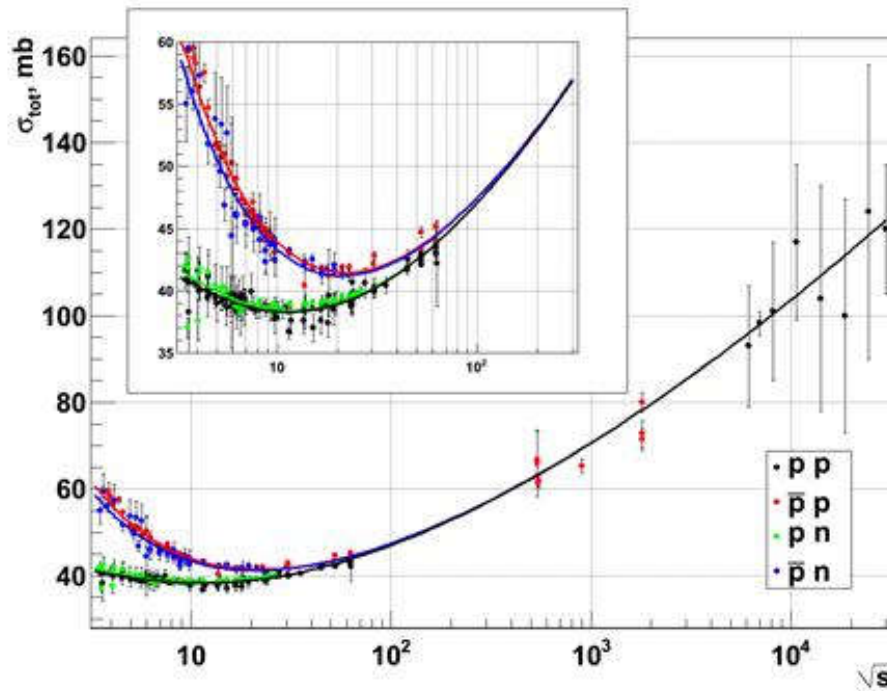
$$\sigma_{KN} = 3\sigma_{qs} + 3\sigma_{qq} = 19 \text{ мбарн} \Rightarrow \sigma_{qs} = 1.9 \text{ мбарн} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\Lambda p} = 9\sigma_{qs} = 17,4 \text{ мбарн}.$$

Аналогічно знаходиться переріз $\sigma_{\Xi p}$.



а)



б)

Рис. 10.4. а) σ_{pp} та $\sigma_{p\bar{p}}$ з роботи [14]; б) сучасне порівняння з експериментом повних перерізів розсіяння σ_{pp} , $\sigma_{p\bar{p}}$, σ_{pn} , $\sigma_{p\bar{p}}$ [17]

Спостерігається приблизний збіг перерізів ($\sigma_{pp}, \sigma_{\bar{p}p}, \sigma_{pn}, \sigma_{\bar{p}n}$) при високих енергіях (рис. 10.4). Отримано, що переріз σ_{pp} більше за переріз $\sigma_{\pi p}$ приблизно у $40/26=1.54$ разів. Це добре узгоджується з відомими експериментальними даними (рис. 10.5).

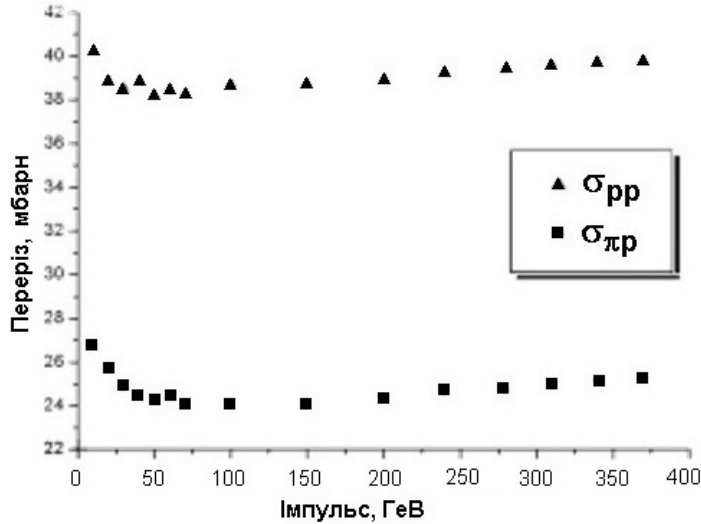


Рис. 10.5. Повні перерізи розсіяння σ_{pp} та $\sigma_{\pi p}$

10.5. Магнітний момент кварка у $g = 2,79 \frac{m_q^*}{m_p}$ разів перевищує «магнетон кварка» $\frac{q_i \hbar}{2m_q c}$, де $m_q^* = m_q - U_0$ – «зведена маса» кварка, m_p – маса протона, U_0 – глибина потенційної ями для кварка в нуклоні (модель так званого «кваркового мішка»).

Величина $g \approx 1$ узгоджується з експериментальними даними за електромагнітними розпадами. Тому, використовуючи квантовомеханічне значення оператора проекції спіну $\hat{s}_3 = \frac{\hbar \hat{\sigma}_3}{2}$, отримуємо:

$$\hat{\mu}_i = g \frac{q_i \hbar \hat{\sigma}_3}{2m_q c} \approx \frac{q_i \hat{s}_3}{m_q c}$$

10.6. Побудуємо хвильову функцію нуклона (протона):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \quad (S=0) \\ & \quad \otimes \quad \Rightarrow \\ & \frac{1}{2\sqrt{3}} |ud\rangle - |du\rangle \quad (T=0) \\ & \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad |p \uparrow\rangle &= (1/4) \{ (|u \uparrow d \downarrow\rangle - |d \uparrow u \downarrow\rangle - |u \downarrow d \uparrow\rangle + |d \downarrow u \uparrow\rangle) \otimes |u \uparrow\rangle \}_{\text{сум}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N \{ 2|u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle + 2|u \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle - |u \uparrow d \uparrow u \downarrow\rangle - |u \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle - \\
&- |u \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle - |d \uparrow u \downarrow u \uparrow\rangle - |d \uparrow u \uparrow u \downarrow\rangle - |u \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle + 2|d \downarrow u \uparrow u \uparrow\rangle \} = \\
&= N \{ 2\sqrt{3}|[u \uparrow u \uparrow d \downarrow]\rangle - \sqrt{6}|[u \uparrow u \downarrow d \uparrow]\rangle \}, \\
&\langle p|p\rangle = 1 \Rightarrow N = \sqrt{\frac{1}{18}}.
\end{aligned}$$

Звідси остаточно отримуємо:

$$|p \uparrow\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \{ \sqrt{2}|[u \uparrow u \uparrow d \downarrow]\rangle - |[u \uparrow u \downarrow d \uparrow]\rangle \}.$$

Аналогічно отримуємо хвильову функцію нейтрона:

10.7. Враховуючи квантовомеханічне визначення середніх, хвильові функції протона та нейтрона, що були отримані у попередній задачі, вигляд оператора магнітних моментів $\hat{\mu}_i = 2 \frac{q_i \hat{S}_3}{2m_q c}$ та умову нормування хвильової функції, маємо:

$$\frac{\mu_p}{\mu_n} = \frac{\left\langle p \left| \sum_{i=1}^3 (\hat{\mu}_p)_i \right| p \right\rangle}{\left\langle n \left| \sum_{i=1}^3 (\hat{\mu}_n)_i \right| n \right\rangle} \approx \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right)}{\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right)} = -\frac{3}{2}.$$

10.8. Оскільки маси протона та нейтрона дорівнюють 936 та 938 MeV, відповідно, а маси “голих” валентних u та d кварків – 2,2 та 4,7 MeV, тому їхній внесок до маси нуклонів не перевищує 10-13%.

10.9. Хвильові функції дельта-баріона Δ^+ легко знаходяться з хвильових функцій протона, оскільки вони мають такий самий кварковий склад, але, відповідно до узагальненого принципу Паулі, ортогональні хвильовій функції протону є:

$$\begin{aligned}
|p \uparrow\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} \{ \sqrt{2}|[u \uparrow u \uparrow d \downarrow]\rangle - |[u \uparrow u \downarrow d \uparrow]\rangle \} \\
&=> \\
|\Delta^+(T = \frac{3}{2}, T_z = \frac{1}{2}) \uparrow\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} \{ \sqrt{2}|[u \uparrow u \uparrow d \downarrow]\rangle + |[u \uparrow u \downarrow d \uparrow]\rangle \}.
\end{aligned}$$

10.10. Зазначені частинки складаються з трьох тотожних кварків: Δ_{uuu}^{++} , Δ_{ddd}^- , Ω_{sss}^- . Експериментально відомо, що в усіх цих частинок $J_p = \frac{3}{2}^+$. Та оскільки розміри цих баріонів не перевищують розміри протона та нейтрона, тому орбітальний момент відносного руху кварків в них дорівнює нулю.

Таким чином, для того, щоб утворити стан з $J_p = \frac{3}{2}^+$, усі три кварка, що є ферміонами і мають спин $J = 1/2$, повинні мати однакові проекції спінів $1/2$. Отже, в кожному з розглянутих баріонів маємо три тотожних кварка в одному і тому ж квантовому стані. У той же час, відповідно до принципу Паулі, тотожні ферміони не можуть перебувати в одному стані (мати однакові квантові числа). Щоб виконувався принцип Паулі, необхідно ввести для кварків ще одне додаткове квантове число. Це квантове число (яке назвали «колір») повинно приймати три різні значення, для «відновлення» принципу Паулі в системі трьох тотожних кварків, у яких інші квантові числа збігаються.

Вказівки до задачі на самостійну роботу.

10.11*. Виконавши розрахунки хвильової функції за аналогією до попередніх задач:

$$|\Lambda^0 \uparrow\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \{ |u \uparrow d \downarrow s \uparrow\rangle - |u \downarrow d \uparrow s \uparrow\rangle \}$$

та врахувавши, що

$$\begin{aligned} \frac{m_{u,d}}{m_s} &= \frac{1}{20}, \quad m_{\Lambda^0} = 1115,6 \text{ MeV}, \\ \mu_u &= \frac{2}{3} \frac{e\hbar}{2m_u c} = \frac{2}{3} \frac{m_p}{m_u} \mu_y = \frac{2}{3} \lambda_1 \mu_y, \\ \mu_d &= -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_u c} = -\frac{1}{3} \lambda_1 \mu_y, \\ \mu_s &= -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_s c} = -\frac{1}{3} \frac{m_p}{m_s} \mu_y = -\frac{1}{3} \lambda_2 \mu_y, \end{aligned}$$

знаходимо

$$\frac{\mu_{\Lambda}}{\mu_p} = \frac{\left\langle \Lambda^0 \left| \sum_{i=1}^3 (\hat{\mu}_{\Lambda})_i \right| \Lambda^0 \right\rangle}{\left\langle p \left| \sum_{i=1}^3 (\hat{\mu}_p)_i \right| p \right\rangle} \approx -\frac{1}{3} \lambda_2.$$

11. ДИСКРЕТНІ СИМЕТРІЇ (Заняття 14)

Дискретні перетворення просторової інверсії, зарядової симетрії та інверсії часу. СРТ-теорема Паулі-Людєрса. Порушення просторової парності у слабких взаємодіях. Гіпотеза про СР-інваріантність. Відкриття порушення СР-інваріантності у розпадах нейтральних каонів.

1.) В рамках квантової теорії поля була доведена фундаментальна теорема Паулі-Людєрса, за якою: квантові системи є інваріантними щодо СРТ-перетворення в будь-якій послідовності.

СРТ-теорема є основним принципом у фізиці частинок, який стверджує, що комбінована операція спряження заряду (C), парності (P) і зміни часу (T) у будь-якому порядку є точною симетрією будь-якої взаємодії і при цих трьох перетвореннях всі фізичні закони повинні бути незмінними. Це означає, що якщо будь-яку частинку замінити відповідною античастинкою, й, одночасно, замінити координати простору та часу на протилежні, то фізичні закони не зміняться.

2.) За СРТ-інваріантністю, якщо в природі відбувається певний процес, тоді точно з такою ж ймовірністю може відбуватися СРТ-зв'язаний процес, в якому частинки замінені відповідними античастинками, проекції їхніх спинів і імпульсів змінили знак, а початковий і кінцевий стани помінялися місцями. Одним з наслідком СРТ-інваріантності є рівність мас і часів життя частинки і античастинки.

3.) Відповідно до математичного визначення теореми принцип СРТ може бути інваріантним, якщо кожен із незалежних параметрів C , P і T є інваріантом. Якщо один з параметрів не зберігається, тоді також має бути якесь компенсуюче порушення в одному з інших параметрів, щоб теорема виконувалась.

4.) СРТ-теорема стверджує, що будь-яка інваріантна відносно перетворення Лорєнца теорія також повинна бути інваріантною у поєднанні з операцією спряження заряду C , парності P та зворотність часу T , хоча жодна з цих індивідуальних інваріантів не потребує виконання.

5.) Раніше за СРТ-інваріантність була спочатку знайдена СР-інваріантність. СР (кон'югація заряду – парність) – це симетрія, яка пов'язує частинки з античастинками: СР-перетворення замінює частинку на античастинку і змінює знак імпульсу. Порушення СР-інваріантності виникає, коли є різниця у способі взаємодії частинок та античастинок. Вважається, що це порушення пояснює перевищення матерії над антиматерією, що спостерігається у Всесвіті.

У 1964 р. американські фізики Джеймс Уотсон Кронін (1931–2016) та Вал Логсдон Фітч (1923–2015) виявили порушення СР-інваріантності. В їх експериментах досліджувався розпад каонів (відомо чотири каони, що

позначаються: K^- , (античастинка K^+), K^0 , K_S^0 , K_L^0). Було показано, що реакція, яка протікає в зворотному напрямку, не точно відстежує шлях початкової реакції. За це відкриття Кронін і Фітч були нагороджені в 1980р. Нобелівською премією з фізики.

6.) При розпаді каонів утворюються заряджений π -мезон, антинейтрино й електрон, або його аналог з антиматерії – позитрон та антинейтрино. За відсутності порушення CP симетрії кількість електронів і позитронів, створених у цих розпадах, буде рівною. Проте було помічено, що ймовірність трохи схиляється до розпаду на електрони й нейтрино. Це дає доказ того, що порушення CP симетрії може призвести до надлишку речовини над антиматерією. Якби цей процес відбувся в ранньому Всесвіті, усі позитрони знищилися б, зустрічаючи електрони. Але після того, як усі позитрони зникнуть, завдяки вказаному вище порушенню CP-інваріантності, деяка частка електронів повинна залишитися.

Цей результат підтверджує теорію про те, що порушення CP-симетрії дозволило нам усім існувати. Але наслідки процесу, що викликає, надлишок речовини від розпаду каону, занадто малі, щоб пояснити існуюче перевищення матерії над антиматерією. Спостережувана різниця знаходиться на порядки меншою від очікуваної, згідно теоретичних розрахунків, асиметрії у Всесвіті. Це одна з причин того, що вчені настільки зацікавлені в дослідженнях порушенням CP-симетрії в інших реакціях, наприклад, у реакціях за участю нейтрино.

Потім виявилось, що два каони розпадаються не тільки на два π -мезони, а й на три. Канал розпаду каону на три π -мезони має іншу парність, ніж канал розпаду каону на два мезони, що також підтверджує незбереження парності у слабких взаємодіях.

§11.1. Задачі

11.1. Визначити просторову та зарядову парність у позитронію при його анігіляції.

§11.2. Відповіді та розв'язки

11.1. Сумарний спин електрона та позитрона може приймати два значення 0 та 1 в залежності від взаємного напрямку спінів електрона і позитрона. У зв'язку з цим розрізняють парапозитроній (спіни протилежно спрямовані, сумарний спин $S = 0$) та ортопозитроній (спіни співнаправлені, сумарний спин $S = 1$).

Згідно CPT теоремі, можна ввести оператор зарядової парності, так($T=S$):

$$\hat{C}\psi = -\hat{P}\hat{S}\psi = (-1)^{l+s} \psi.$$

Зарядова парність позитронію визначає характер його анігіляції. Оскільки γ -квант є зарядово-непарною частинкою (всі вектори електромагнітного поля змінюють знак при зміні знаку електричного заряду), тому відповідно до закону збереження C -парності позитроній з додатною C -парністю може анігілювати тільки у парну кількість γ -квантів (переважно в два), а позитроній з від'ємною C -парністю – в непарну кількість γ -квантів (переважно в три).

Зазвичай анігіляція позитронію відбувається зі S -стану, до якого позитроній приходить, випускаючи радіаційні фотони (тобто просторова парність позитронію є $P = (-1)^0 = 1$). При цьому ортопозитроній, що знаходиться в стані 3S_1 і має від'ємну C -парність

$$[\hat{C} = (-1)^{l+s} = (-1)^{0+1} = -1],$$

анігілює в три γ -кванта, а парапозитроній, що знаходиться в стані 1S_0 і має позитивну C -парність

$$[\hat{C} = (-1)^{l+s} = (-1)^{0+0} = 1],$$

анігілює в два γ -кванта. Природно, що трьохфотонна анігіляція є менш імовірною, ніж двохфотонна. Тобто, трьохфотонна анігіляція відбувається набагато рідше, ніж двохфотонна: в середньому лише два-три з кожної тисячі позитроніїв, що попали в речовину, анігілюють в три фотони. Тому для часу життя орто- та парапозитронію можна записати наступну нерівність:

$$\tau_{орто} \gg \tau_{пара}.$$

Справа в тому, що час життя ортопозитронію близько $\tau_{орто} \cong 10^{-7} \text{ с}$, а час життя парапозитронію близько $\tau_{пара} \cong 10^{-10} \text{ с}$. Ортопозитроній, що є довше живучим, неперервно взаємодіючи з атомами середовища, не встигає анігілювати з випусканням трьох γ -квантів до того, як позитрон, що входить до його складу, анігілює зі стороннім електроном в стані з антипаралельними протилежно спрямованими спінами і з випусканням двох γ -квантів.

12. ЛЕПТОНИ (Заняття 15)

Відкриття тау-лептона. Три типи нейтрино. Збереження лептонного заряду. "Ліві" нейтрино та "праві" антинейтрино.

1.) *Тау-лептон* (елементарна субатомна частинка, подібна до електрона, але в 3477 разів важча та із середнім терміном життя $2,9 \times 10^{-13}$ секунд) був виявлений шляхом спостережень за його розпадом на мюони та електрони в середині 1970-х років групою під керівництвом Мартіна Перла зі Стенфордського центру лінійних прискорювачів у Каліфорнії. Перл назвав нову частинку третій заряджений лептон, на честь грецької літери, що починає слово третій. У 2000 році вчені з Національної лабораторії прискорювачів Фермі повідомили про перші експериментальні докази існування тау-нейтрино, невловимого партнера тау-лептона.

2.) Наразі відомо три типи нейтрино, що відповідають трьом лептонам –електронне нейтрино, мюонне-нейтрино та тау-нейтрино.

3.) Збереження числа лептонів стверджує, що сума лептонних чисел (зарядів) до і після взаємодії повинна бути однаковою. Оскільки існує три типи нейтрино, тому є й три різні лептонні числа: електронно-лептонне число L_e , число мюонно-лептонне L_μ і тау-лептонне число L_τ . Закон збереження вимагає, щоб під час будь-якої взаємодії кожне з цих квантових чисел має зберігатися окремо. Для електронів та електронних нейтрино $L_e = 1$; для їх античастинок $L_e = -1$; всі інші частинки мають $L_e = 0$. Такі самі значення чисел і закони збереження маємо для мюонів, мюонних нейтрино, тау-лептонів та тау-нейтрино. Збереження лептонного числа гарантує, що кількість електронів і позитронів у Всесвіті залишається відносно сталою величиною. Так, наразі відомо, що загальне число лептонів зберігається в природі. Проте спостереження показали зміни кількості лептонів (наприклад, L_e) у явищі, так званих нейтринних осциляцій.

4.) Відносні орієнтації спіну та лінійного імпульсу для нейтрино та антинейтрино, очевидно, є фіксованими та властивими частинкам.

Для нейтрино спін завжди є протилежним лінійному імпульсу, і тому такі нейтрино називаються "ліворукими" або "лівими" нейтрино, тоді як антинейтрино завжди "праворуке" ("праве").

Інакше кажучи нейтрино мають ліву спіральність, антинейтрино – праву спіральність. Ліва спіральність нейтрино означає те, що його спін направлений протилежно до імпульсу. Спіральність частинки визначається як відношення m_s/s (z -складова спіна, поділена на величину спіна). За цим визначенням маємо, що спіральність становить +1 для правостороннього антинейтрино і -1 для лівостороннього нейтрино.

До 1956 р. усі наявні експериментальні дані свідчили про те, що "лівість" чи "правість" не є значущою характеристикою взаємодій частинок,

оскільки закони фізики, схоже, зберігали паритет. Експерименти показали, що це правило зберігається у сильних та електромагнітних взаємодіях. Але теоретичні роботи Лі та Ян та експеримент з розпадом кобальту-60 ($^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$) показали, що у цьому розпаді, який обумовлений слабкою взаємодією, просторова парність не зберігається. Це призводить до того, що слабкі взаємодії, які випромінюють нейтрино або антинейтрино, порушують збереження просторової парності.

§12.1. Задачі

12.1. Виходячи з законів збереження дописати наступні реакції:

- а) $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow$, б) $\nu_\mu + n \rightarrow$,
 в) $\nu_\mu + e^- \rightarrow$, г) $\bar{\nu}_\mu + e^+ \rightarrow$,
 д) $2\pi^+ + \tau^- \rightarrow$, е) $2\pi^- + \tau^+ \rightarrow$,
 ж) $\rho^+ + \tau^- \rightarrow$, з) $\rho^- + \tau^+ \rightarrow$.

12.2. Чи наведені реакції є можливими:

- 1) $p \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$,
 2) $n \rightarrow p + \mu^- + \nu_\mu$.
 3) $n \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

§12.2. Відповіді та розв'язки

12.1. Застосуємо до реакцій закони збереження лептонного заряду (L_e, L_μ, L_τ), квантові числа $W_\pm$, Z бозонів, що переносять слабку взаємодію (якщо маси $W_\pm \sim 80,4 \text{ GeV}$, а $Z \sim 91,2 \text{ GeV}$), та те, що у різних каналах реакції s, t, u можна міняти місцями частинки (див. Рис. 9.1).

Тоді маємо:

- а) $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$,
 б) $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$,
 в) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$,
 г) $\bar{\nu}_\mu + e^+ \rightarrow \bar{\nu}_e + \mu^+$.

Для наступних реакцій відповідні діаграми будуть такі (дивимось реакцію у відповідному каналі s, t, u ; Рис. 12.1):

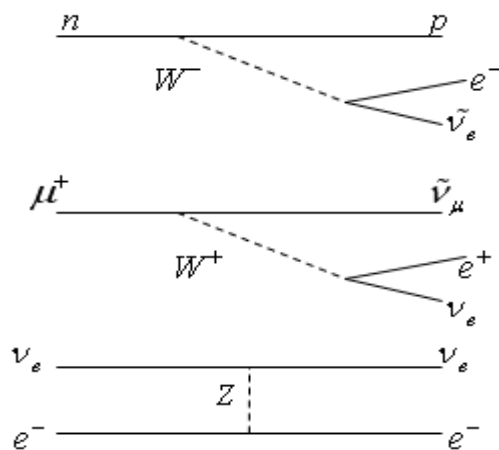


Рис. 12.1

д) Використовуючи подану нижче діаграму (рис. 12.2),

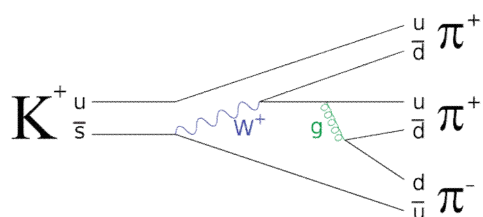


Рис. 12.2

можна переписали реакцію д) наступним чином:

$$\text{д) } 2\pi^+ + \tau^- \rightarrow K^+ + \pi^+ + \tau^-.$$

Звідси, використовуючи діаграми для розпаду π^+ та τ^- (рис. 12.3),

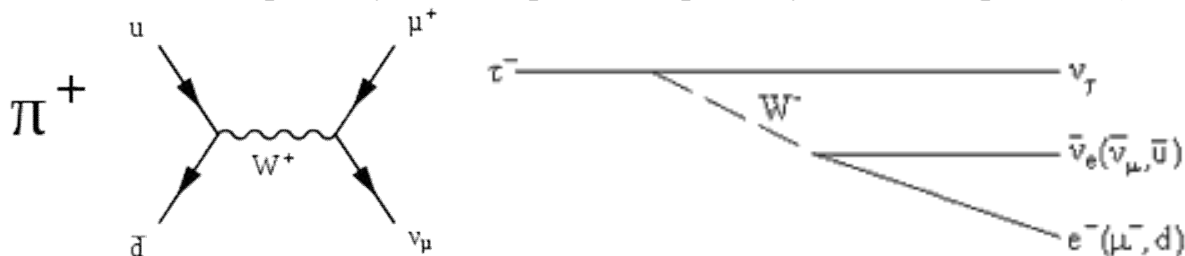


Рис. 12.3

а також закон анігіляції частинок та античастинок, можна подати цю реакцію у такому вигляді:

$$K^+ + \pi^+ + \tau^- \rightarrow K^+ + \mu^+ + \nu_\mu + \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \rightarrow K^+ + \nu_\tau + \sum \gamma.$$

Остаточню маємо:

$$\partial^1) 2\pi^+ + \tau^- \rightarrow K^+ + \nu_\tau + \sum \gamma,$$

де сума береться за усіма γ -квантами, що випромінюються під час реакції (у подальшому позначатимемо їх просто γ).

Оскільки маса τ -лептона $m_\tau = 1,78 \text{ GeV}$, а маса ρ^+ -мезону $m_\rho = 775 \text{ MeV}$, тоді за аналогією можна знайти й інший канал цієї реакції:

$$\partial^2) 2\pi^+ + \tau^- \rightarrow \rho^+ + \nu_\tau + \gamma.$$

е) Аналогічно розглянутому варіанту д) послідовно знаходимо:

$$e^1) 2\pi^- + \tau^+ \rightarrow K^- + \bar{\nu}_\tau + \gamma, \text{ або}$$

$$e^2) 2\pi^- + \tau^+ \rightarrow \rho^- + \bar{\nu}_\tau + \gamma.$$

жс-3) Оскільки маса ρ^0 -мезону $m_\rho = 775 \text{ MeV}$, тому, використовуючи подані на рис. 12.4 діаграми розпаду, отримуємо:

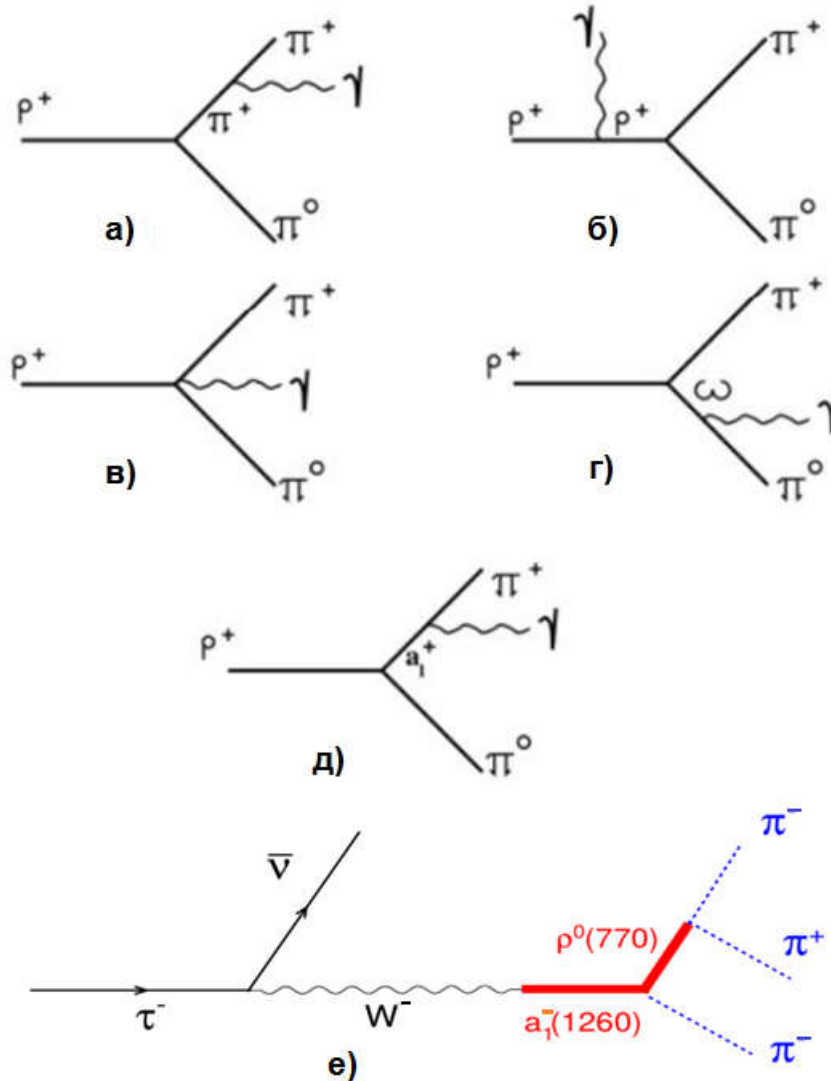


Рис. 12.4

$$\text{жс)} \rho^+ + \tau^- \rightarrow \pi^0 + \gamma + \pi^+ + \pi^- + \rho^0 + \nu_\tau \rightarrow \pi^0 + \rho^0 + \nu_\tau + \gamma,$$

$$\text{з)} \rho^- + \tau^+ \rightarrow \pi^0 + \gamma + \pi^- + \pi^+ + \rho^0 + \bar{\nu}_\tau \rightarrow \pi^0 + \rho^0 + \bar{\nu}_\tau + \gamma.$$

12.2. Застосуємо до правої та лівої частини відповідних реакцій закони збереження заряду Q , лептонного числа (L_e, L_μ, L_τ) та ін. У результаті отримаємо:

- 1) $p \not\Rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ (не зберігаються B);
- 2) $n \not\Rightarrow p + \mu^- + \nu_\mu$ (не зберігається L_μ);
- 3) ні(не виконується закон збереження енергії).

13. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ У РІЗНИХ ТИПАХ ВЗАЄМОДІЙ (Заняття 16)

Закони збереження енергії та імпульсу. Закон збереження моменту кількості руху. Закон збереження ізоспіну. Закон збереження баріонного та лептонного зарядів. Порушення законів збереження парності та комбінованої парності у слабких взаємодіях.

1.) Закони збереження мають вирішальне значення для розуміння фізики частинок. Існують вагомі докази того, що енергія, імпульс та кутовий момент зберігаються у всіх взаємодіях частинок. Анігіляція електрона і позитрона в спокої, наприклад, не може створити лише один фотон, оскільки це порушує збереження лінійного імпульсу. Спеціальна теорія відносності змінює визначення імпульсу, енергії та інших знайомих величин. Зокрема, релятивістський імпульс частинки відрізняється від класичного імпульсу

коефіцієнтом $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, який змінюється від 1 до ∞ , залежно від

швидкості частинки.

2.) Концепція існування ізоспіну (див. тему 2) пояснює, чому певні процеси, які відбуваються за допомогою сильної взаємодії, заборонені через порушення закону збереження ізоспіну I , оскільки у сильних взаємодіях ізоспін повинен зберігатись (закон збереження ізоспіну). Для слабких взаємодій не зберігається ні проекція ізоспіну, ні його абсолютного значення.

3.) Закон збереження баріонного числа (баріонного заряду) вимагає, щоб загальне баріонне число було однаковим до і після реакції. Для визначення загального баріонного числа визначається баріонний заряд кожної елементарної частинки на початку та в кінці реакції та вимагається рівність сум початкових і кінцевих баріонних зарядів (табл. 13.1). Те саме стосується і збереження лептонного числа. При цьому лептонні числа відповідних лептонів повинні зберігатися окремо.

4.) Теорема СРТ, що розглядається як один з основних принципів квантової теорії поля, стверджує, що всі взаємодії повинні бути інваріантними при комбінованому застосуванні спряження заряду, парності та зміни часу в будь-якому порядку. СРТ-симетрія – це точна симетрія всіх фундаментальних взаємодій.

Таблиця 13.1 – Таблица элементарных частинок (взято з [4])

Таблица элементарных частиц															
Частица		Символ		Масса, МэВ	Заряд					Спин, четность J^P	Изоспин		Странность S	Среднее время жизни τ , с	Основная схема распада
		Частица	Античастица		Q	L_e	L_μ	L_τ	T		T_z				
Фотон		γ		0	0	0	0	0	0	1	—	—	—	∞	
Лептоны	Нейтрино	$\bar{\nu}_e$	ν_e	0	0	+1	0	0	0	1/2	—	—	—	∞	
		$\bar{\nu}_\mu$	ν_μ	0	0	0	+1	0	0	1/2	—	—	—	∞	
		$\bar{\nu}_\tau$	ν_τ	0	0	0	0	+1	0	1/2	—	—	—	∞	
	Электрон	e^-	e^+	0,511	-1	+1	0	0	0	1/2+	—	—	—	∞	
	Мюон	μ^-	μ^+	105,66	-1	0	+1	0	0	1/2+	—	—	—	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_\mu \nu_e$
т-лептон	τ^-	τ^+	1807	0	0	0	+1	0	1/2	—	—	—	∞	$\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau, e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$	
Мезоны	Пи-мезоны	π^0		135,0	0	0	0	0	0	0-	1	0	0	$0,8 \cdot 10^{-16}$	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$
		π^+	π^-	139,6	-1	0	0	0	0	0-	1	+1	0	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$
	Ка-мезоны	K^+	K^-	493,8	+1	0	0	0	0	0-	1/2	+1/2	+1	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \pi^+ \pi^0$
		K^0	$\bar{K}^0$	497,8	0	0	0	0	0	0-	1/2	-1/2	+1	$K_S^0: 0,86 \cdot 10^{-10}$ $K_L^0: 5,4 \cdot 10^{-8}$	$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-, \pi^0 \pi^0$ $K_L^0 \rightarrow \pi e \nu_e, \pi \mu \nu_\mu, 3\pi$
	Эта-мезон	η		549	0	0	0	0	0	0-	0	0	0	$2,4 \cdot 10^{-18}$	$\eta \rightarrow \gamma\gamma, 3\pi^0, \pi^+ \pi^- \pi^0$
Барионы	Протон	p	$\bar{p}$	938,26	+1	0	0	0	+1	1/2+	1/2	+1/2	0	∞	—
	Нейтрон	n	$\bar{n}$	939,55	0	0	0	0	+1	1/2+	1/2	-1/2	0	$0,93 \cdot 10^3$	$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$
	Лямбда-гиперон	Λ	$\bar{\Lambda}$	1115,6	0	0	0	0	+1	1/2+	0	0	-1	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \rightarrow p \pi^-, n \pi^0$
		Σ^+	$\bar{\Sigma}^+$	1189,4	+1	0	0	0	+1	1/2+	1	+1	-1	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^+ \rightarrow p \pi^0, n \pi^+$
	Сигма-гипероны	Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$	1192	0	0	0	0	+1	1/2+	1	0	-1	$< 1 \cdot 10^{-14}$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma$
		Σ^-	$\bar{\Sigma}^-$	1197	-1	0	0	0	+1	1/2+	1	-1	-1	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$
	Кси-гипероны	Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$	1315	0	0	0	0	+1	1/2+	1/2	+1/2	-2	$3 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda \pi^0$
		Ξ^-	$\bar{\Xi}^-$	1321	-1	0	0	0	+1	1/2+	1/2	-1/2	-2	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-$
	Омега-гиперон	Ω^-	$\bar{\Omega}^-$	1672	-1	0	0	0	+1	3/2+	0	0	-3	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^-, \Xi^- \pi^0, \Lambda \bar{K}^-$

Примечание. Античастицы имеют одинаковые с частицей значения массы, спина, четности, изоспина, времени жизни и противоположные по знаку значения электрического Q , лептонного и барионного B зарядов, проекции изоспина T_z и странности S .

Примечание. Античастицы имеют одинаковые с частицей значения массы, спина, четности, изоспина, времени жизни и противоположные по знаку значения электрического Q , лептонного L и барионного B зарядов, проекция изоспина T_z и странности S .

§13.1. Задачі

13.1. π^- -мезон, що зупинився (S -стан), захоплюється дейтроном у реакції $\pi^- + d \rightarrow n + n$. Встановити внутрішню P -парність π^- -мезону.

13.2. Довести, що з експериментального факту низької ймовірності реакції $\pi^- + d \rightarrow n + n + \pi^0$ випливає (якщо вважати, що захоплення π^- -мезону відбувається з S -рівня “мезодейтерію”), що π^- -мезон і π^0 -мезон мають однакову внутрішню парність.

13.3. Виходячи з закону збереження баріонного числа встановити, яка з наведених реакцій може відбутися:

а) $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n + \pi^- + \pi^+$;

б) $p + \bar{p} \rightarrow p + p + \bar{p}$.

13.4. Чи наведені реакції є можливими:

1) $\Omega^- \rightarrow \pi^- + \Lambda^0$, 2) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$,

3) $\Omega^- \rightarrow \pi^- + p + K^-$, 4) $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$, 5) $\Omega^- + p \rightarrow \Xi^0 + \Lambda^0$,

6) $\Xi^0 + n \rightarrow 2\Lambda^0$, 7) $\Omega^- \rightarrow \pi^- + \Xi^0$, 8) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^- + \pi^0$.

13.5. Виходячи з законів збереження, дописати реакції:

а) $\pi^+ + \tau^- \rightarrow$,

б) $\pi^- + \tau^+ \rightarrow$.

§13.2. Відповіді та розв'язки

13.1. Згідно з законом збереження повного моменту:

$$J = |\vec{L} + \vec{S}| = |\vec{L}_{\pi d} + \vec{S}_d + \vec{S}_{\pi^-}| = |0 + \vec{1} + 0| = J' = |\vec{S}_{\frac{1}{2}} + \vec{S}_{\frac{1}{2}} + l'_{nn}| = |\vec{S}' + l'_{nn}| = 1.$$

З іншого боку, завдяки закону збереження парності, маємо:

$$P_{\pi^-}(P_d)(-1)^L = P_{\pi^-}P_nP_p(-1)^0 = (P_n)^2(-1)^{l'}.$$

Звідси, завдяки рівності внутрішньої парності протона та нейтрона, отримуємо $P_{\pi^-} = (-1)^{l'}$.

У той же час повний момент, що дорівнює одиниці, є можливим лише за таких чотирьох комбінацій сумарного спіну та відносного орбітального моменту нейтронів:

$$\begin{array}{ll} 1. (\vec{l}'=0, \vec{S}'=1), & 3. (\vec{l}'=1, \vec{S}'=1), \\ 2. (\vec{l}'=1, \vec{S}'=0), & 4. (\vec{l}'=2, \vec{S}'=1). \end{array}$$

Як відомо з квантової механіки, одиничному спіну відповідають симетричні спінові хвильові функції, а нульовому – антисиметричні спінові хвильові функції. Симетрія координатної частини хвильової функції визначається, як і парність, за допомогою формули $P = (-1)^l$.

Тому, виходячи з принципу Паулі, наслідком якого є антисиметрія хвильових функцій ферміонів, можливим є лише третій варіант

$$3. (\vec{l}'=1, \vec{S}=1).$$

Отже, $P_{\pi^-} = (-1)^1 = -1$.

13.2. Позначимо через L'_{nn} відносний орбітальний момент пари нейтронів у кінцевому стані, а через $\vec{l}'_{(nn)\pi^0}$ орбітальний момент π^0 -мезона відносно цієї пари. Тоді, згідно з законом збереження повного моменту:

$$J = |\vec{L} + \vec{S}| = |\vec{L}_{\pi d} + \vec{S}_d + \vec{S}_{\pi^-}| = |0 + \vec{1} + 0| = J' = |\vec{S}_{\frac{1}{2}} + \vec{S}_{\frac{1}{2}} + l'_{(nn)\pi^0}| = |\vec{S}' + l'_{(nn)\pi^0}| = 1.$$

З іншого боку, завдяки закону збереження парності:

$$P_{\pi^-}(P_d)(-1)^L = P_{\pi^-}P_nP_p(-1)^{L=0} = (P_n)^2P_{\pi^0}(-1)^{|L+l'|} \Rightarrow P_{\pi^-} = P_{\pi^0}(-1)^{|L+l'|}.$$

а. Повний момент, що дорівнює одиниці, є можливим лише за таких п'яти комбінацій сумарного спіну та парної суми орбітальних моментів нейтронів і орбітального моменту π^0 -мезона відносно системи нейтронів:

1. $(\vec{L}'=0, \vec{S}'=0, \vec{I}'=1)$, 3. $(\vec{L}'=1, \vec{S}'=0, \vec{I}'=1)$,
2. $(\vec{L}'=1, \vec{S}'=1, \vec{I}'=1)$, 4. $(\vec{L}'=2, \vec{S}'=1, \vec{I}'=0)$,
5. $(\vec{L}'=0, \vec{S}'=1, \vec{I}'=2)$.

6. У випадку непарної суми орбітальних моментів нейтронів і орбітального моменту π^0 -мезона відносно системи нейтронів, таких комбінацій буде чотири:

1. $(\vec{L}'=1, \vec{S}'=0, \vec{I}'=0)$, 3. $(\vec{L}'=1, \vec{S}'=1, \vec{I}'=0)$,
2. $(\vec{L}'=0, \vec{S}'=0, \vec{I}'=1)$, 4. $(\vec{L}'=0, \vec{S}'=1, \vec{I}'=1)$.

Як відомо з квантової механіки, одиничному спіну відповідають симетричні спінові хвильові функції, а нульовому – антисиметричні спінові хвильові функції. Симетрія координатної частини хвильової функції у цьому випадку визначається, як і парність, за допомогою формули $P = (-1)^l$. Тому, принципів Паулі, наслідком якого є антисиметрія хвильових функцій ферміонів, у першому випадку парної суми орбітальних моментів відповідає лише другий варіант

$$2. (\vec{L}'=1, \vec{S}'=1, \vec{I}'=1),$$

для якого

$$P_{\pi^-} = P_{\pi^0} (-1)^{1+1} = -1.$$

У випадку непарної суми принципів Паулі відповідають варіанти:

2. $(\vec{L}'=0, \vec{S}'=0, \vec{I}'=1)$, 3. $(\vec{L}'=1, \vec{S}'=1, \vec{I}'=0)$.

У цьому випадку

$$P_{\pi^-} = P_{\pi^0} (-1)^1 = -1 \Rightarrow P_{\pi^0} = 1 \neq P_{\pi^-}.$$

Оскільки за низьких енергій ймовірність таких реакцій $W = \left(\frac{pr_{\text{я}}}{\hbar} \right)^{2(L+l)}$, тому, з низької ймовірності виходу, може реалізуватися лише варіант парної суми орбітальних моментів, при якому $P_{\pi^0} = P_{\pi^-} = -1$.

13.3. Баріонне число зберігається в першій реакції, але не в другій. При розв'язанні задачі потрібно визначити загальне число баріонів для реагентів та продуктів і з'ясувати, чи це значення не змінилось в реакції.

13.4. Застосуємо до правої та лівої частини відповідних реакцій закони збереження заряду Q , баріонного числа B , лептонного числа (L_e, L_μ, L_τ) , дивності S , закон збереження енергії та ін. У результаті отримаємо:

- 1) $\Omega^- \rightarrow \pi^- + \Lambda^0$ (у Ω^- -гіперона $S = -3$, а в Λ^0 -баріона $S = -1$);
- 2) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ (оскільки реакції з $|\Delta S| = 1$ є можливими);

- 3) $\Omega^- \not\Rightarrow \pi^- + p + K^-$ (у Ω^- -гіперона $S = -3$, а в K^- -мезона $S = -1$);
- 4) $\Xi^0 \not\Rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$ (не зберігається Q , але можливі реакції:
 $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$ та $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + 2\gamma$);
- 5) $\Omega^- + p \rightarrow \Xi^0 + \Lambda^0$ (кварковий склад зберігається, хоча основні канали розпаду $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$ та $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$ є більш ймовірними);
- 6) $\Xi^0 + n \rightarrow 2\Lambda^0$ (реакція можлива, оскільки відомо, що хоча основна мода розпаду $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$, але, також, з імовірністю $\sim 32\%$ можлива реакція $\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$, підставляючи ці реакції у праву частину 6) й “скорочуючи” праву та ліву частини на нейтрон, отримуємо наведену вище основну реакцію: $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$, що й потрібно було довести);
- 7) $\Omega^- \rightarrow \pi^- + \Xi^0$ (можлива);
- 8) $\Xi^0 \not\Rightarrow p + \pi^- + \pi^0$ (у Ξ^0 -гіперона $S = -2$, а реакції з $|\Delta S| \geq 2$ неможливі).

13.5. а-б) Оскільки ядерні реакції є інваріантними відносно CPT -перетворень, тому, розглядаючи реакцію $\pi^+ + \tau^- \rightarrow \rho^0 + \nu_\tau$, у t -каналі з використанням діаграм, що наведені нижче (рис. 13.1), отримуємо:

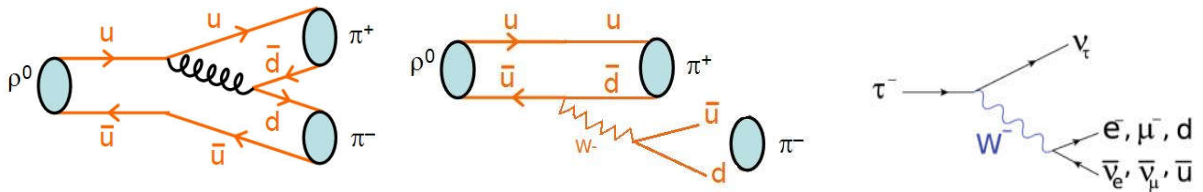


Рис. 13.1

$$\tau^- + \rho^0 \rightarrow \pi^- + \nu_\tau + \gamma + \pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau + \gamma \Rightarrow$$

$$a) \pi^+ + \tau^- \rightarrow \rho^0 + \nu_\tau + \gamma.$$

За аналогією отримуємо:

$$b) \pi^- + \tau^+ \rightarrow \rho^0 + \bar{\nu}_\tau + \gamma.$$

14. ОСНОВИ СТАНДАРТНОЇ МОДЕЛІ (Заняття 17)

Принцип калібровочної інваріантності. Калібровочні бозони. Необхідність переходу від чотирьохферміонної теорії Фермі слабких взаємодій до калібрувальної симетрії. $W^{\pm}$ та Z^0 бозони. Бозони Хіггса та маса частинок. Відкриття $W^{\pm}$ та Z^0 бозонів на експерименті. Експериментальне відкриття $W^{\pm}$ та Z^0 бозонів

1.) Теорії і відкриття фізиків з 1930-х років привели до досить ясного розуміння фундаментальної структури матерії. Виявлено, що все у Всесвіті складається з деяких основних будівельних блоків, які називаються елементарними частинками, керованими чотирма фундаментальними силами (див. нижче). Виявилось, що три (з чотирьох) сили пов'язані одна з одною, і цей зв'язок і є основною ідеєю так званої Стандартної моделі фізики елементарних частинок. Розроблена на початку 1970-х років, модель успішно пояснила майже всі експериментальні результати і вірно спрогнозувала широкий спектр явищ. У результаті безлічі експериментів ця Стандартна модель стала добре перевіреною фізичною теорією. Проте Стандартна модель не є теорією всього, оскільки не описує темну матерію, темну енергію та не включає гравітацію.

Відповідно до Стандартної моделі всі елементарні частинки можна за способом взаємодії розділити на дві групи – адрони та лептони. Адрони приймають участь у сильній та електрослабкій взаємодії, а лептони не приймають участь у сильній взаємодії. Фундаментальними частинками або «цеглинами» матерії, згідно зі Стандартною моделлю, є шість кварків та, відповідно, шість фундаментальних лептонів. Виявилось, що кожна група кварків і лептонів складається з шести частинок, що пов'язані попарно, й їх можна об'єднати в так звані «покоління». Найлегші та стабільні кварки та лептони складають перше покоління, тоді як більш важкі та менш стабільні частинки належать до другого і третього поколінь. Виявилось, що вся стабільна матерія у Всесвіті складається з частинок, що належать до першого покоління; будь-які важчі частинки швидко розпадаються на більш стабільні. Шість кварків утворюють пари в трьох поколіннях: «верхній кварк» і «нижній кварк» утворюють перше покоління, далі йдуть «зачарований кварк» і «дивний кварк», «істинний кварк» і «чарівний кварк». Шість лептонів подібним чином також розділені на три покоління – «електрон» і «електронне нейтрино», «мюонне» і «мюонне нейтрино», а також «тау» і «тау-нейтрино».

На рис. 14.1 наведено три покоління лептонів і кварків. Електричні й лептонні заряди в лептоні є цілими числами, а у кварків – відповідні баріонні й електричні – дробовими. Лептони існують у вільному вигляді, а кварки є лише складовими більш складних частинок – адронів. У звичайній речовині містяться частинки лише з першого покоління.

Покоління	Лептони		Кварки					
Третє	ν_τ	0	t	$+2/3$	t	$+2/3$	t	$+2/3$
	τ^-	-1	b	$-1/3$	b	$-1/3$	b	$-1/3$
Друге	ν_μ	0	c	$+2/3$	c	$+2/3$	c	$+2/3$
	μ^-	-1	s	$-1/3$	s	$-1/3$	s	$-1/3$
Перше	ν_e	0	u	$+2/3$	u	$+2/3$	u	$+2/3$
	e^-	-1	d	$-1/3$	d	$-1/3$	d	$-1/3$

червонийзеленийсиній

Рис. 14.1. Покоління лептонів і кварків [18]

2.) У Всесвіті діють чотири фундаментальні сили: сильна, слабка, електромагнітна і гравітаційна. Вони працюють у різних діапазонах і мають різні сильні сторони. Гравітація є найслабкішою, але вона характеризується нескінченним діапазоном дії сили. Електромагнітна сила також має нескінченний діапазон, проте вона у багато разів сильніша сили тяжіння. Слабкі та сильні взаємодії проявляються тільки на дуже малих відстанях (порядку субатомних і менших масштабів). Незважаючи на свою назву, слабка сила є набагато сильнішою за гравітаційну, але, дійсно, найслабкішою з трьох інших. Сильна взаємодія, як випливає з назви, є найсильнішою з усіх чотирьох фундаментальних взаємодій. У Стандартній моделі три останні фундаментальні сили, що перераховані вище, виникають у результаті обміну частинками-носіями сили, які належать до більш широкої групи – «бозон». Частинки речовини передають дискретну кількість енергії, обмінюючись бозонами один з одним. Кожній фундаментальній силі відповідає свій власний бозон – сильна сила переноситься «глюонами», електромагнітна сила переноситься «фотон», а « $W^\pm$ та Z^0 -бозони» є відповідальними за слабку силу. Припускається, що теоретична частинка відома як «гравітон» має бути відповідною частинкою гравітації, що несе силу, проте на сьогодні це ще остаточно не доведено. Стандартна модель, що включає електромагнітні, сильні та слабкі взаємодії і всі їхні частинки-носії, добре пояснює, як ці сили діють на всі частинки матерії. Проте найвідоміша сила в нашому повсякденному житті, гравітація, не є складовою Стандартної моделі, оскільки включення гравітації в цю модель виявилось складною проблемою. Квантову теорію, яка використовується для опису мікросвіту, і загальну теорію відносності, яка застосовується для опису макросвіту, важко об'єднати в єдину структуровану модель. Але, на щастя, що стосується фізики елементарних частинок, коли справа доходить до найдрібніших

масштабів і фундаментальних частинок, ефекти від гравітації є настільки слабкими, що ними у більшості теорій можна знехтувати.

3.) Хоча Стандартна модель на теперішній час є кращим описом субатомного світу, вона не пояснює всі фізичні явища і має низку недоліків. Як зазначалось вище, Стандартна модель включає тільки три з чотирьох фундаментальних сил – вона не враховує гравітації. Не відповідає на такі важливі питання, як, наприклад: «Що таке темна матерія?», «Що трапилося з антиречовиною після Великого вибуху?», «Чому існує три покоління кварків і лептонів з такою різною масою? масштабом?» та інше.

Але, незважаючи на ці недоліки, є й суттєві здобутки. Один з них відбувся 4 липня 2012 р., коли експерименти ATLAS і CMS на Великому адронному колайдері ЦЕРНу (LHC) виявили нову частинку в області мас, близько 126 GeV. Цю частинку теоретично ототожнюють з бозоном Хіггса, але потрібна додаткова робота, щоб визначити: чи є цей бозон Хіггса єдиним, що передбачається Стандартною моделлю. Бозон Хіггса, запропонований в Стандартній моделі, є найпростішим проявом механізму Браута-Енглерт-Хіггса. Інші типи бозонів Хіггса передбачаються іншими теоріями, що виходять за рамки Стандартної моделі. 8 жовтня 2013 р. Нобелівська премія з фізики була присуджена спільно Франсуа Енглерту і Пітеру Хіггсу «за теоретичне відкриття механізму, який сприяє нашому розумінню походження маси субатомних частинок». Таким чином, хоча Стандартна модель точно описує явища в своїй області, вона все ще залишається неповною. Є надія, що нова інформація, яка буде отримана в результаті експериментів на сучасних прискорювачах, допоможе виявити відсутні частини повної картини світу.

§14.1. Задачі

14.1. Дати оцінку радіусу дії слабких сил, вважаючи, що за це відповідають $W^\pm, Z^0$ бозони з масами 80 та 91 GeV/c², відповідно.

14.2. У найпростішій ідеалізованій релятивістській моделі спонтанно порушена симетрія узагальнюється за допомогою ілюстративної скалярної теорії поля. Відповідний лагранжіан скалярного поля (лагранжіан Голдстоуна), який по суті визначає, як поводить система, можна розділити на кінетичні та потенційні складові:

$$L = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi - V(\phi), \text{ де } V(\phi) = -5|\phi|^2 + |\phi|^4.$$

Знайти мінімум потенціалу та показати, що тривіальний вакуумний розв'язок буде нестійким.

§14.2. Відповіді та розв'язки

14.1. За аналогією до Задачі 1.2, маємо:

$$r_{W,Z} = \frac{\hbar c}{M_{W,Z} c^2 A^{1/3}} \approx (1,72 \div 1,96) \cdot 10^{-3} \text{ фм.}$$

14.2. Цей потенціал має нескінченну кількість можливих мінімумів (вакуумних станів), заданих $\phi = \sqrt{5}e^{i\theta}$ для будь-якого дійсного значення θ між 0 і 2π . Система також має нестабільний вакуумний стан, що відповідає $\phi = 0$. Цей стан має $U(1)$ симетрію. Однак, як тільки система “впаде” у певний стабільний вакуумний стан (що залежить від θ), ця симетрія буде втрачена або, як ще кажуть, “спонтанно порушена” (див. Рис. 14.2).

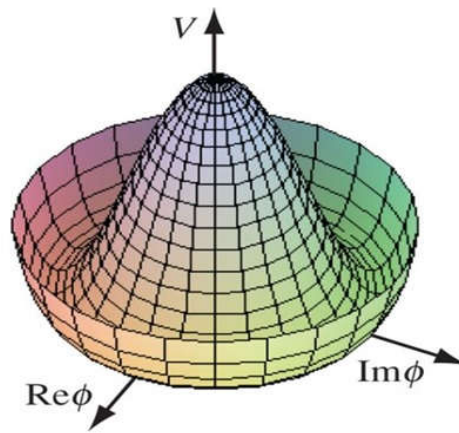


Рис. 14.2. Малюнок “сомbrero” потенціалу Голдстоуна [27]

15. ВЕЛИКЕ ОБ'ЄДНАННЯ. ФІЗИКА ЧАСТИНОК ТА ВСЕСВІТ (Заняття 18)

Можливі "сценарії" об'єднання слабких, електромагнітних та сильних взаємодій. Можливі наслідки Великого Об'єднання та їх пошуки на експерименті. Розвиток Всесвіту у перші три секунди після Великого Вибуху.

(При написанні розділу використовувались матеріали з [19]. Допоміжна література [20])

Фізика раннього Всесвіту знаходиться на міждисциплінарній границі астрономії і філософії. В даний час ми не маємо повної теорії, яка б об'єднала всі фундаментальні сили природи, що згідно з сучасними уявленнями стало б однією з його характерних рис. Крім того, немає можливості пов'язати "спостереження" або "експерименти" фізики раннього Всесвіту зі сучасними теоріями. Тобто неможливо «побудувати» інший Всесвіт або «створити» наш Всесвіт заново, а те що фізики спостерігають є непрямі досліді й більш пізніх стадій Всесвіту(наприклад, реліктове випромінення). Існуючі теорії відкидаються або приймаються на основі простоти і деяких естетичних підстав, а також через здатність цих теорій прогнозувати процеси на майбутнє, а не за рахунок звернення до емпіричних результатів. Такий підхід дуже різниться від наукових методів дослідження попередніх століть.

Сучасна фізика може пояснити більшість відомих фактів еволюції Всесвіту після часу Планка (приблизно 10^{-43} секунди після Великого вибуху). Час Планка, або планківський час, $t_P = \sqrt{G\hbar/c^5}$, визначається як комбінація трьох найбільш фундаментальних констант природи: (1) – стала Планка $\hbar$, (2) – швидкість світла c і (3) – універсальна гравітаційна стала G . Комбінація $\ell_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$, що називається планківською довжиною, приблизно дорівнює 10^{-33} см. Ця величина набагато менша за відстані, на яких елементарні частинки можуть бути досліджені в прискорювачах на Землі. Енергії, які необхідні для того, щоб розбити частинки з точністю до планківської довжини, існували лише у ранньому Всесвіті в час Планка. Вважається, що під час планківського часу масова щільність Всесвіту наближалася до планківської щільності, $(c^5/G\hbar^2)$, приблизно 10^{93} - 10^{94} г/см³.

Проте самі події до часу Планка в сучасній космологічній науці досі не визначені, зокрема, не існує чіткого розуміння походження Всесвіту: тобто того, що було початком або «привело» до Великого Вибуху. Сьогоднішні знання, у кращому випадку, можна охарактеризувати як досліджування «країв» наукового розуміння, щоб визначити те, чого ми не розуміємо, подібно до того, як сліпа людина досліджувала б кінець глибокої ями, вивчаючи її діаметр, не знаючи її глибини.

Одна з причин, чому фізична картина є неповною в епоху Планка – це нерозуміння процесу об'єднання сил природи на ті часи. Більш-менш надійно відомо (крім гравітації), що при високих енергіях і температурах, сили природи стають симетричними. Це означає, що сили схожі одна на одну і стають рівними за силою взаємодії, тобто вони об'єднуються. Коли сили розділяються, при порушенні стану об'єднання і симетрії (підчас розширення і охолодження Всесвіту), відбуваються різні складні та цікаві процеси.

Прикладом об'єднання можна вважати взаємодію слабких і електромагнітних сил. При низькій енергії фотони і частинки W , Z є носіями сили для електромагнітних і слабких взаємодій. Частинки W і Z дуже масивні, і, отже, вимагають багато енергії ($E = mc^2$). При високих енергіях фотони набувають енергії, що є близькою до енергії частинок W і Z , й електромагнітні та слабкі сили об'єднуються в електрослабку силу.

Очікується, що три фундаментальні сили матерії (сильні, слабкі і електромагнітні) об'єднуються при надзвичайно високих температурах за принципом, відомим як Теорія Великого Об'єднання (англ. Grand Unified Theory, GUT) Ця Теорія є розширенням квантової теорії поля. Вона використовує поки що недостатньо досліджені взаємозв'язки між сильними й електрослабкими силами. Остаточна теорія Об'єднання (або, як кажуть, Теорія Усього) повинна встановити зв'язок між квантовими силами і гравітацією. Кандидатами на таку теорію виступають, наприклад, так звана супергравітація або квантова гравітація (див. Рис.15.1), теорія суперструн, М-теорія, теорія Гайма та ін.



Рис. 15.1. Уніфікація сил

Усі сили природи мають бути описані єдиною теорією. Але тільки при високих енергіях поведінка сил поєднується, це називається уніфікацією. До точки об'єднання сили не розрізняються і мають симетрію. Після точки об'єднання сили діють інакше і симетрія порушується [19]

Розглянемо більш докладно основні висновки квантової гравітації та теорії суперструн.

Фізика ранньої теорії Всесвіту, яка прогнозує поведінку матерії й тогочасного простору-часу, визначається тим, які сили об'єднані та який

ймовірний вигляд мали на той час взаємодії. Вважається, що на порозі епохи Планка, надгравітація й квантові ефекти мікроскопічних чорних дірок управляли взаємодією. Після поділу гравітації і ядерних сил простір-час Всесвіту відрізняється від звичайної матерії і випромінювання.

На теперішній час науковою відповіддю на питання «Як почався Всесвіт?» є те, що відбувалося самостворення Всесвіту. Це не є твердження про «причини», що стоять за походженням Всесвіту. Це просто твердження про те, що Всесвіт виник, що реальність Всесвіту, ймовірно, походить від нескінченної кількості невизначених потенціальних можливостей, які ми називаємо первинним квантовим вакуумом, властивості якого завжди можуть залишатися поза нашого розуміння.

Екстраполяція на підставі рівнянь Ейнштейна від теперішнього часу до моменту Творіння передбачає початок нескінченної щільності та нескінченної температури – вся маса й енергія Всесвіту сконцентровані у точці нульового об'єму. Така точка називається космологічною особливістю (сингулярністю).

Космологічна сингулярність, якою був Всесвіт на початку часів, захищена від нас відсутністю будь-яких фізичних спостерігачів. Але наступним рівнем дослідження є те, з чого починаються й виникають властивості Всесвіту, властивості, які стають масою Всесвіту, його віком, його фізичними константами тощо. Схоже, відповідь така: ці властивості мають своє походження як флуктуації квантового вакууму.

Властивості Всесвіту походять від «нічого», де це «ніщо» не є сучасним квантовим вакуумом, який є зовсім іншим видом «нічого». Якщо розглянути фрагмент «порожнього» простору, можна побачити, що він не зовсім порожній, він заповнений простір-часом, наприклад. Простір-час має кривизну і структуру і підпорядковується законам квантової фізики. Таким чином, він заповнений потенційними частинками, парами віртуальної «речовини» і «антиречовини» з потенційними властивостями матерії на квантовому рівні.

Найдавніші моменти Творіння – це те, де відбувається розпад нашої сучасної фізики, де "розпад" означає, що наші теорії і закони не здатні описати або передбачити поведінку раннього Всесвіту. Наші уявлення про простір і час перестають бути реальними.

Є мало знань про Всесвіт до часу Планка, існують лише одні припущення. Проте можна вирахувати, коли закінчується ця ера і коли починається більш-менш відома фізика. Модель гарячого Великого вибуху разом з ідеями сучасної фізики елементарних частинок забезпечує міцну основу для розумних припущень, висхідних до епохи Планка.

Для Всесвіту немає «зовні». Всесвіт розширюється з моменту Великого Вибуху, але поки Всесвіт не досягне розміру шкали Планка, не існує ні часу, ні простору. Час залишається невизначеним, простір ущільненим. Теорія суперструн стверджує, що Всесвіт мав 10 вимірів під час ери Планка, які в кінці цієї ери розпалися на 4. При цьому 6 додаткових вимірів були «ущільнені» або «згорнуті», тобто стали настільки маленькими, що є

непомітними: вони є дуже і дуже маленькими гіперсферами між простором і між елементарними частинками.

В епоху Планка найкраще Всесвіт можна описати як квантову піну у 10 вимірах, що містить чорні діри планківських масштабів, які постійно виникають і знищуються без причин або наслідків (див. Рис. 15.2). Інакше, ця епоха зовсім не відповідає звичайним уявленням класичної фізики.

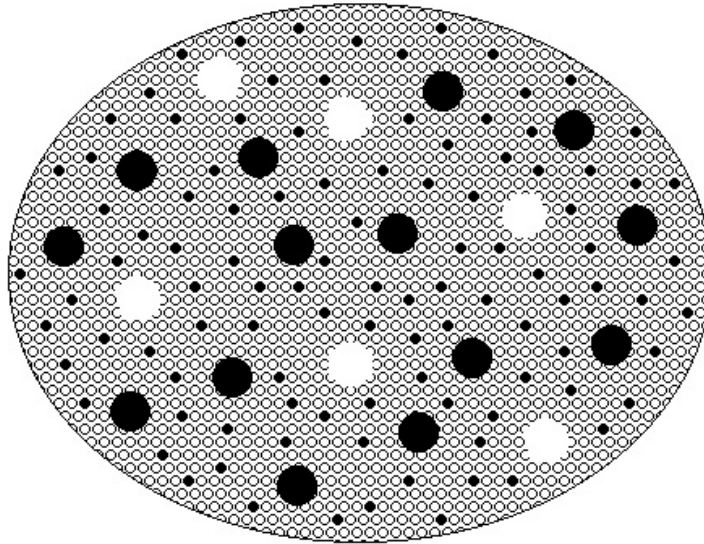


Рис. 15.2. Піна простору-часу [19]

Епоха, що настала відразу після часу Планка, – це епоха тиску і щільності, яка є настільки високою, що сам простір-час згортається і сплітається в піну з міні-чорних дір і червоточин. Хоча час Планка знаменує початок часу у Всесвіті, заплутана природа простору-часу на цій ранній стадії з численними сингулярностями і горизонтами подій, що перекриваються, унеможливило існування матерії, фотонів або навіть причинності

У перші моменти після ери Планка домінували умови, коли простір-час викривлявся під тиском надзвичайно маленького і щільного Всесвіту на велику масу чорних дір і червоточин (“кротячих нір”).

Більшість з цих чорних дір і червоточин є залишками епохи Планка, залишками горизонту подій, які захищали космологічну сингулярність. Поза горизонтом подій умови були “ворожими” для будь-якої організації або структури, які були не захищені ним. Таким чином, в цей ранній період чорні діри – це єдині об’єкти, які можуть зберегтися неушкодженими в цих умовах і слугувати першими будівельними блоками структури у Всесвіті, першими «речами» або «складовими», які мають індивідуальність.

На основі комп’ютерного моделювання цих ранніх моментів Всесвіту існує передбачення, що в цей час було створено багато маленьких, первісних чорних дірок, а не великих чорних дір (розмірів Всесвіту не вистачало для їх існування). Проте, завдяки випромінюванню Гокінга, первісні чорні діри цієї епохи до теперішнього часу розпалися і зникли.

Згідно з теоріями струн і супергравітації матерія виникла в кінці епохи простору-часу в результаті струн або циклів в просторі-часі. Перетворення відбувається з розриву піни простору-часу в чорних дірок, які потім

трансформуються в елементарні частинки (див. Рис. 15.3). Отже, виникає різниця між чимось матеріальним і просторово-часовим "нічим", але це чисто геометрична різниця, а в геометрії в деякому сенсі немає нічого. Матерію в цю епоху часто називають GUT-матерією, щоб символізувати її відмінність від кварків і лептонів та її існування під дією GUT-сил.

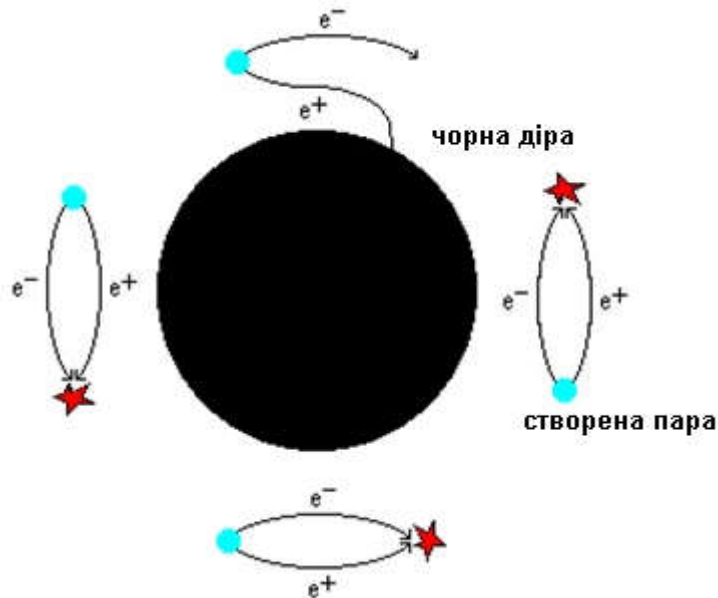


Рис. 15.3. Радіація Гокінга [19]

Сильне гравітаційне поле навколо чорної діри викликає утворення пари. Якщо пара створюється за межами горизонту подій, то один елемент впаде назад в чорну діру, але інший – вирветься, і чорна діра втратить масу

§15.1. Задачі

15.1. Вище температури Планка енергія частинок була настільки великою, що гравітаційні сили між ними були одного порядку (або об'єднані) з іншими фундаментальними взаємодіями. Оскільки розміри Всесвіту були виключно малі, відбулося домінування квантових ефектів гравітації над фізичними взаємодіями. Величезні значення температури і щільності робили речовину нестійкою. Відбулося порушення симетрії, що призвело до прояву фундаментальних сил – гравітаційний вплив відокремився від інших фундаментальних взаємодій.

Припускаючи, що для раннього Всесвіту виконувався принцип Паулі, знайти якими мали б бути параметри раннього Всесвіту, якщо він утворився за рахунок квантової флуктуації порядку часу Планка? Цей час становить $t_p \approx 5,39 \cdot 10^{-44}$ с. Приблизно яким температурі, енергії, розмірам, щільності та прискоренню це відповідало?

15.2. Коли кажуть про швидкість розширення Всесвіту, то це розуміється як швидкість на одиницю відстані: сьогодні це близько

(70 км/с)/1Мпк (70 кілометрів у секунду на мегапарсек; 1 Мпк=3260000 світлових років [с.р.]).

Здавалося б, що при розмірах більших за 7 гігапарсек (Гпк) швидкість розширення Всесвіту перевищує швидкість світла й обмеження СТВ порушується (рис. 15.4). Чому це не так?

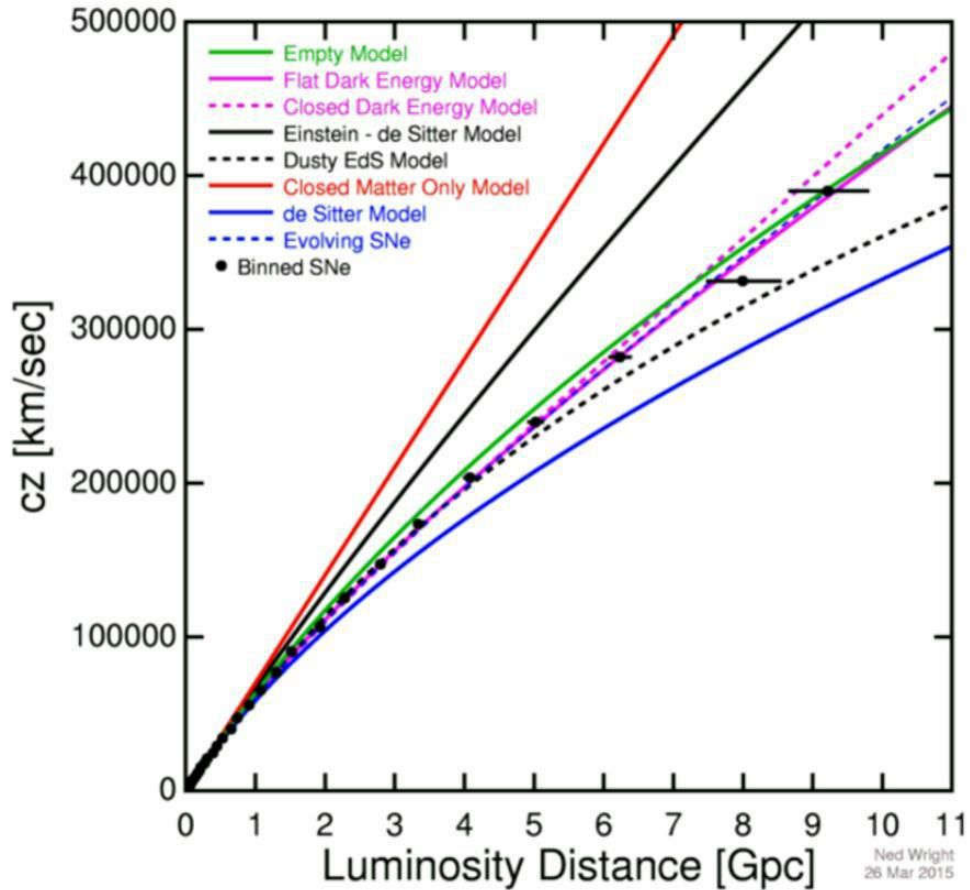


Рис. 15.4. Швидкість розширення Всесвіту (вертикальна вісь) в залежності від його розмірів (горизонтальна вісь) [20]. Нелінійна залежність свідчить про зміну швидкості розширення з часом

15.3. У випадку великої початкової густини скалярного поля $\rho = I \cdot \phi^2$ спростити рівняння Ейнштейна до фактору Хаббла $H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{2\pi G}{3}} m\phi$ при умовах Великого вибуху (початкова густина скалярного поля задовольняє рівнянню $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi$), отримати результат Інфляційної моделі для масштабного фактора $a(t)$ (див. Рис. 15.5).

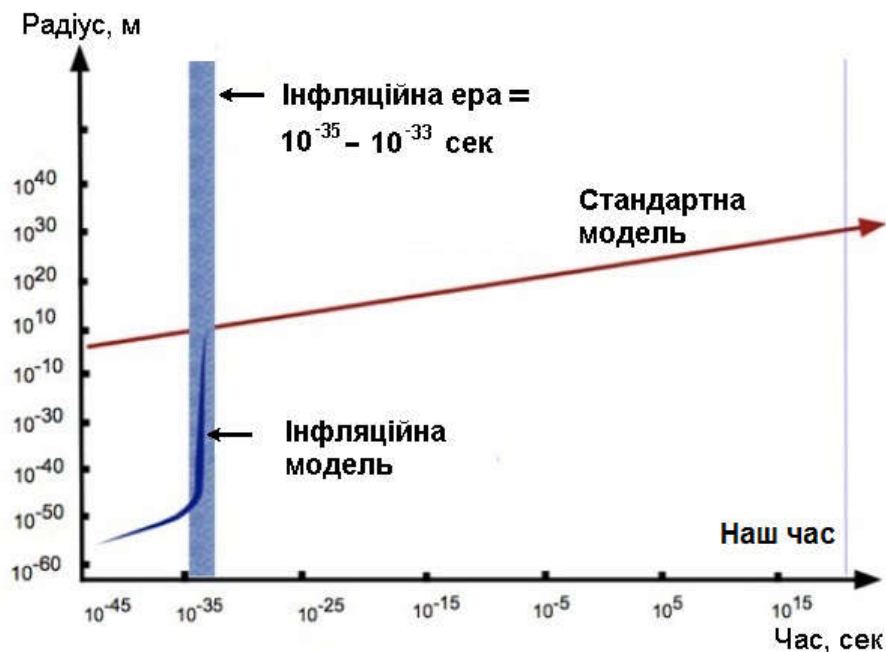


Рис. 15.5. Модель космологічної інфляції [29]

Модель дозволила вирішити деякі неузгодженості теорії Великого вибуху. За моделлю за дуже короткий час розмір бульбашки, з якого утворився наш Всесвіт, збільшився в 10^{26} разів, після цього Всесвіт продовжив розширюватися, але вже значно повільніше

15.4. Вважаючи, що у планківські часи Всесвіт мав радіус порядку 10^{-35} м пояснити, чому у деяких моделях утворення Всесвіту (зокрема моделі Інфляції) вважається, що у ці часи швидкість світла була більшою за 300 000 км/с.

15.5. Наш Всесвіт наповнений випромінюванням чорного тіла (фотонами) при температурі $T = 3K$. Це вважається пережитком ранніх подій після "Великого вибуху".

а) Виразити густину кількості фотонів n аналітично через T і універсальні константи.

б) Приблизно оцінити інтеграл, що виникає в пункті а), використовуючи свої знання про універсальні константи і визначити наближено $n = N/V$, при $T = 3K$.

15.6. Припустимо, що у першому наближенні Всесвіт можна подати як сферичну порожнину радіусом 10^{28} см. з непроникними стінками. Якщо температура всередині порожнини становить $3K$, оцінити:

а) загальну кількість фотонів у Всесвіті;

б) утворену ними енергію.

15.7. Як відомо, Всесвіт пронизаний випромінюванням чорного тіла температурою $3K$. У першому наближенні це випромінювання виникло

внаслідок адіабатичного розширення дуже гарячої хмари фотонів, яка утворилася під час Великого вибуху.

а) Чому розширення є адіабатичним, а не, наприклад, ізотермічним?

б) Якщо в наступні 10^{10} років об'єм Всесвіту збільшиться вдвічі, якою буде температура випромінювання чорного тіла?

в) Записати інтеграл, який визначає, скільки енергії на кубічний метр міститься в цій первісній хмарі випромінювання. Оцініть порядок цієї величини в одиницях Дж/м³.

15.8. На якій відстані від Землі знаходиться галактика, що має швидкість віддалення $3,0 \cdot 10^4$ км/с? Значення сталої Хаббла взяти з Задачі 15.2: $H = 70$ км/(с Мпк).

15.9. За допомогою закону Хаббла визначити радіус спостережуваного Всесвіту. Врахувати, що максимальна швидкість віддалення галактики не може бути більшою за швидкість світла. Значення сталої Хаббла взяти з Задачі 15.2: $H = 70$ км/(с Мпк).

§15.2. Відповіді та розв'язки

15.1. З принципу невизначеності спочатку знаходимо Планківську енергію:

$$E_p = \frac{\hbar}{t_p} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1,9561 \cdot 10^9 \text{ Дж} \sim 10^{19} \text{ ГеВ},$$

потім Планківську температуру:

$$T_p = \frac{E_p}{k} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{k^2 G}} \approx 1,416784 \cdot 10^{32} \text{ К}$$

та інші величини:

$$\text{Планківська довжина } l_p = \frac{\hbar}{m_p c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6162 \cdot 10^{-35} \text{ м},$$

$$\text{Планківська маса } m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2,1764 \cdot 10^{-8} \text{ кг},$$

$$\text{Планківське прискорення } a_p = \frac{l_p}{t_p^2} = \frac{c}{t_p} \approx 5,561 \cdot 10^{51} \text{ м/с}^2,$$

$$\text{Планківська щільність } \rho = \frac{m_p}{r_p^3} \approx 10^{97} \text{ кг/м}^3.$$

Переконаємось, що Планківський час виражається через ці величини:

Планківський час: $t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,3912 \cdot 10^{-44} \text{ с.}$

На рис. 15.6 надано залежність температури від часу створення Всесвіту та показано відповідні сили взаємодії. Видно, що Планківському часу $t_p \approx 5,39 \cdot 10^{-44} \text{ с}$ відповідають Планківські температури $\sim 10^{32} \text{ К.}$

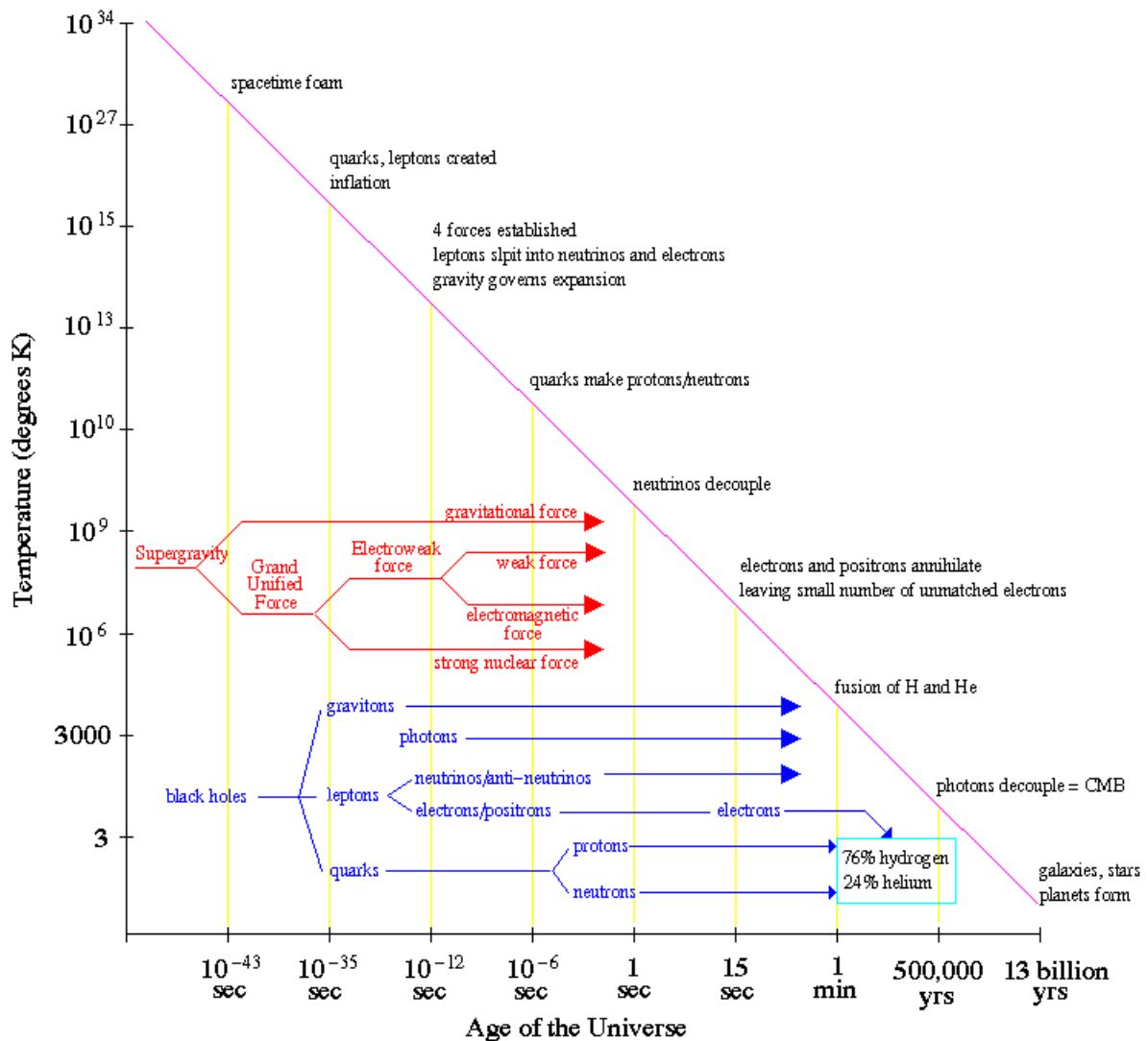


Рис. 15.6. Залежність температури Всесвіту від часу [19]

15.2. Хоча простір-час розширюється, але разом з ним розширюється й відстань, що проходить світлова хвиля (фотон). Тобто, в даному конкретному околі простору-часу рух електромагнітної хвилі відбувається зі швидкістю світла, тому порушення обмеження на швидкості світла не відбувається. У масштабах за межами 7 Гпк $\sim 22,8 \cdot 10^9 \text{ св.р.}$ розглядати швидкість немає сенсу. Всесвіт, відповідно до сучасних уявлень, існує менший час: $< 14 \cdot 10^9 \text{ св.р.}$ (Довідка: 1пк = 3,26 св.р.), тому про порушення обмежень СТВ говорити немає сенсу.

15.3. Повне рівняння для скалярного поля без урахування розширення Всесвіту, має вигляд рівняння вільних коливань маятника: $\ddot{\phi} = -m^2\phi$.

До цього рівняння потрібно додати додатковий член – сила тертя, який пов'язаний з геометрією початкової “піни” простору-часу (див. Рис. 15.2 та 15.3). Він є добутком сталої Хаббла на швидкість руху поля: $3H\dot{\phi}$.

Коли “стала Хаббла” велика та зростає, тертя також велике, і скалярне поле зменшується дуже повільно. Тому стала Хаббла, що є функцією скалярного поля, при цьому майже не змінюється. Розв’язок рівняння Ейнштейна зі сталою Хаббла, що повільно змінюється, описує експоненціально швидке розширення Всесвіту $a(t) \sim e^{Ht}$ (доданком з двома похідними можна знехтувати).

15.4. Прямими розрахунками отримуємо оцінку швидкості світла у планківську еру:

$$c = 10^{-35} \text{ м} / 10^{-43} \text{ с} = 10^8 \text{ м/с},$$

що є на межі швидкості світла. Якщо врахувати Інфляційну модель (а не модель Великого вибуху), у якій за період з 10^{-42} с до 10^{-36} с розміри Всесвіту збільшились у 10^{26} разів, тоді, формально, можливі подібні сценарії (наприклад, $c = 10^{-9} / 10^{-36} = 10^{25}$ м/с (див. Задачі 15.2. та 15.3, та рис. 15.5)), й у ті часи (часи інфляційного розширення або у “інфляційну еру”) швидкість світла була більшою

15.5. а)

Розподіл Планка має вигляд: $n(k) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(k)} - 1}$. Загальну кількість фотонів можна підрахувати, інтегруючи цей розподіл за усім фазовим простором:

$$N = 2 \cdot V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\hbar ck/2\pi} - 1},$$

де $\varepsilon(k) = \hbar ck$. Оскільки для фотонів $\beta = \frac{1}{k_B T}$, тому

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \cdot I,$$

б) де

$$I = \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dx \cdot x^2 e^{-nx} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx 2,4.$$

Для $T = 3K$ отримуємо $n \approx 1000/\text{см}^3$.

15.6. а) Відповідно до формули Планка, кількість фотонів у діапазоні частот від ω до $\omega + d\omega$ буде:

$$dN = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Тоді, аналогічно розв'язку Задачі 15.5, загальна кількість фотонів при $T = 3K$ і об'ємі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ($R = 10^{28}$ см) буде:

$$\begin{aligned} N &= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega / 2\pi} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{1}{(\beta \hbar)^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \\ &= \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \cdot 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx \frac{2 \cdot 1,2}{\pi^2} \cdot V \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 = \\ &= \frac{2,4}{\pi^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (10^{28})^3 \cdot \left(\frac{2,38 \cdot 10^{-16} \cdot 3}{1,05 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \right)^3 \approx 2,5 \cdot 10^{87}. \end{aligned}$$

б) Оскільки енергія одного фотона $\varepsilon(k) = \hbar k c$, тоді повна енергія:

$$E = \frac{V \hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega / 2\pi} - 1} = \frac{\pi^2 k^4}{15 (\hbar c / 2\pi)} V T^4 \approx 2,6 \cdot 10^{72} \text{ ерг.}$$

Для порівняння, якщо б Всесвіт складався лише з електронів, тоді такій енергії відповідав би імпульс Фермі:

$$p_F = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} = 3 \cdot 10^{-26} \text{ г} \cdot \text{см/сек.}$$

15.7.

а) Всесвіт є ізольованою системою. Тому первинні фотони розширювались адіабатично.

б) Згідно з законом Стефана-Больцмана густина енергії випромінювання є пропорційною четвертій степені температури $u \sim T^4$. Отже енергія випромінювання Всесвітом, що має об'ємом V , буде: $E \sim VT^4$.

З формули першого закону термодинаміки $TdS = dE + pdV$, маємо:

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \sim VT^3.$$

Інтегруючи, знаходимо $S = VT^3 \cdot \text{const}$.

Інші види матерії також роблять свій внесок у загальну ентропію Всесвіту, але цей внесок, принаймні, одного порядку, що й фотонний внесок.

Оскільки загальна ентропія S не може зменшуватись та, крім того, при адіабатичному процесі, зміна ентропії дорівнює нулю, тому, якщо об'єм V збільшиться у два рази, то температура T повинна зменшитись у $2^{-1/3}$ рази. Отже, маємо $T = (3 \cdot 2^{-1/3})^\circ \text{K} = 2.38 \text{ K}$.

в) Аналогічно до Задачі 15.6, отримуємо відому формулу випромінення абсолютно чорного тіла де множник 2 відповідає двом поляризаціям світла:

$$\frac{E}{V} = 2 \int \frac{d^3 p}{h^3} p c \frac{1}{e^{\beta p c} - 1} = \frac{8\pi c}{h^3} \frac{1}{(\beta c)^4} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}.$$

Звідси

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(hc)^3} = 10^{-14} \text{ Дж/м}^3.$$

15.8. З закону Хаббла $v = H \cdot R \Rightarrow R = v/H = (3 \cdot 10^4)/70 = 428,6 \text{ Мпк}$.

15.9. Маємо: $v = c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$. З закону Хаббла $\Rightarrow$
 $R = c/H = (3 \cdot 10^5)/70 = 4286 \text{ Мпк} = 4,286 \cdot 10^9 \cdot 3,26 \text{ св.р.}$
 $\approx 14 \text{ млрд. св.р.}$

Список рекомендованої літератури

Основна література

1. Кривенко-Еметов Я.Д. Задачі з ядерної фізики – КПІ, електронне видання – 2010. – 6 с. <http://apd.ipt.kpi.ua/downloads/32/zadachi-z-jadernoi-fiziki>
2. Задачи по квантовой механике: учеб. пособие для студ. физ. спец. вузов / В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. – М.: Наука, 1981. – 648 с.;
2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1992. – 880 с.
3. Кобушкін О.П. Лекції з ядерної фізики [Електронний ресурс НТУУ "КПІ"]
4. Иродов И.Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике / Уч. пособие для вузов. 7-е изд. Переработанное и дополненное. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.
5. Задачі з загальної фізики. Квантова фізика атомів, ядер і елементарних частинок. Будова речовини. Для студентів 3-го курсу фізико-технічного факультету / Укладачі: Монастирський Г.Є., Грайворонський М.В., Литвинова Т.В. – Київ, НТУУ "КПІ", 1996. (2-е видання 1999 р.) – 21 с.
6. Ситенко О.Г. Теорія ядра [Текст]: навч. посібник для студ. фіз. спец. вищих закл. освіти / О.Г. Ситенко, В.К. Тартаковський. – 2-е вид. – Київ: Либідь, 2001. – 607 с.
7. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. Учеб. для вузов: В 2 кн. 3-х частях. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1993.– Кн. 1. Физика атомного ядра: Ч. I. Свойства нуклонов, ядер и радиоактивных излучений – 376 с.; Ч. II. Ядерные взаимодействия. – 320 с.
8. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. Учеб. для вузов: В 2-х кн. 3-х частях. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1993. – Книга 2. Физика элементарных частиц. – 408 с.
9. Каденко І.М., Плюйко В.А. Фізика атомного ядра та частинок. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2008. – 414 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – М.: Физматлит («Теоретическая физика», том III). – ISBN 5-9221-0530-2
11. Кобушкін О.П., Кривенко-Еметов Я.Д. Збірник задач з квантової механіки [Електронний ресурс]: навчальний посібник / О.П. Кобушкін, Я.Д. Кривенко-Еметов; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 670 Кбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 110 с.

Допоміжна література

12. Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. – М.: «Наука», 1981. – 304 с.; 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1990. – 346 с.
13. Коломиец В.М. Ядерная ферми-жидкость / НАН Украины, Институт ядерных исследований. – Киев: Наукова думка, 2009. – 415 с.
14. Krivenko Y.D., Martynov E.S. Once more on the hadronic total cross-sections at high energies // Препринт ITP-94-48E, 1994. – 8 p.
https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/26/051/26051377.pdf?r=1
15. Транковский С. Остров Стабильности за пределами таблицы Менделеева // «Наука и жизнь» №7, 2012. https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/431837/Ostrov_Stabilnosti_za_predelami_tablitsy_Mendeleeveva
16. Gilman R. Electromagnetic structure of deuteron / R.Gilman, F. Gross // J.Phys. G: Nucl.Part.Phys., 2010. – Vol. 28. – №4. – P. R37-R116.
17. Абрамовский В.А., Абрамовская Н.В. Распределение множественности в протон-протонном рассеянии при промежуточных энергиях. Учет вкладов невакуумных реджионов // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6.; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=7347>
18. Чолпан П.П. Фізика: Підручник – Київ: Вища школа, 2003. – 567 с.

Інтернет ресурси

19. Режим доступу: Birth of the Universe/
http://abyss.uoregon.edu/~js/21st_century_science/lectures/lec24.html – Назва з екрана
20. Режим доступу: 5 вопросов о расширении Вселенной, которые вы стеснялись задать / https://habr.com/ru/post/412441/?fbclid=IwAR3CopRf3Q9i-nng2UqX6ug_cgLHY7v-PM0qVZMuUgOn-HIsRTxm72OxpDM – Назва з екрана
21. Режим доступу: What are cosmic rays?/ <https://letstalkscience.ca/educational-resources/backgrounders/what-are-cosmic-rays> – Назва з екрана
22. Режим доступу: Модель ядерных оболочек
<http://nuclphys.sinp.msu.ru/anuc/anuc08.htm> – Назва з екрана
23. Режим доступу: Island of stability
https://en.wikipedia.org/wiki/Island_of_stability – Назва з екрана

24. Режим доступу: <https://en.wikipedia.org/wiki/R-process> – Назва з екрана
25. Режим доступу: W.Udo. Schroder Nucleon-Nucleon Forces
<https://slideplayer.com/slide/7026645/> ;
<https://slideplayer.com/slide/7026645/24/images/9/Spin-and+Isospin-Exchange+Interactions.jpg> – Назва з екрана
26. Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_force – Назва з екрана
27. Режим доступу: Spontaneous symmetry breaking in gauge theories T. W. B. Kibble <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2014.0033> – Назва з екрана
28. Режим доступу: Nuclear Forces /
http://www.scholarpedia.org/article/Nuclear_Forces – Назва з екрана
29. Режим доступу: Big Bang / <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/b/big+bang> – Назва з екрана
30. Режим доступу: Breit-Wigner cross section and angular momentum
<http://www-pnp.physics.ox.ac.uk/~libby/Teaching/2005/C4-JL-lecture2.pdf> – Назва з екрана