

## НЕІЗОЛЬОВАНІ ГРАНИЧНІ МНОЖИНИ ДЕЯКИХ ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

**О. Ю. Швець**

*Нац. техн. ун-т України “Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського”  
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна  
e-mail: aleksandrshvetskpi@gmail.com*

The “tank with liquid–limited power electric motor” dynamic system is considered. In some cases, the mathematical model of this system can be described by a nonlinear system of ordinary differential equations of the fifth order. We construct nonisolated limit sets (maximal attractors) of these systems. The implementation of the scenario of generalized intermittency at transitions between different types of chaotic maximal attractors is confirmed.

Розглянуто динамічну систему “бак із рідиною – електродвигун обмеженої потужності”. У деяких випадках математичну модель такої системи можна описати нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь 5-го порядку. Побудовано неізолювані граничні множини (максимальні атрактори) таких систем. Підтверджено імплементацію сценарію узагальненої переміжності при переходах між різними типами хаотичних максимальних атракторів.

**1. Вступ.** Граничні множини дисипативних динамічних систем, а саме різноманітні атрактори, надають вичерпну інформацію про поведінку фазових траєкторій системи. За останній час значно розширилася класифікація тих чи інших регулярних і хаотичних атракторів систем, які описуються звичайними диференціальними рівняннями. Зараз розглядаються гіперболічні, самозбуджені, приховані, рідкі й деякі інші типи атракторів [1–3]. Усі перелічені, “традиційні”, атрактори утворюють ізолювані граничні множини у фазовому просторі відповідної динамічної системи.

Серед усіх типів атракторів особливе місце посідають так звані максимальні атрактори [4, 5]. Максимальний атрактор — це гранична множина, яка утворює континуальну сім'ю неізолюваних траєкторій у фазовому просторі. До цієї сім'ї прямують усі інші траєкторії з деякого басейну притягання. На відміну від “традиційних” атракторів спрямування траєкторій із басейну притягання відбувається до деякого конкретного представника континуальної сім'ї, а не до граничної множини в цілому. Траєкторії максимального атрактора не ізолювані одна від одної, але при цьому не перетинаються й не мають точок дотику. Всі вони мають спільний спектр ляпуновських характеристичних показників, структурно подібні перерізи та відображення Пуанкаре [5, 6].

Метою цієї роботи є побудова й дослідження максимальних атракторів деякої неідеальної за Зоммерфельдом – Кононенком гідродинамічної системи.

**2. Постановка задачі.** Задача вивчення коливань вільної поверхні рідини у жорстких циліндричних баках має велике значення для різноманітних застосувань. Це пов'язано з тим, що велика кількість сучасних машин і механізмів як елемент конструкцій має той чи інший бак, частково заповнений рідиною. Ця проблематика добре висвітлена в узагальнюючих монографіях [7–9]. У багатьох випадках при вивченні динамічної поведінки

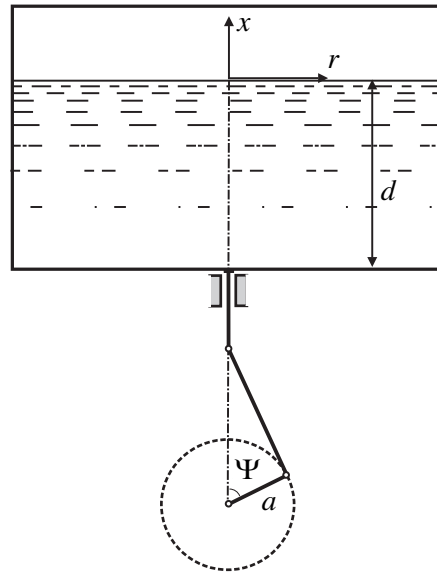


Рис. 1. Схема системи.

коливної системи виникає необхідність враховувати взаємодію такої системи з джерелом збудження коливань, зокрема враховувати обмеженість потужності того чи іншого джерела збудження. Такі системи типу “коливна підсистема – джерело збудження” називають неідеальними за Зоммерфельдом – Кононенком. Цілий ряд неідеальних систем описано та досліджено у монографіях [10, 11]. Нехтування взаємодією між коливною системою та її джерелом збудження може призвести до грубих помилок у описі динамічної поведінки як самої коливної системи, так і режимів функціонування джерела збудження. Зокрема, може бути повністю втрачено інформацію про реально існуючі усталені хаотичні режими. Особливо цікавими є випадки, при яких виникнення усталених хаотичних режимів пов’язане в першу чергу зі взаємодією коливної системи з її джерелом збудження [11 – 17].

Розглянемо динамічну систему, опис якої показано на рис. 1. Вал електродвигуна з’єднано з платформою за допомогою кривошипно-шатунного механізму, на якому закріплено жорстку циліндричну ємність радіуса  $R$ , частково заповнену рідиною.

Коли кривошип  $a$  повертається на кут  $\Psi$ , платформа здійснює вертикальний рух у формі  $v(t) = a \cos \Psi(t)$ . Для опису коливань вільної поверхні рідини введемо циліндричну систему координат  $Oxr\theta$  з початком на осі резервуара, на незбуреній поверхні рідини. Рівняння рельєфу вільної поверхні рідини запишемо у вигляді

$$x = \eta(r, \theta, t).$$

Припустимо, рідина є нев’язкою та нестисливою з густиною  $\rho$ , і заповнює циліндричний резервуар поперечного перерізу  $S$  до глибини  $x = -d$ .

Будемо шукати функцію рельєфу поверхні рідини у вигляді розкладу за власними модами:

$$\eta(r, \theta, t) = \sum_{i,j} [q_{ij}^c(t) k_{ij}(r) \cos i\theta + q_{ij}^s(t) k_{ij}(r) \sin i\theta]. \quad (1)$$

Використовуючи результати, отримані в [11], запишемо лагранжیان системи

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2} m_0 a^2 \dot{\Psi}^2 \sin^2 \Psi + \frac{1}{2} \rho S \sum_{i,j,m,n} a_{ijmn} \dot{q}_{ij}^{c,s} \dot{q}_{mn}^{c,s} + \frac{1}{2} \rho S a \left( \dot{\Psi}^2 \cos \Psi + \ddot{\Psi} \sin \Psi \right) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s} - \frac{1}{2} \rho S g \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s}, \quad (2)$$

а також рівняння руху

$$I \ddot{\Psi} = -2m_0 a^2 \dot{\Psi}^2 \sin \Psi \cos \Psi - m_0 a^2 \ddot{\Psi} \sin^2 \Psi + a \rho S \left( \dot{\Psi}^2 \sin \Psi - \ddot{\Psi} \cos \Psi \right) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s} - 2a \rho S \dot{\Psi} \cos \Psi \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} \dot{q}_{ij}^{c,s} + \Phi(\Psi) - H(\Psi). \quad (3)$$

Тут  $I$  — момент інерції вала двигуна;  $m_0$  — маса резервуара рідини;  $a_{ijmn}$  — нелінійні функції від  $q_{ij}^{c,s}(t)$ ,  $q_{mn}^{c,s}(t)$ ;  $g$  — прискорення сили тяжіння. Останні два доданки в правій частині рівняння (3) є рушійним моментом і моментом внутрішніх сил опору електродвигуна.

Припустимо, що швидкість обертання вала двигуна  $\dot{\Psi}(t)$  в усталеному режимі близька до  $2\omega_1$ , де  $\omega_1$  — власна частота основного тону коливань двигуна вільної поверхні, що відповідає модам  $q_{11}^c(t)k_{11}(r) \cos \theta$  і  $q_{11}^s(t)k_{11}(r) \sin \theta$ . Тобто виконується умова параметричного резонансу у системі “бак із рідиною – електродвигун”.

Розглянемо малий додатний параметр

$$\varepsilon = \omega_1 \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (4)$$

і припустимо, що

$$\dot{\Psi} - 2\omega_1 = \varepsilon^2 \omega_1 y_3. \quad (5)$$

Тоді коливання вільної поверхні рідини можуть бути апроксимовані коливаннями за основними й вторинними модами, амплітуди яких визначаються згідно з [11] як

$$\begin{aligned} q_{11}^c(t) &= \varepsilon v \left[ p_1(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_1(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right], \\ q_{11}^s(t) &= \varepsilon v \left[ p_2(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_2(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right], \\ q_{01}(t) &= \varepsilon^2 v [A_{01}(\tau) \cos \Psi + B_{01}(\tau) \sin \Psi + C_{01}(\tau)], \\ q_{21}^{c,s}(t) &= \varepsilon^2 v [A_{21}^{c,s}(\tau) \cos \Psi + B_{21}^{c,s}(\tau) \sin \Psi + C_{21}^{c,s}(\tau)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $\tau$  — повільний час,  $\tau = \frac{1}{4} \varepsilon^2 \Psi$ ,  $v = \frac{R}{1,8412} \tanh\left(\frac{1,8412}{R} d\right)$ . Визначивши безрозмірні амплітуди  $A_{ij}^{c,s}(\tau)$ ,  $B_{ij}^{c,s}(\tau)$ ,  $C_{ij}^{c,s}(\tau)$  вторинних мод методом Майлса [18, 19] через амплітуди  $y_1(\tau)$ ,  $y_2(\tau)$ ,  $y_4(\tau)$ ,  $y_5(\tau)$  і застосувавши процедуру усереднення лагранжіана за

явно введеним швидким часом  $\Psi(t)$  [20], для амплітуд доміантних мод отримаємо таку систему рівнянь [11]:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - \left[ y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 + B(y_1y_5 - y_4y_2)y_4 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + \left[ y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 + B(y_1y_5 - y_4y_2)y_5 + 2y_1, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= F + Ey_3 + D(y_1y_2 + y_4y_5), \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - \left[ y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 - B(y_1y_5 - y_4y_2)y_1 + 2y_5, \\ \frac{dy_5}{d\tau} &= Cy_5 + \left[ y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 - B(y_1y_5 - y_4y_2)y_2 + 2y_4.\end{aligned}\tag{7}$$

У системі рівнянь (7) позначено:  $C = -\frac{\delta}{\omega_1}$  — зведений коефіцієнт демпфування,  $N_0$ ,  $E$  — константи лінійної статичної характеристики електродвигуна,  $F = \frac{1}{\omega_1}(N_0 + 2E\omega_1)$ ,  $D = \frac{\rho S v R^2}{(1,8412)^2(2I + m_0 a^2)\omega_1^2}$ ,  $A$  і  $B$  — константи, величини яких залежать від діаметра бака та глибини заповнення його рідиною. Останню систему використовують як основну математичну модель для дослідження динаміки коливань бака з рідиною, збуджених електродвигуном обмеженої потужності.

Основною метою цієї статті є вивчення можливих типів граничних множин системи (7). Оскільки ця система є досить складною нелінійною системою рівнянь п'ятого порядку, то, у загальному випадку, знаходження її розв'язків можливо тільки за допомогою чисельних методів. Тому для побудови та дослідження граничних множин цієї системи використано комплекс сучасних чисельних методів і алгоритмів. Техніку проведення таких чисельних розрахунків для неідеальних систем детально описано в [11].

**3. Максимальні аттрактори.** Перш за все зауважимо, що система рівнянь (7) є системою маятникового типу. Дійсно, отримані в [11, 21] рівняння, які описують динамічну поведінку неідеальної системи “сферичний маятник – електродвигун” майже збігаються з рівняннями (7). Формальна відмінність полягає в тому, що у системі рівнянь (7) є два додаткові параметри  $A$  і  $B$  порівняно з маятниковими системами, розглянутими в [11, 21]. Проте у системі (7) фізичний зміст чотирьох з п'яти фазових змінних і переважної більшості параметрів абсолютно інший, ніж у подібних систем, розглянутих у [11, 21].

Спочатку визначимо умови, за яких система дисипативна. Позначимо через  $\vec{W}$  векторне поле, породжене системою рівнянь (7). Відповідно через  $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5$  ми позначаємо компоненти цього векторного поля, тобто праві частини системи рівнянь (7). Тоді дивергенцію цього векторного поля можна знайти за формулою

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{W} &= \frac{\partial W_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_2}{\partial y_2} + \frac{\partial W_3}{\partial y_3} + \frac{\partial W_4}{\partial y_4} + \frac{\partial W_5}{\partial y_5} = \\ &= C - Ay_1y_2 + By_4y_5 + C + Ay_1y_2 - By_4y_5 + E +\end{aligned}$$

$$+ C - Ay_4y_5 + By_1y_2 + C + Ay_4y_5 - By_1y_2 = 4C + E. \quad (8)$$

Отже, дивергенція векторного поля  $\vec{W}$  постійна. Умова дисипативності для системи рівнянь має вигляд

$$4C + E < 0. \quad (9)$$

Величини, що входять у формулу (9),  $C$  (зведений коефіцієнт демпфування) і  $E$  (кут нахилу статичної характеристики електродвигуна) завжди від'ємні. Отже, дивергенція векторного поля, створеного системою рівнянь (7), завжди буде від'ємною. Таким чином, ця система завжди буде дисипативною, тому в такій системі можливе існування атракторів.

При вивченні атракторів системи (7) надалі будемо використовувати результати, отримані для системи “сферичний маятник – електродвигун” [6, 22].

Очевидно, що система (7) має положення рівноваги

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -\frac{F}{E}, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = 0. \quad (10)$$

Усі інші положення рівноваги, якщо вони існують, є розв'язками нелінійної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} Cy_1 - \left[ y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 + B(y_1y_5 - y_4y_2)y_4 + 2y_2 &= 0, \\ Cy_2 + \left[ y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 + B(y_1y_5 - y_4y_2)y_5 + 2y_1 &= 0, \\ F + Ey_3 + D(y_1y_2 + y_4y_5) &= 0, \\ y_4 - \left[ y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 - B(y_1y_5 - y_4y_2)y_1 + 2y_5 &= 0, \\ Cy_5 + \left[ y_3 + \frac{A}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 - B(y_1y_5 - y_4y_2)y_2 + 2y_4 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

У загальному випадку такі розв'язки можуть бути знайдені тільки чисельними методами. Як показано в [6, 22], розв'язки алгебраїчної системи (11) утворюють замкнені лінії у фазовому просторі системи, причому кожна окрема точка цих ліній буде положенням рівноваги. Стійкість таких положень рівноваги може бути досліджена за допомогою теореми Л'єнара – Шипара [23]. Усі точки такої континуальної сім'ї будуть одночасно або стійкими (але не асимптотично стійкими), або нестійкими. У випадку стійкості така сім'я неізолюваних положень рівноваги утворює максимальний атрактор [4, 5]. Причому траєкторії з басейну притягання такого максимального атрактора будуть прямувати не до сім'ї в цілому, а до деякого конкретного представника (конкретного положення рівноваги) цієї сім'ї.

Більш того, у роботах [6, 22] встановлено, що в неідеальній системі “сферичний маятник – електродвигун” положення рівноваги (10) буде єдиним “традиційним” атрактором такої системи. Всі інші атрактори, якщо вони існують, будуть максимальними. Зокрема, існують періодичні та хаотичні максимальні атрактори. Кожен з цих максимальних

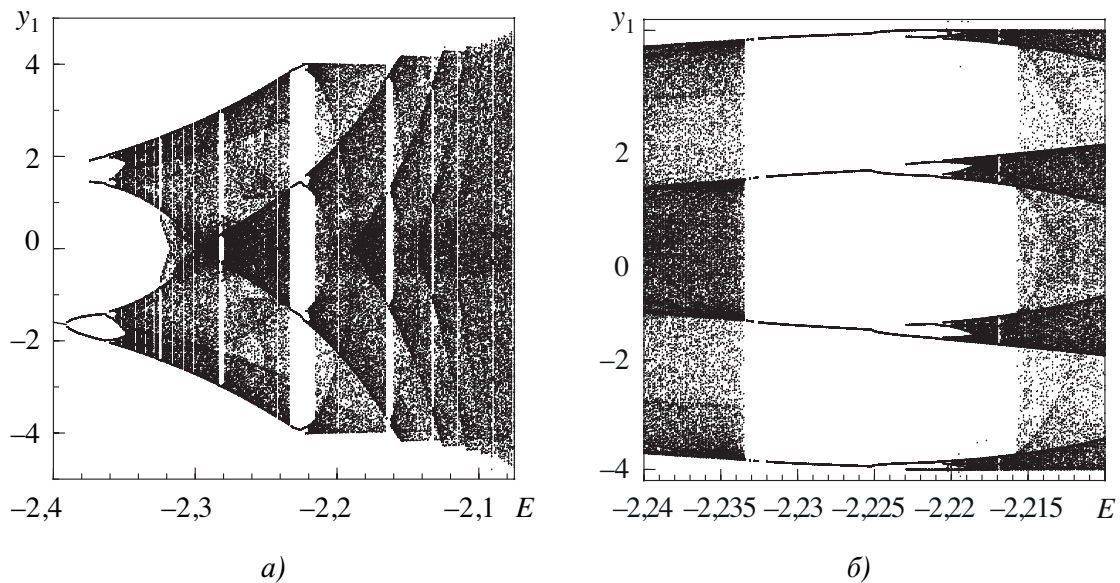


Рис. 2. Фазопараметрична характеристика.

атракторів буде складатися з незліченної кількості окремих неізолюваних представників. Переконаємося, що аналогічна ситуація буде мати місце й у системі “бак із рідиною–електродвигун”.

Припустимо, що  $C = -0,8$ ,  $F = 0,25$ ,  $D = -5$ ,  $A = 0,56$ ,  $B = -1,531$ . Параметр  $E$  (кут нахилу статичної характеристики двигуна) виберемо як біфуркаційний параметр. На рис. 2а побудовано фазопараметричну характеристику (біфуркаційне дерево) системи (7). Цю характеристику побудовано при початкових даних фазових змінних  $y_1 = 0,5$ ,  $y_2 = 0,5$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_4 = 0,5$ ,  $y_5 = 0,5$ . Відповідно на рис. 2б наведено збільшений фрагмент цієї фазопараметричної характеристики.

Окремих “гілках” цього біфуркаційного дерева відповідають періодичні усталені режими. Відповідно густо чорні ділянки — це області хаосу у просторі параметрів системи (7). Аналізуючи ці рисунки, можна простежити за біфуркаціями, які відбуваються в системі (7). На цьому рисунку чітко видно точки розгалуження окремих гілок біфуркаційного дерева, які відповідають біфуркаціям подвоєння періоду циклів. Також чітко проглядають точки переходів до густо чорних ділянок, тобто переходів від регулярного усталеного режиму до хаотичного усталеного режиму. Зазначимо, що рис. 2 побудовано при конкретних початкових умовах, однак при варіюванні цих умов у деякій області фазового простору ми будемо отримувати якісно аналогічну картину. Зокрема, будь-яке дерево буде визначати однакові точки біфуркації по осі абсцис. Це свідчить, що усталені режими будуть максимальними атракторами, які утворені з незліченої кількості неізолюваних траєкторій.

Так в малому околі значення  $E = -2,23$  ми маємо окремі гілки біфуркаційного дерева. При цьому значенні  $E$  в системі існує періодичний максимальний атрактор. На рис. 3 побудовано такий періодичний максимальний атрактор. Причому на рисунку нанесені тільки три представники такого атрактора, позначені відповідно червоним, синім і жовтим кольорами.

Взагалі максимальний періодичний атрактор утворює сім'ю з нескінченної кількості замкнених траєкторій (циклів), усі з яких існують одночасно. Будь-який окіл циклу містить

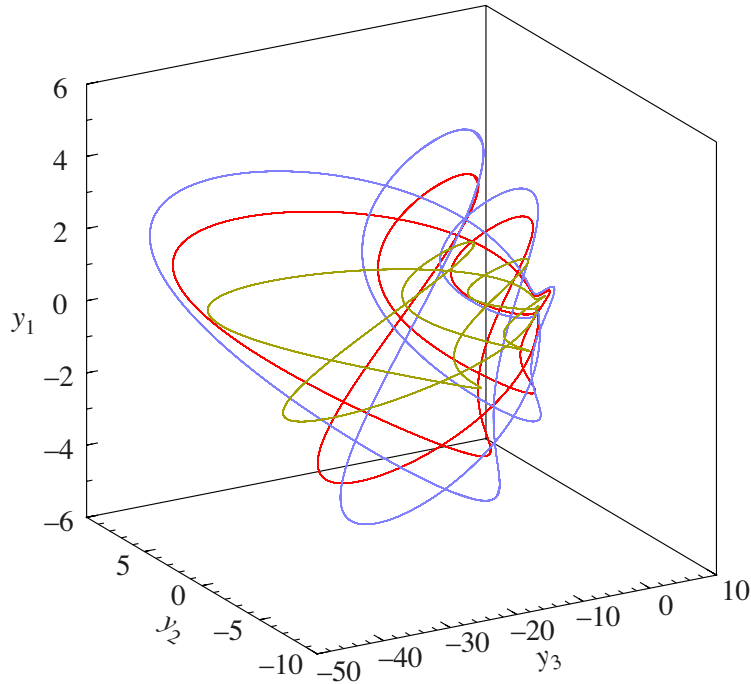


Рис. 3. Періодичний максимальний атрактор при  $E = -2,23$ .

інші цикли сім'ї, тобто вони не є ізольованими. Однак такі цикли не мають точок дотику або перетину. Кожна така замкнена траєкторія сама є граничною множиною. Це пов'язано з тим, що майже будь-яка траєкторія, яка починається в деякій великій області фазового простору, прямує до одного з циклів сім'ї. Але жоден із циклів не є атрактором у традиційному розумінні цього терміну. Отже, кожен із цих циклів не є граничним. Крім того, кожен окремий цикл має один і той же період і однакові показники Ляпунова, причому старший показник обов'язково дорівнює нулю. Перерізи Пуанкаре кожного з циклів складаються з однакової скінченної кількості точок.

Надалі розглянемо цікаву біфуркацію, ідентифікувати яку можна за допомогою аналізу фрагмента фазопараметричної характеристики (рис. 26). Така біфуркація відбувається при зростанні параметра  $E$  в точці  $E \approx -2,2155$ . Як видно з рис. 26, при проходженні цієї точки у сторону зростання  $E$  відбувається помітне зростання площі густо чорної області (області хаосу). Відбувається перехід від хаотичного максимального атрактора одного типу до хаотичного максимального атрактора іншого типу. Такий перехід відбувається за одну жорстку біфуркацію за сценарієм узагальненої переміжності [24, 25]. Такий сценарій був описаний для "традиційних" атракторів як узагальнення "класичного" сценарію переміжності за Манневільлем–Помо [26, 27]. Узагальнена переміжність описує перехід від хаотичного атрактора одного типу до хаотичного атрактора іншого типу на відміну від звичайної переміжності, яка описує переходи граничний цикл–хаос. Проілюструємо імплементацію узагальненої переміжності й для хаотичних максимальних атракторів.

Так, при  $E = -2,216$  атрактором системи (7) буде хаотичний максимальний атрактор. Такий атрактор складається з незліченної кількості неперіодичних неізольованих траєкторій. Усі траєкторії хаотичного максимального атрактора мають однаковий спектр ЛХП, а про наявність хаосу свідчить поява у спектрі ЛХП додатного старшого показника. Як і рані-

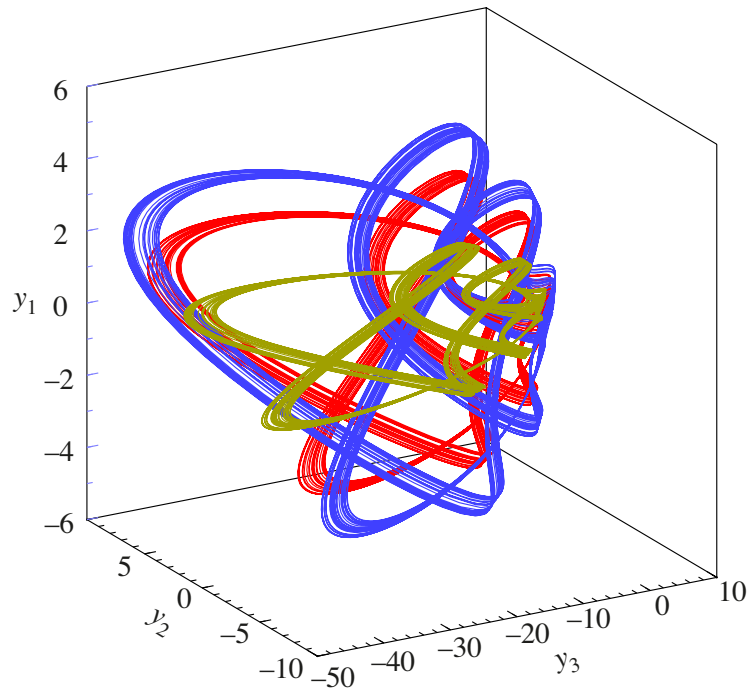


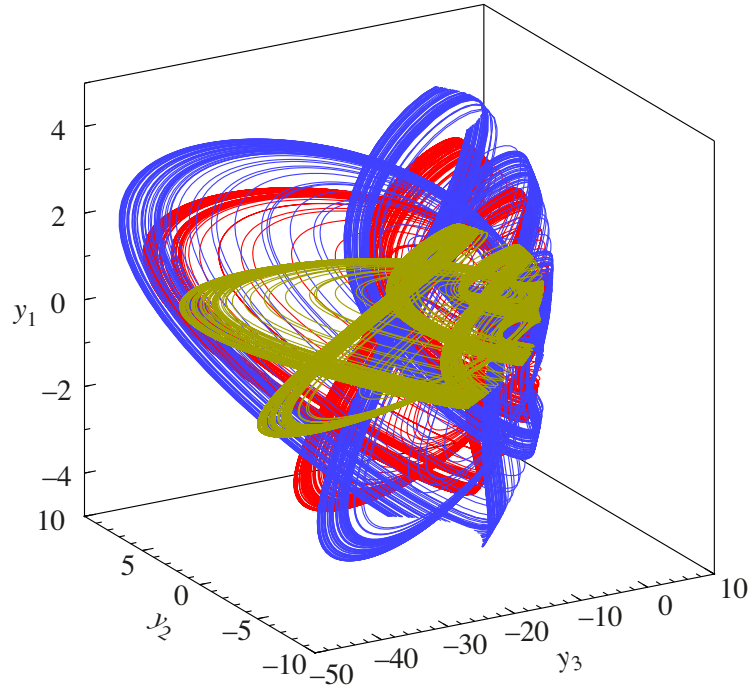
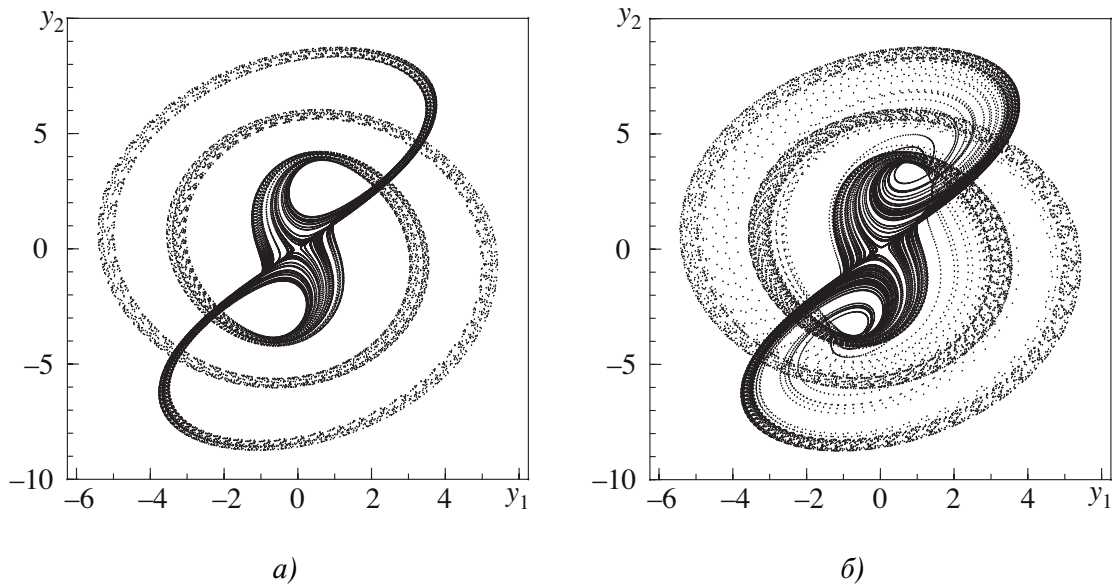
Рис. 4. Хаотичний максимальний атрактор при  $E = -2,216$ .

ше розглянуті максимальні атрактори, хаотичний максимальний атрактор не є атрактором у “традиційному” розумінні цього терміну. Також зазначимо, що перерізи й відображення Пуанкаре кожної з траєкторій сім’ї, яке утворює максимальний атрактор, є структурно подібними хаотичними множинами. Ці множини складаються з нескінченної кількості точок. На рис. 4 показані три представники хаотичного максимального атрактора, побудовані при  $E = -2,216$ . Ці представники зображені, відповідно, червоним, синім і жовтим кольорами.

При незначному зростанні параметра  $E$  у системі відбувається біфуркація “хаос – хаос”, яка приводить до виникнення хаотичного максимального атрактора іншого типу. На рис. 5 зображено відповідно червоним, синім і жовтим кольорами три представники такого атрактора, побудовані при  $E = -2,215$ . Причому перехід від хаотичного максимального атрактора одного типу до хаотичного максимального атрактора іншого типу відбувається за сценарієм узагальненої переміжності [24, 25].

Перехід “хаос – хаос” за сценарієм узагальненої переміжності відбувається таким чином. При проходженні точки біфуркації  $E \approx -2,2155$  хаотичний максимальний атрактор, зображений на рис. 4, зникає й у системі (7) виникає максимальний хаотичний атрактор іншого типу, зображений на рис. 5. Для більш наочної ілюстрації реалізації такого сценарію розглянемо двовимірні проєкції фазових змінних. Причому ці розгляди ми будемо проводити для одного з представників відповідних хаотичних максимальних атракторів. Так, на рис. 6а побудовано розподіли природної інваріантної міри [11, 28] для одного представника хаотичного максимального атрактора при  $E = -2,216$ , а на рис. 6б для одного представника хаотичного максимального атрактора при  $E = -2,215$ . Рух по траєкторіям виниклого хаотичного максимального атрактора складається з двох фаз, які чергуються: грубо-ламінарної та турбулентної. У грубо-ламінарній фазі траєкторія знаходиться у густо



Рис. 5. Хаотичний максимальний атрактор при  $E = -2,215$ .Рис. 6. Розподіли інваріантної міри при  $E = -2,216$  (а) та при  $E = -2,216$  (б).

прокресленій області рис. 6б. Ця область за формою майже подібна області розподілу інваріантної міри зниклого представника хаотичного максимального атрактора, зображеного на рис. 6а. Турбулентній фазі відповідають більш бліді ділянки розподілу інваріантної міри. Зазначимо, що час переходу з грубо-ламінарної фази у турбулентну й оберненого

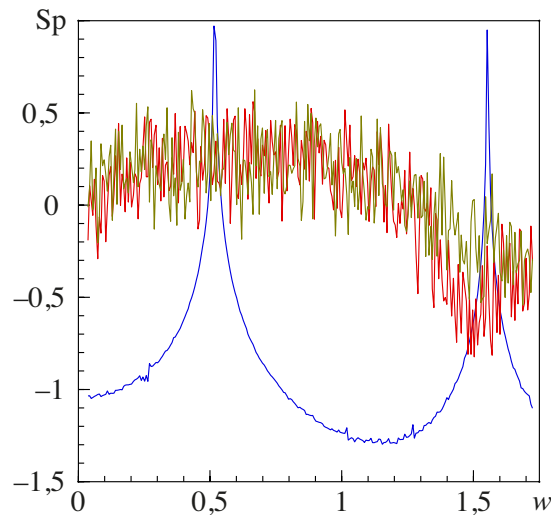


Рис. 7. Розподіли спектральної густини трьох максимальних атракторів.

повернення у грубо-ламінарну фазу непередбачуваний. Такі чергування фаз відбуваються незліченне число разів.

Подібний перехід відбувається для всіх траєкторій сім'ї, яка утворює хаотичний максимальний атрактор при одному й тому ж значенні біфуркаційного параметра. Всі траєкторії хаотичного максимального атрактора, побудованого при  $E = -2,216$ , мають однакові ляпуновські характеристичні показники, старший з яких додатний, другий дорівнює нулю, а три інші — від'ємні. Такій же властивості, стосовно ляпуновських характеристичних показників, задовольняють всі траєкторії хаотичного максимального атрактора, побудованого при  $E = -2,215$ . Тобто старший показник — додатний, другий нульовий, а три інші — від'ємні. При цьому величина старшого ляпуновського показника для цього атрактора майже вдвічі перевищує величину старшого показника для атрактора при  $E = -2,216$ .

Нарешті на рис. 7 побудовані розподіли спектральної густини максимальних атракторів при  $E = -2,23$  (синім кольором), при  $E = -2,216$  (червоним кольором) і при  $E = -2,215$  (жовтим кольором). На цьому рисунку по осі абсцис відкладено частоту  $w$ , а по осі ординат  $S_p = \lg |S(w)|$ , де  $S(w)$  — спектральна густина. Маємо один дискретний гармонічний спектр і два неперервні спектри. Це ще раз свідчить про те, що один із максимальних атракторів буде періодичним, а два інші максимальні атрактори — хаотичними.

Взагалі ознакою можливої реалізації сценарію узагальненої переміжності при зміні значення біфуркаційного параметра можуть слугувати, по-перше, суттєве зростання площі хаотичної області на фазопараметричній характеристиці, а по-друге, помітне збільшення значення старшого ляпуновського показника.

Таким чином, сценарій узагальненої переміжності, описаний для “традиційних” атракторів, може реалізуватися й для переходів типу “хаос – хаос” для хаотичних максимальних атракторів.

### Література

1. С. Н. Skiadas, *Handbook of applications of Chaos theory*, CRC Press, Boca Raton, FL (2016).
2. G. Leonov, N. Kuznetsov, *Nonlinear mathematical models of phase-locked loops, Stability and Oscillations*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge (2014).

3. N. Kuznetsov, *Hidden attractors in fundamental problems and engineering models*, Lect. Notes Electr. Eng., **4**, 13–25 (2016).
4. J. Milnor, *On the concept of attractor*, Comm. Math. Phys., **99**, 177–195 (1985); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01212280>.
5. В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, *Лекции по нелинейной динамике*, Ин-т компьютер. исслед., R&C Dynamics, Москва (2011).
6. A. Shvets, S. Donetskyi, *New types of limit sets in the dynamic system “Spherical pendulum–electric motor”*, Nonlinear Mechanics of Complex Structures — from Theory to Engineering Applications, Springer, Cham., **157**, 443–455 (2021); [https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_25).
7. R. A. Ibrahim, *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005).
8. I. A. Lukovsky, *Nonlinear dynamics. Mathematical models for rigid bodies with a liquid*, De Gruyter, Berlin (2015).
9. I. Raynovskyy, A. Timokha, *Sloshing in upright circular containers: theory, analytical solutions and applications*, CRC Press/Taylor & Francis Group (2021).
10. V. O. Kononenko, *Vibrating system with a limited power-supply*, Piffe, London (1969).
11. Т. С. Краснополяская, А. Ю. Швец, *Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением*, Ин-т компьютер. исслед., R&C Dynamics, Москва (2008).
12. Т. S. Krasnopol'skaya, A. Yu. Shvets, *Properties of chaotic oscillations of the liquid in cylindrical tanks*, Prikl. Mekhanika, **28**, № 6, 52–61 (1992).
13. Т. S. Krasnopol'skaya, *Chaos in acoustic subspace raised by the Sommerfeld–Kononenko effect*, Meccanica, **41**, № 3, 299–310 (2006); <https://doi.org/10.1007/s11012-005-5899-z>.
14. A. Yu. Shvets, T. S. Krasnopol'skaya, *Hyperchaos in piezoceramic systems with limited power supply*, Solid Mechanics and its Applications, **6**, 313–322 (2008); [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0_27).
15. J. M. Balthazar, J. L. Palacios Felix et al. *Nonlinear interactions in a piezoceramic bar transducer powered by a vacuum tube generated by a nonideal source*, J. Comput. Nonlinear Dyn., **4**, 1–7, 011013 (2009); DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3007909>.
16. A. Shvets, S. Donetskyi, *Transition to deterministic chaos in some electroelastic systems*, Springer Proceedings in Complexity, Springer, Cham, 257–264 (2019); DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15297-0\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15297-0_23).
17. J. Warminski, *Nonlinear dynamics of self and parametrically excited systems with non-ideal energy source*, Nonlinear Vibrations Excited by Limited Power Sources, Mechanisms and Machine Science, **116**, 53–72 (2022); DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96603-4_5).
18. J. W. Miles, *Resonantly forced surface waves in circular cylinder*, J. Fluid Mech., **149**, 15–31 (1984); DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112084002512>.
19. J. W. Miles, D. Henderson, *Parametrically forced surface waves*, Annual Reviews, Palo Alto, CA, 143–165 (1990); DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.22.010190.001043>.
20. Ю. А. Митрополький, *Метод усреднения в нелинейной механике*, Наук. думка, Киев (1971).
21. Т. S. Krasnopol'skaya, A. Yu. Shvets, *Chaotic oscillations of a spherical pendulum as an example of interaction with energy source*, Int. Appl. Mech., **28**, 669–674 (1992); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00846923>.
22. С. В. Донецкий, О. Ю. Швець, *Узагальнення поняття аттрактора для маятникових систем із обмеженим збудженням*, Нелін. коливання, **24**, № 1, 473–481 (2021).
23. A. Liénard, M. H. Chipart, *Sur le signe de la partie réelle des racines d'une quation alg'ebrique*, J. Math. Pures Appl., **10**, № 4, 291–346 (1914).
24. A. Yu. Shvets, V. A. Sirenko, *Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 284–292 (2018); **English translation**: J. Math. Sci. (N.Y.), **243**, № 2, 338–346 (2019); DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04543-z>.
25. A. Shvets, *Overview of scenarios of transition to Chaos in nonideal dynamic systems*, Springer Proceedings in Complexity, Springer, Cham, 853–864 (2021); DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8\\_59](https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8_59).
26. P. Manneville, Y. Pomeau, *Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems*, Phys. D, **1**, № 2, 219–226 (1980).
27. Y. Pomeau, P. Manneville, *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Comm. Math. Phys., **74**, № 2, 189–197 (1980); DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01197757>.
28. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Физматлит, Москва (2006).

Одержано 30.08.22