НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 517.927

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_____ О.І.Клесов
«07» грудня 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
зі спеціальності 111 Математика
на тему: «Покрокові тести дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»: аналіз якості та особливості розробки»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-71мп
Омельчук Тетяна Сергіївна _____

Керівник:
Доцент, канд. фіз.-мат. наук
Орловський І.В. _____

Рецензент:
Доцент кафедри математичного аналізу
КНУ ім. Тараса Шевченка,
канд. фіз.-мат. наук
Нестеренко О.Н. _____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____

Київ – 2018 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.І.Клесов

«30» жовтня 2018 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Омельчук Тетяні Сергіївні

1. Тема дисертації «Покрокові тести дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»: аналіз якості та особливості розробки», науковий керівник дисертації Орловський Ігор Володимирович, доцент, кандидат фізико-математичних наук,
затверджені наказом по університету від «01» листопада 2018 р. №4058-С
2. Термін подання студентом дисертації до 10 грудня 2018 р.
3. Об'єкт дослідження: покрокові тести.
4. Предмет дослідження: розробка, особливості побудови та аналіз покрокових тестів.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
   1) Ознайомитись з літературою за темою магістерської дисертації;
   2) Розробити комплект покрокових тестових завдань для задач з теми «Елементи векторної алгебри»;
   3) Провести статистичний аналіз комп'ютерного тестування, із використанням покрокових тестів, з теми «Елементи лінійної алгебри»;
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 20 слайдів
8. Орієнтовний перелік публікацій
Омельчук Т.С., Орловський І.В. Аналіз якості покрокових тестів з математичних дисциплін за допомогою сучасної теорії тестів., Сьома

всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018р., Тези доповідей, Київ, с.80.
Омельчук Т.С., Орловський І.В., Тимошенко О.А. Особливості створення та аналіз якості покрокових тестів з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті» 27–28 грудня 2018 року, Київ (прийнято до друку).
9. Дата видачі завдання 30.10.2018

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Постановка задачі та плану роботи	3.09.18 – 14.09.18	Виконала
2	Робота з літературою, вивчення особливостей створення та побудови покрокових тестів в середовищі Moodle	17.09.18-30.09.18	Виконала
3	Розробка комплекту покрокових тестових завдань для задач з теми «Елементи векторної алгебри»;	01.10.18-08.10.18	Виконала
4	Робота з літературою, вивчення основних методів статистичного аналізу якості тестів	09.10.18-22.10.18	Виконала
5	Проведення підсумкової контрольної роботи	23.10.18-28.10.18	Виконала
6	Внесення результатів тестування у MS Excel	29.10.18-05.11.18	Виконала
7	Проведення статистичного аналізу комп’ютерного тестування, із використанням покрокових тестів, з теми «Елементи лінійної алгебри»	06.11.18-25.11.18	Виконала
8	Оформлення дипломної роботи	26.11.18 – 3.12.18	Виконала

Студент Т.С.Омельчук

Науковий керівник дисертації І.В.Орловський

Реферат

Магістерська дисертація: 69с., 39 таблиць, 14 рисунків, 38 першоджерел, 2 додатки.

Магістерська робота присвячена аналізу якості та побудові покрокових тестових завдань із математичних дисциплін. Особливістю даних тестових завдань є те, що за їх допомогою можна проконтролювати та оцінити увесь хід розв'язання задачі, а не тільки перевірити відповідь на поставлене запитання. Такий тип тестів є мало вивченим і для них немає спеціальної методології оцінки їх якості.

Розроблено комплект 5 варіантів покрокових тестових завдань із дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» з теми «Елементи векторної алгебри» та проаналізовано їх структуру. Завдання розроблено у середовищі відкритої освітньої платформи Moodle із застосуванням мови розмітки веб-сторінок HTML.

Головною частиною роботи є проведення статистичного аналізу комп'ютерного тестування із використанням покрокових тестів із дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» з теми «Елементи лінійної алгебри» за допомогою класичної теорії тестів, який було розроблено на основі проведеного тестування студентів першого курсу різних факультетів КПІ ім. Ігоря Сікорського у 2018/19 н.р.

Ключові слова: покрокові тести, класична теорія тестів, Moodle, статистичний аналіз тестів.

Реферат

Магистерская диссертация: 69с., 39 таблиц, 14 рисунков, 38 первоисточников, 2 приложения.

Магистерская диссертация посвящена анализу качества та построению пошаговых тестовых заданий с математических дисциплин. Особенностью таких тестовых заданий есть то, что с их помощью можно проконтролировать и оценить весь ход решения задачи, а не только проверить ответ на поставленный вопрос. Такой тип тестов есть малоизучен и для них нет специальной методологии оценки их качества.

Было разработано 5 вариантов пошаговых тестовых заданий с дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» с темы «Элементы векторной алгебры» и проанализирована их структура. Задания разработаны в открытой среде образовательной платформы Moodle с использованием языка разметки веб-страниц HTML.

Главной частью работы является проведение статистического анализа компьютерного тестирования с использованием пошаговых тестов по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» на тему «Элементы линейной алгебры» с помощью классической теории тестов, который был разработан на основе проведенного тестирования студентов первого курса разных факультетов КПИ им. Игоря Сикорского в 2018/19 учебном году.

Ключевые слова: пошаговые тесты, классическая теория тестов, Moodle , статистический анализ теста.

Abstract

Thesis: 69s., 39 tables, 14 pictures, 38 sources, 2 applications.

The thesis is devoted to quality analysis and the construction of step-by-step test tasks in mathematical disciplines. The peculiarity of these test tasks is that it helps to control and examine almost all steps of the problem solution, and not just to check the answer to the question. This type of tests is little studied and there is no special methodology for analyze their quality.

A set of 5 variants of step-by-step test tasks for the discipline "Linear algebra and analytic geometry" on the topic "Elements of vector algebra" is developed and their structure is analyzed. The talks is constructed in the environment of open source educational platform Moodle with use of web page markup language HTML.

Statistical quality analysis of computer testing with step-by-step test tasks on the topic "Elements of linear algebra" of the discipline "Linear algebra and analytic geometry" is the main part of the work. It was made using the classical theory of the tests on the basis of the testing of first year students from different faculties of Igor Sikorsky KPI that was held in 2018/19 academic year.

Keywords: step-by-step tests, classical test theory, Moodle, statistical analysis of tests.

ЗМІСТ

ВСТУП..... 8
РОЗДІЛ І..... 10
Покрокові тести з векторної алгебри 10
1.1 Історія створення тестів 10
1.2 Основна класифікація тестів..... 11
1.3 Аналіз структури тестових завдань з теми «Елементи векторної алгебри» 12
1.4 Аналіз структури завдання на базис у просторі 13
РОЗДІЛ ІІ Статистичний аналіз якості покрокових тестів ……..…..18
2.1 Методики аналізу якості тестів 18
2.2 Структура тестової контрольної роботи, що аналізується 21
2.3 Аналіз якості тесту в цілому..... 25
2.4 Аналіз якості кожного покрокового завдання..... 33
ВИСНОВКИ..... 52
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... 53
Додаток 1..... 56
Додаток 2..... 68

ВСТУП

Із стрімким розвитком освітніх систем більше уваги почали приділяти комп'ютерному тестуванню, яке є одним із найпоширеніших і важливих сучасних засобів контролю за рівнем засвоєння знань студентів. Сучасне тестування – комплекс стандартизованих методів вимірювання недоступних для безпосереднього спостереження параметрів студентів, тобто латентних, які оцінюють рівень їх освіченості. Це викликано, насамперед, однією з переваг тестування, а саме з неупередженістю та об'єктивністю контролю знань. Ще однією, не менш вагомою перевагою є те, що проведення тестування з використанням комп'ютерних систем дає можливість, використовуючи однакові умови написання та методи оцінювання опитати велику кількість студентів, що навчаються на різних спеціальностях закладу вищої освіти. Проте, при цьому відчутно зменшується час перевірки робіт, автоматизується процес обробки результатів тестів та скорочується навантаження на викладача.

У свій час, приділяли багато уваги питанню тестового контролю такі відомі педагоги та методисти, як Г.Раш [1] - [2], М. Вільсон [3] - [4], В.С. Аванесов[5]-[6], Ю.М. Нейман, В.А. Хлєбніков[7], Р. Остіні, М.Л. Неринг [8], Ш.І. Циганков [9], С.Де Марс [10], В.Я. Ван дер Лінден, Р.К. Хемблтон [11], Л. Крокер [12], а серед вітчизняних авторів слід зазначити Л.О. Кухар [13], Т.В. Лісова [14], Ю.О. Ковальчук [15].

Важливий критерієм комп'ютерного тестування – існування стандартизованого інструменту для комфортної та ефективної роботи з тестовими завданнями викладачів та студентів. Один із варіантів такого інструменту є створення та проведення тестів на відкритій освітній системі управління навчанням Moodle. Система Moodle дає можливість розробити тести різного типу (наприклад, тестові завдання на множинний вибір, встановлення відповідності, перетягування в тексті та інші). А також, використовуючи тип питання «Вбудовані відповіді» (Embedded answer questions) та застосовуючи мову розмітки веб-сторінок HTML, можна конструювати тестові завдання більш складної структури, зокрема, й так звані «покрокові» тестові завдання [16]-[18] різного ступеня складності, що дозволяють перевіряти знання студентів з математичних дисциплін максимально об'єктивно.

Перші покрокові тести були розроблені колективом авторів кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей для кредитного модуля «Елементи лінійної алгебри». Вони пройшли сертифікацію центром УІІТО КПІ ім. Ігоря Сікорського у 2017 році та успішно апробовані на факультеті інформатики та обчислювальної техніки (ФІОТ). У тестуванні взяло участь 97 студентів ФІОТ. На основі проведеного тестування було зроблено перший аналіз якості подібних тестових завдань [17].

У КПІ ім. Ігоря Сікорського вже не перший рік проводиться перевірка знань студентів за допомогою он-лайн тестування, але до цього часу використовувались тестові завдання лише відкритого та закритого типів.

Покрокові тести мають ряд суттєвих переваг. По-перше, вони допомагають побачити проміжні результати розв'язку завдань. По-друге, дають можливість перевірити не лише остаточну відповідь, а й знання алгоритму розв'язання завдання. Тобто, покрокові тести максимально наближені до традиційних контрольних робіт, які виконуються письмово. Але оцінювання такого контролю є автоматизованим та об'єктивним.

Складністю створення таких тестів є індивідуальний підхід до кожного типу задач, хід розв'язання яких необхідно перевірити.

Метою роботи є дослідження специфіки створення покрокових тестових завдань, розгляд структурних особливостей їх розробки та програмної реалізації. Крім того, важливою частиною дослідження є вивчення особливостей підходу до оцінки якості таких тестових завдань, врахування специфіки їх оцінки, як складової тестової контрольної роботи, так і самого завдання окремо.

У першому розділі магістерської дисертації проаналізовано особливості створення та побудови покрокових тестів з теми «Елементи векторної алгебри», на прикладі розроблених покрокових тестових завдань з перевірки розв'язання задачі знаходження розкладу вектора у вказаному базисі.

У другому, головному розділі магістерської дисертації особливу увагу було приділено аналізу якості покрокових тестів з теми «Елементи лінійної алгебри», як тесту в цілому, так і кожного окремого покрокового завдання за допомогою класичної теорії тестування. Знайдено та проаналізовано особливості наявності покрокових тестових завдань у тестовій контрольній роботі та специфіку структури самих тестових завдань такого типу як послідовності стандартних тестових завдань відкритого та закритого типів, що в сукупності повторюють основні роки розв'язання певної задачі.

Результати щодо особливостей аналізу якості покрокових тестів та теоретичних засад можливої адаптації IRT теорії до аналізу таких тестів розглядались у [19].

Результати щодо побудови та аналізу структури покрокових тестів з ллінійної алгебри та аналітичної геометрії прийняті до друку на Сьому міжнародну науково-практичну конференцію «Математика в сучасному технічному університеті».

РОЗДІЛ І

Покрокові тести з векторної алгебри

1.1 Історія створення тестів

Першими варіантами тестів, які вважаються прикладами шкільними тестами на перевірку успішності учнів, розробив у 1864 році Джордж Фішер «scale books» - шкальовані книги, а також Дж. М. Раїс у 1894 р. надрукував тести у формі таблиць для перевірки орфографії в учнів [20]. А ось перші наукові праці з теорії тестів, з'явилися лише на початку XX ст. Зокрема, вагомий вклад зробив Ф. Гальтон, визначивши три головні принципи в теорії тестування, а саме:

- статистичне опрацювання результатів;
- визначення еталонів оцінки;
- застосування серії однакових досліджень до великої кількості обстежуваних.

У 1896 році Карл Пірсон дав поштовх теорії кореляції. Також цього ж року психолог Дж. М. Кеттел запропонував у праці «Розумові тести» вважати тестування засобом наукового дослідження та встановив вимоги до тестів, серед яких мають бути однакові умови для учнів, ліміт у часі – не більше ніж 60 хвилин, відсутність наглядачів під час проходження тесту та ін [20].

У 1916 році для перевірки знань учнів Л.М. Термен розробив шкалу, яку через деякий час навали Станфордською шкалою Біне, у якій було запропоновано коефіцієнт, що показував співвідношення розуму та віку досліджуваних, іншими словами коефіцієнт IQ. Після цього в Америці почали створювати «інтелектуальні» тести для учнів шкільного віку. У XX столітті американський дослідник В. А. Макколл розділив тести на два типи:

1. психологічні;
2. педагогічні.

Родоначальником педагогічних тестів вважають американського психолога Едуарда Лі Торндайка, який написав «Вступ до теорії психології та соціальних вимірювань» [21]. Під його керівництвом М. Стоун створив перший стандартизований тест з арифметики. А у 1915 році, Єркс склав незвичайний комплект тестів, у якому змінювалися системи підрахунків.

Із 60-х років XX ст. почалася новий етап у застосуванні тестів. Американський педагог Р. Тайлер розробив програму National Assessment of Educational Progress (NAEP) — державна програма педагогічних вимірювань, яка істотно вплинула на впровадження тестування в систему освіти США. Його головним принципом було те, щоб місцеві системи освіти не здійснювали тотальний контроль, а педагоги самостійно вдосконалювали цю систему і сам навчальний процес.

В Україні лише після здобуття незалежності почалася нова хвиля розвитку тестування, адже наслідки політики колишнього СРСР відчутні і до

сьогодні. Проте з 90-х років XX ст. Україна почала робити впевнені кроки уперед, чимало ВНЗ переходять на новітні умови прийому з використанням тестування, замість звичних для всіх екзаменів. Першими, хто відчув дану інновацію стали лікарі, у 1993 році Міністерство охорони здоров'я України за підтримки міжнародних фондів було введено тестування для ліцензування лікарів. Система «Кроки» - перша в Україні система тестування на державному рівні. У рамках цієї системи сформований банк завдань, до якого збираються всі емпіричні дані тестування та проводять аналіз.

У 2002-2005 роках в Україні Центром тестових технологій та за підтримки Міністерства освіти й науки України і Міжнародного фонду «Відродження» був запроваджений експеримент, який полягав у введені зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) у систему загальної середньої школи. У першому дослідженні брало участь 3 121 учня та 4 університети. З кожним роком кількість учасників та університетів збільшувалося і вже у 2005 році число випускників ЗНЗ становило 8 700 та всі вищі навчальні заклади крани. І вже з 2006 року проведення тестування перейшло на національний рівень та вже у цьому році кількість учасників проходження зовнішнього оцінювання піднялося до позначки 41 тисяч учнів. А з 2008 року складання ЗНО стало обов'язковим для вступу до ВНЗ, адже зарахування до першого курсу університету почали здійснювати лише за результатами незалежного тестування.

1.2 Основна класифікація тестів

Однією з сучасних технологій перевірки знань є тестування. Використання тестів у навчання вже увійшло в світову практику. Традиційно, в методиці навчання склалася думка, що призначення тестів – виявлення рівня засвоєння знань. Крім функції контролю тест має і інші навчальні функції: діагностичну, навчальну, організуючу, що розвиває та виховує. Тести можна розділити за типом на відкриті та закриті.

Закриті тестові завдання – питання, які мають готові варіанти відповідей, а студенту тільки необхідно обрати один або кілька правильних, встановити відповідність або продовжити відповідність. Завдання такої форми мають свої переваги, передусім, це швидкість виконання та зручність підрахунку правильно виконаних. Це дає можливість охоплювати більший зміст навчального матеріалу для контролю та додавати до контрольних робіт більше завдань. Також, даний тип тестування дає можливість формалізувати перевірку засвоєних знань із будь-якого предмету, в наслідок чого правильно оцінити результати навчання студента. Однак закриті тести мають і свої недоліки, перш за все, це велика ймовірність вгадування відповідей серед непідготовлених студентів під час виконання завдань, особливо високого рівня [12], [22].

Відкриті тестові завдання не містять готових відповідей, які студент має обрати, а вимагає від нього самостійного запису розв'язку в стислому та короткому вигляді, це може бути, наприклад, числове значення виразу. Завдання відкритого типу мають найбільшу перевагу перед завданнями закритого типу передусім у тому, що процесі їх виконання мінімізується відсоток вгадування [22].

При створенні тестів з математичних дисциплін використання тестових завдань відкритого та закритого типів не є достатнім для якісної перевірки набутих знань та навичок. Однією з самих важливих частин контролю знань з математичних дисциплін є перевірка не просто відповіді, а всього процесу розв'язування, але тестові завдання вказаних типів дають можливість перевірити або тільки відповіді або деякий проміжний крок.

Саме тому, викладачами кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей було розпочато розробку так званих «покрокових тестів», які представляють собою послідовність тестових завдань відкритого та закритого типів, об'єднаних в одне завдання з метою перевірки ходу розв'язання та остаточної відповіді певної задачі [16], [23]-[25]. Структурно завдання такого типу мають складатись із перевірки основних етапів розв'язання.

Розробка покрокових тестів дає можливість перевірки ходу розв'язання стандартних задач або певних методів розв'язання. Саме тому їх можна використовувати у якості індивідуальних робіт та навіть контрольних і підсумкових робіт.

Для використання покрокових тестів спочатку необхідно створити банк типових завдань з однаковою розмірністю та кількістю кроків в розв'язанні. Перевагами застосування покрокових тестів є:

- можливість заміни традиційних розрахункових робіт, що дозволить з меншими навантаженнями на викладача, який витрачає багато часу і зусиль на перевірку великої кількості одноманітних завдань;
- виключення людського фактору, що збільшує об'єктивність оцінювання;
- можливість одразу після написання, або завершення написання групою, побачити оцінку і допущені помилки, що робить більш ефективним зворотній зв'язок.

Але слід зазначити, що повністю виключати, такі традиційні засоби перевірки, як письмові контрольні, залікові та екзаменаційні роботи не бажано, бо покрокові тести мають лінійний алгоритм реалізації, що не дає можливості студенту самому обирати спосіб розв'язання та проявити набуті навички у повній мірі.

Розробка покрокових тестів є достатньо складною, оскільки потребує індивідуального підходу до кожної задачі та приведення розв'язку під лінійний алгоритм, який можна запрограмувати.

1.3 Аналіз структури тестових завдань з теми «Елементи векторної алгебри»

Першим завданням магістерської дисертації була розробка комплекту тестових завдань з теми «Елементи векторної алгебри». Завдання було

виконано у вигляді покрокових тестів на відкритій освітній системі управління навчанням Moodle із застосуванням мови розмітки веб-сторінок HTML.

В результаті було розроблено комплект з чотирьох типів покрокових тестових завдань, які охоплюють задані розділи «Елементи векторної алгебри» навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»:

1. Завдання на вектори, задані координатами.
2. Завдання на базис у просторі, з трьома способами розв'язання системи:
   - матричний метод;
   - формули Крамера;
   - метод Гаусса.
3. Завдання на скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.
4. Завдання на скалярний, векторний та мішаний добуток векторів, заданих координатами.

В силу складності створення завдань такого типу та індивідуальності підходу було створено по 5 варіантів на кожен тип завдання (для другого завдання по 5 варіантів на кожен метод розв'язання). Таким чином, в силу довільності вибору варіанту для кожного типу завдання, при формуванні варіанту домашньої контрольної роботи для студента, отримаємо: $5\times(5\times3)\times5\times5=1875$ варіантів, що ускладнює можливі не добросовісні дії під час її проходження. Зазначимо, що для перевірки якості розроблених тестових завдань даного комплекту буде достатньо, але для повноцінного використання у якості домашньої контрольної роботи кількість варіантів слід збільшити.

Проаналізуємо структуру кожного типу покрокового тестового завдання на прикладі другої задачі розробленого комплекту.

1.4 Аналіз структури завдання на базис у просторі

Розглянемо детальніше особливості побудови та структуру покрокового тесту та проаналізуємо його структуру на прикладі одного із варіантів тесту.

Оскільки запрограмувати вдається лише покрокове тестове завдання із фіксованою структурою і лінійним алгоритмом, було вирішено розробити для даної задачі три типових тестових завдання, в залежності від способу розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, як основної складової розв'язку задач такого типу. Також, для однакової ймовірності отримання студентом завдання з одним із трьох методів, варіантів завдань на кожен тип є однакова кількість, причому кожен варіант для всіх трьох типів має однакову умову. Повні коди шаблонів кожного типу завдання представлені у Додатку 1.

Проаналізуємо структуру одного варіанту для всіх трьох типів.

Нехай дані вектори (Див. Рис.1.1):

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\vec{q}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\vec{r}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix},\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\7\\-4\end{pmatrix}.$$

Рис. 1.1

Потрібно знайти розклад вектора $\vec{\alpha}$ за базисом векторів $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$, тобто числа α,β,γ такі, що $\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$ (1).

Крок I

Він є спільним для всіх трьох типів і полягає у необхідності перевірити чи має студент базові знання з лінійної алгебри, а саме – умову існування базису (Див. Рис.1.2)

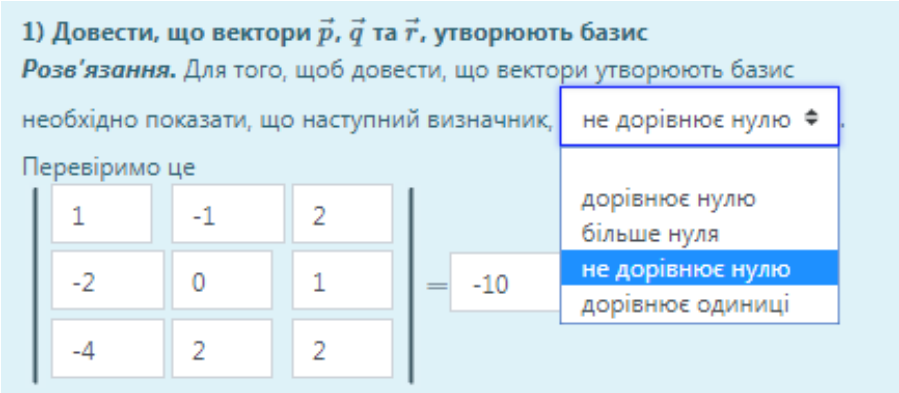

Рис.1.2

З випадаючого списку, студент має вибрати правильний варіант, коли вектори можуть утворювати базис. Запропоновані варіанти аналогічні та схожі між собою, для того щоб одночасно і заплутати студента і побачити його логіку та знання.

Після вибору умови, учень має наглядно показати та підтвердити вибір своєї відповіді, заповнивши та підрахувавши визначник, рядками якого є координати векторів $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$. Визначення визначника відповідає лекційному матеріалу та розв'язанню відповідних задач на практичних заняттях.

Крок II

На цьому кроці студент має заповнити систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) (Див. Рис.1.3), яка відповідає розкладу вектора $\vec{a}$ (1).

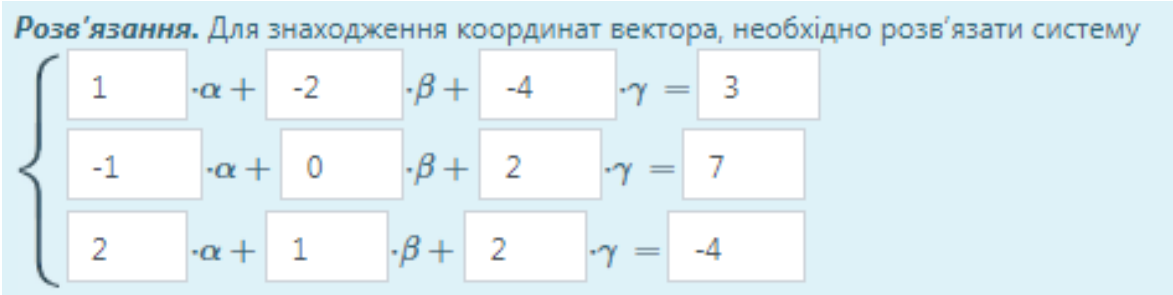

Рис.1.3

Крок III

Третій крок відповідає розв'язанню СЛАР, отриманої на попередньому кроці. Ця частина для трьох типів покрокових тестових завдань є індивідуальною і розділяє їх в залежності від методу розв'язання СЛАР. Слід

зазначити, що ця частина завдання перевіряє навички набуті при вивченні попереднього розділу дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», що відноситься до СЛАР. Розглянемо кожен із цих типів покрокових тестів окремо.

Метод 1. Матричний метод

Дана частина присутня в покроковому тестовому завданні I типу. В ній перевіряються вміння студента розв'язувати СЛАР матричним методом.

На основі попереднього кроку студенту необхідно спочатку знайти матрицю A^{-1}, яка є оберненою до основної матриці A. Для цього необхідно знайти визначник цієї матриці та всі елементи приєднаної матриці (Див. Рис. 1.4):

Рис.1.4

Завершальною частиною є запис координат вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$, які можна зробити лише після множення матриці A^{-1} на стовпчик вільних членів СЛАР, що відповідає координатам вектора в старому базисі (Див. Рис.1.5).

Рис.1.5

Метод II: формули Крамера

Знаходження розкладу вектора за базисом за допомогою формул Крамера полягає в наступному: якщо основний визначник матриці неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, k = 1, 2 \ldots n. \qquad (2)$$

де Δ_k – допоміжний визначник, який одержується з визначника Δ шляхом заміни k-го стовпця стовпцем вільних членів.

Оскільки у нашій задачі три рівняння та три невідомі, студенту необхідно підрахувати основний визначник та три допоміжних, які входять у формулу (2) (Див. Рис.1.6).

Рис.1.6

Після чого підраховані значення допоміжних визначників необхідно поділити на основний визначник, які в результаті відповідають координатам вектора в старому базис (Див. Рис.1.5).

Даний метод допоможе студенту закріпити навички у підрахунку визначників матриць.

Спосіб III: метод Гаусса

Даний метод є найважчим з точки зору розробки покрокового тестового завдання серед усіх трьох представлених, адже потрібно виконати деяку послідовність операцій над розробленою матрицею, щоб привести її до трикутного вигляду. Для спрощення використовують елементарні математичні операції доки лівий нижній кут матриці не буде мати нульові елементи. Існує три типи елементарних перетворень матриці:

1. Заміна двох рядків;
2. Множення рядка на ненульове число;
3. Додавання одного рядка до іншого.

Студенту необхідно за допомогою прямого ходу звести матрицю до верхньотрикутного виду. Застосування прямого ходу може показати як добре студент володіє елементарними математичними діями та може їх застосовувати на практиці.

Для початку необхідно записати розширену матрицю та за три дії звести її до трикутної, де вся елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю (Див. Рис. 1.7).

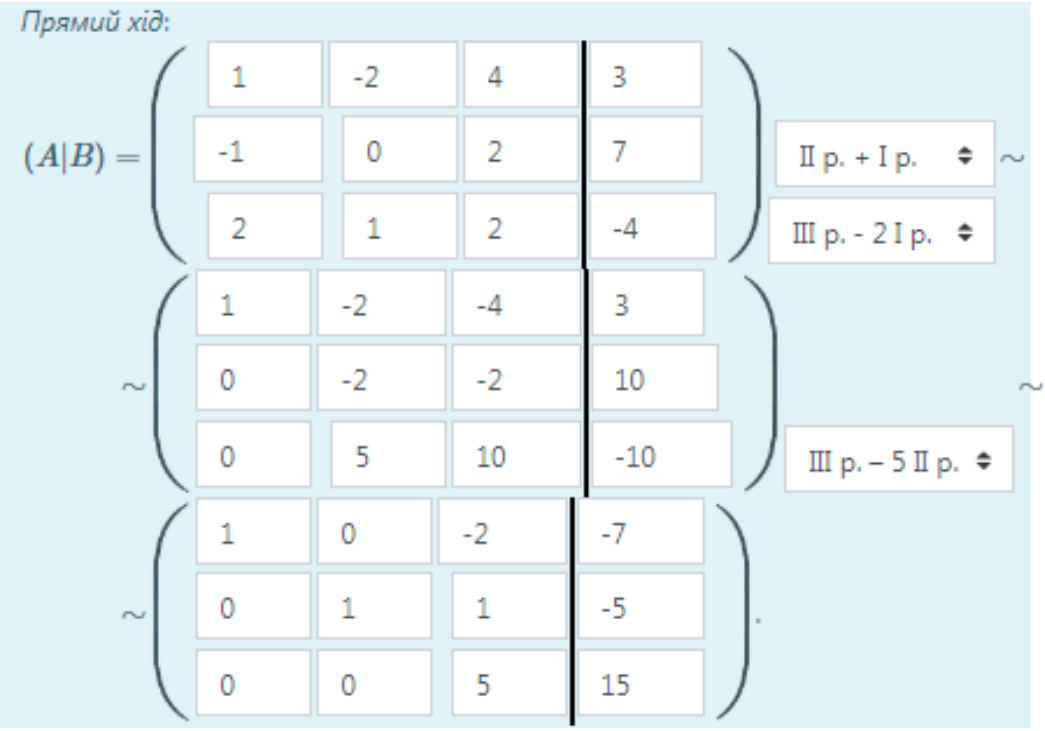

Рис.1.7

Після отримання трикутної матриці студент має самостійно виконати обернений хід, знайти α, β, γ починаючи з останнього рівняння в СЛАР, які відповідають координатам вектора в старому базисі (Див. Рис.1.5).

У завданні, студент має деякі, у своєму роді підказки, тобто для кожної рядкової операції йому на вибір дається чотири варіанти. Подібний підхід був вимушеною мірою, оскільки необхідність приведення ходу розв'язання до лінійного алгоритму вимагала однозначного визначення розширеної матриці системи після обнулення елементів під крайнім елементом 1-го рядка на першому кроці, і крайнім елементом 2-го рядка на другому кроці.

РОЗДІЛ ІІ
Статистичний аналіз якості покрокових тестів

2.1 Методики аналізу якості тестів

Американський психолог Е.Л.Торндайк у 1904 році написав перший підручник з теорії тестів «Вступ до теорії психології та соціальних вимірювань» [21]. Дана книга є початком розвитку методики аналізу тестування, на яку базувалися інші дослідники. У цьому ж році була Ч.Спірмен поклав початок класичній теорії тестування (КТТ), у якій індивідуальний бал опитуваного є сталим у межах тесту. Також у рамках даної теорії можна проводити кореляційний аналіз тестування однієї групи студентів не лише з одного предмету, а й із різних несумісних дисциплін. ще однією перевагою є кореляція між якістю окремого завдання та цілого тесту.

Багато уваги у своїх роботах по вивченню методики КТТ приділяли такі дослідники, як Л. Крокер та Дж.Алгіна [12], О.В. Авраменко, Г.Ю Павличенко, С.Д. Паращук [24], Л.О. Кухар та В.Н. Сергієнко [13], М.Б.Челишкова [27] та інші.

Розвиток комп'ютерних технологій призвів до розвитку нових методів аналізу та розробки тестів. Зокрема, у 1950-му та 1960-му роках, була створена перша робота у якій розглянуто сучасну теорію тестування (IRT – Item Response Theory). Дану теорію запропонували датський математик Георг Раш та австрійський соціолог Пол Лазарсфельд [28]. Застосування IRT дає можливість працювати з великими масивами даних, з використанням програмного забезпечення. Цю теорію розглядали у своїх наукових дослідженнях В.С. Аванесов [5], Т.В. Лісова [14], М.Б.Челишкової [27] та інших.

На кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського викладачі активно працюють над дослідженням та удосконаленням якості розроблених покрокових тестів з різних дисциплін вищої математики на основі методів аналізу КТТ та IRT. Тут слід відмітити роботи О.О.Диховичного і А.Ф.Дудко [29]-[34], І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний [35]- [38] та дипломну роботу Ю.В. Сорокіної [17].

У роботі [17] було зроблено перший статистичний аналіз покрокових тестових завдань. В даній роботі продовжується дослідження, розпочате у роботі [8].

Складна структура покрокових тестів, використання у такому тестовому завданні різних типів тестів, необхідність для кожної складової визначати свою «вагу» значно ускладнює та навіть унеможливлює застосування IRT-теорії.

Розглянемо детальніше методику аналізу тесту, яка використовується в роботі (детальніше, щодо методики аналізу тестів див. [29]).

На першому кроці формуємо таблицю результатів тестування. Необхідно обчислити індивідуальні бали іспитників $x_i, i=\overline{1,N}, N-$ кількість іспитників та загальні бали за кожне завдання $R_j, j=\overline{1,K}, K-$ кількість завдань. Матрицю результатів відсортовуємо в порядку спадання значень оцінок x_i. Представляємо індивідуальні бали у вигляді частотного розподілу, після чого здійснюємо графічну інтерпретацію емпіричних даних у вигляді гістограми, аналіз розподілу вибірки індивідуальних балів та обчислюємо вибіркові характеристики, а саме:

Вибіркове середнє – середня величина вибірки результатів, обчислюємо за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{N}.$$

Мода – значення елемента вибірки, яке найчастіше зустрічається у вибірці. У нашому випадку використовуємо формулу для моди на основі інтервального розподілу:

$$M_0 = x_0 + h\frac{f_{m0} - f_{m0-1}}{(f_{m0} - f_{m0-1}) + (f_{m0} - f_{m0+1})},$$

де x_0 – нижня межа модального інтервалу; h – ширина модального інтервалу; $f_{m0}, f_{m0-1}, f_{m0+1}$ – частоти відповідно модального, перед модального та після модального інтервалів.

Вибіркова дисперсія розподілу індивідуальних балів знаходимо за формулою:

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n-1}(x_j - \bar{x})^2. \quad (3)$$

Якщо у вибірці відомі всі індивідуальні спостереження будуємо варіаційний ряд $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$ та знаходимо середній елемент цього варіаційного ряду M_e, який називається вибірковою медіаною, причому,

$$M_e = \begin{cases} x_{(k+1)}, \text{ якщо } n = 2k+1; \\ \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, \text{ якщо } n = 2k. \end{cases}$$

Коефіцієнт асиметрії — числова характеристика розподілу ймовірностей дійсної випадкової величини. Знаходимо за формулою:

$$\gamma_1 = \frac{\overline{\mu_3}}{\sqrt[3]{S_x^2}},$$

де $\overline{\mu_3}$ – незміщена оцінка центрального моменту третього порядку.

Наступним кроком є оцінювання надійності тесту, для цього необхідно обчислити коефіцієнт надійності Кронбаха:

$$\alpha = \frac{K}{K-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{L} S_j^2}{S_x^2}\right),$$

де K – кількість завдань в тесті; S_j^2 – вибіркова дисперсія по розподілу балів за j-е завдання; S_x^2 – задано (3).

Даний коефіцієнт визначає внутрішню узгодженість, тобто:

- вказує зв'язок кожного завдання із загальним результатом;
- наскільки кожне завдання входить у протиріччя з іншими;
- ступінь вимірювання кожним завданням того, на що направлено тестування.

Значення $\alpha \geq 0,7$ вважаються ознакою узгодженості та високої надійності тесту. Зазначимо, що узгодженість тесту є необхідністю його валдіності.

Знаходимо коефіцієнт кореляції Пірсона:

$$\rho_j = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(x_{ij} - \overline{x_j})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 (x_{ij} - \overline{x_j})^2)}},$$

де x_{ij} – бал, який отримав i-ий студент за j-те завдання, $\overline{x_j} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{N} x_{ij}$ – середній бал за j-те завдання.

При значенні $\rho_j \geq 0,7$, тест має високу роздільну здатність. Якщо значення $\rho_j < 0,7$ це означає, що завдання потребує доопрацювання. Від'ємні значення ρ_j вказують на неправильність складання вказаного завдання. Такі завдання слід виключати із тесту.

Після підрахунку всіх необхідних характеристик потрібно обчислити кореляційну матрицю завдань та проаналізувати її. Для того, щоб тестові завдання не повторювали одне одного, то значення кореляції між ними має бути не високим $r_{ij} \leq 0,3$. Якщо ж дане завдання має від'ємну кореляцію з більшістю інших завдань, то необхідно зробити заміну цих завдань.

Ще одним важливим кроком є перевірка розподілу вибірки на нормальність за допомогою критерію Пірсона, або як його ще називають χ^2.

Першим кроком відкоректуємо отримані індивідуальні бали студентів. тоді гіпотеза про нормальність даних вибірки прийме вигляд:

H_0: вибірка індивідуальних балів має стандартний гауссівський розподіл $N(0,1)$;

H_1: розподіл вибірки індивідуальних балів не гауссівський.

Фіксуємо рівень значущості α. Будуємо на основі нормованих даних інтервальний статистичний розподіл, розрахувавши кількість інтервалів, наприклад, за формулою Стреджеса:

$$n = 1 + \left[\log_2 N\right],$$

де [.] – ціла частина числа, N – об'єм вибірки.

Позначимо інтервали через $E_{k,} k = \overline{1,d}$, причому $\bigcup_{k=1}^{d} E_{k,} = \mathbb{R}$ та позначимо через $p_k = P(E_k)$ – ймовірність попадання в інтервал E_k, за умови вірності гіпотези H_0 (тобто розподіл $N(0,1)$ ν_k – кількість елементів вибірки, що потрапили в інтервал $E_{k,} k = \overline{1,d}$).

Складемо статистику:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{d} \frac{(\nu_k - Np_k)^2}{Np_k}.$$

У відповідності до критерію Пірсона, ми відхиляємо гіпотезу про нормальність, якщо

$$\chi^2 > \chi^2_{d-1,\alpha-1},$$

де $\chi^2_{d-1,\alpha-1}$ – критичне значення розподілу χ^2_{d-1} на рівні значущості α.

Зауваження: для коректного застосування критерію Пірсона слід впевнитись, що

$$Np_k \geq 5.$$

2.2 Структура тестової контрольної роботи, що аналізується

Для аналізу був обран підсумковий тест на тему «Елементи лінійної алгебри», яка проводилася у студентів першого курсу у 2018/2019 н.р. за допомогою відкритої освітньої системи управління навчанням Moodle. У тестування взяло участь 297 студентів з різних факультетів КПІ ім. Ігоря Сікорського (повний список результатів тестування представлено на диску, що додається до дипломної).

Тест складається з п’яти покрокових завдань, кожне з яких оцінюється максимум у два бали. Для кожного завдання було створено по декілька однотипних варіантів. Під час написання контрольної роботи студент отримував свій варіант задач, котра обиралася довільним чином.

Наведемо приклад одного з варіанту підсумкової контрольної роботи.

Завдання 1. Матричний многочлен 2 х2 (Див. Рис.2.1)

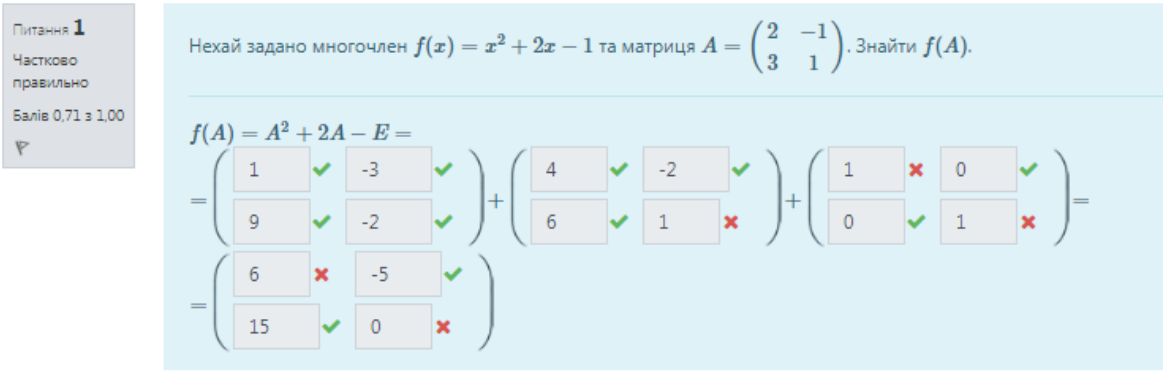

Рис.2.1

Завдання 2. Визначник 4 х4. Приведення до трикутного вигляду (Див. Рис.2.2).

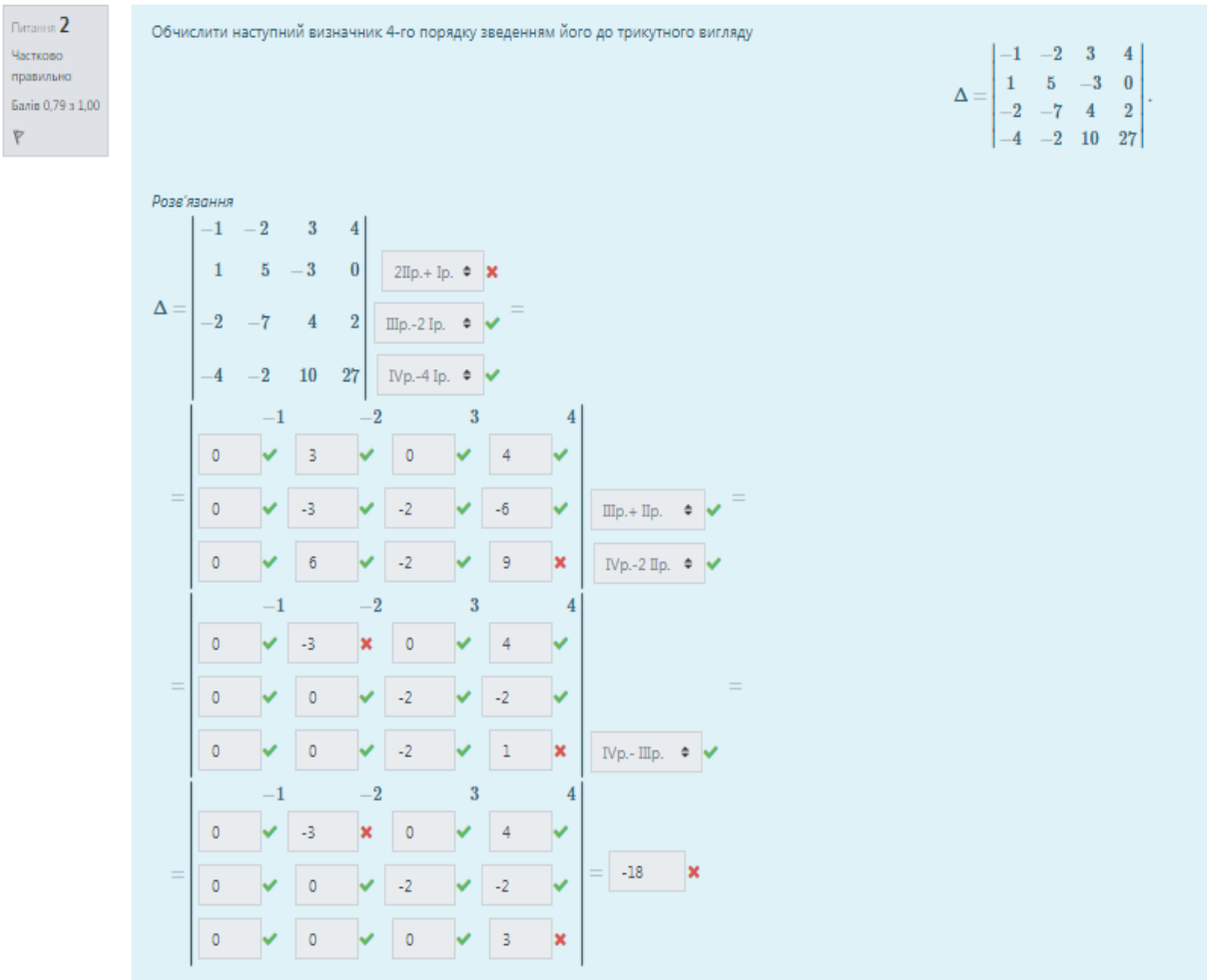

Рис.2.2

Завдання 3. Матричне рівняння $XA = B$ (Див. Рис.2.3).

Питання **3**
Частково правильно
Балів 0,46 з 1,00

Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Розв'язок даного рівняння слід шукати у вигляді

- $X = B \cdot A$
- $X = B / A$
- $X = A^{-1} \cdot B$ ✗
- $X = B \cdot A^{-1}$

Балів 0,00 з 2,00

Правильна відповідь: $X = B \cdot A^{-1}$

б) Знайти A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 3 & -11 & 18 \\ -2 & 8 & -13 \end{pmatrix}$$

в) Знайти розв'язок

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Рис.2.3

Завдання 4. Невироджені СЛАР. Формули Крамера (Див. Рис.2.4)

Питання **4**
Частково правильно
Балів 0,63 з 1,00

Нехай дано систему трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Розв'язати систему за формулами Крамера.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -16$$

Відповідь: $x_1 = 0$, $x_2 = -2.75$, $x_3 = 4$.

Рис.2.4

Завдання 5. Загальна СЛАР (Див. Рис.2.5).

Питання **5**
Частково правильно
Балів 0,93 з 1,00

Розв'язати загальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= -5 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -16 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \end{cases}$$

1) Прямий хід (звести розширену матрицю системи до східчастого вигляду):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & -2 & 10 & -16 \\ -3 & -2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{II р. - 2 I р.} \\ \text{III р. + 3 I р.} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III р. - 2 II р.} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

2) Зворотній хід.

а) Вкажіть ранги основної та розширеної матриць:

$r(A) =$ 2 , $r(A|B) =$ 2 .

б) На основі попередній пунктів зробіть висновок щодо сумісності системи та вибору базисних та вільних змінних:

- Система сумісна та має дві базисні змінні x_1, x_3, та вільні змінні x_2, x_4
- Система сумісна та має три базисні змінні x_1, x_2, x_3, та вільну змінну x_4
- Система сумісна та має дві базисні змінні x_1, x_2, та вільні змінні x_3, x_4 ✔
- Система сумісна і має єдиний розв'язок
- Система не сумісна

Балів 18,00 з 18,00

Правильна відповідь: Система сумісна та має дві базисні змінні x_1, x_2, та вільні змінні x_3, x_4

в) Підсумовуючи проведений аналіз, виконайте зворотній хід та використовуючи вимоги щодо оформлення запишіть загальний розв'язок даної системи.

Вимоги щодо правильного оформлення відповіді

Для того щоб не втратити бали при наборі відповіді слід притримуватись наступних вимог:

1) Якщо система не сумісна, то Ви маєте у відповіді, в КОЖНУ комірку записати «Х»;

2) Якщо система невизначена, то на основі пункту б) обираєте базисні та вільні змінні і для ВІЛЬНИХ змінних ВИКОРИСТОВУЄТЕ НАСТУПНІ ЛІТЕРИ:

$$x_1 = s,\ x_2 = t,\ x_3 = u,\ x_4 = v;$$

3) При записі відповіді ВІЛЬНИЙ член має бути ПЕРШИМ, ПРОБІЛИ використовувати у запису відповіді НЕ МОЖНА.

Приклад оформлення.

Припустимо, що в результаті прямого ходу вийшло, що змінні x_2, x_3 – базисні, а x_1, x_4 – вільні, то у відповіді слід замість x_1 писати s, а замість x_4 – v.

Крім того, будемо вважати, що загальний розв'язок системи має наступний вигляд (запис із застосуванням ДРУГОГО пункту):

$$x_1 = s,\ \ x_2 = 3 + 2v - s,\ \ x_3 = 3s - v - 5,\ \ x_4 = v.$$

Тоді, для отримання повного балу за знайдену відповідь, її слід вносити у наступному вигляді (з врахуванням ТРЕТЬОГО пункту):

Відповідь: $\begin{cases} x_1 &= s \\ x_2 &= 3 - s + 2v \\ x_3 &= -5 + 3s - v \\ x_4 &= v \end{cases}$.

Відповідь:

$x_1 =$ 1-u+v ✖

$x_2 =$ -3-2v ✔

$x_3 =$ u ✔

$x_4 =$ v ✔

Рис.2.5

2.3 Аналіз якості тесту в цілому

Застосуємо розроблену методику з якості тестів на проведеному підсумковому тесті з теми «Елементи лінійної алгебри» в цілому.

На першому кроці сформовано таблицю результатів, фрагмент яких представлено на Табл. 2.1. Повний список результатів тесту знаходиться на диску, що додається до дипломної.

П.І.Б.	**Результати тесту**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Оцінка 10 б.**
Бикова Ангеліна	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Говорова Світлана	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Грона Юрій	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Гура Захарій	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Долян Богдан	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Іванченко Юлія	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Кавун Федір	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Клюба Максим	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Косовський Антон	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Кот Максим	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Кузьменко Софія	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Лозяк Мар`яна	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
Лялін Ігор	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	10,00
...	...	...	...	...	...	...
Косенко Магдаліна	0,00	0,38	0,00	0,23	0,84	1,45
Андріанарісуа Тіна	0,67	0,00	0,52	0,00	0,00	1,19
Буднік Павло	0,00	0,67	0,00	0,17	0,00	0,84
Ременюк Вадим	0,00	0,41	0,00	0,27	0,00	0,68
Сафарян Давид	0,33	0,07	0,23	0,00	0,00	0,63
Трофименко Микита	0,42	0,00	0,00	0,00	0,21	0,63
Малашкін В'ячеслав	0,00	0,00	0,00	0,00	0,26	0,26
Вибіркове середнє	1,64	1,80	1,41	1,66	1,46	7,98
Вибіркова дисперсія	0,27	0,18	0,40	0,33	0,27	4,28

Табл.2.1

За кожне завдання, студент міг отримати максимум 2 бали. Відповідно, максимальний загальний бал за тест, відповівши вірно на всі питання, складає 10 балів.

На наступному кроці проведено аналіз розподілу вибірки результатів тестування. Тобто на основі додатку 4, дані представляємо у вигляді частотного розподілу індивідуальних балів (Див. Табл.2.2).

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	5	5	0	7	14	13	23	42	71	117

Табл.2.2

На основі таблиці частот будуємо гістограму частотного розподілу індивідуальних балів представлено на Рис.2.6.

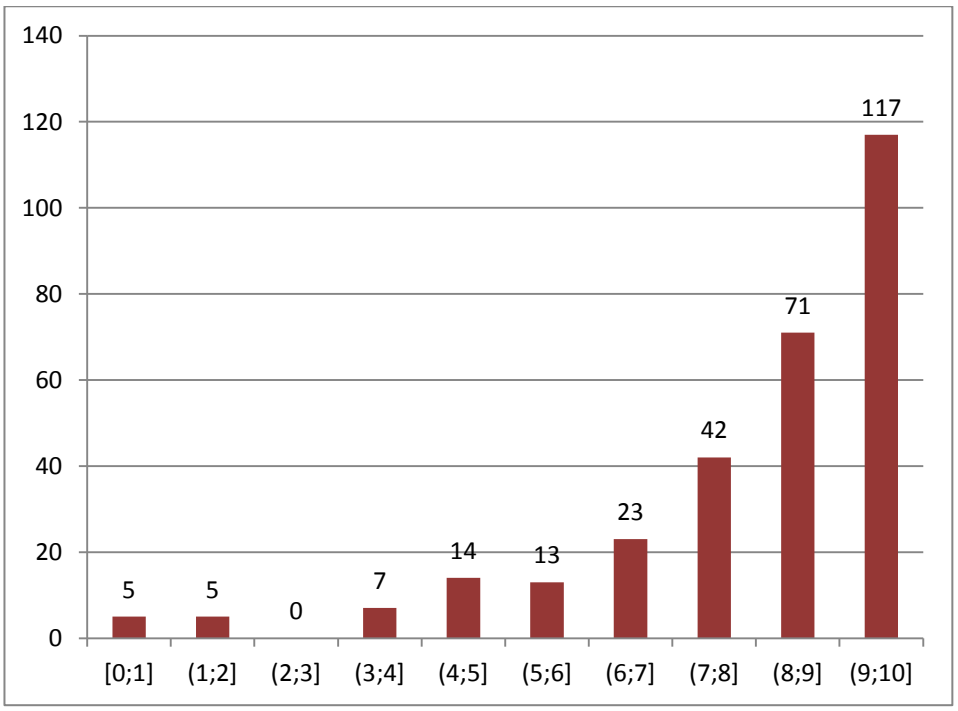

Рис.2.6

Після побудови гістограми частот необхідно визначити міри центральних тенденцій, тобто моду, медіану та середнє вибіркове значення.

Тест є правильно складеним, якщо він є унімодальним та значення моди є близьким до вибіркового середнього. У нашому випадку, розподіл балів тесту є унімодальним, $M_o = 9,28$, але значення моди та вибіркового середнього, $\bar{x} = 7,98$ не є близькими, тому даний тест потребує коректування.

Значення асиметрії $\gamma_1 = -1,63$ та медіани $M_e = 8,7$, вказують, що більша кількість студентів отримали оцінки вище середнього балу. Це говорить про те, що тест є простим, для рівня студентів, що його писали.

Коефіцієнт надійності Кронбаха даного тесту $\alpha = 0,83$, що є більшим за нижню межу допустимих значень рівну 0,7. Це вказує на достатньо високу якість та надійність тесту.

Знайдені коефіцієнти кореляції Пірсона окремо кожного завдання тесту (Див. Табл.2.3є більшими за взяту нижню межу 0,7. Отже, робимо висновок, що завдання складені правильно та мають високу розрізняльну здатність.

№ завдання	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Коеф.кореляції Пірсона	0,74	0,71	0,81	0,80	0,79

Табл.2.3

Перевірка розподілу вибірки індивідуальних балів за допомогою критерію Пірсона (Див. Табл.2.4) на нормальність з рівнем значущості 0,05 показала, що $\chi^2 = 37,52 > 11,07 = \chi^2_{5,0.05}$. Отже, гіпотезу щодо нормальності вибірки слід відхилити.

Кількість інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика хі^2
1	<-1,64	*0,05*	24	15,00	5,40
2	(-1,64; -1,11)	0,08	15	24,65	3,78
3	(-1,11; -0,58)	0,15	22	43,79	10,85
4	(-0,58; -0,05)	0,20	40	59,13	6,19
5	(-0,05; 0,48)	0,20	75	60,68	3,38
6	>0,48	0,32	121	93,74	7,93
		1,00	**297**	**297,00**	**37,52**

Об'єм вибірки	297
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу хі^2	5
Критичне значення для Критерію Пірсона	11,07
Значення статистики хі^2	37,52

Табл.2.4

Ще однією не менш важливою є знаходження кореляційної матриці (Див. Табл.2.5).

Номер завдання	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
1	1				
2	0,47	1			
3	0,55	0,40	1		
4	0,45	0,48	0,55	1	
5	0,42	0,54	0,53	0,61	1

Табл.2.5

Одразу бачимо, що всі значення елементів в матриці додатні, це свідчить, що завдання не суперечать одне одному. Також зазначимо, що значення коефіцієнтів кореляції досить високі, а саме більше за 0,3, із цього робимо висновок, що завдання частково дублюють одне одного. Проте, цьому є своє пояснення. Адже, задачі, які підібрані у підсумковій контрольній роботі є базовими та стандартними у даному курсі та мають спільні моменти у своїх розв’язаннях.

Оскільки в тестуванні брали участь студенти різних факультетів, які мають різний рівень підготовки, проведемо окремо аналіз якості по факультетах. Це доцільно ще тим фактом, що левова частина студентів, які приймали участь у тестуванні є студентами ФІОТ, які, враховуючи високу популярність спеціальностей, що пропонує факультет, є достатньо добре підготовленими.

Статистичний аналіз результатів тестування студентів ФІОТ показав, що міри центральних тенденцій $\bar{x} = 8,51, M_e = 8,92$ та $M_0 = 9,28$ є більш близькими ніж для всієї вибірки, коефіцієнт асиметрії, рівний –2,23 значно більший ніж для всієї вибірки в цілому. Тобто для студентів ФІОТ він виявився більш простим, ніж для студентів інших факультетів. Коефіцієнт надійності Кронбаха $\alpha = 0,81$, що свідчить про надійність тесту для студентів ФІОТ. Однак, коефіцієнти кореляції Пірсона (Див.Табл.2.7) показують гіршу розрізняльну здатність завдань №2 та значення 1-го і 4-го завдань є близькими до граничного значення, але меншими за граничне значення. Це вказує на гіршу розрізняльну здатність для студентів з високим рівнем підготовленості.

Частотний розподіл індивідуальних балів студентів ФІОТ та гістограма частотного розподілу індивідуальних балів представлено на Табл. 2.6 та Рис.2.7 відповідно.

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	2	0	0	1	5	5	8	29	53	86

Табл.2.6

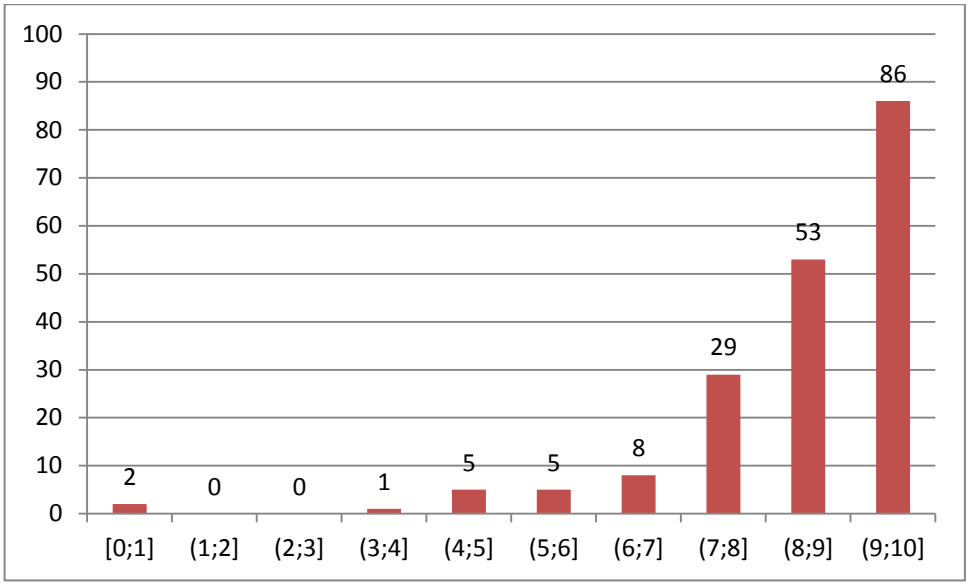

Рис.2.7

Перевірка розподілу вибірки студентів ФІОТ індивідуальних балів за допомогою критерію Пірсона (Див.Табл.2.8) показав, що $\chi^2 = 12,96 > 7,81 = \chi^2_{3,0.05}$. Отже, гіпотезу щодо нормальності треба відхилити, але слід відмітити значне зменшення значення статистики χ^2.

№ завдання	1	2	3	4	5
Коефіцієнт корелляції Пірсона	0,67	0,53	0,79	0,64	0,76

Табл.2.7

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика хі^2
1	>-1,41	*0,08*	15	14,98	0,00
2	(-1,41;-0,62)	0,19	20	35,61	6,84
3	(-0,62;0,17)	0,30	51	56,69	0,57
4	>0,17	0,43	103	81,71	5,55
		1,00	**189**	**189,00**	**12,96**

Об'єм вибірки	189
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу хі^2	3
Критичне значення для Критерію Пірсона	7,81
Значення статистики хі^2	12,96

Табл.2.8

Аналізуючи результати студентів ФБМІ та РТФ разом бачимо, що $\bar{x} = 7,05$ та $M_e = 7,38$ є близькими, але значно відрізняються від моди $M_o = 9,30$. Крім того, коефіцієнт асиметрії дорівнює –0,9, тобто для студентів цих факультетів тест виявився більш складним, але все ж є дещо заниженим. Коефіцієнт Кронбаха та коефіцієнти кореляції Пірсона вказують на високу надійність тесту та високу розрізняльну здатність всіх завдань для студентів даних факультетів.

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика хі^2
1	<-1,49	*0,07*	10	7,34	0,96
2	(-1,49;-0,96)	*0,10*	8	10,93	0,79
3	(-0,96;-0,42)	*0,17*	12	18,00	2,00
4	(-0,42;0,11)	*0,21*	24	22,45	0,11
5	(0,11;0,64)	*0,20*	14	21,20	2,45
6	>0,64	0,26	40	28,07	5,07
		1,00	108	108,00	11,37

Об'єм вибірки	108
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу хі^2	5
Критичне значення для Критерію Пірсона	11,07
Значення статистики хі^2	11,37

Табл.2.9

Перевірка розподілу вибірки студентів ФІОТ індивідуальних балів за допомогою критерію Пірсона (Див.Табл.2.9) показав, що $\chi^2 = 11{,}37 > 11{,}07 = \chi^2_{5,0.05}$. Отже, гіпотезу щодо нормальності треба відхилити, проте слід відмітити, що значення статистики χ^2 дуже близьке до критичного значення критерію.

Статистичний аналіз результатів тестування ФБМІ показав, що $\bar{x} = 6{,}35, M_e = 6{,}64$ є близькими, проте дуже відрізняється від значення моди $M_o = 9{,}30$. Коефіцієнт асиметрії дорівнює –0,56, це говорить про те, що для студентів даного факультету виявився більш складним ніж для студентів ФІОТ, але все ж є дещо заниженої складності. В Табл.2.10 представлено частотний розподіл індивідуальних балів студентів ФБМІ.

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	3	5	0	4	7	7	8	7	8	14

Табл.2.10

На основі таблиці частот побудували гістограму частотного розподілу індивідуальних балів (Див.Рис.2.8).

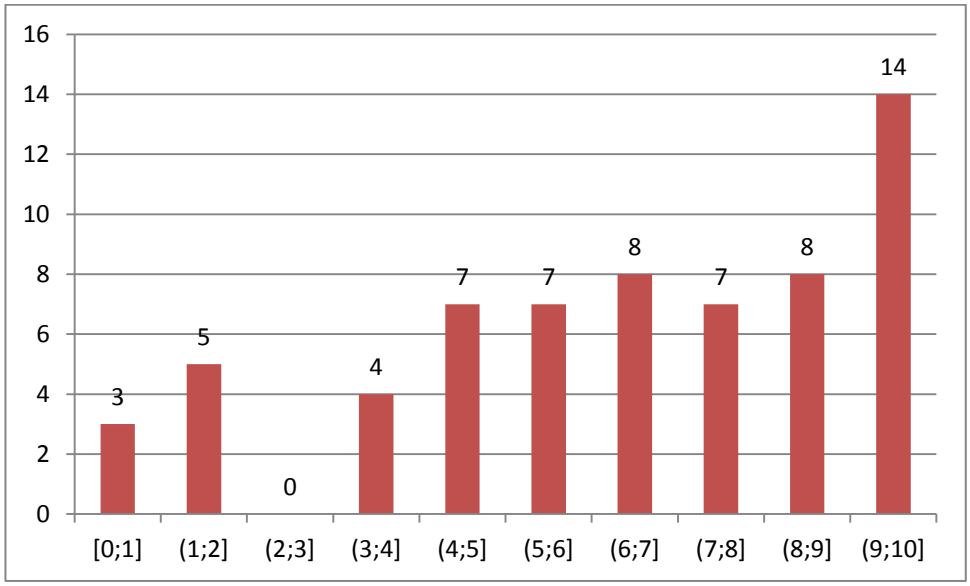

Рис.2.8

Перевірка розподілу вибірки студентів ФБМІ індивідуальних балів за допомогою критерію Пірсона (Див.Табл.2.11) показав, що $\chi^2 = 5{,}62 < 11{,}07 = \chi^2_{5,0.05}$. Отже, немає підстав у відхолені гіпотезу щодо нормальності розподілу.

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика хі^2
1	<-0,94	*0,17*	12	10,88	0,12
2	(-0,94;-0,38)	*0,18*	8	11,39	1,01
3	(-0,38;0,19)	*0,22*	13	14,02	0,07
5	(0,19;0,76)	*0,20*	9	12,61	1,03
6	>0,76	0,22	21	14,10	3,38
		1,00	63	63,00	5,62

Об'єм вибірки	63
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу хі^2	5
Критичне значення для Критерію Пірсона	11,07
Значення статистики хі^2	5,62

Табл.2.11

Аналізуючи результати студентів РТФ бачимо, що $\bar{x} = 8,02, M_e = 8,34$ майже близькі між собою, проте мають відхилення від значення моди $M_o = 9,29$. Коефіцієнт асиметрії $\gamma_1 = -1,05$ показує що тест виявився не надто складним для студентів РТФ. Коефіцієнт Кронбаха $\alpha = 0,73$ та кореляційні коефіцієнти Пірсона вказують на високу надійність тесту та високу розрізняльну здатність всіх завдань для студентів РТФ.

Представимо індивідуальні бали студентів у вигляді частотного розподілу (Див.Табл.2.12) та графічно, у вигляді гістограми (Див.Рис.2.9).

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	0	0	0	2	2	1	7	6	10	17

Табл.2.12

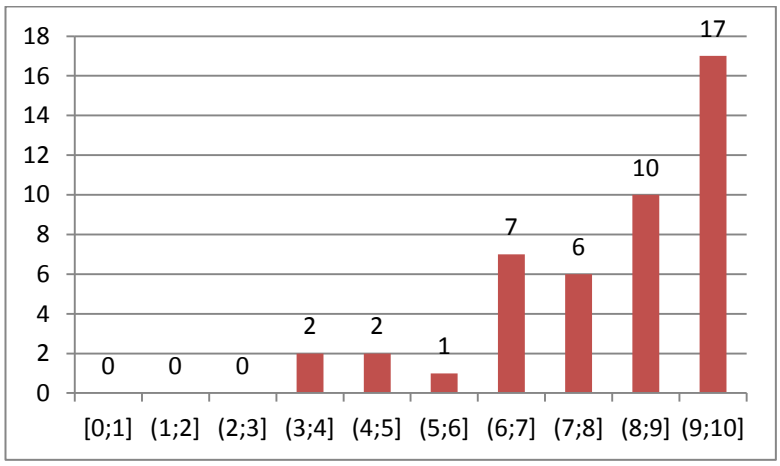

Рис.2.9

Перевірка розподілу вибірки студентів РТФ індивідуальних балів за допомогою критерію Пірсона (Див. Табл. 2.13) показав, що $\chi^2 = 3,04 < 7,81 = \chi^2_{3,0.05}$. Отже, гіпотезу щодо нормальності приймаємо.

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика хі^2
1	<-0,80	*0,21*	9	9,52	0,03
2	(-0,80;-0,15)	*0,23*	6	10,27	1,77
3	(-0,15;0,50)	*0,25*	12	11,29	0,04
4	>0,50	0,31	18	13,92	1,19
		1,00	45	45,00	3,04

Об'єм вибірки	45
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу хі^2	3
Критичне значення для Критерію Пірсона	7,81
Значення статистики хі^2	3,04

Табл.2.13

Отже, узагальнюючи весь вище проведений аналіз підсумкового тесту, можемо зробити наступні висновки:

- коефіцієнт надійності Кронбаха показав високу надійність тестової контрольної роботи, як по всій вибірці, так і по студентам окремих факультетів. Крім того, коефіцієнт кореляції Пірсона показує високу розрізняльну здатність по всій вибірці, але для студентів ФІОТ та РТФ значення коефіцієнта Пірсона для 1,2,4 задач близькі до граничного значення, але дещо менші за нього. Отримані результати показують, що дана тестова контрольна робота є надійною, завдання між собою є узгодженими та мають високу розрізняльну здатність.
- всі студенти, які проходили даний підсумковий тест, мали різний рівень підготовки, проте для більшості він виявився достатньо простим, адже коефіцієнт асиметрії є від’ємним. Критерій Пірсона для всієї вибірки та окремо для студентів ФІОТ, ФБМІ та РТФ разом, і окремо по ФБМІ та РТФ, показав неоднорідність вибірки. Це проявляється у тому, що левова частка студентів, які брали участь в тестуванні є студентами ФІОТ і є добре підготовленими у порівнянні зі студентами інших факультетів. Це в значній мірі вплинуло на деякі статистичні характеристики, зокрема, на коефіцієнт асиметрії та результат критерію Пірсона для всієї вибірки (значення відповідної статистики значно більше за значення по окремим факультетам).
- підсумовуючи всі отримані результати, при подальшому дослідженні подібних тестових робіт слід враховувати рівень підготовленості студентів, і або намагатись вибірку формувати більш однорідною або розбивати студентів

за рівнем їх підготовленості. Наприклад, можна спробувати у якості рівня підготовленості використовувати бали ЗНО або КРЗЗ-0.

2.4 Аналіз якості кожного покрокового завдання

Проведемо аналіз якості окремо кожного покрокового завдання, що входили до підсумкового тесту. Перша спроба аналізу якості покрокового тесту була зроблена в роботі [20], у якій було зроблено аналіз тесту з дисципліни «Елементи лінійної алгебри». Також, окремо було досліджено перші два завдання покрокового тесту, виявлено, що вони мають високу надійність та мають структурні особливості.

Застосуємо описану методику аналізу тесту в п.2.1 для кожного покрокового тестового завдання з тесту.

Матричний многочлен 2 х2

Розглянемо перше завдання з підсумкового тесту про матричний многочлен. На першому кроці сформуємо таблицю результатів та кожну суму балів переведемо у десятибальну систему для зручності. Кожна комірка в таблиці має свою вагу, в залежності від складності виконання дії, що має виконати студент. Максимум за кожен вірно зроблений крок, студент може отримати або 1 або 2 бали. Для зручності зробимо групування стовпців за блоком виконання, таким чином отримуємо, що тепер за кожну дію максимум можна отримати 4 або 8 балів. Та за повністю правильно зроблене завдання студент може заробити 24 бали і якщо ці бали перевести у десятибальну шкалу, то виходить 10 балів. На Табл.2.14 наведений фрагмент згрупованої та відсортованої за спаданням таблиці з результатами. Повна таблиця результатів представлена на диску, що додається до дипломної.

Матриця	**Доданок з A^2**	**Доданок з А**	**Доданок з Е**	**f(A)**	**Сума балів**	**Оцінка**
Максимум балів / **П.І.Б.**	**8**	**4**	**4**	**8**	**24**	**10 б.**
Абдуллаєва Мелек	8	4	4	8	24	10,00
Авраменко Євгеній	8	4	4	8	24	10,00
Андрухович Микола	8	4	4	8	24	10,00
Афанасьєв Максим	8	4	4	8	24	10,00
Бабанський Олександр	8	4	4	8	24	10,00
Баланюк Северин	8	4	4	8	24	10,00
Барановська Анастасія	8	4	4	8	24	10,00
…	…	…	…	…	…	…
Пащенко Геннадій	2	0	2	0	4	1,67
Сафарян Давид	0	0	4	0	4	1,67
Карпенко Валерія	0	1	2	0	3	1,25
Піскун Вадим	0	0	2	0	2	0,83

Табл.2.14

На другому кроці, на основі даних з таблиці результатів будуємо інтервальний частотний розподіл та графічне представлення результатів у вигляді гістограми розподілу індивідуальних балів, відповідно Табл.2.15 та Рис.2.10.

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	7	4	9	9	22	7	12	27	16	184

Табл.2.15

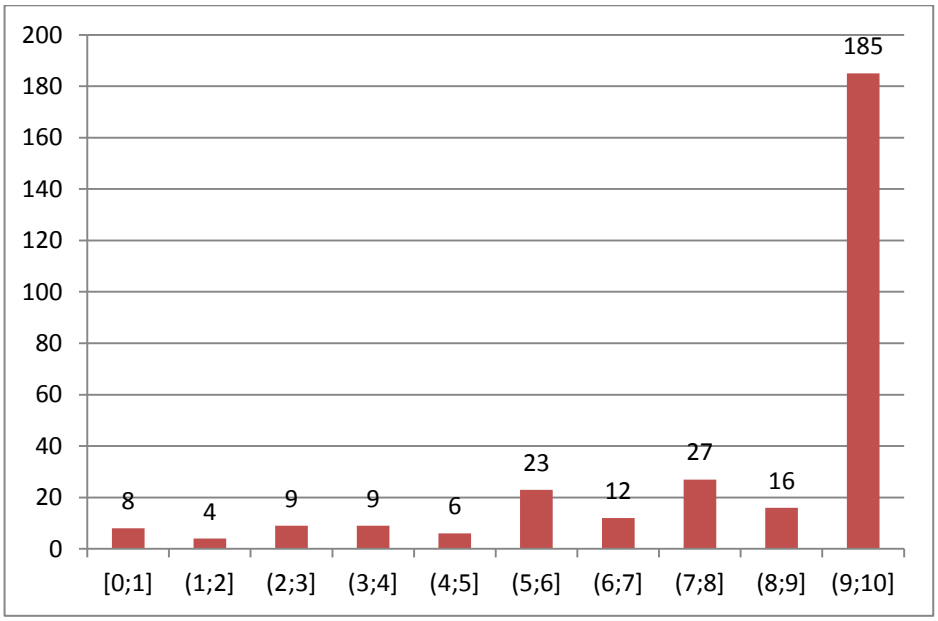

Рис.2.10

Із частотного розподілу бачимо, що більша частина результатів вибірки знаходиться вище значення моди, $M_o = 9,48$, тому можемо зробити висновок, що розподіл балів є унімодальний. Також, тестове завдання потребує коректування, адже значення моди та вибіркового середнього $\bar{x} = 8,21$ не є близькими.

Значення асиметрії $\gamma_1 = -1,48$ та медіани $M_e = 10$, вказують на те, що завдання є простим, для студентів які його писали.

Коефіцієнт надійності Кронбаха даного тесту $\alpha = 0,91$. За нижню межу допустимих значень коефіцієнта надійності обирають 0,7. Отже, бачимо, що наше значення коефіцієнта більше припустимого, що говорить про достатньо високу якість завдання.

Тепер необхідно перевірити гіпотезу про нормальність розподілу даної вибірки, яка детально описана у п.2.1.

Після підрахунку теоретичних частот на 9 інтервалах, було виявлено, що значення перших двох теоретичних частот менше за 5, тому у зв'язку з групуванням, кількість частот зменшилося до 6.

Перевірка гіпотези щодо нормальності розподілу на рівні значущості 0,05 з кількістю ступенів волі розподілу 3 показала, що висунуту гіпотезу потрібно відхилити, оскільки $\chi^2 > \chi_{кр}{}^2$, а саме $77{,}35 > 7{,}81 = \chi^2{}_{3;0{,}05}$, де $\chi^2{}_{3;0{,}05}$ – критичне значення критерію Пірсона (Див. Табл.2.16).

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика xi^2
1	<-1,68	*0,05*	29,00	13,80	16,73
2	(-1,682; -1,25)	0,06	5,00	17,40	8,84
3	(-1,25; -0,83)	0,10	24,00	29,47	1,02
4	(-0,83; -0,4)	0,14	15,00	41,72	17,11
5	(-0,4; 0,03)	0,17	24,00	49,35	13,02
6	>0,03	0,49	200,00	145,26	20,63
		1,00	297	297,00	77,35

Об'єм вибірки	297
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу xi^2	3
Критичне значення для Критерію Пірсона	7,81
Значення статистики xi^2	77,35

Табл.2.16

Складемо та проаналізуємо кореляційну матрицю(Див.Табл.2.17). Для зручності об’єднаємо на групи за діями виконання, в результаті чого отримали чотири блоки. Одразу бачимо, що всі коефіцієнти кореляції більше нуля, а отже, у завданні відсутні уявні помилки. Також зазначимо, що всі значення кореляційної матриці більше за 0,3, з чого випливає, що дії залежні один від одного. Це аргументується особливостями покрокових тестів, що результат попередньо виконаної дії впливає на наступний її крок. Тому, у цьому випадку, високі показники не є «поганими» показниками. Проте не всі частини завдання мають високі показники, елементи матриці A^2 до елементів матриць A та E показали низькі показники взаємозв’язку між собою, 0,29 та 0,25 відповідно.

Останнім рядком на рис. знайдені коефіцієнти кореляції Пірсона окремо кожного елементу завдання тесту до загального балу. Бачимо, що показники коефіцієнтів елементів матриці A^2 та f(A) достатньо високі, які більші за 0,8. Це говорить про те, що ці кроки мають високу розрізняльну здатність. А знайдені коефіцієнти елементів матриць A та E, менші за нижню допустиму межу 0,7, з чого робимо висновок, що вони потребують коректування.

	Доданок з A^2	Доданок з А	Доданок з Е	f(A)
Доданок з A^2	1,00			
Доданок з А	0,29	1,00		
Доданок з Е	0,36	0,25	1,00	
f(A)	0,67	0,61	0,52	1,00
Коефіцієнт корелляції Пірсона	0,82	0,65	0,61	0,95

Табл.2.17

Підсумовуючи вище проведений аналіз першого завдання, можемо зробити наступні висновки:

- Оскільки, значенні асиметрії від'ємне і дорівнює -1,48, це вказує на те, що завдання виявилися простими для студентів;
- Коефіцієнт Кронбаха $\alpha = 0,91$ та більша частина коефіцієнтів кореляції Пірсона є більшими за припустиме граничне значення, отже, дане завдання можемо вважати якісним та надійним, проте частини знаходження доданків з А та Е потребують коректування;
- У зв'язку з тим, що коефіцієнти кореляції Пірсона доданків з А та Е менше допустимого значення, тому можна спробувати об'єднати ці два кроки, адже у даній частині завдання студенту необхідно просто ввести дані матриць. Об'єднання цих двох складових в один крок розв'язання дає наступні значення(Табл. 2.18). Можна побачити, що коефіцієнт Пірсона об'єднання кроків знаходження А та Е збільшився до 0,8, що вказує на слушність запропонованої ідеї.

Елемент завдання	Доданок з A^2	Доданок з А т а Е	f(A)
Коефіцієнт кореляції Пірсона	0,82	0,80	0,95

Табл.2.18

Визначник 4х4. Приведення до трикутного вигляду

Докладно проаналізуємо друге покрокове завдання тесту, яке полягало у приведенні визначника 4х4 до трикутного вигляду. У другому завданні студенту необхідно на першому кроці вказати три дії, виконавши які, другий, третій та четвертий рядки у першому стовпці стануть дорівнювати нулю. За правильно кожну правильно виконану дію можна отримати по 6 балів. Далі записується результат визначника після обнулення стовпця 1, та в залежності від елемента можна отримати 2 або 6 балів. Наступною дією є обнуління третього та четвертого рядка у 2 стовпці, кожна вірна відповідь важить 6 балів. Наступні дії мають таке саме розбиття, аналогічні як і попередні. Та кінцева відповідь, значення самого визначника, оцінюється у 6 балів. Підсумувавши всі бали за кожен елемент, отримує, що максимум за це

завдання студент може заробити 162 бали, після чого переводимо отримані балі у десятибальну шкалу та відсортуємо у порядку спадання. На Табл.2.19 наведений фрагмент відсортованої за спаданням таблиці з результатами. Повна таблиця результатів представлена на диску, що додається до дипломної.

Частина завдання	Обнулення в стовпці 1			Результат обнулення стовпця 1						...	Відповідь	Сума балів	Оцінка
Дія	№ рядка			Елементи визначника						...	6	162	10 б.
Елемент дії	2	3	4	21	22	23	...	43	44	...			
Макс.бал / П.І.Б.	6	6	6	2	2	2	...	6	6	... / ...	6	162	10 б.
Абдуллаєва Мелек	6	6	6	2	2	2	...	6	6	...	6	162	10,00
Авраменко Євгеній	6	6	6	2	2	2	...	6	6	...	6	162	10,00
Ананенко Герман	6	6	6	2	2	2	...	6	6	...	6	162	10,00
Арутюнов Артур	6	6	6	2	2	2	...	6	6	...	6	162	10,00
Асаулюк Артем	6	6	6	2	2	2	...	6	6	...	6	162	10,00
Афанасьєв Максим	6	6	6	2	2	2	...	6	6	...	6	162	10,00
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Д'яконов Максим	0	6	6	0	0	0	...	0	0	...	0	12	0,74
Дзюба Анастасія	0	0	0	0	0	0	...	0	0	...	0	6	0,37
Проценко Євгеній	0	0	0	0	0	0	...	0	0	...	0	6	0,37
Сафарян Давид	6	0	0	0	0	0	...	0	0	...	0	6	0,37
Вибіркове середнє	5,60	5,54	5,60	1,91	1,85	1,88	...	5,60	5,54	...	4,04	145,93	9,01
Вибіркова дисперсія	2,27	2,58	2,27	0,17	0,28	0,23	...	2,27	2,58	...	7,94	1188,45	4,53

Табл.2.19

На основі отриманих результатів будуємо частотний розподіл індивідуальних балів (Див.Табл.2.20).

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	11	1	1	2	2	4	4	11	46	215

Табл.2.20

Зображуємо графічно частотний розподіл індивідуальних у вигляді гістограми (Див.Рис.2.11).

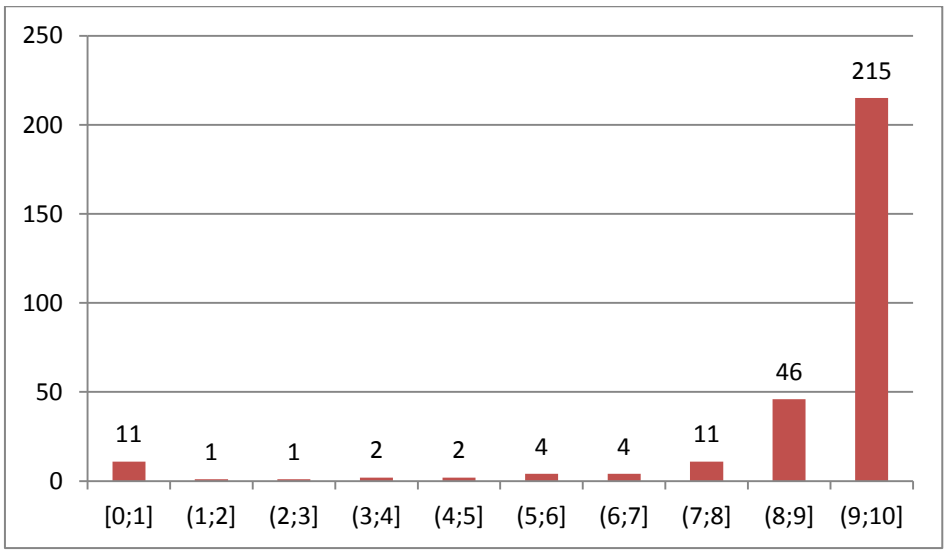

Рис. 2.11

З частотного розподілу та його графічного представлення видно, що розподіл є унімодальним з модою $M_o = 9,44$. Значення моди та вибіркового середнього $\bar{x} = 9,01$, порівняно з першим завданням, близькі за значенням, тому дане завдання не потребує особливого коректування.

Значення асиметрії дорівнює $\gamma_1 = -3,15$ та медіани $M_e = 10$, вказують на те, що завдання є простим, для студентів які його писали.

Коефіцієнт надійності Кронбаха даного тесту $\alpha = 0,96$. За нижню межу допустимих значень коефіцієнта надійності обирають 0,7. Отже, бачимо, що наше значення коефіцієнта набагато більше припустимого, що говорить про високу якість завдання.

Перевірка розподілу на нормальність з рівнем значущості 0,05 та 3 ступенями свободи, показала, що висунуту гіпотезу потрібно відхилити, адже $\chi^2 > \chi_{кр}{}^2$, а саме $72,75 > 7,81 = \chi^2{}_{3;0,05}$, де $\chi^2{}_{3;0,05}$ – критичне значення критерію Пірсона (Див.Табл.2.21).

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика хі^2
1	<-2,08	19,51	16,00	5,57	*0,02*
2	(-2,08; -1,56)	5,46	4,00	12,14	0,04
3	(-1,56; -1,04)	17,82	5,00	26,89	0,09
4	(-1,04; -0,51)	27,81	10,00	45,62	0,15
5	(-0,51; -0,01)	2,15	48,00	59,29	0,20
6	>-0,01	29,99	214,00	147,49	0,50
		72,75	**297,00**	**297,00**	**1,00**

Об'єм вибірки	297,00
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу хі^2	3
Критичне значення для Критерію Пірсона	7,81
Значення статистики хі^2	72,75

Табл.2.21

Згрупуємо елементи завдання на групи за діями виконання, в результаті чого отримали шість блоків. Обчислимо кореляційну матрицю другого завдання та проаналізуємо її значення (Див.Табл.2.22). Помітно, що всі частини завдання корелюють між собою з високими коефіцієнтами, а саме більше за 0,5, таким чином всі дії завдання мають високу залежність один від одного, що є добрим показником для покрокових тестів. Адже в залежності від вибору варіанту на першому кроці, залежить яка буде кінцева відповідь. Бачимо, що для отримання вірної відповіді найголовнішим є останній шаг зведення визначника до трикутного вигляду, кореляційна матриця лише підтверджує це, адже з кожним кроком коефіцієнт кореляції збільшується. Крім того, відстежується висока кореляція між визначниками після кожного обнулення.

В останньому рядку табл. 2.22 знайдені коефіцієнти кореляції Пірсона окремо кожної дії. Бачимо, що майже всі значення коефіцієнтів кореляції Пірсона достатньо високі, більші за нижню границю 0,7, отже завдання є правильним та має високу розрізняльну здатність.

Частина задання	Обнулення в стовпці 1	Результат обнулення стовпця 1	Обнулення в стовпці 2	Результат обнулення стовпця 2	Обнулення в стовпці 3	Результат обнулення стовпця 3	Відпо відь
Обнулення в стовпці 1	1,00						
Результат обнулення стовпця 1	0,84	1,00					
Обнулення в стовпці 2	0,65	0,75	1,00				
Результат обнулення стовпця 2	0,73	0,87	0,81	1,00			
Обнулення в стовпці 3	0,44	0,53	0,59	0,59	1,00		
Результат обнулення стовпця 3	0,66	0,82	0,75	0,92	0,61	1,00	
Відповідь	0,29	0,40	0,45	0,51	0,47	0,64	1,00
Коефіцієнт корелляції Пірсона	0,81	0,94	0,84	0,96	0,66	0,95	0,59

Табл.2.22

Проведений аналіз другого покрокового завдання показав наступне:

- Розподіл є унімодальний, значення моди та вибіркового середнього, порівняно з першим завданням, близькі за значенням, тому дане завдання не потребує особливого коректування;
- Значенні асиметрії дорівнює -3,15 і є від'ємним, це вказує на те, що завдання є простим для студентів, які виконували дане завдання;
- Коефіцієнт надійності Кронбаха даного тесту $\alpha = 0{,}96$, що значно більше за нижню межу допустимих значень 0,7, а отже, це говорить про високу якість завдання;
- Критерій Пірсона на перевірку нормальності, із кількістю ступенів волі 3 та рівнем значущості критерію 0,05, показав, що гіпотезу потрібно відхилити;
- Проаналізувавши кореляційну матрицю завдання, бачимо, що всі елементи завдання мають високий рівень залежності. Єдиним виключення є кореляція між самим першим кроком і відповіддю, що дорівнює 0,29. Але, оскільки відповідь визначає останній крок перед її знаходженням, і, крім того, прослідковується збільшення корельованості між відповіддю і кожним наступним кроком розв'язання починаючи с першого, то це свідчить про правильність побудованого алгоритму перевірки розв'язання задачі. Також коефіцієнти кореляції Пірсона, показують, що складові тестового завдання мають високу розрізняльну здатність.

Матричне рівняння $XA = B$

Третє завдання покрокового полягає у розв’язанні матричного рівняння. Максимум балів за правильне розв’язане завдання студент може отримати 26 балів. Вірний вибір рівняння оцінюється у 2 бали, визначник – 6 балів, кожен елемент оберненої матриці та розв’язку, відповідно у 1 та 2 бали. Для зручності наступних обчислень переведемо загальні отримані бали студентів у десятибальну шкалу та відсортуємо у порядку спадання шкалу. На Табл.2.23 наведений фрагмент відсортованої за спаданням таблиці з результатами. Повна таблиця результатів представлена на диску, що додається до дипломної.

Частина завдання / Дія	Вид рівн	Виз-к	Елементи матриці оберненої матриці					Ров'язок			Сума балів	Оцінка
Елемент дії			11	12	…	32	33	11	12	13		
Макс бал / П.І.Б.	2	6	1	1	…	1	1	3	3	3	21	10 б
Арутюнов Артур	2	6	1	1	…	1	1	3	3	3	21	8,08
Баланюк Северин	2	6	1	1	…	1	1	3	3	3	21	8,08
Балась Костянтин	2	6	1	1	…	1	1	3	3	3	21	8,08
Барановська Анастасія	2	6	1	1	…	1	1	3	3	3	21	8,08
Бикова Ангеліна	2	6	1	1	…	1	1	3	3	3	21	8,08
Бірзов Олексій	2	6	1	1	…	1	1	3	3	3	21	8,08
Бірюченко Олексій	2	6	1	1	…	1	1	3	3	3	21	8,08
...	...	...	...	...	…	...	...	...	...	...	...	...
Коломієць Дмитро	2	0	0	0	…	0	0	0	0	0	2	0,77
Лібіч Макар	2	0	0	0	…	0	0	0	0	0	2	0,77
Павлов Олексій	2	0	0	0	…	0	0	0	0	0	2	0,77
Мороз Ольга	0	0	0	0	…	0	1	0	0	0	1	0,38
Вибіркове середнє	1,69	4,97	0,78	0,69	…	0,67	0,77	1,71	1,63	1,69	18,12	6,97
Вибіркова дисперсія	0,53	5,14	0,17	0,21	…	0,22	0,18	2,21	2,23	2,22	68,83	10,18

Табл.2.23

Записуємо отримані дані у вигляді частотного розподілу індивідуальних балів (Див.Табл.2.24).

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	16	17	8	19	30	12	31	15	32	117

Табл.2.24

Представимо знайдені частоти графічно, у вигляді гістограми (Див.Рис.2.12).

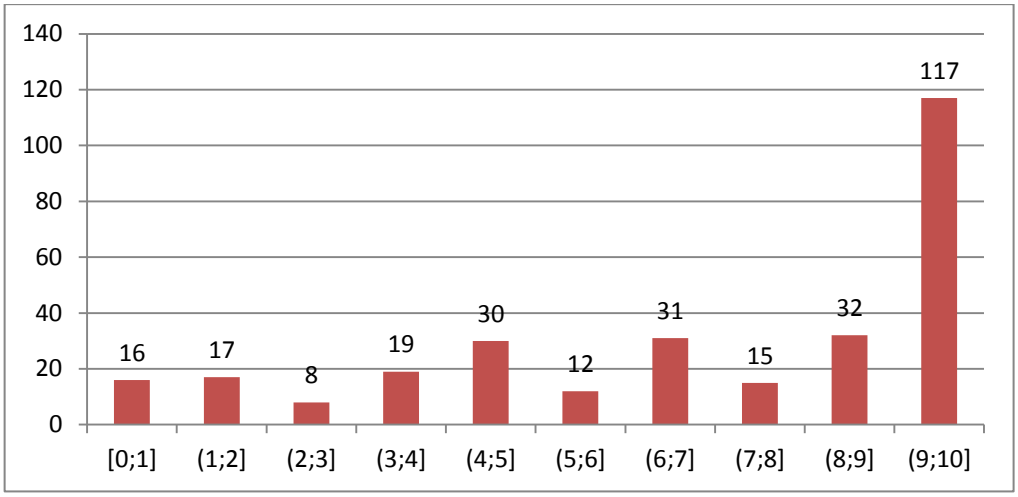

Рис.2.12

Із графічного представлення бачимо, що розподіл є унімодальним з модою $M_o = 9,42$. Значення моди та вибіркового середнього $\bar{x} = 6,97$, дуже різняться між собою, тому дане завдання потребує коректування.

Значенні асиметрії дорівнює $\gamma_1 = -0,7$ та медіани $M_e = 8,08$, вказують на те, що завдання не виявилось занадто скадним, для студентів які його писали.

Коефіцієнт надійності Кронбаха даного завдання $\alpha = 0,86$. За нижню межу допустимих значень коефіцієнта надійності обирають 0,7. Отже, бачимо, що наше значення коефіцієнта більше припустимого, що говорить про достатньо високу якість завдання.

Перевірка розподілу на нормальність з рівнем значущості 0,05 та 6 ступенями свободи, показала, що висунуту гіпотезу потрібно відхилити, адже $\chi^2 > \chi_{кр}{}^2$, а саме $42,13 > 12,59 = \chi^2{}_{6;0,05}$, де $\chi^2{}_{6;0,05}$ – критичне значення критерію Пірсона (Див.Табл.2.25).

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика хі^2
1	<-1,84	*0,03*	16	9,84	3,85
2	(-1,84; -1,49)	0,04	17	10,45	4,10
3	(-1,49; -1,14)	0,06	20	17,46	0,37
4	(-1,14; -0,79)	0,09	22	25,87	0,58
5	(-0,79; -0,44)	0,11	22	33,99	4,23
6	(-0,44; -0,1)	0,13	31	39,60	1,87

7	(-0,1; 0,25)	0,14	20	40,93	10,70
8	(0,25; 0,6)	0,13	32	37,51	0,81
9	>0,6	0,27	117	81,35	15,63
		1,00	297,00	297,00	42,13

Об'єм вибірки	297
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу хі^2	6
Критичне значення для Критерію Пірсона	12,59
Значення статистики хі^2	42,13

Табл.2.25

Обчислимо згруповану за діями кореляційну матрицю (Див.Табл.2.26) завдання та проаналізуємо її значення. Повна кореляційна матриця 1-го завдання представлена у Додатку 2. Бачимо, що найменше значення кореляції між вибором виду рівняння та кінцевого розв’язку, яке дорівнює 0,29. Це говорить про те, що будь-який обраний вид рівняння суттєво не впливає на відповідь. А ось вже вірна розрахована обернена матриця найбільше з усіх частин залежить для отримання розв’язку, адже коефіцієнт кореляції між цими блоками дорівнює 0,58.

Знайдені коефіцієнти кореляції Пірсона окремо кожної частини завдання тесту та додані у Табл.2.26. Майже всі значення коефіцієнтів кореляції Пірсона достатньо високі, більші за 0,6, лише дія «вид рівняння», має невелику кореляцію у 0,46, отже можна зробити висновок, що завдання є правильним та має високу розрізняльну здатність.

	Вид рівняння	Обернена матриця	Розв'язок
Вид рівняння	1,00		
Обернена матриця	0,38	1,00	
Ров'язок	0,29	0,58	1,00
Коефіцієнт корелляції Пірсона	0,46	0,91	0,86

Табл.2.26

З вище зробленого аналізу тесту випливають наступні висновки:

- Розподіл є унімодальним з модою 9,42. Значення моди та вибіркового середнього, дуже різняться між собою, тому дане завдання потребує коректування;
- Значенні асиметрії дорівнює -0,7 це вказує на простоту даного завдання для студентів;
- Коефіцієнт надійності Кронбаха завдання $\alpha = 0{,}86$, що говорить про дуже високу якість;

- Перевірка розподілу на нормальність з рівнем значущості 0,05 та 6 ступенями свободи, показала, що висунуту гіпотезу потрібно відхилити, тому що $42{,}13 > 12{,}59 = \chi^2_{6;0,05}$. Всі елементи завдання мають високі коефіцієнти кореляції Пірсона, більші за 0,6 окрім частини «Вид рівняння», яка дорівнює 0,46, отже, завдання є правильним та має високу розрізняльну здатність. Знаходження кореляційної матриці показало, що найбільший зв'язок з правильно отриманою відповіддю є з підрахунок оберненої матриці, коефіцієнт кореляції цих двох частин завдання найвищий та дорівнює 0,58.

Невироджені СЛАР. Формули Крамера

Проведемо статистичний аналіз для 4-го завдання підсумкового тесту. У цьому завданні 43 елементи, за кожне студент може отримати певну кількість балів, в залежності від складності дії. За кожен елемент визначників можна отримати 1 бал, якщо відповідь вірна, чи 0 балів, у випадку, коли відповідь відсутня або неправильна. Правильно підраховані відповіді визначників оцінюються у 12 балів. Та в результаті кінцевої дії, знаходження розв’язків СЛАР, студент може заробити за кожен правильний розв’язок по 7 балів. Таким чином, за правильне виконання даного завдання, максимально можна отримати 105 балів. Для зручності аналізу згрупуємо елементи за діями виконання, в результаті чого отримали 5 блоків. Переведемо сумарні бали в десятибальну шкалу та відсортуємо оцінки у порядку спадання. На Табл.2.26 наведений фрагмент відсортованої за спаданням таблиці з результатами. Повна таблиця результатів представлена на диску, що додається до дипломної.

Частина завдання	Delta	Delta_1	Delta_2	Delta_3	Відповідь	Сума балів	Оцінка
Макс балів / П.І.Б.	21	21	21	21	21	105	10 б
Авраменко Євгеній	21	21	21	21	21	105	10,00
Андрухович Микола	21	21	21	21	21	105	10,00
Арутюнов Артур	21	21	21	21	21	105	10,00
Асаулюк Артем	21	21	21	21	21	105	10,00
Афанасьєв Максим	21	21	21	21	21	105	10,00
…	…	…	…	…	…	…	…
Павлов Олексій	9	0	0	0	0	9	0,86
Коломійчук Даніїл	8	0	0	0	0	8	0,76
Кривобок Всеволод	7	0	0	0	0	7	0,67
Дзюба Анастасія	6	0	0	0	0	6	0,57
Люльченко Маргарита	6	0	0	0	0	6	0,57
Вибіркове середнє	18,43	17,52	17,39	17,60	16,10	87,05	8,29
Вибіркова дисперсія	34,46	43,16	44,14	41,79	60,54	913,53	8,29

Табл.2.26

На основі отриманих даних будуємо частотний ряд тестового ряду (Див.Табл.2.27)

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	18	2	7	9	7	7	17	7	29	194

Табл.2.27

На основі таблиці з частотами будуємо графічне представлення результатів у вигляді гістограми розподілу індивідуальних балів (Див.Рис.2.13).

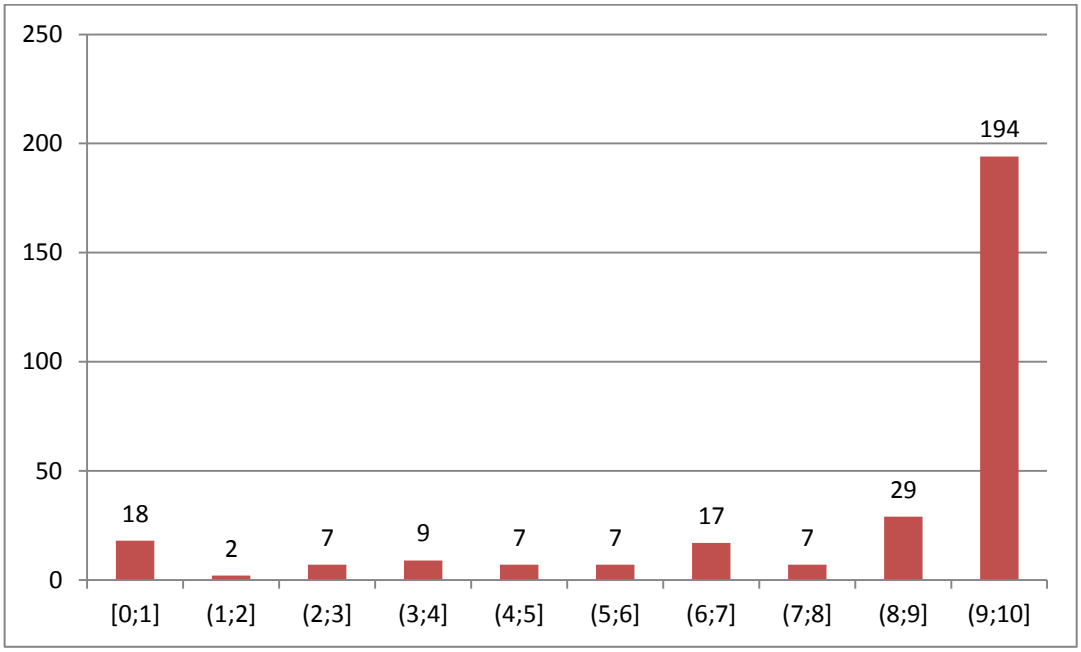

Рис.2.13

Бачимо, що розподіл завдання унімодальний з модою $M_o = 9,46$. Мода та вибіркове середнє, яке дорівнює $\bar{x} = 8,46$, не близькі за значенням, тому у дане покрокове тестове потрібно внести деякі корективи для його покращення.

В силу того, що коефіцієнт ассиметрії від'ємний та дорівнює $\gamma_1 = -1,71$ та медіана $M_e = 10$, означає що завдання виявилося простим для студентів та більшість студентів отримали високі бали.

Коефіцієнт надійності Кронбаха даного завдання $\alpha = 0,88$, значення якого вище за нижню межу допустимих значень коефіцієнта надійності обирають 0,7. Отже, завдання має високу якість.

Перевірка розподілу на нормальність з рівнем значущості 0,05 та 4 ступенями свободи, показала, що висунуту гіпотезу потрібно відхилити, адже

$\chi^2 > \chi_{кр}{}^2$, а саме $112,27 > 9,49 = \chi^2{}_{4;0,05}$, де $\chi^2{}_{4;0,05}$ – критичне значення критерію Пірсона (Див.Табл.2.28).

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика xi^2
1	<-1,73	*0,04*	29,00	12,42	22,14
2	(-1,73; -1,34)	*0,05*	10,00	14,15	1,22
3	(-1,34; -0,96)	*0,08*	7,00	23,63	11,70
4	(-0,96; -0,57)	*0,11*	18,00	34,04	7,56
5	(-0,57; -0,19)	*0,14*	9,00	42,34	26,25
6	(-0,19; 0,2)	*0,15*	30,00	45,45	5,25
7	>0,2	*0,42*	194,00	124,96	38,14
		1,00	297,00	297,00	112,27

Об'єм вибірки	297
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу xi^2	4
Критичне значення для Критерію Пірсона	9,49
Значення статистики xi^2	112,27

Табл.2.28

Отримана кореляційна матриця, яка надана у Табл.2.29, показала, що всі елементи завдання мають високу кореляцію між собою, більша за 0,7, а отже порівнюючи з попередніми покроковими завданнями підсумкового тесту, цей приклад є найбільш вдалим.

У Табл.2.29 також знайдені коефіцієнти кореляції Пірсона окремо кожного елементу завдання тесту. Всі отримані значення дуже високі, а саме вище за 0,9, що говорить про те, що кроки в тесті аналогічні та схожі між собою, проте для покрокового тесту це не є погано, тому що попередньо отриманий результат впливає на наступний. Отже, завдання має високу розрізняльну здатність.

	Delta	Delta_1	Delta_2	Delta_3	Відповідь
Delta	1,00				
Delta_1	0,80	1,00			
Delta_2	0,73	0,78	1,00		
Delta_3	0,76	0,76	0,80	1,00	
Відповідь	0,78	0,80	0,78	0,77	1,00
Коефіцієнт корелляції Пірсона	0,89	0,91	0,90	0,90	0,92

Табл.2.29

Після проведеного аналізу четвертого покрокового тестового завдання отримали, що:

- Розподіл завдання унімодальний з модою 9,46. Мода та вибіркове середнє не близькі за значенням, тому у дане покрокове тестове потрібно внести деякі корективи для його покращення;
- Покрокове тестове завдання досить виявилося досить простим для студентів, адже коефіцієнт асиметрії -1,71;
- Тестове завдання є якісним, адже коефіцієнт надійності Кронбаха даного завдання $\alpha = 0{,}88$, що в свою чергу більше нижньої допустимої межі;
- Гіпотеза про перевірку на нормальність із рівнем значущості 0,05 та 4 ступенями свободи відхилена, оскільки $112{,}27 > 9{,}49 = \chi^2_{4;0{,}05}$;
- Отримана кореляційна матриця, показала, що всі елементи завдання мають високу кореляцію між собою, більша за 0,7, а отже складові цього завдання тісно пов'язані між собою, що цілком природньо, з огляду на особливості побудови визначників та отримання відповіді.
- Високі коефіцієнти кореляції Пірсона окремо кожного елементу завдання тесту, а саме більші за 0,9, вказують на високу розрізняльну здатність покрокового тестового завдання.

Загальна СЛАР

У заключному завданні підсумкового тесту, студенту необхідно було розв'язати загальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Завдання можна розділити на дві частини, а саме, прямий та зворотній хід. У прямому ході потрібно завдяки обнулінням «правильних» елементів матриці звести її до верхньотрикутного вигляду, за кожен вірний перетворений елемент в нуль з розширеної матриці, студент отримує по 6 балів, за окремі комірки матриць, в залежності від складності знаходження – 2,3 або 6 балів. Під час виконання зворотнього ходу за знаходження рангів можна заробити по 6 балів, а за вірну відповідь сумісної системи – 18. Після чого правильний підрахунок кінцевих відповідей оцінюється у 21 бал за кожну знайдену невідому. Тому загальна сума балів за абсолютно вірно розв'язане завдання дорівнює 300. Для зручності згрупуємо певні елементи за дією виконання та переведемо загальні бали у десятибальну шкалу, відсортуємо у порядку спадання оцінок. На Табл.2.30 наведений фрагмент відсортованої за спаданням таблиці з результатами. Повна таблиця результатів представлена на диску, що додається до дипломної.

Частина завдання	Крок 1	Крок 2	Крок 3	Зворотній хід	Відповідь	Сума балів	Оцінка
Макс балів / П.І.Б.	82	55	49	30	84	300	10 б
Бикова Ангеліна	82	55	49	30	84	300	10,00
Бірзов Олексій	82	55	49	30	84	300	10,00
Бойківський Андрій	82	55	49	30	84	300	10,00
Вишнівський Василь	82	55	49	30	84	300	10,00
Восковий Владислав	82	55	49	30	84	300	10,00
Гакман Дмитро	82	55	49	30	84	300	10,00
Говорова Світлана	82	55	49	30	84	300	10,00
…	…	…	…	…	…	…	…
Проценко Євгеній	70	0	0	0	0	70	2,33
Малашкін В'ячеслав	24	6	9	0	0	39	1,30
Трофименко Микита	6	3	0	18	0	27	0,90
Павлов Олексій	12	0	0	0	0	12	0,40
Вибіркове середнє	75,71	47,23	41,79	19,47	35,28	219,49	7,32
Вибіркова дисперсія	402,15	244,62	207,53	143,40	1139,17	6118,58	6,80

Табл.2.30

Першим кроком знаходимо частотний розподіл індивідуальних балів та представляємо його графічно у вигляді гістограми, відповідно Табл.2.31 та Рис.2.14.

Бали	[0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]	(5;6]	(6;7]	(7;8]	(8;9]	(9;10]
Частота	19	1	3	3	13	36	34	58	38	92

Табл.2.31

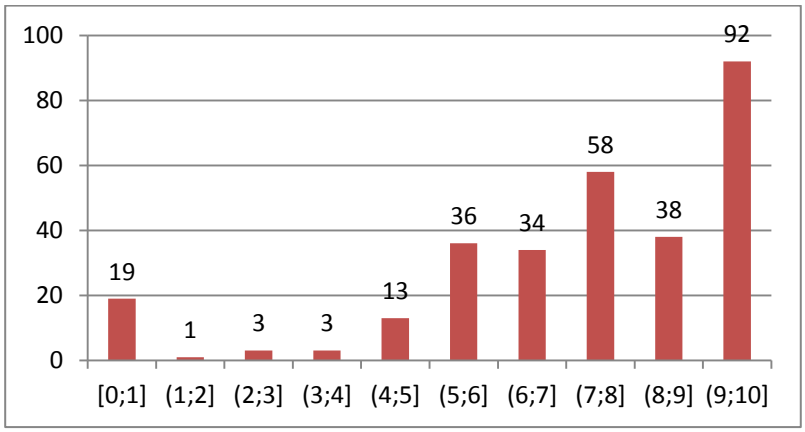

Рис.2.14

Розподіл вибірки є унімодальним, що свідчить гістограма та мода $M_o = 9{,}37$. Мода та вибіркове середнє $\bar{x} = 7{,}32$ не близькі за значенням, тому дане покрокове тестове завдання потрібно відкоректувати.

Коефіцієнт асиметрії від'ємний, $\gamma_1 = -1{,}33$, а також медіана дорівнює $M_e = 7{,}9$, означає що завдання виявилося відносно простим для студентів та більшість студентів отримали бали вище середнього.

Коефіцієнт надійності Кронбаха даного завдання $\alpha = 0{,}92$, значення якого набагато вище за нижню межу допустимих значень коефіцієнта надійності обирають 0,7. Отже, завдання високоякісно зроблено.

Перевірка розподілу на нормальність з рівнем значущості 0,05 та 5 ступенями свободи, показала, що висунуту гіпотезу потрібно відхилити, адже $\chi^2 > \chi_{кр}{}^2$, а саме $43{,}09 > 11{,}07 = \chi^2{}_{5;0{,}05}$, де $\chi^2{}_{4;0{,}05}$ – критичне значення критерію Пірсона (Див.Табл.2.32).

Кіл-сть інтервалів	Інтервали	Ймов. N(0,1)	Емпіричні частоти	Теоретичні частоти	Статистика xi^2
1	<-1,95	*0,03*	20,00	7,60	20,23
2	(-1,95; -1,52)	0,04	3	11,34	6,13
3	(-1,52; -1,1)	0,07	8	21,50	8,48
4	(-1,1; -0,67)	0,11	23	34,08	3,60
5	(-0,67; -0,25)	0,15	45	45,18	0,00
6	(-0,25; 0,18)	0,17	47	50,09	0,19
7	(0,18; 0,61)	0,16	55	46,43	1,58
8	>0,61	0,27	96	80,78	2,87
		1,00	297,00	297,00	43,09

Об'єм вибірки	297
Рівень значущості	0,05
Кількість ступенів волі розподілу xi^2	5
Критичне значення для Критерію Пірсона	11,07
Значення статистики xi^2	43,09

Табл.2.32

Отримана кореляційна матриця, яка надана на диску, який подається до диплому, показала, що більша половина коефіцієнтів завдання мають високу кореляцію між собою, більша за 0,3, що говорить про взаємозв'язок між попереднім та наступним кроком у завданні. Проте показники кореляції між першим кроком, обнулінням 1 стовпця та кінцевої відповіді, менше за 0,3, вказують на низький зв'язок між цими частинами завдання.

Також знайдені коефіцієнти кореляції Пірсона окремо кожного елементу завдання тесту. Всі отримані значення дуже високі, а саме вище за 0,9, що говорить про те, що завдання має високу розрізняльну здатність (таблиця значень додана на диск, який додається до диплома).

Після проведеного аналізу п'ятого покрокового тестового завдання отримали, що:

- Частотний розподіл показав, що розподіл вибірки є унімодальним, зі значенням моди 9,37. Оскільки значення моди та вибіркового середнього не близькі між собою, то в дане покрокове завдання необхідно внести корективи;
- У зв'язку с тим, що коефіцієнт асиметрії від'ємний та дорівнює -1,33 та значення медіани 7,9, бачимо, що тестове завдання є достатньо простим для студентів;
- Завдання має високу якість, адже коефіцієнт надійності Кронбаха даного завдання $\alpha = 0,92$ та всі коефіцієнти кореляції мають високе значення, що вказує на взаємозв'язок між кожним елементом завдання;
- Гіпотезу на перевірку нормальності розподілу вибірки з рівнем значущості критерію 0,05 та 5 ступенями свободи, відхилено, оскільки $43,09 > 11,07 = \chi^2_{5;0,05}$.
- Значення всіх підрахованих коефіцієнтів кореляції Пірсона є більшими за 0,9, тому завдання має високу розрізняльну здатність. А також Отримана кореляційна матриця показала, що більша половина коефіцієнтів завдання мають високу кореляцію між собою, більша за 0,3, що говорить про взаємозв'язок між попереднім та наступним кроком у завданні, окрім першого кроку, обнуління 1 стовпця та кінцевої відповіді, кореляції між якими менші за 0,3.

Висновки проведеного аналізу якості покрокових тестових завдань

Підсумовуючи результати аналізу всіх п'яти завдань можна зробити наступні висновки:

- Правильно складені покрокові тести із структурою, побудованою за лінійним алгоритмом мають високу надійність, узгодженість між своїми складовими та високу розрізняльну здатність.
- Для студентів з високим рівнем підготовленості вони є достатньо простими, оскільки лінійність алгоритму побудови тестового завдання призводить до появи невеликих підказок, що трохи спрощує розв'язання завдання.
- Для покрокового тесту притаманні достатньо високі значення коефіцієнтів кореляції між його складовими. Особливо це стосується етапів розв'язання, які є сусідніми. Тому, на відміну від аналізу тестів із стандартними тестовими завданнями, наявність значень коефіцієнтів кореляції

близьких до нуля може свідчити про помилки у складані покрокового тесту або потребу у вдосконаленні завдання. Тому саме такі випадки слід розглядати окремо і аналізуючи хід розв'язання відповідної задачі та реалізацію цього розв'язання у покроковому тестовому завданні робити висновок, щодо проблемної складової і необхідності її корекції.

- Наявність низького значення коефіцієнта кореляції Пірсона для складової покрокового тесту може свідчити про потребу або усунення такої складової або об'єднання її із суміжними до неї кроками розв'язання. Рішення в таких випадках має грунтуватись на проведеному аналізу характеристик, які відносяться до цієї складової та необхідності перевірки саме її для даної конкретної задачі, що описується покроковим тестовим завданням.

ВИСНОВКИ

У магістерській дисертації розроблено комплект тестових завдань, у вигляді покрокових тестів, з теми «Векторна алгебра» дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». Розроблені завдання охоплюють практично всі стандартні задачі обраної тематики, які розглядаються у відповідному курсі на технічних спеціальностях факультетів КПІ ім. Ігоря Сікорського. Завдання були виконані у вигляді покрокових тестів на відкритій освітній системі управління навчанням Moodle із застосуванням мови розмітки веб-сторінок HTML. Шаблони розроблених завдань розміщені на диску, який прикладається до дисертації.

На прикладі задачі про розклад вектора за базисом проаналізовано особливості побудови та структура відповідних покрокових тестових завдань. Було розроблено та проаналізовано три типи покрокових тестових завдань, в залежності від методу розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка визначає координати вектора у новому базисі, і є головною складовою розв’язку задач такого типу.

За даними підсумкової контрольної роботи з теми «Елементи лінійної алгебри», яка складається з п’яти покрокових тестових завдань, проведеної у формі комп’ютерного тесту для студентів першого курсу КПІ ім. Ігоря Сікорського, проведеної у другій половині жовтня 2018 р., було зроблено аналіз якості тесту в цілому як по всіх факультетах, студенти яких проходили тестування, так і по кожному факультету окремо.

Крім того проаналізовано всі покрокові тестові завдання, які входили в комп’ютерну контрольну роботу та виявлено особливості структури таких тестів та зроблено інтерпретацію деяких статистичних характеристик результатів тестового завдання з огляду на виявлені особливості .

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Masters, G. N. A Rasch model for partial credit scoring // Psychometrika. – 1982. – Vol. 47, №2, June 1982. – P. 149-174.
2. Masters, G. N. The analysis of partial credit scoring // Applied measurement in education. – 1988. – Issue 7 (4). – P. 279-297.
3. Wilson, M., Masters, G. N. The partial credit model and null categories // Psychometrika. – 1993. – Vol. 58, №1, March 1993. – P. 87-99.
4. Wilson, M. Constructing measures: an item response modeling approach. – Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2005. – 228 p. – ISBN 0-8058-4785-5.
5. Аванесов В.С. Научные проблемы тестового контроля знаний. – М.: Учебный центр при ИЦПКПС, 1994. – 136 с.
6. Аванесов В.С. Item Response Theory: Основные понятия и положения / Вадим Сергеевич Аванесов // Педагогические измерения.-2007.-№2-С.3-28.
7. Нейман, Ю. М., Хлебников, В. А. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. – М.: Прометей, 2000. – 169 с. – ISBN 5-7042-1068-6.
8. Ostini, R., Nering, M. L. Polytomous item response theory models. – Thousand Oaks: Sage, 2006. – 107 p. – ISBN 0-7619-3068-X.
9. Цыганов, Ш. И. Математические методы педагогических измерений // Вестник Башкирского университета. – 2009. – Т. 14, №3. – С. 1-8.
10. DeMars, C. Item response theory. – Oxford: Oxford University Press, 2010. – 131 p. – ISBN 978-0-19-537703-3.
11. van der Linden, V. J., Hambleton, R. K. Handbook of modern item response theory. – New York: Springer, 2010. – 510 p. – ISBN 978-1-4419-2849-8.
12. Крокер Л., Алгина Дж. Введение в классическую и современную теорию тестов./под общей ред. В.И. Звонникова и М.Б. Челышковой. – М.: Логос.-2012.- 688с.
13. Кухар Л.О. Конструювання тестів. Курс лекцій: навч. посіб. / Л.О.Кухар, В.П.Сергієнко.- Луцьк, 2010.-182с.
14. Лісова Т.В. Моделі та методи сучасної теорії тестів / Т.В.Лісова.- Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2012.-112с
15. Ковальчук Ю.О. Теорія освітніх вимірювань. – Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2012. – 200 с.
16. Алєксєєва І.В. Покрокові тести з курсу «Методи математичної економіки» / І.В. Алєксєєва, І.В. Орловський, Ю.В. Сорокіна // Вісімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука.-7-10 жовтня,2017.-Луцьк-Київ.-т.2.- С.168-170
17. Сорокіна Ю.В. Розробка та аналіз якості покрокових тестів з математичних дисциплін // Дипломна робота – Київ, 2017. – 66с.
18. Орловський І. В., Тимошенко О. А. Аналіз якості нових методів контролю знань з вищої математики в технічному університеті / І.В. Орловський, О.А. Тимошенко // Шоста міжнародна науково-практична

конференція «Математика в сучасному технічному університеті» 28—29 грудня, 2017.- Київ - С. 374-377.

19. Омельчук Т.С., Орловський І.В. Аналіз якості покрокових тестів з математичних дисциплін за допомогою сучасної теорії тестів., Сьома всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018р., Тези доповідей, Київ, с.80

20. І.Є.Булах, Комп'ютерна діагностика навчальної успішності. К.: ЦМК МОЗ України, УДМУ.- 1995.– 221 с.

21. Thorndike, E.L. (1904). An introduction to the theory of mental social measurements. New York: Science Press.

22. Тестові технології оцінювання компетентностей учнів : посібник / за ред. Ляшенка О. І., Жука Ю. О. – К. : Педагогічна думка, 2015. – 181 с.

23. Алєксєєва І. В. Застосування математичних моделей тестів у комплекті дистанційної освіти «Вища математика» / Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О. [та ін.]. Математичні машини та системи. – 2010. – №4. – С. 89 – 98.

24. Алєксєєва І.В. Про досвід застосування тестових контрольних робіт з вищої математики / І.В. Алєксєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова // Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 19—20 квітня 2013 р., Київ: Матеріали конф. — Київ: НТУУ «КПІ», 2013. — С. 442—445.

25. Алєксєєва І.В. Про розробку тестових контрольних робіт з курсу «Методи математичної економіки» // Дистанційна всеукраїнська наукова конференція «Математика у технічному університеті XXI сторіччя»,15 – 16 травня 2017р., Краматорськ: Матеріали конф. – Краматорськ, 2017. – С. 284 – 287.

26. Авраменко О.В., Павличенко Г.Ю., Паращук С.Д. Статистичні методи в освітніх вимірюваннях. Частина І. Класична теорія тестування: Навчально-методичний посібник.– Кіровоград: Лисенко В.Ф., 2012.- 120 с.

27. Челишкова М.Б. Теория и практика конструирования педагогических тестов / Марина Борисовна Челышкова. – М.: Логос, 2002.- 431с.

28. Rasch G.(1960) Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Copenhagen: Denmark Paedagogiske Institute.

29. Диховичний О.О. Комплексна методика аналізу якості тестів з вищої математики /О.О. Диховничий, А.Ф. Дудко // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 2 : Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – 2015. - №.15. – С. 139-144.

30. Диховичний О. О., Дудко А. Ф. Автоматизована система аналізу результатів комп'ютерного тестування з вищої математики / О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко // Наукові праці ДонНТУ. Серія: «Педагогіка, психологія і соціологія». – №2 (14). – Донецьк, 2013. – С. 103-110.

31. О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко Аналіз поняттєво-категоріального апарату дослідження якості тестів з вищої математики / О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко // Journal «ScienceRise: Pedagogical Education» №5(13)2017.

32. Диховичний О. О. Оцінювання змістової валідності тестів з вищої математики з використанням Google Docs додатку / О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко // Інформаційні технології і засоби навчання. - 2016. - Т. 52, вип. 2. - С. 52-61.

33. https://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1040/790.

34. http://ena.lp.edu.ua/bitstream/ntb/18831/1/49-204-206.pdf.

35. Алєксєєва І. В. Комплект дистанційної освіти «Вища математика» / Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б., Воробйов А. С. // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. – Випуск VII : в 3-х томах. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2008. – Т. 3. – С. 101–105.

36. Алексєєва І. В. Політомічна модель Раша в аналізі якості тестових завдань / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний та ін. // Теорія та методика електронного навчання : зб. наукових праць. Вип. 2. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2011. – С. 212–217.

37. Статистичний аналіз тестових завдань із застосуванням сучасних математичних моделей / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». – 2012. – № 731 : Інформатизація вищого навчального закладу. – С. 10–14. - (Вісник / Національний університет "Львівська політехніка" ; № 731). – Бібліографія: 5 назв.

38. Алексєєва І. В. Політомічна модель Раша в аналізі якості тестових завдань / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний та ін. // Теорія та методика електронного навчання : зб. наукових праць. Вип. 2. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2011. – С. 212–217.

Додаток 1

Шаблон покрокового тесту розкладу вектора за базисом матричним способом

Нехай дано вектори

\[\vec{p}=\left(\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right),\] \[\vec{q}=\left(\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right),\] \[\vec{r}=\left(\begin{array}{r} -4 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right),\] \[\vec{a}=\left(\begin{array}{r} 3 \\ 7 \\ -4 \end{array}\right).\]

<hr />

1) Довести, що вектори \[\vec{p}\], \[\vec{q}\] та \[\vec{r}\], утворюють базис

Розв’язання. Для того, щоб довести, що вектори утворюють базис необхідно показати, що наступний визначник, {6:MULTICHOICE:дорівнює нулю~більше нуля~%100%не дорівнює нулю~дорівнює одиниці}. Перевіримо це

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{6:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=-1}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td rowspan="3"> \[=\]{60:SHORTANSWER:=-10}.</td> </tr>

<tr><td>{6:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:= 0~00}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=1~01}</td> </tr>

<tr>

<td>{6:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:= 2~02}</td> </tr></tbody></table>

 2) Знайти координати вектора \[\vec{a}\] в базисі \[\vec{p}\], \[\vec{q}\], \[\vec{r}\]

Розв’язання. Для знаходження координат вектора, необхідно розв’язати систему

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{4:SHORTANSWER:=1~01}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:=-2}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=-4}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:= 3~03}</td></tr>

<tr><td>{4:SHORTANSWER:=-1}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:= 0~00}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:= 7~07}</td> </tr>

<tr><td>{4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:=1~01}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:=-4}</td> </tr>

</tbody></table>

Для отримання розв’язку цієї системи використаємо матричний метод.

Спочатку знайдемо обернену матрицю:

<table><tr><td rowspan="6">\[A^{-1}=\]</td>

<td rowspan="3" style="border-style: none none solid; border-bottom-width: 1pt; border-bottom-color: windowtext;" align="center">\[1\]</td>

<td rowspan="6"></td>

<td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:=0~000}</td>

<td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:=-4~-04}</td>

<td rowspan="6"> </td></tr>

<tr></tr>

<tr><td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:=6~006}</td>

<td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:=10~010}</td>

<td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:=2~002}</td></tr>

<tr><td rowspan="3">{36:SHORTANSWER:=-10~-010}</td></tr>

<tr><td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:=-1~-01}</td>

<td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:=-5~-05}</td>

<td rowspan="2">{12:SHORTANSWER:= -2~-02}</td></tr>

<tr></tr></table>

Знайшовши розв’язок системи, отримаємо наступний розклад вектора \[\vec{a}\] за базисом:

\[\vec{a}=\]{16:SHORTANSWER:=-1}\[\cdot\vec{p}+\] {16:SHORTANSWER:=-8}\[\cdot\vec{q}+\] {16:SHORTANSWER:=3~03}\[\cdot\vec{r}\].

Шаблон покрокового тесту розкладу вектора за базисом за допомогою формул Крамера

Нехай дано вектори

\[\vec{p}=\left(\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right),\] \[\vec{q}=\left(\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right),\] \[\vec{r}=\left(\begin{array}{r} -4 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right),\] \[\vec{a}=\left(\begin{array}{r} 3 \\ 7 \\ -4 \end{array}\right).\]

<hr />

1) Довести, що вектори \[\vec{p}\], \[\vec{q}\] та \[\vec{r}\], утворюють базис

Розв’язання. Для того, щоб довести, що вектори утворюють базис необхідно показати, що наступний визначник,

{6:MULTICHOICE:дорівнює нулю~більше нуля~%100%не дорівнює нулю~дорівнює одиниці}. Перевіримо це

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{6:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=-1}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td rowspan="3"> </td>

 <td rowspan="3"> \[=\]{60:SHORTANSWER:=-10}.</td> </tr>

<tr><td>{6:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:= 0~00}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=1~01}</td> </tr>

<tr>

<td>{6:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:= 2~02}</td> </tr></tbody></table>

 2) Знайти координати вектора \[\vec{a}\] в базисі \[\vec{p}\], \[\vec{q}\], \[\vec{r}\]

Розв’язання. Для знаходження координат вектора, необхідно розв’язати систему

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{4:SHORTANSWER:=1~01}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:=-2}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=-4}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:= 3~03}</td></tr>

<tr><td>{4:SHORTANSWER:=-1}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:= 0~00}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:= 7~07}</td> </tr>

<tr><td>{4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:=1~01}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:=-4}</td> </tr>

</tbody></table>

Для отримання розв’язку цієї системи використаємо метод Гаусса.

Прямий хід:

<table><tr>

<td rowspan="3">\[(A|B)=\]</td>

<td rowspan="3"></td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:=4~04}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{2:SHORTANSWER:= 3~03}</td>

<td rowspan="3"></td>

<td></td>

<td rowspan="3">\[\sim\]</td></tr>

<tr><td align="right">{6:SHORTANSWER:=-1}</td>

<td align="right">{6:SHORTANSWER:= 0~00}</td>

<td align="right">{6:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{6:SHORTANSWER:= 7~07}</td>

<td align="right">{6:MULTICHOICE:II p. + 2 I p.~ II p. - I p.~%100%II p. + I p.~I p. - II p.} </td> </tr>

<tr><td align="right">{6:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td align="right">{6:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td align="right">{6:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{6:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td align="right">{6:MULTICHOICE:%100%III p. - 2 I p.~ I p. – 2 II p.~III p. + 2 I p.~III p.+3 I p.} </td></tr></table>

<table><tr>

<td rowspan="3">\[\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \sim\]</td>

<td rowspan="3"></td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{2:SHORTANSWER:= 3~03}</td>

<td rowspan="3"></td>

<td></td>

<td rowspan="3">\[\sim\]</td></tr>

<tr><td align="right">{3:SHORTANSWER:=0~00}</td>

<td align="right">{3:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td align="right">{3:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{3:SHORTANSWER:=10}</td>

<td></td> </tr>

<tr><td align="right">{3:SHORTANSWER:=0~00}</td>

<td align="right">{6:SHORTANSWER:=5~05}</td>

<td align="right">{6:SHORTANSWER:=10}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{6:SHORTANSWER:=-10}</td>

<td align="right">{6:MULTICHOICE: III p. + I p.~%100%III p. – 5 II p.~II p. - 5 III p.~5 III p. + I p.} </td></tr></table>

<table><tr>

<td rowspan="3">\[\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \sim\]</td>

<td rowspan="3"></td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:= 0~00}</td>

<td align="right">{2:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{2:SHORTANSWER:=-7}</td>

<td rowspan="3"></td>

<td rowspan="4">.</td></tr>

<tr><td align="right">{3:SHORTANSWER:=0~00}</td>

<td align="right">{3:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td align="right">{3:SHORTANSWER:= 1~01}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{3:SHORTANSWER:=-5}</td>

</tr>

<tr><td align="right">{3:SHORTANSWER:=0~00}</td>

<td align="right">{6:SHORTANSWER:=0~00}</td>

<td align="right">{6:SHORTANSWER:=5~05}</td>

<td style="border-style: none solid none ; border-left-width: 2pt; border-left-color: windowtext; border-right-width: 0pt; ">{6:SHORTANSWER:=15}</td>

</tr></table>

Зворотній хід. Зробивши зворотній хід, і знайшовши розв’язок системи отримуємо наступний розклад вектора \[\vec{a}\] за базисом:

\[\vec{a}=\]{18:SHORTANSWER:=-1}\[\cdot\vec{p}+\]{12:SHORTANSWER:=-8}\[\cdot\vec{q}+\]{6:SHORTANSWER:=3~03}\[\cdot\vec{r}\].

Шаблон покрокового тесту розкладу вектора за базисом за допомогою методу Гаусса

Нехай дано вектори

\[\vec{p}=\left(\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right),\] \[\vec{q}=\left(\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right),\] \[\vec{r}=\left(\begin{array}{r} -4 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right),\] \[\vec{a}=\left(\begin{array}{r} 3 \\ 7 \\ -4 \end{array}\right).\]

<hr />

1) Довести, що вектори \[\vec{p}\], \[\vec{q}\] та \[\vec{r}\], утворюють базис

Розв’язання. Для того, щоб довести, що вектори утворюють базис необхідно показати, що наступний визначник, {6:MULTICHOICE:дорівнює нулю~більше нуля~%100%не дорівнює нулю~дорівнює одиниці}. Перевіримо це

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{6:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=-1}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:= 2~02}</td>

<td rowspan="3"> </td>

 <td rowspan="3"> \[=\]{60:SHORTANSWER:=-10}.</td> </tr>

<tr><td>{6:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:= 0~00}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=1~01}</td> </tr>

<tr>

<td>{6:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td>{6:SHORTANSWER:= 2~02}</td> </tr></tbody></table>

 2) Знайти координати вектора \[\vec{a}\] в базисі \[\vec{p}\], \[\vec{q}\], \[\vec{r}\]

Розв’язання. Для знаходження координат вектору, необхідно розв’язати систему

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{4:SHORTANSWER:=1~01}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:=-2}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=-4}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:= 3~03}</td></tr>

<tr><td>{4:SHORTANSWER:=-1}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:= 0~00}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:= 7~07}</td> </tr>

<tr><td>{4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\alpha\ +\] {4:SHORTANSWER:=1~01}\[\cdot\beta\ +\] {4:SHORTANSWER:=2~02}\[\cdot\gamma\ =\] {4:SHORTANSWER:=-4}</td> </tr>

</tbody></table>

Для отримання розв’язку цієї системи використаємо формули Крамера:

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3">\[\ \Delta=\]</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{1:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{1:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td>{1:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td rowspan="3"> \[=\]{12:SHORTANSWER:=-10}</td></tr>

<tr><td>{1:SHORTANSWER:=-1}</td>

<td>{1:SHORTANSWER:= 0~00}</td>

<td>{1:SHORTANSWER:=2~02}</td> </tr>

<tr><td>{1:SHORTANSWER:= 2~02}</td>

<td>{1:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{1:SHORTANSWER:= 2~02}</td> </tr></tbody></table>

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3">\[\Delta_1=\]</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{2:SHORTANSWER:= 3~03}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td rowspan="3"> \[=\]{27:SHORTANSWER:=10}</td></tr>

<tr><td>{2:SHORTANSWER:= 7~07}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:= 0~00}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=2~02}</td> </tr>

<tr><td>{2:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=2~02}</td> </tr></tbody></table>

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3">\[\Delta_2=\]</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{2:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:= 3~03}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td rowspan="3"> \[=\]{27:SHORTANSWER:=80}</td></tr>

<tr><td>{2:SHORTANSWER:=-1}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:= 7~07}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=2~02}</td> </tr>

<tr><td>{2:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=-4}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=2~02}</td> </tr></tbody></table>

<table> <tbody><tr>

<td rowspan="3">\[\Delta_3=\]</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td>{2:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=-2}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:= 3~03}</td>

<td rowspan="3"> </td>

<td rowspan="3"> \[=\]{27:SHORTANSWER:=-30}</td> </tr>

<tr><td>{2:SHORTANSWER:=-1}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:= 0~00}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:= 7~07}</td> </tr>

<tr><td>{2:SHORTANSWER:=2~02}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=1~01}</td>

<td>{2:SHORTANSWER:=-4}</td> </tr></tbody></table>

Підставляючи значення знайдених визначників у формули Крамера отримаємо розв’язок системи, з якого випливає наступний розклад вектора \[\vec{a}\] за базисом:

\[\vec{a}=\]{12:SHORTANSWER:=-1}\[\cdot\vec{p}+\]
{12:SHORTANSWER:=-8}\[\cdot\vec{q}+\]
{12:SHORTANSWER:=3~03}\[\cdot\vec{r}\].

Додаток 2
Кореляційна матриця завдання 1. Матричний многочлен 2 х2

		Доданок з A^2				Доданок з A				Доданок з E				f(A)			
		11	12	21	22	11	12	21	22	11	12	21	22	11	12	21	22
Доданок з A^2	11	1,00															
	12	0,64	1,00														
	21	0,65	0,73	1,00													
	22	0,72	0,66	0,69	1,00												
Доданок з A	11	0,30	0,28	0,24	0,27	1,00											
	12	0,31	0,29	0,26	0,28	0,94	1,00										
	21	0,31	0,31	0,23	0,25	0,91	0,91	1,00									
	22	0,19	0,20	0,19	0,19	0,82	0,79	0,76	1,00								
Доданок з E	11	0,26	0,27	0,26	0,24	0,19	0,20	0,25	0,27	1,00							
	12	0,24	0,29	0,28	0,27	0,16	0,17	0,15	0,20	0,23	1,00						
	21	0,27	0,31	0,30	0,29	0,15	0,16	0,14	0,19	0,25	0,98	1,00					
	22	0,25	0,26	0,25	0,23	0,21	0,22	0,26	0,29	0,98	0,28	0,30	1,00				
f(A)	11	0,63	0,42	0,43	0,47	0,55	0,55	0,54	0,48	0,43	0,25	0,26	0,43	1,00			
	12	0,44	0,65	0,51	0,46	0,52	0,52	0,51	0,42	0,20	0,55	0,56	0,22	0,55	1,00		
	21	0,49	0,54	0,62	0,50	0,48	0,48	0,53	0,43	0,22	0,53	0,54	0,25	0,59	0,81	1,00	
	22	0,42	0,41	0,42	0,54	0,43	0,43	0,44	0,51	0,44	0,21	0,22	0,46	0,69	0,51	0,56	1,00

Кореляційна матриця завдання 3. Матричне рівняння $XA = B$

		Вид рів-ня	Визначник	Елементи матриці оберненої матриці									Ров'язок		
				11	12	13	21	22	23	31	32	33	11	12	13
Вид рівняння		1													
Визначник		0,31	1,00												
Елементи матриці оберненої матриці	11	0,27	0,39	1,00											
	12	0,31	0,38	0,64	1,00										
	13	0,34	0,40	0,66	0,77	1,00									
	21	0,28	0,42	0,62	0,76	0,72	1,00								
	22	0,35	0,46	0,65	0,58	0,58	0,59	1,00							
	23	0,33	0,39	0,57	0,76	0,72	0,77	0,57	1,00						
	31	0,33	0,49	0,66	0,72	0,77	0,79	0,70	0,71	1,00					
	32	0,26	0,45	0,61	0,80	0,76	0,80	0,59	0,76	0,75	1,00				
	33	0,31	0,36	0,63	0,57	0,60	0,55	0,66	0,55	0,63	0,55	1,00			
Ров'язок	11	0,25	0,38	0,34	0,47	0,41	0,47	0,33	0,40	0,41	0,47	0,30	1,00		
	12	0,27	0,39	0,32	0,48	0,41	0,51	0,37	0,43	0,41	0,52	0,31	0,76	1,00	
	13	0,28	0,39	0,36	0,51	0,45	0,54	0,31	0,46	0,45	0,55	0,40	0,76	0,70	1,00