

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

Л. І. Кублій

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА
СТАТИСТИКА-2
РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ**

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рецензент: *Островська О.В.*, к.ф.-м.н., доц. каф. диференціальних рівнянь
ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний
редактор: *Сидоренко Ю.В.*, к. т. н., доц. каф. АПЕПС

Ухвалено Вченою радою ТЕФ (протокол № 9 від 22.04.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Кублій Лариса Іванівна, канд. техн. наук, доц.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА-2 РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Теорія ймовірностей та математична статистика-2: Рекомендації до виконання самостійної роботи студентів за освітньою програмою “Інженерія програмного забезпечення розподілених систем та Web-технологій” / Л. І. Кублій; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 0,55 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 37 с.

Кредитний модуль “Теорія ймовірностей та математична статистика-2” є необхідним теоретичним фундаментом для вивчення таких дисциплін, як “Системи штучного інтелекту”, “Конструювання та сучасні технології розподіленої обробки даних”, “Графічне моделювання”, “Програмування алгоритмів комп’ютерної графіки” та ін., які подаються в наступних семестрах і в яких необхідним є знання методів математичної статистики. Подано матеріал для самостійної та контрольної роботи студентів. Призначено для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою “Інженерія програмного забезпечення розподілених систем”.

© Л. І. Кублій, 2019

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

Зміст

Вступ	4
1. Мета і завдання кредитного модуля	4
2. Структура кредитного модуля	6
3. Календарно-тематичний план	7
4. Самостійна робота	11
5. Контрольні роботи	13
6. Рейтингова система оцінювання результатів навчання	27
7. Методичні рекомендації	31
8. Рекомендована література	31
<i>Додаток А. Статистичні таблиці</i>	34

Вступ

Рекомендації до виконання самостійної роботи студентів розроблені на підставі робочої програми кредитного модуля “Теорія ймовірностей та математична статистика-2” і призначені для якісної організації самостійної роботи студентів при вивченні кредитного модуля, підвищення свідомості студентів у навчанні і поліпшення результатів навчання.

Кредитний модуль “Теорія ймовірностей та математична статистика-2” дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” викладається студентам другого року підготовки першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ступеня “бакалавр” спеціальності “Інженерія програмного забезпечення” у четвертому навчальному семестрі, коли студенти вже прослухали такі дисципліни, як “Математичний аналіз”, “Лінійна алгебра та аналітична геометрія”, “Комп’ютерна дискретна математика”, набули певних теоретичних знань і володіють необхідним математичним апаратом.

Компетенції, отримані студентами в процесі вивчення дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” застосовуються ними при вивченні навчальних дисциплін “Системи штучного інтелекту”, “Конструювання та сучасні технології розподіленої обробки даних”, “Графічне моделювання”, “Програмування алгоритмів комп’ютерної графіки” та ін., які подаються в наступних семестрах.

1. Мета і завдання кредитного модуля

1.1. Метою кредитного модуля є формування у студентів здатностей:
— розробляти й застосовувати ймовірнісно-статистичні методи для розв’язання професійних завдань при розробці програмного забезпечення (ПФ2-2).

1.2. Основні завдання кредитного модуля.

Згідно з вимогами програми навчальної дисципліни студенти після засвоєння кредитного модуля мають продемонструвати такі результати навчання:

знання

закономірностей випадкових явищ, ймовірісно-статистичних методів для розв'язання професійних завдань;

уміння

застосовувати ймовірісно-статистичні методи для розв'язання професійних завдань при розробці програмного забезпечення;

додаткові знання

- основ математичної статистики;
- статистичних оцінок параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали);
- статистичної перевірки гіпотез;
- елементів дисперсійного аналізу;
- елементів теорії кореляції;
- регресійних моделей;
- моделей часових рядів;
- числових характеристик шкал найменувань і порядку;
- методів багатовимірного шкалювання;

додаткові вміння

розв'язувати математичні й фізичні задачі шляхом створення відповідних застосувань, а саме:

- розраховувати обсяги вибірок;
- задавати інформацію про розподіл вибірки в табличному, аналітичному й графічному вигляді;
- знаходити точкові й інтервальні статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали),
- виконувати перевірку статистичних гіпотез;
- застосовувати дисперсійний аналіз;
- будувати регресійні моделі і моделі часових рядів;
- знаходити числові характеристики для даних шкал найменувань і порядку;

- застосовувати методи багатовимірного шкалювання;
- правильно застосовувати статистичні методи для обробки вибірових даних;
- використовувати методи теорії ймовірностей та математичної статистики при розв'язанні математичних та фізичних задач шляхом створення відповідних застосувань.

2. Структура кредитного модуля

<i>Назви розділів і тем</i>	<i>Кількість годин</i>			
	<i>Усього</i>	<i>у тому числі</i>		
		<i>Лекції</i>	<i>Практичні</i>	<i>СРС</i>
Розділ 2. Математична статистика				
Тема 2.1. Основи математичної статистики	13	4	2	7
Тема 2.2. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали)	24	8	4	12
Тема 2.3. Елементи теорії кореляції (кількісні шкали). Регресійний аналіз	14	4	2	8
Тема 2.4. Статистичні критерії перевірки гіпотез	19	6	3	10
Тема 2.5. Моделі часових рядів	6	2	1	3
Тема 2.6. Числові характеристики шкали найменувань	7	2	1	4
Тема 2.7. Числові характеристики шкали порядку	11	4	1	6
Тема 2.8. Аналіз даних	12	6	–	6
<i>Модульна контрольна робота</i>	6		2	4
<i>Підготовка до заліку</i>	6			6
<i>Залік</i>	2		2	
Усього годин	120	36	18	66

3. Календарно-тематичний план

Тиждень	Зміст навчальної роботи	Рекомендований час СРС
Розділ 2. Математична статистика		
Тема 2.1. Основи математичної статистики		
1	<u>Лекція 1. Вибірки. Вимірювання</u> Завдання математичної статистики. Практичне застосування закону великих чисел. Вибірка (вибіркова сукупність), генеральна сукупність, обсяг сукупності. Повторна і неповторна вибірки. Репрезентативна вибірка. Способи формування вибірок. Вимірювання. Типи шкал (найменувань, порядку, інтервалів, відношень). Характеристика шкал. Методи і числові характеристики шкал. Властивості шкал. Шкальні перетворення: зниження і підвищення рівня шкали	1
2	<u>Лекція 2. Первинна обробка емпіричних даних</u> Групування емпіричних даних. Дискретний і інтервальний розподіли. Формула Стерджерса. Емпірична функція розподілу. Графічне подання емпіричних даних (гістограма, полігон).	1
	<u>Практичне заняття 1. Групування емпіричних даних.</u>	2
Тема 2.2. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали)		
3	<u>Лекція 3. Числові характеристики кількісних шкал</u> Середні значення — середнє арифметичне, середнє квадратичне, середнє гармонійне, середнє геометричне; умови застосування. Характеристики варіаційного ряду: мода, медіана. Міри розсіювання: дисперсія, середнє квадратичне відхилення, розмах варіювання, середнє абсолютне відхилення, коефіцієнт варіації; умови застосування. Показники асиметрії (коефіцієнт асиметрії, спрощений коефіцієнт асиметрії) і крутизни (куртозис, ексцес) кривої розподілу.	1
4	<u>Лекція 4. Точкові оцінки параметрів розподілу</u> Точкові оцінки параметрів розподілу. Незміщені, зміщені, ефективні та змістовні оцінки. Вибіркове середнє арифметичне значення (дискретний і інтервальний розподіли). Оцінка генерального середнього за вибіркоvim середнім. Генеральна і вибіркова дисперсії. Оцінка генеральної дисперсії за вибірковою. виправлена вибіркова дисперсія. “Виправлене” вибіркове середнє квадратичне відхилення (стандартне відхилення). Метод моментів для точкової оцінки одного і двох параметрів розпо-	1

Тиждень	Зміст навчальної роботи	Рекомендований час СРС
	ділу. Метод найбільшої правдоподібності для точкової оцінки параметрів розподілу дискретних і неперервних випадкових величин	
	<u>Практичне заняття 2.</u> Точкові статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали)	2
5	<u>Лекція 5. Групові й загальні характеристики</u> Спеціальні характеристики. Групові й загальні середні значення. Внутрішньогрупова, міжгрупова й загальна дисперсії. Правило додавання дисперсій	1
6	<u>Лекція 6. Інтервальні оцінки</u> Точність оцінки, довірча ймовірність (надійність), довірчий інтервал. Кількість ступенів свободи. Розподіли Хі-квадрат і Стюдента. Довірчі інтервали для генерального середнього значення. Довірчі інтервали для генерального середнього квадратичного відхилення і генеральної дисперсії нормально розподіленої ознаки. Довірчий інтервал для параметра біноміального розподілу. Довірчі інтервали для генеральної відносної частоти (дискретної ймовірності) ознаки. Розрахунок обсягу великої випадкової вибірки (повторної, неповторної).	1
	<u>Практичне заняття 3.</u> Спеціальні характеристики. Групові й загальні характеристики. Інтервальні оцінки	2
Тема 2.3. Елементи теорії кореляції, регресійний аналіз (кількісні шкали)		
7	<u>Лекція 7. Кореляційний зв'язок кількісних ознак</u> Функціональна, статистична й кореляційна залежності. Показники зв'язку кількісних шкал. Умовне середнє. Кореляційна таблиця. Лінійна кореляція. Вибірковий коефіцієнт лінійної парної кореляції Пірсона. Довірчий інтервал для коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона. Криволінійна кореляція. Вибіркові кореляційні відношення: властивості. Множинна кореляція: сукупний коефіцієнт кореляції.	1,5
8	<u>Лекція 8. Лінійна і нелінійна регресія</u> Умовне середнє значення. Кореляційне поле. Вибіркове рівняння регресії. Знаходження параметрів вибіркового рівняння лінійної регресії за незгрупованими даними (метод найменших квадратів). Кореляційна таблиця; знаходження параметрів вибіркового рівняння лінійної регресії за згрупованими даними. Знаходження параметрів вибіркового рівняння нелінійної ре-	1,5

Тиждень	Зміст навчальної роботи	Рекомендований час СРС
	гресії (метод найменших квадратів). Множинна регресія. Регресійне прогнозування.	
	<u>Практичне заняття 4.</u> Елементи теорії кореляції (кількісні шкали), регресійний аналіз.	2
Тема 2.4. Статистичні критерії перевірки гіпотез		
9	<u>Лекція 9. Прийняття рішень на основі перевірки статистичних гіпотез. Параметричні критерії</u> Основні статистичні розподіли (нормальний, χ^2 Пірсона, Стьюдента, Фішера-Снедекора). Статистичні гіпотези. Нульова, конкуруюча (альтернативна), проста, складна гіпотези. Статистичний критерій перевірки нульової гіпотези. Емпіричне й критичне значення критерію. Однобічна й двобічна критичні області. Помилки першого і другого роду. Потужність критерію. Параметричні й непараметричні критерії. Прийняття рішень на основі перевірки статистичних гіпотез. Параметричні критерії перевірки статистичних гіпотез (Стьюдента, Фішера-Снедекора).	1,5
10	<u>Лекція 10. Непараметричні критерії перевірки статистичних гіпотез. Перевірка нормальності розподілу</u> Критерії узгодженості (χ^2 Пірсона, Колмогорова). Критерії однорідності (χ^2 , Колмогорова-Смирнова, Вілкоксона). Перевірка гіпотези про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції Пірсона. Критерії перевірки гіпотези про нормальний розподіл: критерії Шапіро-Уїлка, Пірсона χ^2 , Колмогорова, Ліллієфорса. Порівняння емпіричних значень асиметрії й ексцесу. Графічний метод.	1
	<u>Практичне заняття 5.</u> Статистичні критерії перевірки гіпотез	2
11	<u>Лекція 11. Дисперсійний аналіз</u> Загальна, факторна (міжгрупова) і залишкова (внутрішньогрупова) дисперсії. Однофакторний дисперсійний аналіз для незв'язних груп. Однофакторний дисперсійний аналіз для зв'язних груп. Перевірка гіпотези про рівність групових генеральних дисперсій, виявлення впливу фактора на зміну ознаки. Двофакторний дисперсійний аналіз для незв'язних груп. Двофакторний дисперсійний аналіз для зв'язних груп	1

Тиждень	Зміст навчальної роботи	Рекомендований час СРС
Тема 2.5. Моделі часових рядів		
12	<u>Лекція 12. Методи часових рядів</u> Часові ряди. Кумулятивний Т-критерій виявлення тенденції. Ковзне середнє значення. Авторегресійні моделі: звичайні і з врахуванням сезонності, порядок авторегресії, сезонність. Моделі експоненційного згладжування, підбір коефіцієнта згладжування. Адаптивна модель Хольта-Вінтерса, підбір коефіцієнтів. Прогнозування на основі рядів Фур'є.	1
	<u>Практичне заняття 6.</u> Проведення однофакторного і двофакторного дисперсійних аналізів засобами пакету “Аналіз даних”. Моделі часових рядів.	2
Тема 2.6. Числові характеристики шкали найменувань Тема 2.7. Числові характеристики шкали порядку		
13	<u>Лекція 13. Числові характеристики шкали найменувань</u> Числові характеристики шкали найменувань. Мода. Застосування моди в шкалах вищих типів. Індекс якісної варіації. Якісна дисперсія. Ентропія. Ентропійний коефіцієнт. Сила і напрямок зв'язку в шкалі найменувань. Розрахунок коефіцієнтів зв'язку в таблицях 2×2 (асоціації Юла, контингенції Пірсона) і m×n (Чупрова, Крамера, спряженості Пірсона). Розрахунок g-коефіцієнта Гудмана. Розрахунок точкового бісеріального коефіцієнта кореляції Пірсона	1,5
14	<u>Лекція 14. Числові характеристики шкали порядку</u> Медіана. Застосування медіани в шкалах вищих типів. Квантили (квартилі, квінтилі, децилі, персентилі). Міжквартильний розмах. Коефіцієнт диференціації.	1
	<u>Практичне заняття 6.</u> Числові характеристики шкали найменувань і шкали порядку.	2
15	<u>Лекція 15. Показники зв'язку шкали порядку</u> Коефіцієнти рангової кореляції Спірмена й Кендалла для звичайних і об'єднаних рангів. Коефіцієнт множинної рангової кореляції. Перевірка значущості коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена, Кендалла, коефіцієнта множинної рангової кореляції. Бісеріальний ранговий коефіцієнт кореляції.	1,5

Тиждень	Зміст навчальної роботи	Рекомендований час СРС
Тема 2.7. Аналіз даних		
16	<u>Лекція 16. Факторний аналіз</u> Поняття фактора. Лінійна математична модель факторного аналізу. Розвідувальний і перевірочний (конфірматорний) факторний аналіз. Матриця кореляцій (коваріацій). Факторизація матриці кореляцій (коваріацій), редуційована матриця. Обертання факторної структури і змістовна інтерпретація результатів факторизації	1
	<i>Модульна контрольна робота</i>	4
17	<u>Лекція 17. Кластерний аналіз</u> Поняття кластера. Міри подібності. Алгоритми класифікації: ієрархічні агломеративні, ієрархічних дивізімні, ітераційні методи групування, методи пошуку модальних значень щільності, факторні методи, методи згущень.	1
18	<u>Лекція 18. Використання статистичних методів у програмному забезпеченні</u> Дослідження метрик програмного забезпечення за допомогою статистичних методів. Моделі предметної області і статистичні моделі в програмному забезпеченні.	1
	<i>Залік</i>	6

4. Самостійна робота

Упродовж семестру після кожної лекції студентам для глибшого ознайомлення з матеріалом дисципліни видаються питання для виконання СРС. Лекційний матеріал і самостійно опрацьовані студентом питання використовуються при виконанні практичних робіт.

Теми, які виносяться на самостійну роботу студентів:

Тиж-день	Назва теми, що виносяться на самостійне опрацювання	Література	Кількість годин СРС
Розділ 2. Математична статистика			
Тема 2.1. Основи математичної статистики			
1	Приклади характеристик (метрик) програмного і апаратного забезпечення, вимірюваних	с. 12-20 [5]; 8-18, 159-166	2

Тиждень	Назва теми, що виносить на самостійне опрацювання	Література	Кількість годин СРС
	за шкалами різних типів. Методи і числові характеристики, які відповідають шкалам певних типів.	[8]	
2	Побудова інтервальних розподілів. Перехід від інтервального розподілу до дискретного. Графічне подання емпіричних даних дискретних і інтервальних розподілів.	с. 26-31, 215-237 [1], 12, 21-25 [3]	1
3	Умови застосування мір центральної тенденції і мір розсіювання кількісних шкал.	с. 13-17, 34-39 [3]	1
4	Метод моментів. Метод найбільшої правдоподібності.	с. 226-234 [6]	1
Тема 2.2. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності (кількісні шкали)			
5	Зв'язок між внутрішньогруповою, міжгруповою і загальною дисперсіями. Застосування правила додавання дисперсій.	с. 590-605 [4]	1
6	Побудова інтервальних оцінок для генеральної дисперсії. Одержання інтервальних оцінок на основі теореми Чебишова.	с. 207-211 [6]	1
Тема 2.3. Елементи теорії кореляції (кількісні шкали). Регресійний аналіз			
7	Показники зв'язку кількісних шкал.	с. 223-283 [3], 606-647 [4]	1,5
8	Кореляційне поле. Вибір вигляду рівняння регресії.	с. 447-500 [1], 648-696 [4], 141-158 [8]	1,5
Тема 2.4. Статистичні критерії перевірки гіпотез			
9	Параметричні критерії перевірки статистичних гіпотез.	с. 238-252, 259-303 [1]	1,5
10	Непараметричні критерії перевірки статистичних гіпотез. Умови застосування різних критеріїв перевірки нормальності розподілу.	с. 314-357 [1], 231-278 [4]	1
11	Однофакторний і двофакторний дисперсійні аналізи.	с. 11-292 [2], 201-222 [3], 590-605 [4], 224-252 [5]	1
Тема 2.5. Моделі часових рядів			
12	Особливості підбору коефіцієнтів у методі Хольта-Вінтерса.	с. 12-14, 46-58 [9]; [19]	1
Тема 2.6. Числові характеристики шкали найменувань			

Тиждень	Назва теми, що виноситься на самостійне опрацювання	Література	Кількість годин СРС
13	Міри розсіювання шкали найменувань. Міри зв'язку шкали найменувань.	с. 31-34 [3]; 57-60, 80-93 [8]	1,5
Тема 2.7. Числові характеристики шкали порядку			
14	Розрахунок квантилів для інтервального і дискретного розподілів.	с. 30-31 [3], 93-96 [8]	1
15	Коефіцієнти зв'язку шкали порядку.	с. 39-40 [3], 208-223 [5], 103-124 [8]	1,5
Тема 2.8. Аналіз даних			
16	Статистичні показники визначення мінімальної кількості факторів у факторному аналізі: власні значення, критерій відсіювання, частка дисперсії, процент пояснюваної дисперсії.	с. 11-68 [7], 210-217 [8]	1
17	Міри подібності в кластерному аналізі: евклідова й зважена евклідова відстані, квадрат евклідової відстані, манхеттенська відстань, відстань Чебишова, метрика Мінковського, коефіцієнт кореляції Пірсона, коефіцієнти асоціативності.	с. 139-209 [7], 207-209 [8]	1
18	Статистичні моделі в програмному забезпеченні.	с. 447-500 [1], 223-283 [3], 606-696 [4], 141-158 [8]	1

5. Контрольні роботи

Модульна контрольна робота

За семестровим (кредитним) модулем 2 передбачається одна модульна контрольна робота, яка проводиться в кінці семестру.

Метою проведення модульна контрольної роботи є:

— перевірка якості засвоєння матеріалу дисципліни щодо застосування методів обробки вибіркової даних, який розглядався на аудиторних заняттях і опрацьовувався студентами самостійно за рекомендованою літературою;

— виявлення студентів з недостатнім рівнем засвоєння навчального матеріалу, з'ясування причин їхнього відставання і надання їм необхідної допомоги для підвищення успішності.

Для проведення модульної контрольної роботи виділяється 2 години за рахунок практичних занять.

На модульну контрольну роботу виносяться такі теми: розрахунок статистичних показників; кореляція і регресія; перевірка статистичних гіпотез. Для полегшення розрахунків студенти можуть використовувати засоби електронних таблиць Excel.

Зразок завдання на модульну контрольну роботу

Потрібні статистичні таблиці:

— критичних точок розподілу Фішера-Снедекора (див. Додаток А, таблиця 1);

— критичних точок розподілу Стьюдента (див. Додаток А, таблиця 2).

При розв'язуванні задач треба коротко записати умову, подати формули, які використовуються, підставити у формули числа, записати результат.

Розрахунки можна виконувати на комп'ютері в Excel. Можна користуватися зошитами.

Кожен варіант контрольної роботи містить 5 завдань (у різних варіантах п'яте завдання може відрізнитися за змістом):

Завдання 1. Дослідіть, у якому році невизначеність щодо використання студентами версій програми-архіватора була більшою, якщо розподіли мали вигляд:

	Версія 3.1	Версія 3.2	Версія 3.3
Травень 2018	12	5	3
Травень 2019	16	0	7

Чи однаковими є висновки, зроблені на основі обчислення значень коефіцієнтів якісної варіації і ентропійного? (*Вказівка:* в обчисленнях використовуйте натуральний логарифм).

Завдання 2. Дослідіть, чи існує зв'язок між групами студентів щодо використання версій програми-архіватора (для цього скористайтеся коефіцієнтами лінійної парної кореляції Пірсона, рангової кореляції Спірмена і Кендалла; вкажіть силу і напрямок зв'язку), якщо певну версію використовувала вказана кількість студентів:

	Версія 3.3	Версія 3.4	Версія 4.1	Версія 4.2	Версія 4.3
Група 1	5	4	8	2	3
Група 2	5	7	1	7	3

Завдання 3. Для системи двох кількісних ознак X і Y знайдіть координати точки, в якій перетинаються лінії регресії Y на X і X на Y і побудуйте кореляційне поле.

Ознака X	3	4	8	1	2
Ознака Y	7	5	3	2	5

Завдання 4. Для інтервального статистичного розподілу

Інтервал $[x_i; x_{i+1})$	$[-4; 2)$	$[2; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 12]$
Частота n_i	10	4	22	14

знайдіть значення вибіркової асиметрії й ексцесу і на основі порівняння їх з критичними значеннями асиметрії й ексцесу перевірте гіпотезу про нормальність розподілу досліджуваної ознаки в генеральній сукупності.

Завдання 5. Для двох незалежних вибірок, обсяги яких n_x , n_y , взятих з нормальних генеральних сукупностей X і Y , знайдено виправлені вибіркові дисперсії s_x^2 і s_y^2 . При рівні значущості α перевірте нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі $H_1 : D(X) > D(Y)$ або $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Або:

Із генеральних нормально розподілених сукупностей X і Y , дисперсії яких рівні між собою, взято незалежні вибірки обсягів n_x і n_y і для них знайдено вибіркові середні значення \bar{x}_b і \bar{y}_b і виправлені вибіркові дисперсії s_x^2 і s_y^2 . При рівні значущості α перевірте нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ про рів-

ність генеральних середніх значень при альтернативній гіпотезі $H_1 : M(X) > M(Y)$ або $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ про їхню відмінність.

Зразок виконання завдань модульної контрольної роботи

Завдання 1. Дослідіть, у якому році невизначеність була більшою:

	Версія 3.1	Версія 3.2	Версія 3.3
Травень 2018	12	5	3
Травень 2019	16	0	7

Чи однаковими є висновки, зроблені на основі обчислення значень коефіцієнтів якісної варіації і ентропійного?

Розв'язання. Спочатку обчислимо індекс якісної варіації за формулою:

$$J_k = \frac{2k}{n^2(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} n_i \cdot \left(\sum_{j=i+1}^k n_j \right).$$

У першому випадку обсяг вибірки $n_{2018} = 12 + 5 + 3 = 20$, кількість класів $k_{2018} = 3$, отже:

$$J_{3(2018)} = \frac{2 \cdot 3}{20^2(3-1)} \cdot (12 \cdot 5 + 12 \cdot 3 + 5 \cdot 3) = 0,83.$$

У другому випадку обсяг вибірки $n_{2019} = 16 + 7 = 23$, кількість класів $k_{2019} = 2$ (оскільки одна із частот дорівнює 0), отже:

$$J_{2(2019)} = \frac{2 \cdot 2}{23^2(2-1)} \cdot 16 \cdot 7 = 0,85.$$

Оскільки $J_{2(2019)} > J_{3(2018)}$, то невизначеність більша в 2019 році.

Обчислимо ентропію за формулою (в обчисленнях використаємо натуральний логарифм):

$$E = \ln n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \ln n_i.$$

Отже:

$$E_{2018} = \ln 20 - \frac{1}{20} (12 \cdot \ln 12 + 5 \cdot \ln 5 + 3 \cdot \ln 3) = 0,94,$$

$$E_{2019} = \ln 23 - \frac{1}{23}(16 \cdot \ln 16 + 7 \cdot \ln 7) = 0,61.$$

Оскільки у вибірках кількість класів різна, то порівнювати ентропії не можна. Можна порівнювати нормовані ентропійні коефіцієнти:

$$\varepsilon = \frac{E}{\ln k}.$$

Тоді:

$$\varepsilon_{2018} = \frac{0,94}{\ln 3} = 0,85,$$

$$\varepsilon_{2019} = \frac{0,61}{\ln 2} = 0,89.$$

Оскільки $\varepsilon_{2019} > \varepsilon_{2018}$, то невизначеність більша в 2019 році.

Обидва висновки збігаються.

Відповідь: $J_{2018} = 0,83$; $J_{2019} = 0,85$ — невизначеність більша в 2019 році;
 $\varepsilon_{2018} = 0,85$; $\varepsilon_{2019} = 0,89$ — невизначеність більша в 2019 році. Обидва висновки збігаються.

Завдання 2. Дослідіть, чи існує зв'язок між двома групами (ознаками) — скористайтесь коефіцієнтами лінійної парної кореляції Пірсона, рангової кореляції Спірмена і Кендалла, вкажіть силу і напрямок зв'язку:

Частоти	Версія 3.3	Версія 3.4	Версія 4.1	Версія 4.2	Версія 4.3
Група 1 (ознака X)	5	4	8	2	3
Група 2 (ознака Y)	5	7	1	7	3

Розв'язання. Кількість об'єктів — версій $n = 5$. Обчислимо коефіцієнт лінійної парної кореляції Пірсона за формулою:

$$r_{B_{xy}} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}$$

Розрахунки проведемо на основі простої кореляційної таблиці:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
5	5	25	25	25
4	7	16	49	28
8	1	64	1	8
2	7	4	49	14
3	3	9	9	9
Сума: 22	23	118	133	84

Тоді:

$$r_{\text{В.у.}} = \frac{5 \cdot 84 - 22 \cdot 23}{\sqrt{(5 \cdot 118 - 22^2) \cdot (5 \cdot 133 - 23^2)}} = -0,72.$$

Знайдене значення вибіркового коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона вказує на існування між складовими X і Y зворотного сильного лінійного зв'язку.

Для обчислення значень коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена і Кендалла прорангуємо подані частоти, наприклад, за спаданням:

Ранги	Версія 3.3	Версія 3.4	Версія 4.1	Версія 4.2	Версія 4.3
Група 1 (ознака X)	2	3	1	5	4
Група 2 (ознака Y)	3	1,5	5	1,5	4

Оскільки за ознакою Y є об'єднані ранги, то треба скористатися формулами з поправками.

Обчислимо коефіцієнт рангової кореляції Спірмена за формулою:

$$\rho = \frac{(n^3 - n) - 6 \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + T_x + T_y \right)}{(n^3 - n) \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{12T_x}{n^3 - n} \right) \cdot \left(1 - \frac{12T_y}{n^3 - n} \right)}},$$

де $T_i = \frac{1}{12} \sum_{s=1}^p (u_s^3 - u_s)$ — поправка на об'єднані ранги за певною ознакою.

Оскільки за ознакою X немає об'єднаних рангів, то $T_x = 0$; за ознакою Y є одне об'єднання з двома рангами, тому $T_y = \frac{1}{12} \cdot (2^3 - 2) = 0,5$. Тоді:

$$\rho = \frac{(5^3 - 5) - 6 \cdot ((2-3)^2 + (3-1,5)^2 + (1-5)^2 + (5-1,5)^2 + (4-4)^2 + 0 + 0,5)}{(5^3 - 5) \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{12 \cdot 0}{5^3 - 5}\right) \cdot \left(1 - \frac{12 \cdot 0,5}{5^3 - 5}\right)}} = -0,62.$$

Знайдене значення вибіркового коефіцієнта рангової кореляції Спірмена вказує на існування між рангами ознак X і Y зворотного середнього зв'язку.

Обчислимо значення коефіцієнта рангової кореляції Кендалла за формулою:

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (R_i - L_i)}{\sqrt{\left(\frac{n^2 - n}{2} - U_x\right) \left(\frac{n^2 - n}{2} - U_y\right)}},$$

де $U_i = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p (u_s^2 - u_s)$ — поправка на об'єднані ранги за певною ознакою.

Оскільки за ознакою X немає об'єднаних рангів, то $U_x = 0$; за ознакою Y є одне об'єднання з двома рангами, тому $U_y = \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 2) = 1$. Знайдемо суму

$$\sum_{i=1}^{n-1} (R_i - L_i):$$

$$R_1 - L_1: \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} = -1 - 1 - 1 + 1 = -2,$$

$$R_2 - L_2: \begin{array}{c|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1,5 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 0 & 1 \end{array} = -1 + 0 + 1 = 0,$$

$$R_3 - L_3: \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ \hline & -1 & -1 \end{array} = -1 - 1 = -2,$$

$$R_4 - L_4: \begin{array}{c|c} 5 & -1 \\ 1,5 & 1 \\ \hline & -1 \end{array} = -1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (R_i - L_i) = -2 + 0 - 2 - 1 = -5.$$

Отже:

$$\tau = \frac{-5}{\sqrt{\left(\frac{5^2 - 5}{2} - 0\right)\left(\frac{5^2 - 5}{2} - 1\right)}} = -0,53.$$

Знайдене значення вибіркового коефіцієнта рангової кореляції Кендалла вказує на існування між рангами ознак X і Y зворотного середнього зв'язку.

Відповідь: $r_{xy} = -0,716$ (зворотній сильний лінійний зв'язок), $\rho = -0,616$ (зворотній середній ранговий зв'язок), $\tau = -0,527$ (зворотній середній ранговий зв'язок).

Завдання 3. Для системи двох кількісних ознак X і Y знайдіть координати точки, в якій перетинаються лінії регресії Y на X і X на Y і побудуйте кореляційне поле.

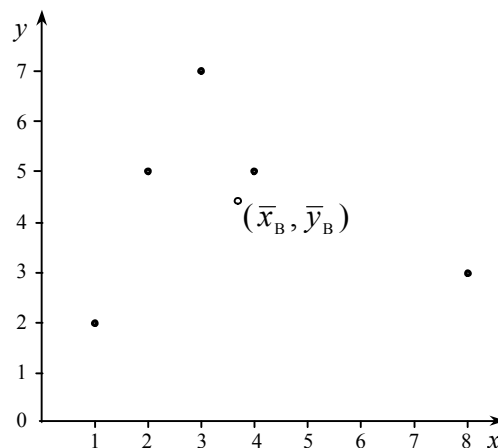
Ознака X	3	4	8	1	2
Ознака Y	7	5	3	2	5

Розв'язання. Точка перетину ліній регресії Y на X і X на Y має координати (\bar{x}_B, \bar{y}_B) :

$$\bar{x}_B = (3 + 4 + 8 + 1 + 2)/5 = 3,6;$$

$$\bar{y}_B = (7 + 5 + 3 + 2 + 5)/5 = 4,4.$$

Подамо кореляційне поле і точку перетину прямих регресії в декартовій системі координат:



Відповідь: точка перетину прямих ліній регресії має координати $(3,6; 4,4)$.

Завдання 4. Для інтервального статистичного розподілу

Інтервал $[x_i; x_{i+1})$	$[-4; 2)$	$[2; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 12]$
Частота n_i	10	4	22	14

знайдіть значення вибірових асиметрії й ексцесу і на основі порівняння їх з критичними значеннями асиметрії й ексцесу перевірте гіпотезу про нормальність розподілу досліджуваної ознаки в генеральній сукупності.

Розв'язання. Для знаходження числових характеристик за інтервальним розподілом спочатку перейдемо до дискретного розподілу:

Варіанта x_i	-1	4	7	10
Частота n_i	10	4	22	14

Обсяг вибірки $n = 10 + 4 + 22 + 14 = 50$. Обчислимо значення:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} = \frac{10 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + 22 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 6,$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{10 \cdot (-1-6)^2 + 4 \cdot (4-6)^2 + 22 \cdot (7-6)^2 + 14 \cdot (10-6)^2}{50-1} = 15,35,$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{15,35} = 3,92,$$

$$A_{sB} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^3}{n\sigma^3} = \frac{10 \cdot (-1-6)^3 + 4 \cdot (4-6)^3 + 22 \cdot (7-6)^3 + 14 \cdot (10-6)^3}{50 \cdot 3,92^3} = -0,85,$$

$$E_{xB} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^4}{ns^4} - 3 = \frac{10 \cdot (-1-6)^4 + 4 \cdot (4-6)^4 + 22 \cdot (7-6)^4 + 14 \cdot (10-6)^4}{50 \cdot 3,92^4} - 3 = -0,65,$$

$$A_{s_{кр}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (50-1)}{(50+1) \cdot (50+3)}} = 0,99,$$

$$E_{x_{кр}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot n \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(n-1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot 50 \cdot (50-2) \cdot (50-3)}{(50-1)^2 \cdot (50+3) \cdot (50+5)}} = 1,87.$$

Оскільки $|A_{sB}| = |-0,85| < A_{s_{кр}} = 0,99$ і $|E_{xB}| = |-0,65| < E_{x_{кр}} = 1,87$, то розподіл значень досліджуваної ознаки в генеральній сукупності нормальний.

Відповідь: розподіл значень досліджуваної ознаки в генеральній сукупності нормальний.

Завдання 5. (1) Для двох незалежних вибірок, обсяги яких n_x , n_y , взятих з нормальних генеральних сукупностей X і Y , знайдено виправлені вибіркові дисперсії s_x^2 і s_y^2 . При рівні значущості α перевірте нульову гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі $H_1 : D(X) > D(Y)$ або $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

(2) Із генеральних нормально розподілених сукупностей X і Y , дисперсії яких рівні між собою, взято незалежні вибірки обсягів n_x і n_y і для них знайдено вибіркові середні значення \bar{x}_b і \bar{y}_b і виправлені вибіркові дисперсії s_x^2 і s_y^2 . При рівні значущості α перевірте нульову гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ про рівність генеральних середніх значень при альтернативній гіпотезі $H_1 : M(X) > M(Y)$ або $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ про їхню відмінність.

Розв'язання. Розглянемо задачу (1) на застосування критерію Фішера-Снедекора при конкретних значеннях, наприклад, $n_x = 12$, $n_y = 17$, $s_x^2 = 8,4$ і $s_y^2 = 7,5$, $\alpha = 0,05$ і перевіримо гіпотезу про рівність генеральних дисперсій $H_0 : D(X) = D(Y)$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : D(X) > D(Y)$. Знайдемо емпіричне значення критерію Фішера-Снедекора:

$$F_{\text{емп}} = \frac{s_{\text{біл}}^2}{s_{\text{мен}}^2} = \frac{8,4}{7,5} = 1,12$$

При конкуруючій гіпотезі $H_1 : D(X) > D(Y)$ будують правобічну критичну область. За таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора (див. Додаток А, таблиця 1) знайдемо критичну точку при заданому рівні значущості α і кількостях ступенів свободи $k_1 = n_{\text{біл}} - 1$ і $k_2 = n_{\text{мен}} - 1$:

$$\begin{aligned} F_{\text{кр}}(\alpha; k_1, k_2) &= F_{\text{кр}}(\alpha; n_{\text{біл}} - 1, n_{\text{мен}} - 1) = \\ &= F_{\text{кр}}(0,05; 12 - 1, 17 - 1) = F_{\text{кр}}(0,05; 11, 16) = 2,46. \end{aligned}$$

Оскільки $F_{\text{емп}} = 1,12 < F_{\text{кр}} = 2,46$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій.

Якщо при таких самих значеннях обсягів вибірок і таких самих виправлених вибіркових дисперсіях при рівні значущості $\alpha = 0,1$ треба перевірити гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ і конкуруюча гіпотеза має вигляд $H_1 : D(X) \neq D(Y)$, то треба будувати двобічну критичну область і критичне значення треба шукати за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора при $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$. Далі треба виконати ті самі розрахунки, що й для випадку правобічної критичної області.

Розглянемо задачу (2) на застосування критерію Стьюдента при конкретних значеннях, наприклад, $n_X = 12$, $n_Y = 17$, $\bar{x}_B = 5$, $\bar{y}_B = 4,7$, $s_X^2 = 8,4$ і $s_Y^2 = 7,5$, $\alpha = 0,05$ і перевіримо гіпотезу про рівність генеральних середніх значень $H_0 : M(X) = M(Y)$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : M(X) > M(Y)$. Знайдемо емпіричне значення критерію Стьюдента:

$$T_{\text{емп}} = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{n_X n_Y (n_X + n_Y - 2)}{n_X + n_Y}} =$$

$$= \frac{5 - 4,7}{\sqrt{(12 - 1) \cdot 8,4 + (17 - 1) \cdot 7,5}} \cdot \sqrt{\frac{12 \cdot 17 \cdot (12 + 17 - 2)}{12 + 17}} = 0,284.$$

При конкуруючій гіпотезі $H_1 : M(X) > M(Y)$ будують правобічну критичну область. За таблицею критичних значень розподілу Стьюдента (див. Додаток А, таблиця 2) для однобічної критичної області знайдемо критичну точку при заданому рівні значущості α і кількості ступенів свободи $k = n_X + n_Y - 2$:

$$t_{\text{кр одноб}}(\alpha; k) = t_{\text{кр одноб}}(\alpha; n_X + n_Y - 2) =$$

$$= t_{\text{кр одноб}}(0,05; 12 + 17 - 2) = t_{\text{кр одноб}}(0,05; 27) = 1,703.$$

Оскільки $T_{\text{емп}} = 0,284 < t_{\text{кр}} = 1,703$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу про рівність генеральних середніх значень.

Якщо при таких самих значеннях обсягів вибірок, вибіркових середніх значеннях і виправлених вибіркових дисперсіях при такому самому рівні значущості $\alpha = 0,05$ треба перевірити гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ і конкуруюча

гіпотеза має вигляд $H_1 : M(X) \neq M(Y)$, то треба будувати двобічну критичну область і критичне значення треба шукати за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (див. Додаток А, таблиця 2) для двобічної критичної області:

$$\begin{aligned} t_{\text{кр двоб}}(\alpha; k) &= t_{\text{кр двоб}}(\alpha; n_X + n_Y - 2) = \\ &= t_{\text{кр двоб}}(0,05; 12 + 17 - 2) = t_{\text{кр двоб}}(0,05; 27) = 2,052. \end{aligned}$$

Оскільки $T_{\text{емп}} = 0,284 < t_{\text{кр}} = 2,052$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу про рівність генеральних середніх значень.

Відповідь: при вибраних конкретних вибіркових характеристиках немає підстав відхилити нульову гіпотезу про рівність (1) генеральних дисперсій, (2) генеральних середніх значень.

Виконання студентами завдань модульної контрольної роботи оцінюється згідно з положенням про рейтингову систему оцінювання (п. 7).

Залікова контрольна робота

Згідно з навчальною програмою дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” передбачено семестрову атестацію у формі заліку. Залікову контрольну роботу студент виконує з метою покращення сумарного залікового балу.

Залік проводиться у письмовому вигляді. Залікова контрольна робота містить 5 завдань (2 теоретичні, 3 практичні), які забезпечують перевірку результатів навчання. Завдання передбачають інтегроване застосування знань матеріалу навчальної дисципліни.

Перелік теоретичних питань, які виносяться на залікову роботу.

1. Приклади шкал вимірювання (найменувань, порядку, інтервалів, відношень), пов’язаних з програмним забезпеченням.
2. Повторна і безповторна вибірки. Способи формування вибірок.
3. Групування емпіричних даних. Дискретний розподіл вибірки.
4. Інтервальний розподіл вибірки. Формула Стерджерса.
5. Міри центральної тенденції кількісних шкал (інтервальних і відношень).

6. Розрахунок середніх значень (арифметичного, квадратичного, геометричного, гармонійного).
7. Міри розсіювання кількісних шкал.
8. Розрахунок показників розсіювання (варіаційного розмаху, середнього лінійного відхилення, виправленої дисперсії, стандартного відхилення, коефіцієнта варіації).
9. Показники асиметрії (коефіцієнт асиметрії, спрощений коефіцієнт асиметрії) і крутизни (куртозис, ексцес) кривої розподілу.
10. Групові і загальні середні значення.
11. Внутрішньогрупова, міжгрупова і загальна дисперсії.
12. Інтервальні оцінки для середнього значення і середнього квадратичного відхилення.
13. Визначення обсягів вибірок — розрахунок обсягів повторної і безповторної вибірок за різних умов.
14. Показники зв'язку кількісних шкал.
15. Розрахунок коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона.
16. Побудова довірчого інтервалу для коефіцієнта лінійної кореляції Пірсона.
17. Розрахунок сукупного коефіцієнта кореляції.
18. Розрахунок кореляційного відношення.
19. Розрахунок точкового бісеріального коефіцієнта кореляції Пірсона.
20. Регресійне прогнозування. Кореляційне поле. Вибіркове рівняння регресії.
21. Знаходження параметрів вибіркового рівняння лінійної регресії (метод найменших квадратів).
22. Довірча смуга для вибіркового рівняння лінійної регресії. Довірча смуга для окремих значень залежної змінної.
23. Знаходження параметрів вибіркового рівняння нелінійної регресії (метод найменших квадратів).
24. Формулювання статистичних гіпотез. Загальна схема перевірки гіпотез.

25. Помилки першого і другого роду при перевірці гіпотез.
26. Прийняття рішень на основі перевірки статистичних гіпотез.
27. Непараметричні й параметричні критерії перевірки статистичних гіпотез.
28. Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань.
29. Перевірка гіпотези про рівність дисперсій.
30. Критерій узгодженості χ^2 Пірсона.
31. Критерій узгодженості Колмогорова.
32. Критерії однорідності (χ^2 , Колмогорова-Смирнова, Вілкоксона).
33. Перевірка критеріїв значущості коефіцієнтів рангової кореляції.
34. Перевірка критерію значущості вибіркового коефіцієнта лінійної парної кореляції Пірсона.
35. Критерії відмінностей Розенбаума, Манна-Уїтні, Краскала-Уолліса, тенденцій Джонкіра.
36. Статистичні гіпотези в програмному забезпеченні.
37. Перевірка нормальності розподілу.
38. Порівняння емпіричних значень асиметрії й ексцесу з критичними значеннями.
39. Графічний метод перевірки гіпотези про нормальність розподілу.
40. Числові характеристики шкали найменувань.
41. Розрахунок значення моди, показників розсіювання (індекс якісної варіації, якісна дисперсія, ентропія).
42. Показники зв'язку шкали найменувань.
43. Розрахунок коефіцієнтів зв'язку в таблицях 2×2 (асоціації Юла, контингенції Пірсона).
44. Розрахунок коефіцієнтів зв'язку в таблицях $m \times n$ (Чупрова, Крамера, спряженості Пірсона).
45. Числові характеристики шкали порядку.
46. Розрахунок значення медіани, квантилів, міжквартильного розмаху, коефіцієнта диференціації.

47. Показники зв'язку шкали порядку.
48. Розрахунок коефіцієнта рангової кореляції Спірмена для звичайних рангів.
49. Розрахунок коефіцієнта рангової кореляції Спірмена для об'єднаних рангів. Спрощена формула.
50. Розрахунок коефіцієнта рангової кореляції Кендалла для звичайних рангів (4 варіанти).
51. Розрахунок коефіцієнта рангової кореляції Кендалла для об'єднаних рангів.
52. Розрахунок коефіцієнта множинної рангової кореляції.
53. Розрахунок бісеріального рангового коефіцієнта кореляції.
54. Авторегресія, порядок авторегресії, сезонність.
55. Експоненційне згладжування, підбір коефіцієнта згладжування.
56. Однофакторний дисперсійний аналіз для незв'язних груп.
57. Однофакторний дисперсійний аналіз для зв'язних груп.
58. Двофакторний дисперсійний аналіз для незв'язних груп.
59. Двофакторний дисперсійний аналіз для зв'язних груп.
60. Поняття фактора. Розвідувальний і перевірочний факторний аналіз.
61. Статистичні показники визначення мінімальної кількості факторів у факторному аналізі.
62. Кластерний аналіз. Міри подібності в кластерному аналізі.
63. Алгоритми класифікації у кластерному аналізі.

Практичні завдання охоплюють усі теми курсу. При розв'язуванні практичних завдань розрахунки можна виконувати з використанням засобів електронних таблиць Excel і пакету "Аналіз даних".

Виконання студентами завдань залікової контрольної роботи оцінюється згідно з положенням про рейтингову систему оцінювання (п. 7).

6. Рейтингова система оцінювання результатів навчання

1. Оцінка з дисципліни виставляється за багатобальною системою з подальшим перерахуванням у 4-бальну.

2. Максимальна кількість балів з дисципліни дорівнює 100.

3. При нарахуванні балів за окремими видами робіт рейтинг студента складається з балів, які він отримав за:

1) роботу на практичних заняттях і виконання домашніх завдань;

2) модульну контрольну роботу (МКР);

3) залікову (виконується з метою покращення сумарного залікового балу) контрольну роботу (ЗКР).

Система рейтингових (вагових) балів та критерії оцінювання

1). Робота на практичних заняттях і виконання домашніх завдань

Оцінюється робота студента на 7 практичних заняттях, передбачених робочою програмою (на передостанньому практичному занятті проводиться МКР, на останньому — залік). Протягом семестру студент повинен відповідати біля дошки 2 рази, також студент має виконати 7 домашніх завдань і написати 6 коротких тестових робіт поточної перевірки знань лекційного і практичного матеріалу. Максимальний ваговий бал за відповідь чи розв'язування задачі біля дошки — 6 балів, за виконання домашнього завдання — 3 бали, за виконання тестової роботи — 7 балів.

Максимальна кількість балів на всіх практичних заняттях дорівнює 6 балів \times 2 + 3 бали \times 7 + 7 балів \times 6 = 12+21+42 = 75 балів. Отже, $r_{пз} = 75$ балів.

Критерії оцінювання

відповідь чи розв'язування задачі біля дошки:

— студент повністю розкрив питання або розв'язав задачу — 6 балів;

— студент розкрив питання або правильно розв'язав задачу, але при її розв'язанні було допущено деякі неточності — 4-5 балів;

— студент неповністю розкрив питання, допустив окремі помилки — 3 бали;

— студент не розкрив питання — 0 балів;

виконання домашнього завдання:

- студент повністю і правильно виконав домашнє завдання — 3 бали;
- студент повністю виконав домашнє завдання, але деякі задачі мають неправильні результати, хоч хід виконання правильний — 2 бали;
- студент виконав правильно половину і більше завдань — 1 бал;
- студент виконав менше половини завдань — 0,5 бала;
- студент не виконав домашнє завдання — 0 балів;

виконання тестової роботи:

- студент повністю виконав тестову роботу — 7 балів;
- студент повністю виконав тестову роботу, але було допущено деякі неточності — 5-6 балів;
- студент неповністю виконав тестову роботу, допустив окремі помилки — 3-4 бали;
- студент лише частково виконав тестову роботу — 1-2 бали;
- студент не виконав тестову роботу — 0 балів;

Заохочувальні та штрафні бали за:

- активність на практичних заняттях і лекціях +0,5 бала;
- розв'язання задачі з використанням власного оптимального підходу +1 бал;
- несвоєчасна виконання домашньої роботи без поважної причини -0,5 бала;
- відсутність на практичному занятті без поважних причин -1 бал.

2). Написання модульної контрольної роботи (МКР)

Контрольна робота складається з 5 завдань, за кожне з яких нараховується максимальний бал 5. Максимальний ваговий бал — $5 \text{ балів} \times 5 = 25 \text{ балів}$. Отже, $\Gamma_{\text{МКР}} = 25 \text{ балів}$.

Критерії оцінювання.

Якість виконання кожного завдання оцінюється так:

- завдання виконане повністю і вірно протягом відведеного часу — 5 балів;

— завдання виконане повністю протягом відведеного часу, але має несуттєві неточності — 4 бали;

— завдання виконане більше, ніж наполовину протягом відведеного часу — 3 бали;

— завдання виконане наполовину протягом відведеного часу — 1,5 бала;

— завдання виконане менше, ніж наполовину, або має суттєві неточності, або невиконане протягом відведеного часу — 0 балів.

3). Написання залікової контрольної роботи (ЗКР)

Залікова контрольна робота складається з 5 завдань, за кожне з яких нараховується максимальний бал 5. Максимальний ваговий бал — $5 \text{ балів} \times 5 = 25 \text{ балів}$. Отже, $r_{зкр} = 25 \text{ балів}$.

Критерії оцінювання.

Якість виконання кожного завдання оцінюється так:

— завдання виконане повністю і вірно протягом відведеного часу — 5 балів;

— завдання виконане повністю протягом відведеного часу, але має несуттєві неточності — 4 бали;

— завдання виконане більше, ніж наполовину протягом відведеного часу — 3 бали;

— завдання виконане наполовину протягом відведеного часу — 1,5 бала;

— завдання виконане менше, ніж наполовину, або має суттєві неточності, або невиконане протягом відведеного часу — 0 балів.

Умови позитивних проміжних атестацій

Для отримання “зараховано” з першої проміжної атестації студент повинен мати не менше 16 балів (*за умови, що за 8 тижнів згідно з календарним планом контрольних заходів максимальний бал студента має становити $r_{пз} = 6 \text{ балів} + 3 \text{ бали} \times 2 + 7 \text{ балів} \times 3 = 33 \text{ бали}$*).

Для отримання “зараховано” з другої проміжної атестації студент повинен мати не менше 33 балів (*за умови, що за 14 тижнів згідно з календарним*

планом контрольних заходів максимальний бал студента має становити $r_{пз} = 6$ балів + 3 бали $\times 6$ + 7 балів $\times 6 = 66$ балів).

Розрахунок шкали (R) рейтингу:

Сума вагових балів контрольних заходів протягом семестру становить:

$$R = r_{пз} + r_{мкр} = 75 + 25 = 100 \text{ балів.}$$

Таким чином, рейтингова шкала з дисципліни становить 100 балів.

Необхідною умовою допуску до заліку є відпрацювання всіх пропущених занять і виконання модульної контрольної роботи, а також стартовий рейтинг (R) не менше $0,4 \times 100 = 40$ балів.

Студенти, які набрали протягом семестру рейтинг з кредитного модуля $0,4R \leq r < 0,6R$, зобов'язані виконувати залікову контрольну роботу (співбесіду). Студенти, які набрали протягом семестру рейтинг $r \geq 0,6R$ можуть підвищити свій бал на заліку.

Якщо студент виконував залікову контрольну роботу з метою покращення залікового бала, то сума вагових балів контрольних заходів становить:

$$R = r_{пз} + r_{зкр} + r_{мкр} = 50 + 25 + 25 = 100 \text{ балів.}$$

Для отримання студентом відповідних оцінок (ECTS та традиційних) його рейтингова оцінка RD переводиться згідно з таблицею (шкалою оцінювання):

RD = $r_c + r_{екз}$	Традиційна оцінка
95...100	відмінно
85...94	дуже добре
75...84	добре
65...74	задовільно
60...64	достатньо
30...59	незадовільно
$r_c < 30$	не допущений

7. Методичні рекомендації

Методика вивчення дисципліни полягає в наданні студентам теоретичного матеріалу, роботі на практичних заняттях, самостійній роботі студентів над

теоретичним матеріалом, проведенні консультацій, контролі за результатами самостійної роботи студентів у вигляді конкретних завдань і проведенні модульної контрольної роботи.

8. Рекомендована література

Базова

1. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. — Москва: Мир, 1980. — 510 с.
2. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента. — Москва: Мир, 1981. — 520 с.
3. Длин А.М. Математическая статистика в технике. — Москва: Советская наука, 1958. — 466 с.
4. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. — Москва: Физматлит, 2006. — 816 с.
5. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. — СПб: Речь, 2003. — 350 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — Москва: Высшая школа, 2003. — 479 с.
7. Ким Дж.-О., Мьюллер Ч. и др. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. — Москва: Финансы и статистика, 1989. — 218 с.
8. Паниотто В.И., Максименко В.С. Количественные методы в социологических исследованиях. — К.: Наукова думка, 1982. — 272 с.
9. Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимощук О.Л. Аналіз часових рядів: Навч. посібник. — К.: Політехніка, 2010. — 317 с.

Допоміжна

10. Гланц С. Медико-биологическая статистика. — Москва: Практика, 1999. — 459 с.

11. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. — Москва: Прогресс, 1976. — 496 с.
12. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник: У 2-х ч. — Ч. II. Математична статистика. — К.: КНЕУ, 2001. — 336 с.
13. Ирбела К. Факторный анализ. — Москва: Статистика, 1980. — 398 с.
14. Максименко В.С., Романенко С.В., Подшивалкина В.И., Олесевич Л.П. Математико-статистические методы в социологическом исследовании. — Одесса: Астропринт, 1998. — 183 с.
15. Мармоза А.Т. Практикум з математичної статистики: Навч. посібник. — К.: Кондор, 2004. — 264 с.
16. Столяров Г.С., Ємшанов Д.Г., Ковтун Н.В. АРМ статистика. Навчальний посібник. — К.: КНЕУ, 1999. — 266 с.

Інформаційні ресурси

17. Кампус НТУУ “КПІ” — <http://login.kpi.ua/>
18. Науково-технічна бібліотека НТУУ “КПІ” — <http://library.kpi.ua/>
19. <http://masters.donntu.org/2017/fknt/vudvud/library/article6.pdf>

Контактний e-mail: kublii_l_i@ukr.net

Контактний телефон: (063)-71-91-231

Додаток А

Статистичні таблиці

Таблиця 1.

Критичні точки F -розподілу Фішера-Снедекора

k_1 — кількість ступенів свободи чисельника (більшої дисперсії; факторної дисперсії);
 k_2 — кількість ступенів свободи знаменника (меншої дисперсії; залишкової дисперсії).

Рівень значущості $\alpha = 0,01$															
k_1															
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	24	50	$+\infty$
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107	6234	6302	6366
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42	99,46	99,48	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,60	26,35	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	13,93	13,69	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,47	9,24	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,31	7,09	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,07	5,86	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,28	5,07	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	4,73	4,52	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,33	4,12	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,02	3,81	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	3,78	3,57	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,59	3,38	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,43	3,22	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,29	3,08	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,18	2,97	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,08	2,87	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,00	2,78	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	2,92	2,71	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	2,86	2,64	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	2,80	2,58	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	2,75	2,53	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	2,70	2,48	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,66	2,44	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,62	2,40	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,58	2,36	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93	2,55	2,33	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,52	2,30	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87	2,49	2,27	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,47	2,25	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74	2,36	2,14	1,89
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,29	2,06	1,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61	2,23	2,00	1,74
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,63	2,56	2,18	1,95	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,12	1,88	1,60
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42	2,03	1,79	1,49
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37	1,98	1,74	1,43
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34	1,95	1,70	1,38
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27	1,89	1,63	1,28
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22	1,83	1,57	1,16
$+\infty$	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18	1,79	1,52	1,00

Таблиця 1 (продовження)

Рівень значущості $\alpha = 0,05$															
k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	24	50	$+\infty$
k_2															
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	249	252	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,45	19,48	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,53	4,44	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,12	3,02	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,61	2,51	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,51	2,40	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,42	2,31	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,24	2,12	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,08	1,97	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,05	1,94	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,01	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	1,96	1,84	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	1,93	1,81	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	1,91	1,79	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	1,83	1,70	1,56
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97	1,76	1,63	1,47
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,70	1,56	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,65	1,51	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,63	1,48	1,28
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,61	1,46	1,25
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80	1,57	1,41	1,19
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,77	1,54	1,38	1,11
$+\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,52	1,35	1,00

Таблиця 1 (закінчення)

Рівень значущості $\alpha = 0,001$															
k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	24	50	$+\infty$
k_2															
1	405312	499725	540257	562668	576496	586033	593185	597954	602245	605583	608444	610352	623703	630379	636578
2	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
3	167	148	141	137	135	133	132	131	130	129	129	128	126	125	123
4	74,13	61,25	56,17	53,43	51,72	50,52	49,65	49,00	48,47	48,05	47,70	47,41	45,77	44,88	44,05
5	47,18	37,12	33,20	31,08	29,75	28,83	28,17	27,65	27,24	26,91	26,64	26,42	25,13	24,44	23,79
6	35,51	27,00	23,71	21,92	20,80	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	18,18	17,99	16,90	16,31	15,75
7	29,25	21,69	18,77	17,20	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	13,88	13,71	12,73	12,20	11,70
8	25,41	18,49	15,83	14,39	13,48	12,86	12,40	12,05	11,77	11,54	11,35	11,19	10,30	9,80	9,33
9	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,72	9,57	8,72	8,26	7,81
10	21,04	14,90	12,55	11,28	10,48	9,93	9,52	9,20	8,96	8,75	8,59	8,45	7,64	7,19	6,76
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,65	8,35	8,12	7,92	7,76	7,63	6,85	6,42	6,00
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	7,14	7,00	6,25	5,83	5,42
13	17,82	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	6,65	6,52	5,78	5,37	4,97
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,44	7,08	6,80	6,58	6,40	6,26	6,13	5,41	5,00	4,60
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,08	5,94	5,81	5,10	4,70	4,31
16	16,12	10,97	9,01	7,94	7,27	6,80	6,46	6,20	5,98	5,81	5,67	5,55	4,85	4,45	4,06
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,58	5,44	5,32	4,63	4,24	3,85
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76	5,56	5,39	5,25	5,13	4,45	4,06	3,67
19	15,08	10,16	8,28	7,27	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22	5,08	4,97	4,29	3,90	3,51
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44	5,24	5,08	4,94	4,82	4,15	3,77	3,38
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,56	5,31	5,11	4,95	4,81	4,70	4,03	3,64	3,26
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19	4,99	4,83	4,70	4,58	3,92	3,54	3,15
23	14,20	9,47	7,67	6,70	6,08	5,65	5,33	5,09	4,89	4,73	4,60	4,48	3,82	3,44	3,05
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,24	4,99	4,80	4,64	4,51	4,39	3,74	3,36	2,97
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,89	5,46	5,15	4,91	4,71	4,56	4,42	4,31	3,66	3,28	2,89
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83	4,64	4,48	4,35	4,24	3,59	3,21	2,82
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	5,00	4,76	4,57	4,41	4,28	4,17	3,52	3,14	2,75
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69	4,50	4,35	4,22	4,11	3,46	3,09	2,69
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64	4,45	4,29	4,16	4,05	3,41	3,03	2,64
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58	4,39	4,24	4,11	4,00	3,36	2,98	2,59
35	12,90	8,47	6,79	5,88	5,30	4,89	4,59	4,36	4,18	4,03	3,90	3,79	3,16	2,78	2,38
40	12,61	8,25	6,59	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21	4,02	3,87	3,75	3,64	3,01	2,64	2,23
45	12,39	8,09	6,45	5,56	5,00	4,61	4,32	4,09	3,91	3,76	3,64	3,53	2,90	2,53	2,12
50	12,22	7,96	6,34	5,46	4,90	4,51	4,22	4,00	3,82	3,67	3,55	3,44	2,82	2,44	2,03
60	11,97	7,77	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,86	3,69	3,54	3,42	3,32	2,69	2,32	1,89
80	11,67	7,54	5,97	5,12	4,58	4,20	3,92	3,70	3,53	3,39	3,27	3,16	2,54	2,16	1,72
100	11,50	7,41	5,86	5,02	4,48	4,11	3,83	3,61	3,44	3,30	3,18	3,07	2,46	2,08	1,62
120	11,38	7,32	5,78	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24	3,12	3,02	2,40	2,02	1,54
200	11,15	7,15	5,63	4,81	4,29	3,92	3,65	3,43	3,26	3,12	3,00	2,90	2,29	1,90	1,39
500	10,96	7,00	5,51	4,69	4,18	3,81	3,54	3,33	3,16	3,02	2,91	2,81	2,20	1,80	1,23
$+\infty$	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,47	3,27	3,10	2,96	2,84	2,74	2,13	1,73	1,00

Критичні точки розподілу Стьюдента

 k — кількість ступенів свободи.

Кількість ступенів свободи k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0,001	0,002	0,01	0,02	0,05	0,10
1	636,578	318,289	63,656	31,821	12,706	6,314
2	31,600	22,328	9,925	6,965	4,303	2,920
3	12,924	10,214	5,841	4,541	3,182	2,353
4	8,610	7,173	4,604	3,747	2,776	2,132
5	6,869	5,894	4,032	3,365	2,571	2,015
6	5,959	5,208	3,707	3,143	2,447	1,943
7	5,408	4,785	3,499	2,998	2,365	1,895
8	5,041	4,501	3,355	2,896	2,306	1,860
9	4,781	4,297	3,250	2,821	2,262	1,833
10	4,587	4,144	3,169	2,764	2,228	1,812
11	4,437	4,025	3,106	2,718	2,201	1,796
12	4,318	3,930	3,055	2,681	2,179	1,782
13	4,221	3,852	3,012	2,650	2,160	1,771
14	4,140	3,787	2,977	2,624	2,145	1,761
15	4,073	3,733	2,947	2,602	2,131	1,753
16	4,015	3,686	2,921	2,583	2,120	1,746
17	3,965	3,646	2,898	2,567	2,110	1,740
18	3,922	3,610	2,878	2,552	2,101	1,734
19	3,883	3,579	2,861	2,539	2,093	1,729
20	3,850	3,552	2,845	2,528	2,086	1,725
21	3,819	3,527	2,831	2,518	2,080	1,721
22	3,792	3,505	2,819	2,508	2,074	1,717
23	3,768	3,485	2,807	2,500	2,069	1,714
24	3,745	3,467	2,797	2,492	2,064	1,711
25	3,725	3,450	2,787	2,485	2,060	1,708
26	3,707	3,435	2,779	2,479	2,056	1,706
27	3,689	3,421	2,771	2,473	2,052	1,703
28	3,674	3,408	2,763	2,467	2,048	1,701
29	3,660	3,396	2,756	2,462	2,045	1,699
30	3,646	3,385	2,750	2,457	2,042	1,697
35	3,591	3,340	2,724	2,438	2,030	1,690
40	3,551	3,307	2,704	2,423	2,021	1,684
45	3,520	3,281	2,690	2,412	2,014	1,679
50	3,496	3,261	2,678	2,403	2,009	1,676
60	3,460	3,232	2,660	2,390	2,000	1,671
70	3,435	3,211	2,648	2,381	1,994	1,667
80	3,416	3,195	2,639	2,374	1,990	1,664
90	3,402	3,183	2,632	2,368	1,987	1,662
100	3,390	3,174	2,626	2,364	1,984	1,660
120	3,373	3,160	2,617	2,358	1,980	1,658
$+\infty$	3,291	3,090	2,576	2,326	1,960	1,645
Кількість ступенів свободи k	Рівень значущості α (однобічна критична область)					
	0,0005	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05