

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. В. Третиник, В. О. Ліскін, В. В. Мальчиков

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ЧАСТИНА 2

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика»,
спеціалізацією «Data Science та математичне моделювання»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензенти: *Скляренко О.В.*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний
редактор *Сирота, С. В.*, канд. техн. наук, доц.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від
30.09.2022 р.)
за поданням Вченої ради факультету прикладної математики (протокол № 2 від
26.09.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Третиник Віолета Вікентіївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Ліскін Вячеслав Олегович, канд. техн. наук

Мальчиков Володимир Вікторович

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА 2

Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Частина 2 [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «Data Science та математичне моделювання» / В.В. Третиник, В.О. Ліскін, В.В. Мальчиков, КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 955 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 125 с.

Навчальний посібник розроблено для ознайомлення студентів з теоретичними відомостями дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» та деякими практичними аспектами їх застосування. Навчальне видання призначене для студентів, які навчаються за спеціальністю 113 Прикладна математика, спеціалізацією «Data Science та математичне моделювання» факультету прикладної математики КПІ ім. Ігоря Сікорського.

© В.В. Третиник, В.О. Ліскін, В. В. Мальчиков, 2022

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

Зміст

1. Лінійні простори та підпростори.....	4
1.1. Поняття лінійного простору. Приклади лінійних просторів	4
1.2. Лінійна залежність. Розмірність та базис лінійного простору	8
1.3. Підпростори лінійного простору	15
1.4. Сума та перетин підпросторів	20
2. Евклідові простори	26
2.1. Евклідів простір та скалярний добуток. Властивості евклідових просторів.....	26
2.2. Ортонормований базис скінченновимірною евклідового простору..	30
2.3. Унітарні (або ермітові) простори	36
3. Відображення лінійних просторів.....	40
3.1. Лінійний оператор. Алгебра лінійних операторів	40
3.2. Матриця лінійного оператора	47
4. Структура лінійного оператора	53
4.1. Власні числа та власні вектори.....	53
4.2. Інваріантні підпростори. Жорданова форма матриці оператора.....	60
5. Аналітична геометрія в просторі.....	73
5.1. Поверхня та лінія у просторі.....	73
5.2. Площина та пряма у просторі	79
5.3. Поверхні другого порядку.....	94
6. Лінійні оператори в евклідових та унітарних просторах.....	102
6.1. Спряжений, самоспряжений та унітарний оператори	102
6.2. Спектральний розклад самоспряженого оператора.....	109
7. Квадратичні форми	112
7.1. Білінійні та квадратичні форми	112
7.2. Приведення квадратичної форми до канонічного виду	117
Література.....	125

1. Лінійні простори та підпростори

1.1. Поняття лінійного простору. Приклади лінійних просторів

Розглянемо множину елементів будь-якої природи для яких визначено операцію додавання елементів та операцію множення елемента на дійсне число.

Множина V елементів $x, y, z \dots$ будь-якої природи називається лінійним простором, якщо:

1. Задано закон, згідно з яким кожним двом елементам $x \in V, y \in V$ ставиться у відповідність елемент $z \in V$, який називається сумою $z = x + y$.
2. Задано закон, згідно з яким кожному елементу $x \in V$, та кожному числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставиться у відповідність елемент $u \in V$, який називається добутком елемента на число $u = \lambda x$.
3. Виконується 8 аксіом лінійного простору:
 - I. $x + y = y + x$ (комутативність суми)
 - II. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сполучність суми)
 - III. $x + \theta = \theta + x = x$ (елемент θ називається нульовим)
 - IV. Для кожного елемента $x \in V$ існує протилежний елемент x' , такий що: $x + x' = \theta$.
 - V. $1 \cdot x = x$
 - VI. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (сполучність відносно числового множника)
 - VII. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивність відносно суми числових множників)
 - VIII. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивність відносно суми елементів)

Елементи лінійного простору називають *векторами* незалежно від їх природи.

Приклади лінійних просторів:

1. Множина геометричних векторів простору.
2. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.
3. Множина дійсних додатніх чисел $\mathbb{R}_+$:

Для цієї множини суму двох елементів визначимо як добуток чисел. Добуток елемента множини на дійсне число λ визначимо як піднесення числа до степеня λ . Отже $x + y \equiv xy$; $\lambda x \equiv x^\lambda$. Нульовим елементом є

одиниця, а протилежним до числа x є число $\frac{1}{x}$. Легко пересвідчитись у справедливості всіх аксіом. Дійсно:

- I. $xy = yx$ – справедливо для добутку дійсних чисел
 - II. $(xy)z = x(yz)$
 - III. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ - отже, нульовий елемент $\theta = 1$
 - IV. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$
 - V. $1 \cdot x = x^1 = x$
 - VI. $(x^\mu)^\lambda = x^{\mu\lambda}$
 - VII. $x^{\lambda+\mu} = x^\lambda \cdot x^\mu$
 - VIII. $(xy)^\lambda = x^\lambda \cdot y^\lambda$
4. Множина упорядкованих наборів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з n дійсних чисел (арифметичний простір $\mathbb{R}^n$)
 5. Сукупність матриць $A_{m \times n}$ з визначеними операціями додавання матриць та множення матриці на число.
 6. Множина $C[a, b]$ функцій, неперервних на $[a, b]$.
 7. Множина всіх многочленів степеня $\leq n$.

Вкажемо приклади множин, що **не** є лінійними просторами:

1. Множина всіх многочленів степені, що *точно* дорівнює натуральному числу n (сума двох таких многочленів може бути многочленом степені менше n).
2. Множина всіх невід'ємних чисел. Сумою двох елементів назвемо звичайне додавання двох чисел. Добуток $\lambda \cdot x$ визначимо як звичайне множення x на число $|\lambda|$. Тоді аксіоми I-III виконуються, а аксіома IV не виконується. З аксіом I-VIII можна одержати низку наслідків.

Теорема 1.1

У довільному лінійному просторі існує *єдиний* нульовий елемент.

Доведення:

Існування хоча б одного нульового елемента стверджується аксіомою III. Нехай існує два нульових елемента θ_1 та θ_2 . Прийmemo, що $x = \theta_1$, $\theta = \theta_2$. Тоді $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$. Тепер, навпаки, прийmemo, що $x = \theta_2$, а $\theta = \theta_1$. Тоді $\theta_2 + \theta_1 = \theta_2$. Ліві частини цих рівностей за аксіомою I рівні. Тому, за властивістю транзитивності знаку «=» рівні також і праві частини цих рівностей, тобто $\theta_1 = \theta_2$. Єдиність нульового елемента доведена ■

Теорема 1.2

Для кожного елемента $x \in V$ існує єдиний протилежний елемент.

Доведення:

Існування для кожного елемента $x \in V$ хоча б одного протилежного елемента x' стверджується аксіомою IV. Нехай для деякого елемента $x \in V$ існують два протилежні елементи x' та x'' .

Тоді:

$$x + x' = \theta$$

$$x + x'' = \theta$$

Звідки (в силу аксіом III, II та I):

$$\begin{aligned} x' &= x' + \theta = x' + (x + x'') = (\text{аксіома II}) = (x' + x) + x'' = \\ &= (\text{аксіома I}) = (x + x') + x'' = \theta + x'' = (\text{аксіома I}) = x'' + \theta \\ &= (\text{аксіома III}) = x'' \end{aligned}$$

Тобто:

$$x' = x'' \blacksquare$$

Теорема 1.3

У будь-якому лінійному просторі V нульовий елемент θ дорівнює добутку довільного елемента $x \in V$ на дійсне число 0 (нуль).

Доведення:

Нехай $x \in V$ (x' – протилежний до x елемент).

Тоді:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= (\text{аксіома III}) = 0 \cdot x + \theta = (\text{аксіоми I, IV}) = 0 \cdot x + (x + x') = \\ &= (\text{аксіома II}) = (0 \cdot x + x) + x' = (\text{аксіома V}) = (0 \cdot x + 1 \cdot x) + x' = \\ &= (\text{аксіома VII}) = (0 + 1)x + x' = 1 \cdot x + x' = (\text{аксіома V}) = x + x' = \\ &= (\text{аксіома IV}) = \theta \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 1.4

Для $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ та $\theta \in V$ справедливо $\alpha \cdot \theta = \theta$.

Доведення:

$$\alpha\theta = (\text{аксіома III}) = \alpha(\theta + \theta) = (\text{аксіома VIII}) = \alpha\theta + \alpha\theta.$$

Нехай x' протилежний до $\alpha\theta$ елемент.

Тоді:

$$\begin{aligned} \alpha\theta + x' &= (\alpha\theta + \alpha\theta) + x' = (\text{аксіоми I, II}) = \alpha\theta + (x' + \alpha\theta) = \\ &= (\text{аксіома IV}) = \alpha\theta + \theta = \theta \Rightarrow \alpha\theta = \theta \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 1.5

Якщо $\alpha x = \theta$, то або $\alpha = 0$, або $x = \theta$.

Доведення:

Нехай $\alpha \neq 0$. Тоді $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) x = \frac{1}{\alpha} (\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \theta = \theta$.

Справедливість **Теорема 1.5** у випадку $x \neq \theta$ випливає з **Теорема 1.3**. ■

Теорема 1.6

Для кожного $x \in V$ елемент $(-1)x$ є протилежним.

Доведення:

Дійсно $x + (-1)x = (\text{аксіома } V) = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (\text{аксіома } VII) = (1 + (-1))x = (\text{Теорема 1.3}) = 0 \cdot x = \theta$ ■

Контрольні запитання:

1. Що таке лінійний простір?
2. Наведіть приклади лінійних просторів.
3. Сформулюйте основні аксіоми лінійного простору.
4. Сформулюйте властивості довільних лінійних просторів.

Завдання для самостійної роботи:

1. Ізоморфізм лінійних просторів.
2. Дати визначення комплексного лінійного простору.
3. Дати визначення нуль-вимірного лінійного простору, нескінченно вимірного лінійного простору.

Література: [1], с. 46-51; [3], с. 7-12; [5], с. 184-188.

1.2. Лінійна залежність. Розмірність та базис лінійного простору

Важливу роль у подальшому відіграватимуть поняття лінійної залежності та незалежності векторів лінійного простору. Дамо основні визначення аналогічно тому як це було зроблено для геометричних векторів.

Вектор $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n, a_i \in V, \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ називається лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Лінійна комбінація називається тривіальною, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю.

Означення

Система векторів називається лінійно залежною, якщо існує рівна нулю нетривіальна лінійна комбінація цих векторів.

Якщо тільки тривіальна лінійна комбінація векторів дорівнює нулю, то система векторів називається лінійно незалежною.

Приклади лінійно незалежних векторів:

1. Система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \in \mathbb{R}^n$,
 $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$.
2. Два неколінеарних вектори на площині.
3. Три некомпланарні вектори у просторі.
4. Сукупність функцій $1, x, x^2, \dots, x^n, x \in \mathbb{R}$.
5. Сукупність тригонометричних функцій $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$.

Властивості

1. Система з $k > 1$ векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з векторів є лінійною комбінацією інших. (*Критерій лінійної залежності*)
2. Якщо в систему входить нульовий вектор, то вона лінійно залежна.
3. Якщо частина векторів системи лінійно залежна, то і всі вектори цієї системи лінійно залежні.
4. Кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів є лінійно незалежною.

Означення

Лінійний простір V називається n -вимірним, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-яка система з $n + 1$ векторів є лінійно залежною. Число n називається розмірністю лінійного простору і позначається як : $\dim V = n$.

Отже, розмірність лінійного простору – це максимальна кількість лінійно незалежних векторів цього простору.

Простори, що мають скінченну розмірність називають скінченновимірними. Простори, в яких можна знайти як завгодно багато лінійно незалежних векторів, називаються нескінченновимірними.

Означення

Базисом у просторі V назвемо впорядковану скінченну систему векторів, якщо:

- 1) вона лінійно незалежна;
- 2) кожен вектор з V є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Зауваження

В нульовому просторі нема базису, так як система, що складається з одного нульового елемента є лінійно залежною. Розмірність нульового простору дорівнює нулю: $\dim V_0 = 0$.

Зауваження

З однієї системи можна одержати різні базиси, якщо по різному нумерувати вектори.

Зауваження

У нескінченновимірному просторі базису не існує.

Приклади

1. Множина векторів на площині є двовимірним лінійним простором. Базис утворюють $\forall$ два неколінеарних вектори.
2. Лінійний простір функцій від одного аргументу, визначених та неперервних на відрізку $0 \leq x \leq 1$ є нескінченновимірним. Дійсно, покажемо, що для $\forall m \in \mathbb{N}$ у цьому просторі існує m лінійно незалежних векторів. Задамо довільне число m . Вектори нашого простору – функції $1, x, x^2, \dots, x^{m-1}$ є лінійно незалежними. Справді, лінійна комбінація цих векторів тотожно дорівнює нулю, коли всі коефіцієнти дорівнюють нулю:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1} = 0 \Leftrightarrow \\ a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0.$$

3. Множина квадратних матриць розміром 2×2 утворюють лінійний простір розмірності 4. Базисом цього простору є матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У лінійній алгебрі вивчають лише скінченновимірні лінійні простори. Нескінченновимірні простори вивчаються у курсі функціонального аналізу. Надалі будемо розглядати простори лише скінченної розмірності.

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$

Власивості

- ## Твердження

Твердження

Твердження

Нехай система векторів $x_1, x_2, \dots, x_m$ задана своїми координатами у деякому базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ n -вимірного лінійного простору V :

Означення

10

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Справедливі наступні твердження

1. Для того, щоб m векторів n -вимірного лінійного простору були лінійно незалежними необхідно і достатньо, щоб $\text{rang} A = m$.
2. Для того щоб n векторів n -вимірного лінійного простору були лінійно незалежними необхідно і достатньо щоб $\det A \neq 0$.
3. Якщо $\text{rang} A = r$, то максимальне число лінійно незалежних векторів цієї системи дорівнює r .

Нехай в n -вимірному лінійному просторі V задано два базиси:

$$e_1, e_2, \dots, e_n - \text{старий базис} \quad (1.1)$$

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n - \text{новий базис} \quad (1.2)$$

Зрозуміло, що кожний вектор нового базису має у старому базисі власні координати:

$$e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n$$

$$e'_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e'_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n$$

Матриця T , стовпчиками якої є координати векторів нового базису в старому базисі називається матрицею переходу від базису (1.1) до базису (1.2.):

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Отже, } (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)T,$$

або в матричному вигляді:

$$e' = eT.$$

Оскільки система векторів $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ лінійно незалежна, то $\det T \neq 0$.

$$e = e'T^{-1}$$

Отже, T^{-1} – матриця переходу від нового базису (1.2) до старого базису (1.1).

Твердження

Якщо є два базиси, то матриці переходу від одного базису до іншого взаємно обернені.

Приклад

Розглянемо на площині два базиси: $(\vec{i}, \vec{j})$ та новий, одержаний з $(\vec{i}, \vec{j})$ поворотом на 45 градусів проти годинникової стрілки.

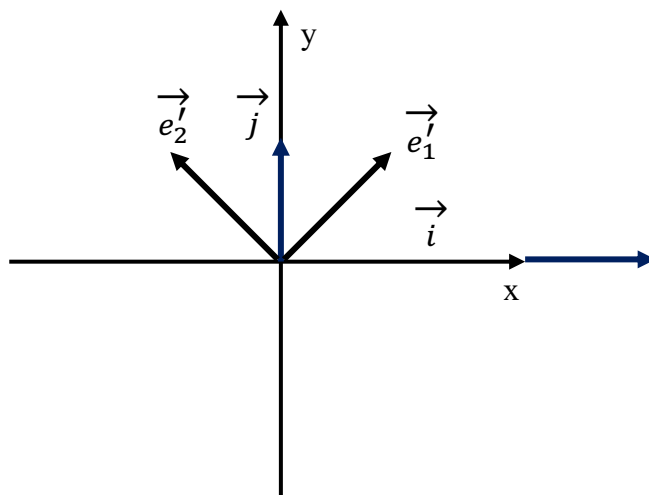


Рис. 1.1. Два базиси на площині

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{i}, \vec{j})$$

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_2') = (\vec{i} + \vec{j}, -\vec{i} + \vec{j})$$

Координати нового базису в старому:

$$\vec{e}_1' = \vec{i} + \vec{j} = (1, 1)$$

$$\vec{e}_2' = -\vec{i} + \vec{j} = (-1, 1)$$

Матриця переходу:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_2') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -\vec{e}_1 + \vec{e}_2),$$

$$\det T = 2,$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця переходу від нового базису до старого.}$$

$$e = e' T^{-1};$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2}{2}, \frac{\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2}{2} \right)$$

Розглянемо як пов'язані координати вектора в різних базисах.

Нехай $x \in V$ – деякий вектор простору. Вектор x має координати в базисах (1.1) та (1.2), відповідно:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = ex$$

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = e'x'$$

$$\text{Отже, } x = ex = e'x' = (eT)x' = e(Tx') \quad (1.3)$$

(1.3) – це розклад вектора x по базису e . В силу однозначності розкладу, маємо: $x = Tx'$

або:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Отже, координати вектора в різних базисах пов'язані матрицею переходу T .

Крім того, $x' = T^{-1}x$

Приклад

Нехай вектор x має координати $(1, -2)$ в базисі $\{e_1, e_2\}$. Знайти координати вектора x в базисі $\{e'_1, e'_2\}$, якщо $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$

Розв'язання:

$$e'_1 = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e'_2 = e_1 + e_2 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матриця переходу:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор x має координати $(1, -2)$ в базисі $\{e_1, e_2\}$, отже: $x = e_1 - 2e_2$

Знайдемо T^{-1} :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже, $x' = T^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$x = 3e'_1 - 2e'_2$$

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення лінійної залежності та незалежності системи векторів.
2. Наведіть приклади лінійно незалежних векторів.
3. Як визначити розмірність лінійного простору.
4. Що називається базисом у лінійному просторі?

Завдання для самостійної роботи:

1. Довести теорему про продовження базису.
2. Основний принцип роботи з нескінченновимірними просторами. Лема Цорна.
3. Застосування леми Цорна.

Література: [3], с. 14-21.

1.3. Підпростори лінійного простору

Означення

Непорожня підмножина V' лінійного простору V називається *лінійним підпростором* простору V , якщо виконуються наступні умови:

1. Якщо $x \in V'$, $y \in V'$ то $x + y \in V'$.
2. Якщо $x \in V'$ і λ – довільне дійсне число, то $\lambda x \in V'$.

Кажуть, що множина V' замкнена відносно операцій додавання векторів та множення векторів на скаляр.

Теорема 1.7

Підпростір V' сам є лінійним простором.

Доведення:

Достатньо переконатись у справедливості для підпростору V' аксіом з означення лінійного простору. Очевидно, що всі аксіоми окрім III та IV перевірки не потребують, оскільки вони справедливі для всіх елементів з V . Перевіримо виконання аксіом III та IV. Нехай $x \in V'$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді за умовою 2 $\lambda x \in V'$. При $\lambda = 0$ цей елемент перетворюється у нульовий (Теорема 1.3), а при $\lambda = -1$ – у протилежний до x елемент (Теорема 1.6). Отже, для підпростору V' виконуються всі вісім аксіом, що й доводить теорему ■

Для кожного підпростору довільного лінійного простору залишаються справедливими всі поняття та теореми, наприклад поняття базису, розмірності, тощо, які розглядалися раніше для всього простору.

Теорема 1.8

Розмірність довільного підпростору V' лінійного простору V_n не більша ніж розмірність простору: $\dim V' \leq \dim V_n$.

Доведення:

Оскільки лінійно незалежні вектори підпростору є лінійно незалежними і в усьому просторі, то максимальна кількість лінійно незалежних векторів підпростору (розмірність підпростору) не перевищує максимальної кількості лінійно незалежних векторів всього простору (розмірності простору), що і доводить теорему ■

Приклади лінійних підпросторів

1. Множина, що складається з одного нульового елемента (нульовий простір або нуль-простір).
2. Множина, що складається з усіх векторів простору V . Отже, простір V можна розглядати як підпростір самого себе.
Нульовий простір і весь простір інколи називають *тривіальними* підпросторами, решту підпросторів називають *власними*.
3. У звичайному тривимірному просторі, який розглядається як множина всіх напрямлених відрізків, що виходять з початку координат, підпросторами будуть всі площини і всі прямі, які проходять через початок координат.
4. В арифметичному просторі множина всіх векторів вигляду $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, 0, \dots, 0)$, $m < n$.
5. Сукупність всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими є підпростором в лінійному просторі стовпчиків висоти n . Кожна фундаментальна система розв'язків даної системи є базисом у цьому підпросторі.

Візьмемо у заданому лінійному просторі V_n довільні вектори $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, $m \leq n$ і утворимо з них всі можливі лінійні комбінації

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_m a_m \quad (1.3)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ – довільні дійсні числа.

Означення

Множину лінійних комбінацій (1.3) назвемо *лінійною оболонкою* векторів $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ і позначимо $\Lambda(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$.

Теорема 1.9

Множина $\Lambda(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ є лінійним підпростором в V_n .

Доведення:

Нехай $x \in \Lambda(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ і $y \in \Lambda(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$, тобто:

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 + \dots + \gamma_m a_m \\ y &= \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \dots + \beta_m a_m \end{aligned}$$

Тоді,

$$x + y = (\gamma_1 + \beta_1)a_1 + (\gamma_2 + \beta_2)a_2 + (\gamma_3 + \beta_3)a_3 + \dots + (\gamma_m + \beta_m)a_m$$

Отже, $x + y \in \Lambda(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$

Аналогічно,

$$\lambda x = \lambda \gamma_1 a_1 + \lambda \gamma_2 a_2 + \lambda \gamma_3 a_3 + \dots + \lambda \gamma_m a_m$$

Отже $\lambda x \in \Lambda(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ ■

Означення

Підпростір $\Lambda(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ називається підпростором, що породжується системою векторів $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ або підпростором, натягнутим на вектори системи.

Якщо система векторів $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ лінійно незалежна, то вона є базисом підпростору $\Lambda(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ і цей підпростір має розмірність m . Звідси випливає, що для кожного цілого числа k ($0 < k < n$) в n -вимірному просторі V_n існує власний підпростір розмірності k . Таким підпростором є лінійна оболонка довільних k лінійно незалежних векторів простору V_n .

Відмітимо також, що кожен підпростір скінченновимірного простору є лінійною оболонкою скінченної системи векторів. Нульовий підпростір є лінійною оболонкою нульового вектора, а ненульовий підпростір є лінійною оболонкою свого базису.

Теорема 1.10

Розмірність лінійної оболонки $\Lambda(x, y, \dots, z)$ елементів $x, y, \dots, z$ дорівнює максимальному числу лінійно незалежних елементів у системі елементів $x, y, \dots, z$. Вони утворюють базис лінійної оболонки.

Доведення:

Нехай серед елементів $x, y, \dots, z$ є r лінійно незалежних елементів. Позначимо їх як $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$. Будь-які $(r + 1)$ елементів серед $x, y, \dots, z$ є лінійно залежними.

Тоді кожен із елементів $x, y, \dots, z$ є лінійною комбінацією елементів $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$. Але оскільки за визначенням кожен елемент лінійної оболонки $\Lambda(x, y, \dots, z)$ є лінійною комбінацією елементів $x, y, \dots, z$, то кожен елемент даної лінійної оболонки є деякою лінійною комбінацією одних тільки елементів $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$. Але це означає, що система лінійно незалежних елементів $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ утворює базис лінійної оболонки $\Lambda(x, y, \dots, z)$ і що розмірність $\Lambda(x, y, \dots, z)$ дорівнює r . Теорема доведена. ■

Означення

Дві системи векторів $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ та $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ лінійного простору V називаються *еквівалентними*, якщо будь-який вектор однієї системи можна лінійно виразити через вектори іншої системи.

Теорема 1.11

Дві системи векторів еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх лінійні оболонки співпадають.

Для того щоб перевірити чи еквівалентні системи векторів потрібно:

1. Знайти ранги кожної системи векторів.
2. Знайти ранг об'єднаної системи векторів.
3. Якщо ранг об'єднаної системи співпадає з рангом кожної системи векторів, то системи еквівалентні, так як їхні лінійні оболонки співпадають.

Приклад

Описати лінійні оболонки наступних систем векторів:

а) $x_1 = (-1, 0, 0, 1), x_2 = (-1, 0, 1, 0), x_3 = (-1, 1, 0, 0), x \in \mathbb{R}^4$

б) $x_1 = 1 - t^2; x_2 = t - t^2; x \in M_2(\mathbb{R})$

в) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}_{2,2}$

Розв'язання:

а). $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = (-a_1 - a_2 - a_3, a_3, a_2, a_1)$

$$\wedge (x_1, x_2, x_3) = \left\{ (b_1, b_2, b_3, b_4) \mid \sum_{i=1}^4 b_i = 0 \right\}$$

б). $a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_1(1 - t^2) + a_2(t - t^2) = a_1(1 - t)(1 + t) + a_2 t(1 - t) = (1 - t)(a_1 t + a_2 t + a_1)$

Отже, $\wedge (x_1, x_2)$ – всі многочлени степені ≤ 2 , які мають корінь 1.

в). $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix}$

$$\wedge (x_1, x_2, x_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix} \right\}$$

Приклад

Перевірити чи еквівалентні системи векторів:

$x_1 = (1, 1, 1), x_2 = (1, 0, -1), x_3 = (1, 3, 5)$

$y_1 = (1, 2, 3), y_2 = (0, 1, 2), y_3 = (3, 4, 5), y_4 = (4, 6, 8)$

Розв'язання:

Знайдемо ранг кожної системи векторів:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2$$

Оскільки в системі x_1, x_2, x_3 вектор x_3 лінійно залежний, а у системі y_1, y_2, y_3, y_4 вектори y_3 та y_4 лінійно залежні, то достатньо знайти ранг системи векторів: x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2$$

Оскільки ранг об'єднаної системи співпадає з рангом кожної системи, то системи векторів x_1, x_2, x_3 та y_1, y_2, y_3, y_4 еквівалентні.

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення лінійного підпростору.
2. Як визначити розмірність лінійного підпростору?
3. Дайте визначення еквівалентних систем векторів.

Завдання для самостійної роботи:

1. Лема про лінійну залежність векторів лінійного простору.
2. Задання лінійного підпростору за допомогою системи лінійних рівнянь.

Література: [2], с. 18-26; [3], с. 14-25.

1.4. Сума та перетин підпросторів

Над підпросторами лінійного простору V можна виконувати певні операції, найважливіші з них є перетин та додавання підпросторів. Введемо ці операції.

Нехай V_1 та V_2 – два довільних підпростори одного й того ж лінійного простору V .

Означення

Сукупність всіх елементів простору V виду $x + y$, де $x \in V_1$, $y \in V_2$ утворюють підпростір простору V , який називається *сумою* підпросторів V_1 та V_2 та позначається $V_1 + V_2$.

Означення

Сукупність всіх елементів x простору V , що належать одночасно V_1 та V_2 утворюють підпростір простору V , який називається *перетином* підпросторів V_1 та V_2 та позначається $V_1 \cap V_2$.

Відмітимо, що кожен з підпросторів V_1 та V_2 міститься у просторі $V_1 + V_2$. Операції додавання і перетину двох підпросторів легко узагальнюються на скінченну кількість підпросторів.

Приклад

Нехай V_3 лінійний простір всіх вільних векторів у тримірному просторі. V_1 – підпростір всіх вільних векторів паралельних площині Oxy , V_2 – підпростір всіх вільних векторів, паралельних площині Oxz . Тоді сумою $V_1 + V_2$ буде весь простір V_3 , а перетином $V_1 \cap V_2$, буде множина всіх вільних векторів паралельних осі Ox .

Теорема 1.12

Сума розмірностей довільних підпросторів V_1 та V_2 скінченновимірного лінійного простору V дорівнює сумі розмірності перетину цих підпросторів і розмірності суми цих підпросторів:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)$$

Доведення:

Позначимо через V_0 перетин V_1 та V_2 , а через $\tilde{V}$ суму V_1 та V_2 :

$$V_0 = V_1 \cap V_2, \tilde{V} = V_1 + V_2$$

Нехай $\dim V_0 = k$, тоді виберемо у V_0 базис:

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_k \tag{1.4}$$

У просторі V_1 доповнимо базис (1.4) до базису:

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_k, g_1, g_2, g_3, \dots, g_l \quad (1.5)$$

У просторі V_2 доповнимо базис (1.4) до базису:

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_k, f_1, f_2, f_3, \dots, f_m \quad (1.6)$$

Достатньо довести, що елементи:

$$g_1, g_2, g_3, \dots, g_l, e_1, e_2, e_3, \dots, e_k, f_1, f_2, f_3, \dots, f_m \quad (1.7)$$

є базисом суми $\tilde{V}$. Дійсно, оскільки:

$$\dim \tilde{V} = l + k + m, \dim V_0 = k, \dim V_1 = k + l, \dim V_2 = k + m$$

то виконується:

$$\begin{aligned} \dim V_1 + \dim V_2 &= (k + l) + (k + m) \equiv \\ &\equiv \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = k + (l + k + m) \end{aligned}$$

Покажемо, що елементи (1.7) лінійно незалежні і що будь-який елемент $x \in \tilde{V}$ є лінійною комбінацією елементів (1.7).

Для цього побудуємо лінійну комбінацію:

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \dots + \alpha_l g_l + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \dots + \beta_k e_k + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_3 + \dots + \gamma_m f_m = 0 \quad (1.8)$$

або

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \dots + \alpha_l g_l + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \dots + \beta_k e_k = -\gamma_1 f_1 - \gamma_2 f_2 - \gamma_3 f_3 - \dots - \gamma_m f_m \quad (1.9)$$

Оскільки ліва частина (1.9) є елементом V_1 , а права частина є елементом V_2 , то і права і ліва частина (1.9) належить до $V_1 \cap V_2$. Тоді праву частину (1.9) можна розкласти за базисом V_0 :

$$-\gamma_1 f_1 - \gamma_2 f_2 - \gamma_3 f_3 - \dots - \gamma_m f_m = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \dots + \lambda_k e_k \quad (1.10)$$

Згідно (1.6) вектори, що входять у рівняння (1.10) є лінійно незалежними, а це можливо тільки тоді, коли:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_m = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$$

Але тоді з (1.8) одержимо:

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \dots + \alpha_l g_l + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \dots + \beta_k e_k = 0 \quad (1.11)$$

Згідно лінійної незалежності базисних векторів (1.5) рівняння (1.11) можливе при умові, що:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_l = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$$

Отже, рівність (1.8) можлива тільки тоді, коли всі її коефіцієнти дорівнюють нулю. З цього випливає, що елементи (1.7) лінійно незалежні.

Залишається довести, що будь-який елемент $x \in \tilde{V}$ є деякою лінійною комбінацією елементів (1.7), але це очевидно, оскільки для $x_1 \in V_1$ та $x_2 \in V_2$ справедливо:

$$x_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \dots + \lambda_k e_k + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 + \dots + \beta_l g_l$$

$$x_2 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \dots + \gamma_k e_k + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + \dots + c_m f_m$$

Тому:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = \\ &= (\lambda_1 + \gamma_1)e_1 + (\lambda_2 + \gamma_2)e_2 + (\lambda_3 + \gamma_3)e_3 + \dots + (\lambda_k + \gamma_k)e_k + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 \\ &\quad + \beta_3 g_3 + \dots + \beta_l g_l + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + \dots + c_m f_m \end{aligned}$$

є лінійною комбінацією елементів (1.7). Теорема доведена. ■

Приклад

У попередньому прикладі $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_3 = \dim(V_1 + V_2) = 3$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$. Отже,

$$\dim V_1 + \dim V_2 = 2 + 2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = 3 + 1 = 4$$

$$4 = 4$$

Розглянемо розклад лінійного простору у пряму суму підпросторів. Нехай V_1 та V_2 два підпростори лінійного n – вимірного простору V .

Означення

Простір V є *прямою сумою* підпросторів V_1 та V_2 , якщо для кожного елемента $x \in V$ існує *єдине* представлення у вигляді суми:

$$x = x_1 + x_2$$

де $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$

Те що V є прямою сумою V_1 та V_2 записують так:

$$V = V_1 \oplus V_2 \tag{1.12}$$

(1.12) називають розкладом простору V у пряму суму підпросторів V_1 та V_2 .

Приклад

Простір V_3 всіх вільних векторів можна розкласти у пряму суму підпростору V_1 всіх векторів, паралельних площині Oxy та підпростору V_2 всіх векторів паралельних Oz .

Теорема 1.13

Для того щоб n -вимірний простір V був прямою сумою підпросторів V_1 та V_2 необхідно і достатньо, щоб простір $V_1 \cap V_2$ містив тільки нульовий елемент і щоб виконувалось:

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$$

Доведення:

Виберемо деякий базис у просторі V_1 :

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$$

Також виберемо деякий базис у підпросторі V_2 :

$$g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$$

Доведемо, що об'єднання цих базисів є базисом всього простору V . Оскільки за умовою теореми $\dim V = k + l$, то достатньо довести лінійну незалежність елементів:

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_k, g_1, g_2, g_3, \dots, g_l \quad (1.13)$$

Нехай,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 + \dots + \beta_l g_l = 0 \quad (1.14)$$

або

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \dots + \alpha_k e_k = -\beta_1 g_1 - \beta_2 g_2 - \beta_3 g_3 - \dots - \beta_l g_l \quad (1.15)$$

Оскільки ліва частина (1.15) є елементами V_1 , а права частина (1.15) є елементами V_2 , а $V_1 \cap V_2$ містить лише нульовий елемент, то:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \dots + \alpha_k e_k = 0 \quad (1.16)$$

$$\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 + \dots + \beta_l g_l = 0 \quad (1.17)$$

Оскільки $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ та $g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$ є лінійно незалежними, то рівності (1.16), (1.17) можливі лише за умови:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_l = 0$$

Таким чином з (1.14) випливає, що система векторів (1.13) лінійно незалежна. Отже (1.13) утворюють базис простору V .

Нехай $x \in V$, розкладемо його за базисом (1.13):

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \mu_3 g_3 + \dots + \mu_l g_l$$

або

$$x = x_1 + x_2 \quad (1.18)$$

де

$$x_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \dots + \lambda_k e_k$$

$$x_2 = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \mu_3 g_3 + \dots + \mu_l g_l,$$

$$x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$$

Залишається довести, що представлення (1.18) єдине.

Нехай існує ще одне представлення:

$$x = x'_1 + x'_2 \quad (1.19)$$

$$x'_1 \in V_1, x'_2 \in V_2.$$

Віднявши (1.19) від (1.18) одержимо:

$$x_1 - x'_1 + x_2 - x'_2 = 0$$

або

$$x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$$

Оскільки, $x_1 - x'_1 \in V_1$, $x'_2 - x_2 \in V_2$, а простір $V_1 \cap V_2$ містить лише нульовий елемент, то:

$$x_1 - x'_1 = 0, x'_2 - x_2 = 0$$

Отже, $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2$ ■

Зауваження

Якщо простір V не є прямою сумою підпросторів V_1 та V_2 (1.18) також справедливо, але не є в загальному випадку єдиним.

Приклад

Нехай V – тривимірний простір всіх вільних векторів. V_1 – підпростір всіх векторів паралельних площині Oxy ; V_2 – підпростір всіх векторів паралельних площині Oxz . Тоді $V = V_1 + V_2$.

Позначимо через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базисні вектори, що паралельні осям Ox, Oy, Oz , відповідно. Розкладемо $x \in V$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$x = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

З іншого боку: $x = x_1 + x_2$, де $x_1 = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$, $x_2 = \gamma \vec{k}$, $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$.

Інше представлення для вектора x : $x = x'_1 + x'_2$, де $x'_1 = \beta \vec{j}$, $x'_2 = \alpha \vec{i} + \gamma \vec{k}$.

Отже, представлення вектора x не єдине і простір V не є прямою сумою підпросторів.

Приклад

Тривимірний простір V_3 буде прямою сумою будь-якої площини M , яка проходить через початок координат та довільної прямої l , що не лежить в цій площині і проходить через початок координат (Рис.1.1). Дійсно:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{OA} \in V_3, \overrightarrow{OB} \in M, \overrightarrow{BA} \in l$$

Також очевидно, що $M \cap l = \vec{0}$.

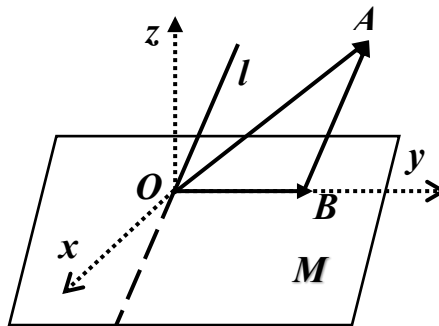


Рис.1.2 Пряма сума

Поняття суми та перетину підпросторів легко узагальнюється на будь-яке скінченне число підпросторів. Сума деяких підпросторів називається прямою сумою, якщо кожен з них має нульовий перетин з сумою інших.

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення суми та перетину підпросторів.
2. Дайте визначення прямої суми підпросторів.
3. Наведіть приклади суми та перетину підпросторів.

Завдання для самостійної роботи:

1. Прямі доповнення підпросторів.
2. Зовнішні прямі суми.

Література [3], с. 43-44.

2. Евклідові простори

2.1. Евклідів простір та скалярний добуток. Властивості евклідових просторів

Розглянемо лінійний простір V . Поряд з операцією додавання та множення на число, введемо ще одну операцію – скалярний добуток векторів.

Означення

У дійсному лінійному просторі V визначено *скалярний добуток*, якщо кожній впорядкованій парі векторів $x, y \in V$ ставиться у відповідність деяке дійсне число, що позначається (x, y) . Причому для $\forall x, y, z \in V$ та $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ виконуються наступні аксіоми:

- 1) $(x, y) = (y, x)$
- 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- 3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
- 4) $(x, x) > 0$, якщо $x \neq \theta$, причому $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Означення

Лінійний простір називається *евклідовим*, якщо в ньому визначено скалярний добуток.

Приклади евклідових просторів

1. Множина геометричних векторів простору V_3 з операцією скалярного добутку векторів є евклідовим простором.
2. Множина $C[a, b]$ функцій неперервних на відрізку $[a, b]$, в якій визначено операцію скалярного добутку як:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

є нескінченновимірним евклідовим простором.

3. n -мірний арифметичний простір $\mathbb{R}^n$:

Якщо $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, то

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots + x_ny_n$$

Приклад

Чи можна у лінійному просторі матриць другого порядку зі звичайними операціями множення на число та додавання матриць задати скалярний добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \text{ рівністю:}$$

$$(A, B) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 - d_1 d_2$$

Розв'язання

Не можна. Оскільки перші три аксіоми виконуються, а четверта аксіома не виконується, так як:

$$(A, A) = a_1^2 - b_1^2 + c_1^2 - d_1^2 = 0, \text{ якщо, наприклад } a_1 = b_1 \neq 0, c_1 = d_1$$

Висновки з аксіом:

- 1) $(x, \alpha y) = (\alpha y, x) = \alpha(y, x) = \alpha(x, y)$
- 2) $(x, y + z) = (y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z)$
- 3) $(x, \theta) = 0, \forall x; (x, \theta) = (x, 0 \cdot x) = 0 \cdot (x, x) = 0$
- 4) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

Теорема 2.1

Для $\forall x, y$ довільного евклідового простору справедлива нерівність:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y), \quad (2.1)$$

яка називається **нерівністю Коші–Буняковського**.

Доведення:

Коли $x = \theta$ або $y = \theta$ нерівність очевидна.

Нехай $x \neq \theta, y \neq \theta, \lambda \in \mathbb{R}$ – довільне дійсне число.

Згідно аксіом 4 скалярного добутку справедлива нерівність:

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0$$

Згідно аксіом 1-3 останню нерівність можна переписати у вигляді:

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0 \quad (2.2)$$

Необхідною та достатньою умовою невід'ємності лівої частини (2.2) є умова $\mathcal{D} \leq 0$ ($\mathcal{D}$ – дискримінант квадратного рівняння:

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) = 0).$$

Отже,

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

■

Означення

Лінійний простір V називається *нормованим*, якщо виконано наступні дві умови:

I. Існує правило згідно якого кожному елементу $x \in V$ ставиться у відповідність дійсне число, яке називається *нормою* (або довжиною) даного елемента та позначається $\|x\|$.

II. Вказане правило задовольняє наступним трьом аксіомам:

1). $\|x\| > 0$, якщо $x \neq \theta$; $\|x\| = 0$, якщо $x = \theta$

2). $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, для $\forall x$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

3). Для $\forall x, y$ справедлива нерівність трикутника (або **нерівність Мінковського**):

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (2.3)$$

Теорема 2.2

Евклідовий простір є *нормованим*, якщо норма будь-якого елемента x визначається рівністю:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (2.4)$$

Доведення:

Достатньо довести що для норми (2.4) справедливі *аксіоми 1-3* з означення нормованого простору. Справедливість для норми *аксіоми 1* зразу випливає з *аксіоми 4* скалярного добутку. Справедливість для норми *аксіоми 2* випливає з *аксіом 1 та 3* скалярного добутку. Перевіримо справедливість для норми *аксіоми 3*, тобто нерівності (2.3).

Запишемо нерівність Коші-Буняковського (2.1) у вигляді:

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} \quad (2.5)$$

За допомогою нерівності (2.5), аксіом скалярного добутку та визначення норми (2.4) одержимо:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} \leq \\ &\leq \sqrt{(x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y)} = \sqrt{(\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2} = \\ &= \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

■

Наслідок

У довільному евклідовому просторі з нормою елементів, визначеною формулою (2.4) для $\forall x, y$ справедлива нерівність трикутника (2.3).

У довільному дійсному евклідовому просторі можна ввести поняття кута між двома довільними елементами x та y цього простору.

Означення

Кутом між ненульовими векторами x та y називається число φ для якого:

$$\cos \varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (2.4a)$$

З нерівності Коші-Буняковського випливає коректність цього визначення ($|\cos \varphi| \leq 1$).

Означення

Вектори називаються *ортogonalними*, якщо $(x, y) = 0$.

Назвемо суму $x + y$ двох ортogonalних елементів *гіпотенузою* прямокутного трикутника побудованого на елементах x та y .

У довільному евклідовому просторі справедлива **теорема Піфагора**: квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів. Дійсно, оскільки x та y ортogonalні і $(x, y) = 0$, то згідно аксіом та визначення норми:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = (x, x) + (y, y) = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Означення

Відстанню між векторами x та y евклідового простору називається число:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення евклідового простору.
2. Наведіть приклади евклідових просторів.
3. Який евклідовий простір називається нормованим?
4. Як визначити кут між векторами евклідового простору?

Завдання для самостійної роботи:

1. Ізоморфізм n -вимірних евклідових просторів.
2. Запишіть нерівність Коші-Буняковського та нерівність трикутника для конкретних евклідових просторів, розглянутих у даній лекції.

Література [1], с. 96-97, с. 103-104.

2.2. Ортонормований базис скінченновимірною евклідового простору

У лінійному просторі всі базиси є рівноправними. У евклідовому просторі існують спеціальні *ортонормовані* базиси.

Означення

Система векторів $x_1, x_2, \dots, x_n, n \geq 2$ називається *ортogonalною* якщо ці вектори попарно ортогональні: $(x_i, x_j) = 0, i \neq j$.

Теорема 2.3

Ортогональна система ненульових векторів лінійно незалежна.

Доведення: (від супротивного)

Нехай ортогональна система векторів $x_1, x_2, \dots, x_n$ лінійно залежна, тобто

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0, \text{ де } \alpha_i \neq 0, i - \text{фіксований індекс.} \quad (2.6)$$

Помножимо скалярно (2.6) на x_i :

$$(x_i, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = 0,$$

$$\alpha_1 (x_1, x_i) + \alpha_2 (x_2, x_i) + \dots + \alpha_i (x_i, x_i) + \dots + \alpha_n (x_n, x_i) = 0$$

$(x_1, x_i) = (x_2, x_i) = \dots = (x_n, x_i) = 0$, але $(x_i, x_i) \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, що суперечить умові. ■

Означення

Вектор x називається *нормованим* або *одиничним*, якщо $\|x\| = 1$.

Означення

Базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ евклідового простору називається *ортонормованим*, якщо усі базисні вектори $e_1, e_2, \dots, e_n$ нормовані та попарно ортогональні:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, i, j = \overline{1, n} \quad (2.6a)$$

Означення

Матриця, складена з скалярних добутків базисних векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ називається *матрицею Грама*:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \dots & (e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \dots & (e_n, e_n) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Якщо $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормований базис, то

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця Грама симетрична, тому $\Gamma^T = \Gamma$.

Теорема 2.4

У будь-якому n -вимірному евклідовому просторі E існує ортонормований базис.

Розглянемо процес *ортogonalізації Грама-Шмідта*.

Нехай в евклідовому просторі задана система лінійно незалежних векторів $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Потрібно побудувати ортонормовану систему векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$, кожен з яких є лінійною комбінацією векторів $f_1, f_2, \dots, f_n$.

1. $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$, $\|f_1\| \neq 0$, так як система $f_1, f_2, \dots, f_n$ лінійно незалежна.

2. $\tilde{e}_2 = f_2 - \alpha_1 e_1$. Число α_1 вибираємо так, щоб $(e_1, \tilde{e}_2) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha_1 = (e_1, f_2) \\ e_2 &= \frac{f_2 - (e_1, f_2)e_1}{\|\tilde{e}_2\|} \end{aligned}$$

3. $\tilde{e}_3 = f_3 - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2$. Числа β_1 та β_2 вибираємо так, щоб

$$\begin{aligned} (e_1, \tilde{e}_3) = (e_2, \tilde{e}_3) = 0 &\Rightarrow \beta_1 = (e_1, f_3), \beta_2 = (e_2, f_3) \\ e_3 &= \frac{f_3 - (e_1, f_3)e_1 - (e_2, f_3)e_2}{\|\tilde{e}_3\|} \text{ і т. д.} \end{aligned}$$

Зауваження

У кожному n -вимірному евклідовому просторі існує багато ортонормованих базисів.

Дійсно, якщо, наприклад, будувати ортонормований базис процесом ортогоналізації одних і тих же лінійно незалежних елементів $f_1, f_2, \dots, f_n$, то починаючи процес ортогоналізації з різних елементів f_k ми одержимо різні ортонормовані базиси.

Властивості ортонормованого базису

Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ – довільний ортонормований базис n -вимірного евклідового простору E , $x, y \in E$. Знайдемо скалярний добуток (x, y) цих елементів через їх координати відносно базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Нехай

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n,$$

Де $x_i, y_i, i = \overline{1, n}$ – координати векторів x та y , відповідно.

Тоді:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{k=1}^n y_k e_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i y_k (e_i, e_k) = \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \end{aligned}$$

Отже, у ортонормованому базисі скалярний добуток двох довільних елементів дорівнює сумі добутків відповідних координат цих елементів.

Розглянемо у n -вимірному евклідовому просторі E довільний (не ортонормований) базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ і знайдемо скалярний добуток довільних елементів x та y через координати цих елементів відносно даного базису.

Нехай

$$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n \quad (2.8)$$

$$y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n \quad (2.9)$$

Використовуючи аксіоми скалярного добутку, одержимо:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n, y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i, \sum_{k=1}^n y_k f_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i y_k (f_i, f_k) \end{aligned}$$

Таким чином, у довільному базисі $f_1, f_2, \dots, f_n$ скалярний добуток двох елементів (2.8), (2.9) визначається рівністю:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k$$

де a_{ik} – елемент матриці Грама (2.7).

Нехай G – довільний підпростір n -вимірного евклідового простору E .

Означення

Вектор $x \in E$ називається *ортogonalьним* підпростору G , якщо він ортogonalьний довільному вектору цього підпростору.

Теорема 2.5

Для того, щоб вектор $x \in E$ був ортogonalьний підпростору G достатньо, щоб він був ортogonalьний кожному вектору деякого базису цього підпростору.

Означення

Підпростори F і G простору E називаються *ортогональними*, якщо кожний вектор $f \in F$ ортогональний кожному вектору $g \in G$.

Означення

Підпростір $\tilde{G}$ всіх векторів простору E , ортогональних підпростору F називається *ортогональним доповненням* підпростору F .

Теорема 2.6

Евклідов простір E_n є прямою сумою свого довільного підпростору G та його ортогонального доповнення $\tilde{G}$.

Доведення:

Виберемо в G довільний ортонормований базис $e_1, e_2, \dots, e_k, k \leq n$. Цей базис можна доповнити до базису простору E_n :

$$e_1, e_2, \dots, e_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n \quad (2.10)$$

Ортогоналізавши елементи (2.10) одержимо ортонормований базис всього простору E_n :

$$e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n \quad (2.11)$$

Розкладемо довільний елемент $x \in E$ за базисом (2.11):

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (2.12)$$

З іншого боку:

$$x = x' + x'' \quad (2.13)$$

де

$$\begin{aligned} x' &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_k e_k, x' \in G \\ x'' &= x_{k+1} e_{k+1} + x_{k+2} e_{k+2} + \dots + x_n e_n, x'' \in \tilde{G} \end{aligned}$$

Доведемо, що $x'' \in \tilde{G}$. Дійсно, за побудовою кожен елемент $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$ ортогональний до будь-якого елемента $e_1, e_2, \dots, e_k$, а тому ортогональний до будь-якого елемента G , тому і лінійна комбінація $x_{k+1} e_{k+1} + x_{k+2} e_{k+2} + \dots + x_n e_n$ ортогональна довільному елементу G , тобто є елементом простору $\tilde{G}$.

Крім того, представлення (2.12), (2.13) єдине. ■

Наслідок

$$\dim E_n = \dim G + \dim \tilde{G},$$

G – підпростір евклідового простору E_n .

$\tilde{G}$ – ортогональне доповнення підпростору G .

Розглянемо суть координат довільного елемента x відносно ортонормованого базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ n -вимірного евклідового простору E_n .

Позначимо координати елемента x відносно базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ через $x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідно.

$$\text{Тоді } x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (2.14)$$

Позначимо через k будь-який з номерів $1, 2, \dots, n$ та помножимо обидві частини (2.14) скалярно на e_k . На основі аксіом скалярного добутку та співвідношення (2.6 а), одержимо:

$$(x, e_k) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, e_k \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, e_k) = x_k$$

Отже, координати довільного елемента відносно ортонормованого базису дорівнюють скалярним добуткам цього елемента на відповідні базисні елементи. З іншого боку, оскільки $pr_{\vec{b}} \vec{a} = (\vec{a}, \vec{b}_0)$, де $|\vec{b}_0| = 1$, то можна сказати, що координати довільного елемента відносно ортонормованого базису дорівнюють проекціям цього елемента на відповідні базисні елементи.

Означення

Нехай V' – лінійний підпростір простору $\mathbb{R}^n$. Тоді довільний вектор $x \in \mathbb{R}^n$ однозначно подається у вигляді $x = y + z$, де $y \in V', z \perp V'$.

y – називається **ортогональною проекцією** вектора x на підпростір V' , а z – **ортогональною складовою** (перпендикуляром) x відносно V' .

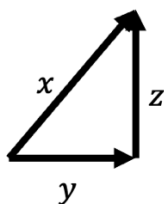


Рис 2.1. Ортогональна проекція та ортогональна складова вектора x

Приклад

Знайти ортогональну проекцію a і ортогональну складову (перпендикуляр) b вектора x відносно підпростору L , породженого векторами a_1, a_2, a_3 , якщо:

$$a_1 = (2, 1, -4); a_2 = (3, 5, -7); a_3 = (4, -5, -6); x = (-12, 9, -12)$$

Розв'язання

Знайдемо базис L :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -5 \\ -4 & -7 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$rg L = 2$$

Базис складається з векторів: a_1, a_2 .

Ортогоналізуємо цей базис:

$$b_1 = a_1 = (2, 1, -4),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - \frac{(6 + 5 + 28)}{(4 + 1 + 16)} b_1 = a_2 - \frac{13}{7} b_1 =$$

$$= (3, 5, -7) - \frac{13}{7} (2, 1, -4) = \left(-\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

Отже, $\{b_1, b_2\}$ – ортогональний базис.

Знайдемо ортогональну проекцію a даного вектора x на L :

$$x = a + b, a = a_x b_1 + a_y b_2, x = a_x b_1 + a_y b_2 + b.$$

Домноживши скалярно останню рівність на b_1 та b_2 , беручи до уваги, що $b \perp b_1, b \perp b_2, b_1 \perp b_2$ знайдемо a_x та a_y

$$a = \frac{(x, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 + \frac{(x, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = \frac{-24 + 9 + 48}{4 + 1 + 16} b_1 + \frac{12 \cdot \frac{5}{7} + 9 \cdot \frac{22}{7} - 12 \cdot \frac{3}{7}}{\frac{25}{49} + \frac{484}{49} + \frac{9}{49}} b_2 =$$

$$= \frac{11}{7} (2, 1, -4) + 3 \left(-\frac{5}{7}, \frac{22}{7}, \frac{3}{7}\right) = (1, 11, -5).$$

Знайдемо ортогональну складову b вектора x відносно підпростору L , тобто знайдемо перпендикуляр, опущений з вектора x на підпростір L :

$$b = x - a = (-12, 9, -12) - (1, 11, -5) = (-13, -2, -7).$$

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення ортогональної системи векторів.
2. Який вектор називається нормованим?
3. Що є елементами матриці Грама?
4. Який критерій ортогональності елементів підпростору?
5. Що таке ортогональне доповнення підпростору?

Завдання для самостійної роботи:

1. Ортогональні перетворення евклідового простору.

Література [5], с. 217 – 222.

2.3. Унітарні (або ермітові) простори

Якщо у визначенні лінійного простору числа $\lambda, \mu, \dots$ брати не з множини дійсних чисел, а з множини всіх комплексних чисел, то ми прийдемо до поняття комплексного лінійного простору. На основі комплексного лінійного простору будується комплексний евклідовий простір, який називається *унітарним*.

Означення

Комплексний лінійний простір L називається *унітарним* (або *ермітовим*), якщо задано закон, який кожним двом векторам $x \in L, y \in L$ співставляє комплексне число (x, y) . Крім того, цей закон задовольняє наступним аксіомам для $\forall x, y, z; \forall \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (при перестановці множників скалярний добуток замінюють на комплексно спряжене число)
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $(x, x) > 0$, якщо $x \neq \theta$

Зауваження

Для довільного вектора $(x, x) = \overline{(x, x)}$, тому скалярний квадрат вектора завжди є дійсним числом.

Наслідки з аксіом

1. $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda} \cdot \overline{(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y)$
2. $(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$

Довжина вектора (норма) та кут між векторами визначається формулами аналогічними для дійсного простору ((2.4), (2.4a)). Довжина вектора завжди дійсна та невід'ємна, а кут, взагалі кажучи, комплексний.

Приклади конкретних ермітових просторів

1. Сукупність $C^*[a, b]$ всіх функцій $z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$, визначених на проміжку $[a, b]$. Операції додавання та множення їх на число визначені звичайним чином як у математичному аналізі. Скалярний добуток визначимо як:

$$(z_1, z_2) = \int_a^b z_1 \bar{z}_2 dt$$

2. Комплексний лінійний простір $\mathbb{R}_*^n$, елементами якого є впорядкована сукупність n комплексних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ з такими ж операціями

додавання та множення їх на число, як це було визначено у арифметичному просторі $\mathbb{R}^n$.

Скалярний добуток двох елементів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ визначимо наступним чином:

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

Всі розглянуті вище властивості евклідових просторів, інколи з деякими змінами, переносяться на унітарні простори.

Теорема 2.7

Для $x, y \in L$, де L – унітарний простір, справедлива нерівність Коші-Буняковського:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \quad (2.15)$$

Доведення:

На основі аксіоми 4 визначення унітарного простору для $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ справедливо:

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0$$

Згідно аксіом 1-3 визначення унітарного простору та їх логічних наслідків одержимо:

$$\begin{aligned} (\lambda x - y, \lambda x - y) &= \lambda \bar{\lambda} (x, x) - \lambda (x, y) - \bar{\lambda} (y, x) + (y, y) = \\ &= |\lambda|^2 (x, x) - \lambda (x, y) - \bar{\lambda} (\overline{x, y}) + (y, y) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Позначимо через φ аргумент комплексного числа (x, y) і подамо це число у тригонометричній формі:

$$(x, y) = |(x, y)| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Нехай

$$\lambda = t(\cos \varphi - i \sin \varphi), \quad \text{де} \quad t \in \mathbb{R}. \quad \text{Тоді} \quad |\lambda| = |t|;$$

$$\lambda (x, y) = \bar{\lambda} (\overline{x, y}) = t |(x, y)|$$

Отже, одержимо з (2.16):

$$t^2 (x, x) - 2t |(x, y)| + (y, y) \geq 0 \quad (2.17)$$

Нерівність (2.17) справедлива для $\forall t$, тоді і тільки тоді коли $\mathcal{D} \leq 0$ ($\mathcal{D}$ – дискримінант):

$$4 |(x, y)|^2 - 4 (x, x)(y, y) \leq 0$$

Отже,

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \blacksquare$$

Теорема 2.8

Унітарний простір є *нормованим*, якщо норма будь-якого його елемента x визначається рівністю (2.4).

Доведення: аналогічне як для теореми 2.2.

Для унітарного простору з нормою (2.4) справедлива нерівність трикутника (2.3).

Елементи x та y довільного унітарного простору називаються *ортogonalними*, якщо їх скалярний добуток (x, y) дорівнює нулю.

Ортонормованим базисом n -вимірною унітарного простору називається сукупність його елементів $e_1, e_2, \dots, e_n$, що задовольняють умові (2.6a). Ці елементи лінійно незалежні.

В скінченному унітарному просторі існує ортонормований базис. Такий базис можна одержати з довільного базису шляхом ортogonalізації.

Виразимо скалярний добуток двох довільних елементів x та y n -вимірною унітарного простору через їхні координати $x_1, x_2, \dots, x_n$ та $y_1, y_2, \dots, y_n$ відносно ортонормованого базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Оскільки

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n,$$

то згідно аксіом 1-4 та співвідношення (2.6a) одержимо:

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{k=1}^n y_k e_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i \overline{y_k} (e_i, e_k) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

У довільному базисі скалярний добуток двох елементів x та y визначається формулою:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i \overline{y_k},$$

де a_{ik} – елемент матриці Грама (2.7).

Оскільки $(e_i, e_j) = \overline{(e_j, e_i)}$, то матриця Грама в унітарному просторі задовольняє умову:

$$\Gamma^T = \bar{\Gamma}.$$

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення унітарного простору.
2. Наведіть приклади конкретних ермітових просторів.
3. Дайте визначення нормованого унітарного простору.
4. Властивості матриці Грама в унітарному просторі.

Завдання для самостійної роботи:

1. Властивості ермітових та унітарних матриць.
2. Ізоморфізм n -вимірних унітарних просторів.

Література [7], с. 213 – 214; [1], с. 104, 109.

3. Відображення лінійних просторів

3.1. Лінійний оператор. Алгебра лінійних операторів

У теорії лінійних просторів важливу роль відіграють лінійні відображення та лінійні оператори.

Нехай L та M – лінійні простори, розмірності яких відповідно дорівнюють n та m .

Означення

Відображення виду $A: L \rightarrow M$ будемо називати оператором A діючим з L у M , якщо вказано правило за яким $\forall x \in L$ ставиться у відповідність $y \in M$. При цьому елемент y називають образом елемента x та пишуть $y = Ax$ або $y = A(x)$. Елемент x називають прообразом елемента y .

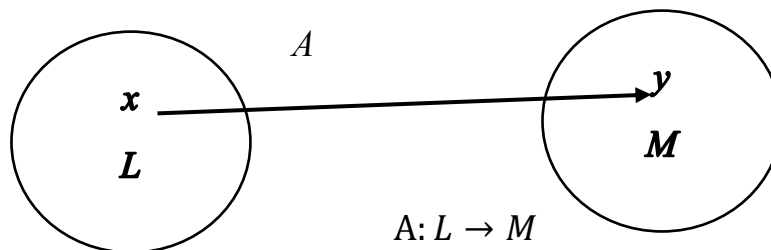


Рис. 3.1 Графічне задання відображення

Означення

Оператор A , що діє з L в M називається *лінійним*, якщо для $\forall x_1, x_2 \in L$ та $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ виконуються умови:

1. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ (властивість адитивності оператора)
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$ (властивість однорідності оператора)

Зауваження

Якщо $L \equiv M$, тобто $A: L \rightarrow L$, то A називається *лінійним перетворенням* простору L .

Зауваження

Якщо простір M є комплексною площиною, то лінійний оператор $A: L \rightarrow M$, називається *лінійною формою* або *лінійним функціоналом*.

Висновки з аксіом:

$$1. A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$$

$$2. A(\theta) = 0, \text{ так як } A(\theta) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0$$

Приклади лінійних операторів

1. Оператор, який кожному вектору x ставить у відповідність цей самий вектор, є лінійним оператором, його називають *тотожним* або *одиничним* і позначають:

$$E: E(x) = x$$

2. Оператор A , який кожному вектору $x \in L$ ставить у відповідність вектор kx , де k – деяке фіксоване число, тобто $Ax = kx$. Цей оператор називається оператором *подібності*. Якщо $L = \mathbb{R}$, то оператор подібності є звичайною лінійною функцією $y = kx$. (Перевірте, чи буде лінійним оператором функція $y = kx + b$).
3. Лінійний оператор $Ax = \theta$. Це *нульове* відображення. Надалі будемо його позначати символом O .
4. Оператор A , що ортогонально проектує вектори координатної площини XOY на вісь OX .
5. Оператор $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ повороту векторів площини XOY навколо початку координат на кут φ проти годинникової стрілки.
6. Оператор *диференціювання* $\frac{d}{dx}: f(x) \rightarrow f'(x)$ є лінійним оператором лінійного простору функцій, нескінченно диференційованих на $[a, b]$.

У множині всіх лінійних операторів $A: L \rightarrow M$ визначимо операції суми операторів та множення оператора на скаляр.

Нехай A та B – два лінійних оператора:

$$A: L \rightarrow M, B: L \rightarrow M$$

Сумою цих операторів назвемо лінійний оператор $A + B$, такий що:

$$(A + B)x = Ax + Bx$$

Добутком лінійного оператора A на скаляр λ назвемо лінійний оператор λA , такий що:

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax)$$

Назвемо *нульовим* оператор O , що діє по правилу: $Ox = \theta$

Для кожного оператора A визначимо *протилежний* оператор $-A$ такий, що:

$$-A = (-1) \cdot A$$

Твердження

Множина всіх лінійних операторів, що діють з L в M з визначеними операціями суми та множення на скаляр та вибраним нульовим та протилежним оператором утворює лінійний простір.

Розглянемо детальніше лінійні оператори $A: V \rightarrow V$, тобто множину $L(V, V)$.

Означення

Добутком операторів A та B з $L(V, V)$ називають оператор AB , що діє за правилом:

$$(AB)x = A(Bx)$$

В загальному випадку $AB \neq BA$.

Властивості лінійних операторів з $L(V, V)$:

1. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $(AB)C = A(BC)$

Перша властивість випливає з означення добутку лінійного оператора на скаляр і означення добутку операторів.

Доведемо другу властивість:

$$((A + B)C)x = (A + B)(Cx) = A(Cx) + B(Cx) = (AC + BC)x.$$

Отже, $(A + B)C = AC + BC$

Доведемо третю властивість:

$$\begin{aligned} (A(B + C))x &= A((B + C)x) = A(Bx + Cx) = A(Bx) + A(Cx) \\ &= (AB)x + (AC)x \end{aligned}$$

Отже, $A(B + C) = AB + AC$

Властивість 4 справедлива, оскільки лінійні оператори $(AB)C$ та $A(BC)$ тотожні.

Наслідки з властивості 4

$$1. A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A \cdot A}_{n \text{ множників}}$$

$$2. A^{n+m} = A^n \cdot A^m$$

Означення

Лінійний оператор B з $L(V, V)$ називається *оберненим* для оператора A з $L(V, V)$, якщо $AB = BA = E$, (E – тотожний оператор).

Обернений до A оператор позначають символом A^{-1} .

Якщо оператор має обернений, то його називають *невиродженим*.

Для $\forall x \in V$ справедливо $A^{-1}Ax = x$.

(Якщо $A^{-1}Ax = \Theta$, то $x = \Theta$)

Означення

Лінійний оператор A діє *взаємно-однозначно* з V у V , якщо будь-яким двом різним елементам $x_1 \in V$, $x_2 \in V$ відповідають різні елементи $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$.

Якщо оператор A діє взаємно-однозначно з V у V , то кожен елемент $y \in V$ є образом деякого елемента $x \in V$: $y = Ax$

Теорема 3.1

Для того щоб лінійний оператор A з $L(V, V)$ мав обернений, необхідно і достатньо, щоб цей оператор діяв взаємно-однозначно з V у V .

Доведення:

Необхідність

Нехай оператор A має обернений, але не діє взаємно-однозначно з V у V . Це означає, що деяким різним елементам x_1 та x_2 ($x_1 \neq x_2$) з V відповідає один і той же елемент $y = Ax_1 = Ax_2$, але тоді $A(x_1 - x_2) = 0$ і оскільки A має обернений, то $x_1 - x_2 = 0$. Отже отримали протиріччя.

Достатність

Нехай оператор A діє взаємно-однозначно з V у V . Тоді кожному елементу $y \in V$ відповідає елемент $x \in V$ такий, що $y = Ax$.

Отже існує оператор A^{-1} такий, що $A^{-1}y = A^{-1}(Ax) = x$. Легко переконатись, що оператор A^{-1} є лінійним. За визначенням A^{-1} – обернений до A . ■

Означення

Ядром лінійного оператора A називається множина всіх тих елементів $x \in V$, для яких $Ax = \Theta$. Ядро лінійного оператора A , позначається символом $\ker A$.

Якщо $\ker A = \Theta$, то оператор A діє взаємно-однозначно з V у V .

Отже, умова $\ker A = \Theta$ є необхідною та достатньою для існування оберненого оператора A^{-1} .

$$\ker A = \{x \in V | Ax = \Theta\}$$

Означення

Образом лінійного оператора A називається множина всіх елементів $y \in V$, для яких $y = Ax$.

Образ лінійного оператора A позначається символом imA .

$$imA = \{y \in V | \exists x \in V: y = Ax\}$$

Зауваження

Якщо $kerA = \Theta$, то $imA = V$, і навпаки.

Зауваження

Ядро $kerA$ та образ imA – лінійні підпростори простору V .

Теорема 3.2

Нехай $A: L \rightarrow L$ і $\dim L = n$, тоді $\dim(imA) + \dim(kerA) = n$ (3.1)

Доведення:

Так як $kerA$ є підпростором V , то можна знайти такий підпростір V_1 , що $V = V_1 \oplus kerA$. Тоді $\dim V = \dim(V_1) + \dim(kerA) = n$. Отже, потрібно довести, що $\dim V_1 = \dim(imA)$.

Нехай $\dim V_1 = p$; $\dim(imA) = q$ і $y_1, y_2, \dots, y_q$ – базис в imA . Так як лінійний оператор A діє взаємно-однозначно з V_1 у imA , то кожному елементу y з imA можна поставити у відповідність єдиний елемент $x \in V_1$ такий, що $Ax = y$. Тому в V_1 визначені елементи $x_1, x_2, \dots, x_q$ такі, що $Ax_k = y_k, k = \overline{1, q}$. Елементи $x_1, x_2, \dots, x_q$ лінійно незалежні, оскільки якщо

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_q x_q = 0$$

то

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_q x_q) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_q y_q = 0$$

Але оскільки $y_1, y_2, \dots, y_q$ лінійно незалежні, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = 0$, тобто і $x_1, x_2, \dots, x_q$ лінійно незалежні. Отже, у V_1 є q лінійно незалежних елементів.

Таким чином, $p \geq q$.

Нехай $p > q$. Доповнимо елементи $x_1, x_2, \dots, x_q$ до базису в V_1 :

$$x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_p$$

Оскільки $p > q$ і $\dim(imA) = q$, то елементи $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_p$ лінійно залежні і тому існують не всі рівні нулю числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ такі, що

$$\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \dots + \lambda_p Ax_p = 0$$

Отже,

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) = 0$$

Оскільки A діє з V_1 у imA взаємно-однозначно, то з останньої рівності одержимо

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0$$

Але $x_1, x_2, \dots, x_p$ – базис в V_1 . Тому $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. Одержали протиріччя.

Отже, $p = q$. ■

Означення

Рангом лінійного оператора A називають число, що позначається символом $\text{rang}A$, і дорівнює розмірності образу $\text{im}A$,

$$\text{rang}A = \dim(\text{im}A)$$

Для того, щоб оператор A з $L(V, V)$ мав обернений A^{-1} , необхідно і достатньо щоб $\text{rang}A = \dim V = n$.

Означення

Дефектом лінійного оператора A , називають число, що позначається символом $\text{def}A$ та дорівнює розмірності його ядра:

$$\text{def}A = \dim(\text{ker}A)$$

Отже, (3.1) можна записати як

$$\text{rang}A + \text{def}A = n$$

Приклад

Нехай A – оператор ортогонального проектування векторів простору $\mathbb{R}^3$ на площину XOY цього простору. Знайти область значень ($\text{im}A$), ранг, ядро та дефект оператора A .

Розв'язання:

Оператор A переводить простір $\mathbb{R}^3$ у площину XOY . Отже, площина є областю значень оператора A . Отже, ранг оператора A дорівнює 2, тобто $\text{rang}A = 2$. Ядро оператора A складається з векторів, які лежать на прямій, що проходить через початок координат перпендикулярно до площини XOY , оскільки ці вектори переводяться оператором A у нульовий вектор.

Отже, дефект оператора A дорівнює 1, тобто $\text{def}A = 1$.

Таким чином, $\text{rang}A + \text{def}A = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 3.3

Нехай V_1, V_2 – два підпростори лінійного n -вимірного простору V . Крім того, $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$. Тоді існує такий лінійний оператор $A: V \rightarrow V$, що $V_1 = \text{im}A$, $V_2 = \text{ker}A$.

Доведення:

Нехай $\dim V_1 = p$, $\dim V_2 = q$. Виберемо у просторі V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ так, щоб елементи $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ належали V_2 . У просторі V_1 виберемо базис $g_1, g_2, \dots, g_p$.

Визначимо дію лінійного оператора A на базисні вектори $e_1, e_2, \dots, e_n$ за правилом

$$Ae_1 = g_1, Ae_2 = g_2, \dots, Ae_p = g_p, Ae_{p+1} = 0, Ae_{p+2} = 0, \dots, Ae_n = 0$$

Розкладемо вектор $x \in V$ за базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Тоді:

$$\begin{aligned} Ax &= A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 Ae_1 + x_2 Ae_2 + \dots + x_n Ae_n \\ &= x_1 g_1 + x_2 g_2 + \dots + x_p g_p \end{aligned}$$

Отже, $Ax \in V_1 \equiv \text{im} A$

Очевидно, що оператор A є лінійним. ■

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення лінійного оператора.
2. Наведіть приклади лінійних операторів.
3. Дайте визначення суми та добутку операторів.
4. Сформулюйте необхідну та достатню умову існування оберненого лінійного оператора.
5. Дайте визначення ядра, образу, рангу та дефекту лінійного оператора.

Завдання для самостійної роботи:

1. Теорема про ранг лінійних операторів.

Література: [1], с. 123-124.

Нехай $y = Ax$, A – лінійний оператор. Розкладемо вектор y за базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$y = Ax = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

З іншого боку:

$$\begin{aligned} y = Ax &= A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 A e_1 + x_2 A e_2 + \dots + x_n A e_n = \\ &= (A e_1, A e_2, \dots, A e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \dots, e_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Порівнюючи (3.3) та (3.4), одержимо:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = Ax$$

Де A – матриця лінійного оператора.

Приклад

Знайти матриці лінійних перетворень та лінійних відображень.

1. Тотожний оператор $y = Ex = x$. Подіємо цим оператором на базисні вектори:

$$E e_1 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$E e_2 = e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

.....

$$E e_n = e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Отже, матриця тотожного оператора є одиничною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Для оператора подібності $Ax = kx$ маємо $A e_i = k e_i, i = \overline{1, n}$. Тому його матриця має наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

3. Матрицею нульового оператора $Ax = 0$ в довільному базисі буде нульова матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4. Оператор симетричного відображення відносно осі OY , $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Нехай $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ – базис в $\mathbb{R}^2$. Тоді

$$A\vec{i} = -\vec{i} = -1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}, (-1, 0)$$

$$A\vec{j} = \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}, (0, 1)$$

Тоді:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

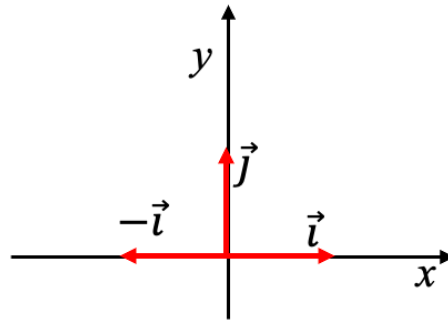


Рис. 3.2 Дія оператора симетричного відображення відносно осі OY на базисні вектори

5. Нехай $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – оператор проектування векторів площини XOY на вісь OX . $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ – базис в $\mathbb{R}^2$. Тоді $A\vec{i} = \vec{i}$; $A\vec{j} = 0$. Отже, матриця оператора має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Оператор A повертає всі вектори площини XOY навколо початку координат на кут φ проти годинникової стрілки.

Розглянемо дію такого оператора на базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}$ (рис. 3.3):

$$A\vec{i} = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}$$

$$A\vec{j} = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}$$

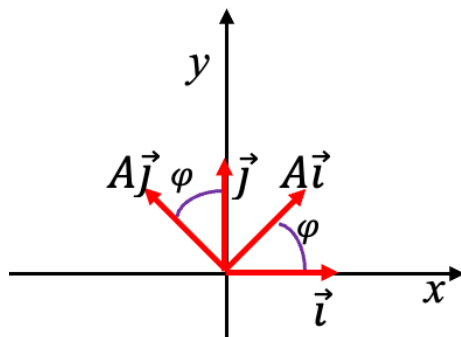


Рис.3.3 Дія оператора повороту на базисні вектори

Отже, $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

7. В просторі P_n (множина всіх многочленів степеня $\leq n$ з дійсними коефіцієнтами) виберемо базис: $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2, \dots, p_{n+1} = t^n$. Розглянемо дію оператора диференціювання $\frac{d}{dx}: f \rightarrow f'$ на базисні вектори:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} p_1 &= 0 = 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + \dots + 0 \cdot p_{n+1} \\ \frac{d}{dx} p_2 &= 1 = p_1 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + \dots + 0 \cdot p_{n+1} \\ \frac{d}{dx} p_3 &= 2t = 2p_2 = 0 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + 0 \cdot p_{n+1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} p_{n+1} = nt^{n-1} = np_n = 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + \dots + n \cdot p_n + 0 \cdot p_{n+1}$$

Отже, матриця оператора диференціювання має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 3.4

Нехай у лінійному просторі V задано базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ і нехай $A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ – квадратна матриця. Тоді існує єдиний лінійний оператор A , матрицею якого в заданому базисі є матриця A .

Доведення:

Доведемо спочатку існування оператора A . Для цього визначимо значення $Ae_i, i = \overline{1, n}$ за допомогою співвідношень (3.2), а значення Ax визначимо за допомогою співвідношень (3.4). Очевидно, що побудований оператор лінійний і матрицею цього оператора є матриця A . Єдиність оператора A випливає з єдиності представлення (3.2) в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$. ■

Теорема 3.5

Ранг лінійного оператора A дорівнює рангу матриці A цього оператора:
 $\text{rang} A = \text{rang} A$

Доведення:

За визначенням $\text{rang} A = \dim(imA)$, а imA – це лінійна оболонка векторів $g_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j$. Тому $\text{rang} A$ дорівнює максимальному числу лінійно незалежних векторів g_k . Оскільки вектори $e_1, e_2, \dots, e_n$ лінійно незалежні, то максимальне число лінійно незалежних векторів g_k , співпадає з максимальним числом лінійно незалежних рядків $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$ матриці A , тобто з рангом A . ■

Наслідок

Обернений оператор A^{-1} для оператора A існує тоді і тільки тоді, коли ранг матриці A оператора A дорівнює n ($n = \dim V$).

Еквівалентні умови існування оберненого оператора

Нехай лінійний оператор A діє у скінченновимірному просторі V . Тоді наступні умови еквівалентні:

1. Для A існує обернений оператор.
2. У довільному базисі оператору A відповідає не вироджена матриця.
3. Ранг матриці A оператора A дорівнює розмірності простору.
4. Оператор A будь-яку лінійно-незалежну систему векторів відображає в лінійно-незалежну систему.
5. Оператор A будь-який базис простору відображає у базис простору.
6. $\ker A = \emptyset$.
7. $imA = V$.
8. Оператор A діє взаємно-однозначно у просторі V .

Знайдемо зв'язок між матрицями лінійних операторів у різних базисах.

Теорема 3.6

Нехай у просторі V вибрано два базиси: $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ та $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.
Нехай T – матриця переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{e'_i\}$. Тоді матриці A та A' оператора A у базисах $\{e_i\}$ та $\{e'_i\}$ пов'язані співвідношенням: $A' = T^{-1}AT$

Доведення:

Нехай $x \in V$ має в кожному базисі координати:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

Тоді:

$$A: X \rightarrow Y, y = Ax$$

$$A: X' \rightarrow Y', y' = A'x'$$

$$x = Tx', y = Ty'$$

$$Ax = ATx', y = Ax = ATx' = Ty' \Rightarrow$$

$$y' = T^{-1}ATx', A' = T^{-1}AT \blacksquare$$

Наслідок

Визначник матриці лінійного оператора не залежить від вибору базису, тобто $\det A = \det A'$.

Означення

Матриця B називається *подібною* до матриці A , якщо існує така неособлива матриця T , що $B = T^{-1}AT$.

Наслідок

Матриці, що задають лінійний оператор A в різних базисах подібні.

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення матриці лінійного оператора.
2. Як пов'язані координати вектору та його образу?
3. Як пов'язані матриці лінійних операторів у різних базисах?
4. Які матриці називають подібними?

Завдання для самостійної роботи:

1. Характеристичний многочлен лінійного оператора.
2. Простір Мінковського.
3. Фактор – простори.

Література: [1], ст.130, [3], ст. 47-51, 171-181.

4. Структура лінійного оператора

4.1. Власні числа та власні вектори

Нехай A – лінійний оператор, $A: V \rightarrow V$. E – тотожний оператор, $E: V \rightarrow V$.

$A = (a_{ij})$ – матриця лінійного оператора розмірності $n \times n$.

Означення

Многочлен відносно λ $\det(A - \lambda E)$ називається *характеристичним многочленом* оператора A .

Означення

Число λ називається *власним числом* оператора A , якщо існує *ненульовий* вектор $x \in V$, такий, що:

$$Ax = \lambda x \quad (4.1)$$

При цьому вектор x називається *власним вектором* оператора A , що відповідає власному числу λ .

З (4.1) випливає:

$$Ax - \lambda x = 0, (A - \lambda E)x = 0 \quad (4.2)$$

Однорідна система (4.2) має нетривіальні розв'язки, якщо:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) називають *характеристичним рівнянням* оператора A .

Власні числа знаходять розв'язуючи характеристичне рівняння (4.3), а власні вектори знаходять розв'язуючи систему (4.2).

Розгорнутий вигляд характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або (якщо розкрити визначник):

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} A_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} A_2 \lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^1 A_{n-1} \lambda + A_n = 0$$

Де A_1 – сума діагональних елементів матриці A (слід матриці: SpA); A_2 – сума всіх діагональних мінорів 2-го порядку, A_{n-1} – сума всіх діагональних мінорів $(n-1)$ -го порядку, A_n – визначник матриці A .

Зауваження

Діагональні елементи діагональних мінорів співпадають з діагональними елементами матриці A .

Враховуючи теорему Вієта, маємо: сума коренів характеристичного рівняння дорівнює її сліду SpA .

Система всіх характеристичних коренів називається *спектром* лінійного оператора, причому кожне число входить в спектр таку кількість разів, яка дорівнює його кратності. Лінійний оператор має *простий спектр* якщо всі його власні числа різні.

Властивості власних чисел та власних векторів

1. Якщо x – власний вектор лінійного оператора A , що відповідає власному числу λ , то довільний вектор kx теж буде власним вектором з тим самим числом λ . Дійсно, $A(kx) = k(Ax) = k(\lambda x) = \lambda(kx)$.
2. Якщо x_1 та x_2 – власні вектори лінійного оператора A , то вектор $x_1 + x_2$ теж є власним вектором з тим самим числом λ . Дійсно, нехай $Ax_1 = \lambda x_1$, $Ax_2 = \lambda x_2$, тоді $Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2)$.
3. Кожному власному вектору відповідає єдине власне число. Дійсно, нехай $Ax = \lambda_1 x$, $Ax = \lambda_2 x$. Тоді $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, $x \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
4. Всі власні вектори, що відповідають одному власному числу разом з нульовим вектором утворюють лінійний підпростір. Він називається *власним підпростором*.

Теорема 4.1

Для того, щоб число λ було власним числом оператора A , необхідно і достатньо, щоб це число було коренем характеристичного рівняння (4.3).

Доведення:

Необхідність. Нехай λ – власне число оператора A , а x – власний вектор, що відповідає числу λ . Тоді,

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ (A - \lambda E)x &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Оскільки $x \neq 0$, то з (4.4) випливає, що $\ker(A - \lambda E) \neq 0$, тобто:

$$\dim(\ker(A - \lambda E)) \geq 1 \tag{4.5}$$

Оскільки, згідно (3.1) $\dim(\operatorname{im}(A - \lambda E)) + \dim(\ker(A - \lambda E)) = n$, то враховуючи (4.5), одержимо:

$$\dim(\operatorname{im}(A - \lambda E)) \leq n - 1 \tag{4.6}$$

За означенням $\dim(\operatorname{im}(A - \lambda E)) = \operatorname{rang}(A - \lambda E)$. Отже,

$$\operatorname{rang}(A - \lambda E) < n$$

Таким чином, якщо λ – власне число, то ранг матриці $A - \lambda E$ оператора $A - \lambda E$ менше n , тобто $\det(A - \lambda E) = 0$, отже λ є коренем характеристичного рівняння.

Достатність. Нехай λ є коренем характеристичного рівняння (4.3). Тоді справедлива нерівність (4.6), а отже і нерівність (4.5), звідси випливає існування для числа λ такого ненульового вектора x , що $(A - \lambda E)x = 0$.

Отже, $Ax = \lambda x$. Таким чином λ – власне число. ■

Наслідок

Кожний лінійний оператор має власне число.

Приклад

1. Нехай E – тотожний оператор, $Ex = x$. Тоді будь-який ненульовий вектор x є власним з власним числом $\lambda = 1$.
2. Нехай A – оператор подібності, $Ax = kx$. Тоді, будь-який ненульовий вектор x є власним з власним числом $\lambda = k$.
3. Нехай A – оператор ортогонального проектування векторів площини на вісь OX . Власними векторами, з власним числом $\lambda = 1$ є множина векторів, що належать осі OX . Всі вектори, що лежать на осі OY – є власними з власним числом $\lambda = 0$.
4. Нехай A – оператор, що відображає вектори площини симетрично відносно осі OY . Вектори, що лежать на осі OY є власними з власним числом $\lambda = 1$. Вектори, що лежать на осі OX є власними з власним числом $\lambda = -1$.

Приклад

Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ -1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 = 0$$
$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 - \text{власні числа}$$

$$\lambda_1 = 1:$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 4 \\ -1 & -3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 + 4x_2 = 0, x_1 = -4x_2$$

Загальний розв'язок: $X = \begin{pmatrix} -4x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Базисний розв'язок: $X_6 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$.

$$\lambda_2 = -2:$$

$$\begin{pmatrix} 2-(-2) & 4 \\ -1 & -3-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$4x_1 + 4x_2 = 0, x_1 + x_2 = 0, x_1 = -x_2$$

Загальний розв'язок: $X = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Базисний розв'язок: $X_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = -2$.

Теорема 4.2

Для того, щоб матриця A лінійного оператора A у даному базисі $\{e_k\}, k = \overline{1, n}$ була діагональною, необхідно і достатньо, щоб базисні вектори e_k були власними векторами цього оператора.

Доведення:

Достатність. Нехай базисні вектори e_k є власними векторами оператора A . Тоді:

$$Ae_k = \lambda_k e_k$$

і матриця A оператора A матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

тобто є діагональною.

Необхідність. Нехай матриця A лінійного оператора A у заданому базисі $\{e_k\}$ діагональна, тобто має вигляд (4.7). Тоді $Ae_k = \lambda_k e_k$, а це означає, що e_k – власні вектори оператора A . ■

Теорема 4.3

Нехай власні числа оператора A попарно різні. Тоді відповідні їм власні вектори лінійно незалежні.

Доведення:

Доведемо теорему по індукції. Перевіримо твердження для двох власних векторів x_1 та x_2 , яким відповідають власні числа λ_1 та λ_2 , відповідно, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Нехай x_1 та x_2 – лінійно залежні. Тоді знайдеться таке число α , що $x_1 = \alpha x_2$ ($x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$). Тоді:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 = \alpha Ax_2 = \alpha \lambda_2 x_2 = \lambda_2 x_1$$

Отже,

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1 &= \lambda_2 x_1 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)x_1 &= 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2\end{aligned}$$

Одержали заперечення. Отже вектори x_1 та x_2 лінійно незалежні.

Нехай довільна система з $k - 1$ власних векторів, яким відповідають різні власні числа, лінійно незалежна. Доведемо це твердження для системи з k векторів.

Розглянемо рівну нулю лінійну комбінацію:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \quad (4.8)$$

Подіємо оператором A на (4.8):

$$\begin{aligned}\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \dots + \alpha_k Ax_k &= 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k &= 0\end{aligned} \quad (4.9)$$

Помножимо (4.8) на λ_k :

$$\alpha_1 \lambda_k x_1 + \alpha_2 \lambda_k x_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k = 0 \quad (4.10)$$

Віднімемо (4.10) від (4.9):

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) x_2 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = 0 \quad (4.11)$$

За припущенням лінійної індукції лінійна комбінація (4.11) тривіальна, отже:

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = 0, \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) = 0, \dots, \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$$

Оскільки власні числа попарно різні, то

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$$

Враховуючи цей факт у (4.8), одержимо:

$$\alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$$

Отже, оскільки всі коефіцієнти у (4.8) дорівнюють нулю, то вектори $x_1, x_2, \dots, x_k$ є лінійно незалежними. ■

Наслідок

Якщо характеристичний многочлен оператора A має n різних коренів, то в деякому базисі матриця оператора A має діагональний вигляд.

Дійсно, згідно щойно доведеної теореми власні вектори є лінійно незалежними і тому можуть бути вибрані за базисні. А в цьому базисі матриця оператора є діагональною.

Теорема 4.4

Якщо власне число оператора A має кратність k , то йому відповідає не більше ніж k лінійно незалежних власних векторів.

Твердження

Якщо кратність деякого власного числа λ_k характеристичного рівняння дорівнює $r > 1$, то цьому власному числу відповідає власний підпростір розмірності не вище r . Інакше кажучи, якщо існує рівно r лінійно незалежних векторів, що відповідають власному числу λ_k , то матрицю A можна звести до діагонального вигляду. Якщо розмірність власного підпростору менша за r то матрицю A не можна звести до діагонального вигляду.

Твердження

Якщо A та A' – матриці оператора A в різних базисах, то характеристичні многочлени цих матриць співпадають.

Дійсно, оскільки $A' = S^{-1}AS$, то:

$$\begin{aligned}\det(A' - \lambda E) &= \det(S^{-1}AS - \lambda E) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) = \\ &= \det(A - \lambda E) \det S \det S^{-1} = \det(A - \lambda E)\end{aligned}$$

Наслідок

Подібні матриці мають однаковий спектр (хоча власні вектори можуть бути різними).

Характеристики, які у подібних матриць однакові

1. спектр;
2. визначник матриці;
3. ранг матриці;
4. слід матриці;
5. характеристичний многочлен.

Контрольні запитання:

1. Що таке характеристичний многочлен?
2. Дайте визначення власних чисел та власних векторів оператора A .
3. Що таке спектр лінійного оператора?
4. Коли матриця лінійного оператора є діагональною?

Завдання для самостійної роботи:

1. Лінійні форми в евклідовому просторі.
2. Ортогональний оператор та його матриця.

Література: [1], с. 134-138, [3], с.133-137.

4.2. Інваріантні підпростори. Жорданова форма матриці оператора

Означення

Алгебраїчною кратністю r_i власного числа λ_i називається кратність кореня λ_i як кореня характеристичного многочлена.

Геометричною кратністю k_i власного числа λ_i називається розмірність власного підпростору, що породжується власним числом λ_i .

$$k_i = \text{def}(A - \lambda_i E) = \dim(\ker(A - \lambda_i E))$$

Означення

Нехай A – лінійний оператор на просторі V . Підпростір $V_1 \subset V$ називається *інваріантним* відносно A , якщо для $\forall x \in V_1$ $Ax \in V_1$.

Приклади інваріантних підпросторів

1. Нехай A – поворот навколо осі OZ у тривимірному просторі V_3 . Інваріантними підпросторами будуть: площина XOY і сама вісь OZ .
2. Нехай A – ортогональне проектування на площину XOY у тривимірному просторі V_3 . Інваріантними підпросторами будуть: площина XOY , вісь OZ , всі площини, що проходять через вісь OZ , всі прямі, які належать площині XOY та проходять через початок координат.
3. В будь-якому лінійному просторі кожен підпростір інваріантний відносно нульового та тотожного операторів: $0x = 0, Ex = x$.
4. В будь-якому лінійному просторі сам простір і нуль-простір інваріантні відносно будь-якого лінійного оператора.

Теорема 4.5

Нехай A – лінійний оператор на просторі V і всі ненульові вектори підпростору V_1 є власними векторами оператора A для фіксованого власного числа λ . Тоді підпростір V_1 є інваріантним відносно оператора A .

Наслідок

Нехай λ – власне число лінійного оператора A . Тоді власний підпростір V_λ є інваріантним відносно оператора A .

Теорема 4.6

Нехай A – лінійний оператор на просторі V . Підпростір V_1 розмірності 1 є інваріантним підпростором відносно оператора A тоді і тільки тоді, коли базисний вектор з простору V_1 є власним вектором оператора A .

Теорема 4.7

Для будь-якого довільного оператора у комплексному скінченновимірному просторі існує інваріантний підпростір розмірності 1.

Теорема 4.8

Для будь-якого довільного оператора у дійсному скінченновимірному просторі розмірності $n > 1$ існує інваріантний підпростір розмірності 1 або 2.

Означення

Лінійний оператор $A: V \rightarrow V$ ($\dim V = n$) називається *оператором простої структури*, якщо простір V є прямою сумою одновимірних підпросторів, інваріантних відносно оператора A , тобто:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n, \dim V_j = 1, j = \overline{1, n}$$

всі V_j інваріантні відносно оператора A .

Теорема 4.9

Для лінійного оператора $A: V \rightarrow V$ наступні умови еквівалентні:

1. A – оператор простої структури.
2. Існує базис простору, що складається з власних векторів оператора A .
3. Існує базис простору, в якому оператору A відповідає діагональна матриця.

Теорема 4.10 (Достатня умова існування оператора простої структури)

Нехай всі корені характеристичного многочлена оператора A попарно різні. Тоді A – оператор простої структури.

Теорема 4.11

Для того щоб оператор A був оператором простої структури необхідно і достатньо, щоб для кожного власного числа λ_i алгебраїчна кратність власного числа λ_i дорівнювала геометричній кратності цього власного числа.

Приклад

З'ясувати, чи можна матрицю A лінійного оператора звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Знайдемо власні числа матриці A :

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5 - \lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda) + 9 + 9 - 3(5 - \lambda) + 3(-1 - \lambda) + 9(1 - \lambda) = 0$$

Розкриваючи дужки, та провівши тривіальні алгебраїчні перетворення, отримаємо:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Отже, $\lambda_1 = 1$ кратності $r_1 = 1$, (алгебраїчна кратність) $\lambda_2 = 2$ кратності $r_2 = 2$ (алгебраїчна кратність).

Кількість дійсних коренів з урахуванням кратності дорівнює розмірності простору $\dim V = 3$.

Знайдемо власні вектори, що відповідають власним числам λ_1 та λ_2 :

Для $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Отже, x_1, x_2 - базисні змінні; x_3 - вільна змінна.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Загальний розв'язок: $X = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Фундаментальна система має вигляд: $X_\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Отже, розмірність власного підпростору V_{λ_1} (геометрична кратність k_1) співпадає з r_1 . Базис V_{λ_1} складається з вектора $(1, 1, 1)$.

Для $\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

Отже, x_1 - базисна змінна; x_2, x_3 - вільні змінні.

$$-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$-3x_1 = -3x_2 + x_3$$

$$x_1 = x_2 - \frac{1}{3}x_3$$

$$\text{Загальний розв'язок: } X = \begin{pmatrix} x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Фундаментальна система має вигляд: } X_{\phi_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_{\phi_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отже, розмірність власного підпростору V_{λ_2} (геометрична кратність k_2) співпадає з r_2 . Базис V_{λ_2} складається з векторів $(1, 1, 0)$ та $(-\frac{1}{3}, 0, 1)$. Таким чином, для кожного власного числа його алгебраїчна кратність співпадає з геометричною. Отже, оператор має просту структуру і в базисі $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (-\frac{1}{3}, 0, 1)$, оператору A відповідає діагональна матриця:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Тобто $D = T^{-1}AT$, T – матриця переходу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Стовпчиками матриці переходу є власні вектори матриці A .

Зауважимо, що діагональними елементами матриці D є власні числа оператора, причому порядок розташування власних чисел на діагоналі строго відповідає порядку розміщення власних векторів в базисі. Перестановка власних векторів в базисі означає перестановку відповідних діагональних елементів матриці.

Теорема 4.12

Якщо лінійний оператор A має простий спектр, то існує базис простору V_n , в якому цей оператор задається діагональною матрицею.

Доведення:

Оператор має простий спектр, коли всі його власні числа попарно різні. А власні вектори, що відповідають різним власним числам є лінійно

незалежними, отже утворюють базис простору V_n . А у базисі з власних векторів матриця має діагональний вигляд. ■

Означення

Жордановою клітинкою $I_k(\lambda)$ розміру k , що відповідає числу λ , назвемо квадратну матрицю розмірності $k \times k$ виду:

$$I_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

На головній діагоналі розташовані числа λ , над головною діагоналлю – одиниці, а решта елементів дорівнюють нулю.

$$\text{Наприклад, } I_1(5) = 5, I_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розглянемо властивості матриці (4.12).

Запишемо характеристичне рівняння для матриці (4.12):

$$\det(I_k(\lambda) - \lambda_0 E) = (\lambda - \lambda_0)^k = 0 \quad (4.13)$$

$\lambda = \lambda_0$ є коренем характеристичного рівняння (4.13) кратності k . Таким чином, матриця (4.12) має власне число λ_0 алгебраїчної кратності k . Власні вектори, що відповідають власному числу λ_0 – це нетривіальні розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею:

$$B = I_k(\lambda_0) - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\text{rang} B = k - 1$, то розмірність власного підпростору дорівнює 1. Тому існує лише один лінійно незалежний власний вектор. Таким чином для $k \geq 2$ не існує базису, що складається з власних векторів матриці (4.12), тобто в жодному базисі матриця оператора (4.12) не може мати діагонального вигляду.

Означення

Блочно-діагональна матриця $A(\lambda_0)$, кожен блок якої є жордановою клітинкою виду (4.12) називається *жордановим блоком*, що відповідає власному значенню λ_0 :

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{I_{i_1}(\lambda_0)} & & & \\ & \boxed{I_{i_2}(\lambda_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{I_{i_k}(\lambda_0)} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

На головній діагоналі матриці (4.14) розташовані k жорданових клітинок $I_{i_1}(\lambda_0), I_{i_2}(\lambda_0), \dots, I_{i_k}(\lambda_0)$ розмірності $i_1, i_2, \dots, i_k$, де k – геометрична кратність власного числа λ_0 . Сума розмірності цих клітинок дорівнює алгебраїчній кратності r власного числа λ_0 , тобто: $i_1 + i_2 + \dots + i_k = r$.
Всі решта елементів матриці (4.14) дорівнюють нулю. Порядок розташування жорданових клітинок у матриці $A(\lambda_0)$ визначений неоднозначно.

Отже, r вказує на розмірність жорданового блоку, а k вказує на кількість жорданових клітинок в ньому.

Приклади жорданових блоків

Нехай характеристичний многочлен матриці має вигляд:
 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r$, r - алгебраїчна кратність, а геометрична кратність власного числа λ_0 дорівнює k .

Приклади

- 1) Нехай $r = 2, k = 1$, що відповідає одній жордановій клітинці другого порядку. Тоді:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

- 2) Нехай $r = 3, k = 1$, що відповідає одній жордановій клітинці третього порядку. Тоді:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

- 3) Нехай $r = 3, k = 2$, що відповідає двом жордановим клітинкам першого та другого порядку. Тоді:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_0} \end{pmatrix} \text{ або } A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_0} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

- 4) Нехай $r = 4, k = 2$, що відповідає двом жордановим клітинкам першого та третього порядку або другого та другого порядку. Тоді:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_0} \end{pmatrix} \quad \text{або}$$

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_0} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Теорема 4.13 (про жорданову форму матриці оператора)

Нехай задано лінійний оператор $A: V \rightarrow V$, $\dim V = n$. Його характеристичний многочлен має вигляд:

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{r_p},$$

де $\lambda_i \neq \lambda_j$ коли $i \neq j$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n$.

Тоді у просторі V існує базис, у якому матриця оператора A має блочно-діагональну форму яка називається *жордановою нормальною формою*:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{A(\lambda_1)} & & \\ & \boxed{A(\lambda_2)} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{A(\lambda_p)} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

де $A(\lambda_j)$, $j = \overline{1, p}$ - жордановий блок, що відповідає власному числу λ_j . Базис, в якому матриця лінійного оператора має жорданову нормальну форму, назовемо *жордановим базисом*. Якщо жорданова форма матриці містить жорданові клітинки розмірності більші за 1, то кажуть, що матриця має складну структуру.

Приклади жорданової форми матриці

Нехай n – розмірність простору, r_i та k_i алгебраїчна та геометрична кратність власного числа λ_i , відповідно.

1) Нехай $n = 3, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Тоді:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

2) Нехай $n = 4, \lambda_1 \neq \lambda_2, r_1 = 3, k_1 = 1, r_2 = k_2 = 1$. Тоді:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

3) Нехай $n = 4, \lambda_1 \neq \lambda_2, r_1 = 2, k_1 = 1, r_2 = 2, k_2 = 1$. Тоді:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

4) Нехай $n = 4, \lambda_1 \neq \lambda_2, r_1 = 2, k_1 = 1, r_2 = 2, k_2 = 2$. Тоді:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Звести матрицю A до жорданової форми означає знайти подібну до A матрицю J_A , яка має жорданову нормальну форму. Якщо T – матриця переходу до жорданового базису, то:

$$J_A = T^{-1}AT \quad (4.16)$$

Для довільної квадратної матриці A з комплексними елементами жорданова форма J_A існує і визначається з точністю до порядку клітинок на діагоналі. Для побудови жорданового базису введемо поняття приєднаного вектору.

Означення

Елемент x називається *приєднаним вектором* оператора A , що відповідає власному числу λ , якщо для деякого натурального числа $m \geq 1$ виконуються співвідношення:

$$(A - \lambda E)^{m-1}x \neq 0, (A - \lambda E)^m x = 0$$

Число m називають *висотою приєднаного вектора* x . Інакше кажучи, якщо x – приєднаний вектор висоти m , то елемент $(A - \lambda E)^{m-1}x$ є власним вектором оператора A . Очевидно, що власні вектори оператора A – це приєднані вектори висоти 1.

Розглянемо послідовність векторів $e_1, e_2, \dots, e_m$ ($e_1 \neq 0$) для яких справедливо

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \lambda e_1 \\ Ae_2 &= \lambda e_2 + e_1 \\ Ae_3 &= \lambda e_3 + e_2 \\ &\dots \\ Ae_m &= \lambda e_m + e_{m-1} \end{aligned} \tag{4.17}$$

або у еквівалентній формі:

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)e_1 &= 0 & (A - \lambda E)e_1 &= 0 \\ (A - \lambda E)e_2 &= e_1 & (A - \lambda E)^2 e_2 &= 0 \\ (A - \lambda E)e_3 &= e_2 & \Rightarrow (A - \lambda E)^3 e_3 &= 0 \\ &\dots & &\dots \\ (A - \lambda E)e_m &= e_{m-1} & (A - \lambda E)^m e_m &= 0 \end{aligned}$$

Таким чином, вектори $e_1, e_2, \dots, e_m$ складаються з власного вектора e_1 та приєднаних векторів $e_2, \dots, e_m$ (висота приєданого вектора e_k дорівнює k).

Теорема 4.14

Вектори $e_1, e_2, \dots, e_m$ лінійно незалежні.

Перепишемо рівності (4.17) інакше:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \lambda e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + \dots + 0e_{m-1} + 0e_m \\ Ae_2 &= e_1 + \lambda e_2 + 0e_3 + 0e_4 + \dots + 0e_{m-1} + 0e_m \\ Ae_3 &= 0e_1 + e_2 + \lambda e_3 + 0e_4 + \dots + 0e_{m-1} + 0e_m \\ &\dots \\ Ae_m &= 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 + \dots + e_{m-1} + \lambda e_m \end{aligned}$$

Таким чином, якщо кількість векторів $e_1, e_2, \dots, e_m$ дорівнює розмірності простору, тобто $m = n$, то ці вектори утворюють базис в просторі, а матриця оператора A в цьому базисі має вигляд жорданової клітинки розмірності n з числом λ по діагоналі.

Таким чином, *ідея зведення матриці до жорданової форми* полягає в наступному:

1. Знайти всі власні числа і власні вектори, що відповідають цим власним числам.
2. Якщо кількість власних векторів дорівнює розмірності простору, то вони утворюють жордановий базис. З власних векторів будується

матриця переходу T до жорданового базису і за формулою (4.16) визначається жорданова форма матриці.

3. Якщо кількість власних векторів *менша* розмірності простору (а це відбувається тоді, коли алгебраїчна кратність деякого власного числа λ більша за геометричну кратність), то вони доповнюються до базису за допомогою приєднаних векторів.

Розглянемо приклад зведення квадратної матриці до жорданової форми та знаходження жорданового базису.

Приклад 1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Складаємо характеристичне рівняння матриці

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Звідки $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ – корінь кратності 2 ($r = 2$). Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$:

$$\begin{cases} (-4 + 2)x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

Загальний розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ Покладемо } x_2 = 1$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Отже, геометрична кратність $k = 1$. Таким чином, жорданова форма матриці A має вигляд:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Оскільки $k < r$, то потрібно доповнити вектор e_1 до базису за допомогою приєданого вектора.

Для знаходження приєданого вектора e_2 знайдемо розв'язок системи

$$(A - \lambda E)e_2 = e_1, e_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 4y_2 = 2 \\ -y_1 + 2y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow -y_1 + 2y_2 = 1, y_1 = 2y_2 - 1$$

Загальний розв'язок $Y = \begin{pmatrix} 2y_2 - 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Покладемо $y_2 = 0$

$$e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – приєднаний вектор}$$

Жордановий базис утворюють лінійно незалежні вектори e_1 та e_2 .

Перевірка:

Матриця переходу до нового базису має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{Тоді } T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Знаходимо жорданову форму матриці A :

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

що підтверджує отриманий результат.

Приклад 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Складаємо характеристичне рівняння матриці

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4 - \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Звідки $\lambda = 2$ кратності 3 ($r = 3$).

Знайдемо власні вектори, що відповідають цьому власному числу

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x_1 + x_2 = 0; x_1 = \frac{x_2}{2}$$

$$\text{Загальний розв'язок } X = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ 2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Фундаментальна система розв'язків складається з двох векторів ($x_2 = 1, x_3 = 0$ або $x_2 = 0, x_3 = 1$):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Отже, геометрична кратність $k = 2$.

Таким чином жорданова форма матриці A має вигляд:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Зайдемо жордановий базис. Для цього знайдемо приєднаний вектор Y з системи: $(A - \lambda E)Y = X, X = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$. Покладемо $x_2 = c_2, x_3 = c_3$ або

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & c_2 \\ -4 & 2 & 0 & 2c_2 \\ -2 & 1 & 0 & 2c_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 2c_2 \\ -2 & 1 & 0 & 2c_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 2c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4c_3 - 2c_2 \end{array}\right)$$

Отже, для сумісності системи потрібно, щоб виконувалась умова: $4c_3 - 2c_2 = 0, c_2 = 2c_3$

Нехай $c_2 = 1$, тоді $c_3 = \frac{1}{2}$

$$-4y_1 + 2y_2 = 2, y_1 = \frac{y_2 - 1}{2}$$

Загальний розв'язок: $Y = \begin{pmatrix} \frac{y_2-1}{2} \\ 2 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Покладемо $y_2 = 1, y_3 = 0$: $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – приєднаний до $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ вектор.

Таким чином, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор; $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – вектор

приєднаний до X ;

$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ – другий власний вектор з множини власних векторів.

Жордановий базис утворюють вектори $X, \tilde{Y}, Z$.

Перевірка:

Матриця переходу до нового базису має вигляд: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Тоді $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Знаходимо жорданову форму матриці A :

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{що}$$

підтверджує отриманий результат.

Контрольні запитання:

1. Що таке алгебраїчна та геометрична кратність власного числа?
2. Наведіть приклади інваріантних підпросторів.
3. Сформулюйте достатню умову існування оператора простої структури.
4. Що таке жорданова клітинка порядку k ?
5. Сформулюйте теорему про жорданову форму матриці.
6. Як будується жордановий базис?

Завдання для самостійної роботи:

1. Нільпотентні оператори.
2. Структура інваріантного підпростору.
3. Унімодулярні лямбда матриці.

Література: [3], с.61; [5], с.371-379.

5. Аналітична геометрія в просторі

5.1. Поверхня та лінія у просторі

Означення

Рівняння виду:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (5.1)$$

називають рівнянням поверхні S в заданій системі координат $OXYZ$ з трьома змінними, якому задовольняють координати довільної точки поверхні і не задовольняють координати точок, що не лежать на ній.

Отже, поверхня S є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють рівняння (5.1). Зауважимо, що не всі рівняння з трьома змінними виду (5.1) визначають геометричний образ, що є поверхнею. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ не визначає геометричний образ.

Рівняння поверхні інколи зручно визначати в циліндричній або сферичній системі координат. Використання для визначення деяких поверхонь недекартових систем координат пояснюється тим, що рівняння поверхні у таких системах набуває більш простого вигляду.

Визначимо циліндричну систему координат наступним чином. Виберемо на фіксованій площині π деяку точку O і промінь OX (рис. 5.1).

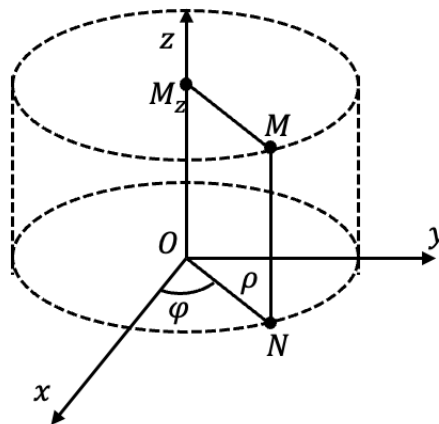


Рис.5.1 Циліндрична система координат

Розглянемо вісь OZ , що перпендикулярна площині π . Нехай M – довільна точка простору, N – її проекція на площину π , а M_z – її проекція на вісь OZ . Циліндричними координатами точки M називаються числа ρ , φ , z ,

де ρ та φ - полярні координати точки N в площині π відносно полюса O та полярної осі OZ . Число z є **величиною** відрізка OM_z .

Отже $M(\rho, \varphi, z)$ – точка з циліндричними координатами. Якщо осі ПДСК вибрати так, як вказано на рис. 5.1, то декартові координати x, y, z точки M будуть пов'язані з її циліндричними координатами ρ, φ, z наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Де $0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Для визначення сферичної системи координат у просторі розглянемо три взаємно перпендикулярні осі OX , OY та OZ із загальним початком O рис. (5.12).

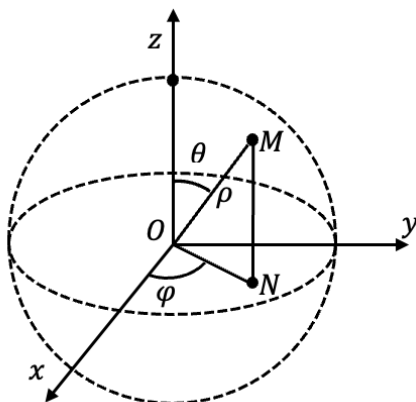


Рис. 5.2 Сферична система координат

Нехай M – довільна точка простору, N - її проекція на площину XOY , ρ – відстань від M до O . Нехай θ - кут між $\overline{OM}$ та віссю OZ , а φ – кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки вісь OX для суміщення її з променем ON . θ та φ називають широтою та довготою, відповідно. Сферичними координатами точки M , називають три числа ρ, φ та θ .

Якщо вибрати осі ПДСК як вказано на рис. 5.02, то декартові координати x, y, z точки M будуть пов'язані з її сферичними координатами ρ, φ, θ наступним чином:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

де $0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Приклад

Рівняння сфери у ПДСК, що має радіус $R > 0$ та центр у точці $M_0(a, b, c)$ має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Якщо центр сфери знаходиться у початку відліку ($a = b = c = 0$), то рівняння сфери матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

У сферичній системі координат це рівняння має вигляд $\rho = R$. Дійсно:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = R^2$$

$$\rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta = R^2$$

$$\rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = R^2$$

$$\rho = R.$$

Визначимо лінію у просторі як геометричне місце точок, що одночасно належать двом поверхням, тобто їх перетину.

Якщо $F_1(x, y, z) = 0$ та $F_2(x, y, z) = 0$, є рівняннями двох поверхонь, перетином яких є задана лінія L , то:

1. Координати будь-якої точки, що лежать на лінії L задовольняють обом вказаним рівнянням.
2. Обом вказаним рівнянням не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на лінії L .

Таким чином, два рівняння:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

визначають лінію L у просторі.

Лінію можна задати системою (5.2) безліччю способів. Наприклад, рівняння двох сфер:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ та } x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 10$$

визначають коло радіуса 1 з центром у початку відліку, що лежить у площині XOY . Це ж коло можна задати інакше, а саме:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ та } x^2 + y^2 + (z - \sqrt{R^2 - 1})^2 = R^2, R > 1$$

Нехай у просторі задано ПДСК.

Означення

Поверхня S називається *циліндричною поверхнею* з твірною, що паралельна осі OZ , якщо яка б не була точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить цій

поверхні, пряма лінія, що проходить через цю точку і паралельна осі OZ , повністю лежить на поверхні S . Цю лінію називають твірною поверхні.

Означення

Поверхня S називається *конічною поверхнею* або *конусом* з вершиною у початку відліку O , якщо яка б не була точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, (відмінна від точки O), що належить цій поверхні, пряма лінія, що проходить через цю точку і початок відліку O , повністю лежить на поверхні S .

Покажемо, що будь-яке рівняння виду:

$$F(x, y) = 0 \quad (5.3)$$

визначає циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі OZ .

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка, що лежить на поверхні S , яка визначається рівнянням (5.3). Тоді координати цієї точки мають задовольняти рівняння (5.3), тобто:

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad (5.4)$$

Достатньо довести, що довільна точка M прямої, що проходить через точку M_0 паралельно осі OZ , також лежить на поверхні S , тобто має координати, що задовольняють рівняння (5.3).

Яка б не була точка M прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і паралельна осі OZ , її абсциса та ордината такі ж як і точки M_0 тобто дорівнюють x_0 та y_0 відповідно, а апліката z має довільне значення.

Але у рівняння (5.3) входить тільки абсциса та ордината, а вони згідно (5.4) задовольняють цьому рівнянню. Отже, доведено, що S – це циліндрична поверхня з твірною, яка паралельна осі OZ .

Напрямна циліндричної поверхні – це пласка лінія на площині XOY , яка визначається рівняннями:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Перше з цих рівнянь визначає циліндричну поверхню, а друге – площину XOY . Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = R^2$ визначає у просторі круглий циліндр з твірною, яка паралельна осі OZ і напрямною, що лежить в площині XOY і є колом радіуса R з центром у початку відліку.

Отже, циліндрична поверхня утворюється переміщенням прямої (твірної) вздовж деякої заданої лінії (напрямної) паралельно до заданого напрямку (наприклад, паралельно одній з координатних осей).

Покажемо, що рівняння

$$F(x, y, z) = 0, \quad (5.6)$$

де $F(x, y, z)$ – однорідна функція довільного порядку n , визначає конічну поверхню.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – довільна, відмінна від початку відліку точка, що належить поверхні S , що визначається рівнянням (5.6). Тоді справедливо:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Достатньо показати, що для довільної точки $M(x, y, z)$, що лежить на прямій, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та початок відліку O , координати x, y, z цієї точки задовольняють рівняння (5.6).

Оскільки вектори $\overrightarrow{OM}$ та $\overrightarrow{OM_0}$ колінеарні і вектор $\overrightarrow{OM_0}$ ненульовий, то $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM_0}$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Отже, } x = kx_0, y = ky_0, z = kz_0$$

$$\text{Таким чином: } F(x, y, z) = F(kx_0, ky_0, kz_0) = k^n F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Отже, координати x, y, z задовольняють рівняння (5.6).

Відмітимо, що конічна поверхня утворюється переміщенням прямої (твірної), що проходить через одну й ту ж точку (вершину) вздовж заданої кривої (напрямної).

Прикладом конічної поверхні є круглий конус, що визначається рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (функція $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ є однорідною функцією, другого порядку).

Лінії у просторі та поверхні поділяють на дві групи: алгебраїчні та трансцендентні.

Означення

Поверхню (лінію) називають *алгебраїчною*, якщо функції в лівій частині рівнянь (5.1), (5.2) є алгебраїчними поліномами, тобто мають вигляд:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} x^i y^j z^k$$

Будь які неалгебраїчні поверхні (лінії) називають *трансцендентними*.

Якщо поверхня або лінія визначається в ПДСК алгебраїчним рівнянням n -го степеня з трьома змінними, то вона називається *алгебраїчною поверхнею (лінією) n -го порядку*.

Приклади

1) $x^4 + yz^2 - z + 3 = 0$ – алгебраїчна поверхня 4-го порядку

2) $\sin(x) + tg(y) - z = 0$ – трансцендентна поверхня.

Розглянемо способи задання лінії у просторі. Рівняння (5.2) визначає *неявний* спосіб задання лінії. Якщо рівняння (5.2) однозначно розв'язується відносно однієї змінної x, y або z , то одержують *явне* задання лінії. Якщо

розглядати лінію у просторі з кінематичної точки зору, тобто як шлях, що проходить матеріальна точка, рухаючись за певним законом, то одержимо *параметричне* представлення лінії. Тоді координати x, y, z довільної точки лінії, задаються як три функції:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$$

які визначені та неперервні в деякому проміжку зміни параметра t .

Наприклад, коло у просторі задається наступним параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \\ z = 0 \end{cases}$$

Для знаходження точок перетину поверхонь або ліній у просторі, потрібно розв'язати систему однорідних рівнянь. Наприклад, якщо задані дві лінії L_1 та L_2 , що задаються рівняннями:

$$\begin{aligned} L_1: & \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \\ L_2: & \begin{cases} \Phi_3(x, y, z) = 0 \\ \Phi_4(x, y, z) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

то координати точок перетину цих двох ліній є розв'язками чотирьох рівнянь (5.7) з трьома невідомими. Оскільки число невідомих менше числа рівнянь, то система (5.7) не має розв'язків. Отже, дві лінії у просторі не перетинаються.

Контрольні запитання:

1. Як визначаються циліндрична та сферична системи координат?
2. Які є способи задання лінії у просторі?
3. Яка поверхня називається циліндричною?
4. Яка поверхня називається конічною?
5. Яка поверхня називається алгебраїчною, трансцендентною?

Завдання для самостійної роботи:

1. Афінна еквівалентність ліній та поверхонь.
2. Поверхні обертання.

Література: [6], с.124-126, 132-140.

5.2. Площина та пряма у просторі

Алгебраїчною поверхнею першого порядку у просторі є площина.

Теорема 5.1

Якщо в просторі задана довільна площина π і фіксована ПДСК, то площина π визначається у цій системі рівнянням першого степеня.

Доведення:

Геометрично будь-яку площину в просторі XYZ можна задати за допомогою вектора $\vec{N} = (A, B, C)$, що перпендикулярний до площини, та точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ через яку проходить задана площина (рис. 5.3)

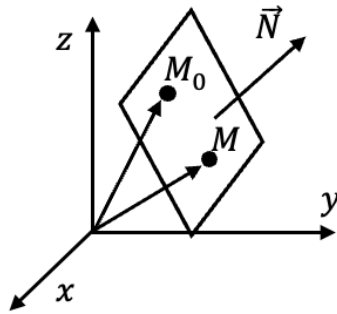


Рис. 5.3 Площина

Виберемо довільну точку $M(x, y, z)$, що належить площині. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_0M}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

Точка M належить заданій площині тоді і тільки тоді, коли $\vec{N} \perp \overrightarrow{M_0M}$.
Отже,

$$(\vec{N} \circ \overrightarrow{M_0M}) = 0 \quad (5.8)$$

Запишемо скалярний добуток (5.8) у координатній формі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (5.9)$$

$$\text{Або } Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

Позначивши $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$, одержимо алгебраїчне рівняння першого степеня:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (5.10)$$

Оскільки вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ ненульовий, то справедливо:

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad (5.11)$$



Ненульовий вектор, перпендикулярний до площини, називають *нормальним вектором* цієї площини.

Рівняння (5.10) з довільними коефіцієнтами A, B, C , що задовольняють умову (5.11) називається *загальним рівнянням* площини.

Рівняння (5.9) називається *рівнянням площини*, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$.

Теорема 5.2

Якщо у просторі фіксована ПДСК, то будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними x, y та z визначає відносно цієї ПДСК площину.

Доведення:

Виберемо ПДСК і розглянемо довільне рівняння першого степеня виду (5.10)

Рівняння (5.10) має хоча б один розв'язок (x_0, y_0, z_0) . Дійсно, числа x_0 та y_0 можна вибрати довільно, а третє z_0 знайти з рівняння (5.10). Тоді

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (5.12)$$

Віднімаючи від рівняння (5.10) рівняння (5.12), одержимо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (5.13)$$

Рівняння (5.13) еквівалентне рівнянню (5.10) і визначає рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Теорема доведена.

Таким чином, будь-яка площина є поверхнею першого порядку і, навпаки, будь-яка поверхня першого порядку є площиною. ■

Проаналізуємо загальне рівняння площини (5.10).

Означення

Загальне рівняння площини (5.10) називається *повним*, якщо всі його коефіцієнти відмінні від нуля. Якщо хоча б один з коефіцієнтів дорівнює нулю, то рівняння (5.10) називається *неповним*.

Розглянемо всі можливі види неповних рівнянь:

- 1) $D = 0$, рівняння $Ax + By + Cz = 0$ визначає площину, що проходить через початок відліку.
- 2) $A = 0$, рівняння $By + Cz + D = 0$ визначає площину, паралельну осі OX , оскільки вектор нормалі $\vec{N} = (0, B, C)$ перпендикулярний до осі OX .

- 3) $B = 0$, рівняння $Ax + Cz + D = 0$ визначає площину, паралельну осі OY , оскільки вектор нормалі $\vec{N} = (A, 0, C)$ перпендикулярний до осі OY .
- 4) $C = 0$, рівняння $Ax + By + D = 0$ визначає площину, паралельну осі OZ , оскільки вектор нормалі $\vec{N} = (A, B, 0)$ перпендикулярний до осі OZ .
- 5) $A = 0, B = 0$, рівняння $Cz + D = 0$ визначає площину паралельну площині XOY .
- 6) $A = 0, C = 0$, рівняння $By + D = 0$ визначає площину паралельну площині XOZ .
- 7) $B = 0, C = 0$, рівняння $Ax + D = 0$ визначає площину паралельну площині YOZ .
- 8) $A = 0, B = 0, D = 0$, рівняння $Cz = 0$ визначає площину XOY .
- 9) $A = 0, C = 0, D = 0$, рівняння $By = 0$ визначає площину XOZ .
- 10) $B = 0, C = 0, D = 0$, рівняння $Ax = 0$ визначає площину YOZ .

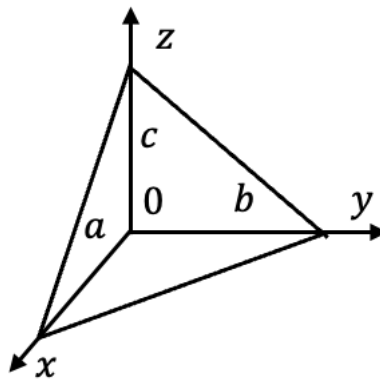


Рис. 5.4 Геометричний зміст рівняння у відрізках

Розглянемо загальне рівняння площини (5.10), коли всі його коефіцієнти відмінні від нуля.

Поділимо рівняння (5.10) на $D \neq 0$ і запишемо його у вигляді:

$$\frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} + 1 = 0$$

Позначимо $\frac{D}{A} = -a, \frac{D}{B} = -b, \frac{D}{C} = -c$

Тоді одержимо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (5.14)$$

Рівняння площини виду (5.14) називається *рівняння у відрізках*. Числа a, b та c мають простий геометричний зміст і вони дорівнюють відрізкам, які відсікає площина на осях OX, OY, OZ , відповідно (рис. 5.4).

Розглянемо взаємне розміщення двох площин. Нехай дві площини π_1 та π_2 задані загальними рівняннями.

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{aligned}$$

Умова паралельності площин π_1 та π_2 еквівалентна умові колінеарності векторів нормалі $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$, тобто:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

Умова перпендикулярності площин π_1 та π_2 еквівалентна умові перпендикулярності векторів нормалі $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$, тобто рівності нулю їхнього скалярного добутку:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Кут між площинами π_1 та π_2 визначається як кут між векторами нормалі $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$:

$$\cos(\varphi) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

Знайдемо рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій.

Візьмемо довільну точку простору $M(x, y, z)$ та побудуємо вектори:

$$\begin{aligned} \vec{M_1M} &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \\ \vec{M_1M_2} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \vec{M_1M_3} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \end{aligned}$$

Точка $M(x, y, z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{M_1M}, \vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}$ лежать у цій площині, тобто, коли вони компланарні. Отже, змішаний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.15)$$

(5.15) – рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Знайдемо рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно двом заданим не колінеарним векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$. За

умовою площина паралельна векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$, отже, вектор нормалі площини можна виразити через векторний добуток даних векторів:

$$\vec{N} = [\vec{a} \times \vec{b}].$$

Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Точка $M(x, y, z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{N}$ перпендикулярні, тобто:

$$(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N}) = 0$$

або:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (5.16)$$

(5.16) – векторна форма рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно двом заданим векторам.

Знайдемо рівняння площини, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ паралельно заданому вектору $\vec{a}$.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка простору. Побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (\vec{r} - \vec{r}_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Тоді очевидно, що вектор нормалі $\vec{N}$ можна побудувати наступним чином:

$$\vec{N} = [\vec{a} \times \overrightarrow{M_1M_2}]$$

Оскільки $\vec{N} \perp \overrightarrow{M_1M}$, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, отже:

$$(\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1M}) = [\vec{a} \times \overrightarrow{M_1M_2}] \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad (5.17)$$

(5.17) – рівняння площини, що проходить через дві задані точки паралельно даному вектору.

Нехай задано три площини:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (5.18)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (5.19)$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \quad (5.20)$$

Знайдемо умову, коли всі три площини перетинаються в одній і тільки одній точці. Очевидно, що це справедливо тоді, коли система рівнянь (5.18), (5.19), (5.20) з невідомими x, y та z буде мати єдиний розв'язок, тобто коли детермінант основної матриці системи відмінний від нуля. Таким чином, три задані площини перетинаються в одній і тільки одній точці, якщо:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

або

$$(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \cdot \vec{N}_3) \neq 0$$

де $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ – вектори нормалі заданих площин.

Отже, якщо вектори нормалі трьох площин некомпланарні, то ці площини перетинаються в одній і тільки одній точці.

Нехай задана деяка площина, що не проходить через початок координат. Проведемо з точки O промінь, що перпендикулярний до площини. Точку перетину променя з площиною позначимо через P , а довжину перпендикуляра OP через p (рис. 5.5). Виберемо на промені OP одиничний вектор $\vec{n}_0$ з напрямними косинусами кутів α, β, γ . Додатнім напрямом $\vec{n}_0$ вважатимемо напрям від O до P . Знайдемо рівняння площини для заданих значень p, α, β, γ . Візьмемо довільну точку простору $M(x, y, z)$. Ця точка належить заданій площині тоді і тільки тоді, коли проекція вектора $\vec{OM}$ на вісь вектора $\vec{n}_0$ дорівнює p , тобто:

$$pr_{\vec{n}_0} \vec{OM} = p$$

Оскільки $pr_{\vec{n}_0} \vec{OM} = (\vec{OM} \cdot \vec{n}_0)$ і враховуючи, що $\vec{OM} = (x, y, z)$, $\vec{n}_0 = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$. Одержимо

$$xcos(\alpha) + ycos(\beta) + zcos(\gamma) - p = 0 \quad (5.21)$$

Рівняння (5.21) називається *нормальним рівнянням площини*.

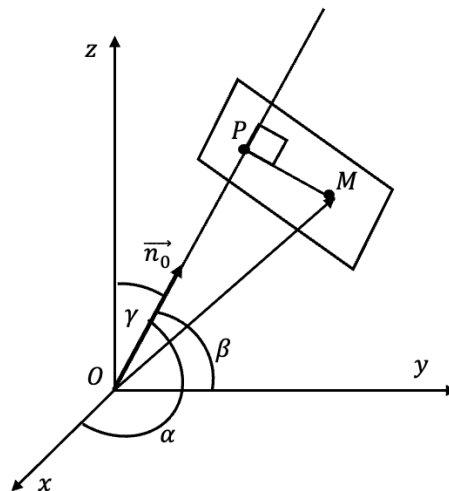


Рис 5.5

Якщо площина проходить через початок координат, то $p = 0$, а напрямок вектора, $\vec{n}_0$ можна вибирати довільно.

Введемо поняття відхилення довільної точки M від даної площини π . Нехай число d позначає відстань від точки M до площини π .

Означення

Відхиленням δ точки M від площини π називається число $+d$, коли точка M та початок відріку лежать по різні боки від площини π та число $-d$, коли точка M та початок відріку лежать по один бік від площини π .

Якщо ж початок координат лежить на площині π , то відхилення дорівнює $+d$, якщо точка M лежить по той бік від π , куди напрямлений вектор $\vec{n}_0$ і дорівнює $-d$ у протилежному випадку.

Теорема 5.3

Відхилення δ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини π визначається формулою:

$$\delta = x_0 \cos(\alpha) + y_0 \cos(\beta) + z_0 \cos(\gamma) - p \quad (5.22)$$

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми про відхилення точки від прямої на площині (див. конспект лекцій I семестру)

Відстань від точки до площини дорівнює модулю відхилення.

Визначимо алгоритм зведення загального рівняння площини до нормального виду.

Відмітимо, що для напрямних косинусів виконується рівність:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Таким чином, рівняння площини називається нормальним, якщо сума квадратів коефіцієнтів при змінних дорівнює одиниці, а вільний член є від'ємним числом, тобто:

$$\begin{cases} \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 \\ -p < 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Помножимо загальне рівняння площини (5.10) на деяке число $M \neq 0$:

$$AMx + BMy + CMz + DM = 0 \quad (5.24)$$

Рівняння (5.24) можна звести до нормального вигляду, якщо виконується умова (5.23). Отже,

$$\begin{cases} (AM)^2 + (BM)^2 + (CM)^2 = 1 \\ DM < 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

Розв'язавши систему (5.25) відносно M одержимо:

$$\begin{cases} |M| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ DM < 0 \end{cases}$$

Число M називається *нормуючим множником* рівняння (5.10).

Якщо $D < 0$, то $M > 0$ і тоді

$$M = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Якщо $D > 0$, то $M < 0$ і тоді

$$M = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Отже, знак нормуючого множника протилежний знаку вільного члена рівняння (5.10). Якщо $D = 0$, то знак M значення немає.

Отже, щоб звести загальне рівняння площини (5.10) до нормального виду (5.21) потрібно помножити його на нормуючий множник.

Означення

Сукупність всіх площин, що проходять через одну й ту ж пряму L називається *жмутком площин* з центром в L .

Теорема 5.4

Якщо $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ є рівняннями різних непаралельних площин, які перетинаються по прямій L , а α та β – довільні, не рівні одночасно нулю числа, то рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (5.26)$$

визначає рівняння площини, що проходить через пряму L . Крім того, яка б не була наперед задана площина, що проходить через пряму L , вона визначається рівнянням (5.26) для деяких значень α та β .

Сформульована теорема дозволяє задавати пряму L в просторі, не тільки двома різними непаралельними площинами, але й двома різними площинами, що належать жмутку площин та визначаються рівнянням (5.26).

Означення

Сукупність всіх площин, що проходять через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається *зв'язкою площин* з центром в M_0 .

Рівняння зв'язки з центром у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Розглянемо різні форми рівнянь, якими можна задати пряму у просторі.

Виведемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$, який називається *напрямним* вектором прямої. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка простору.

Побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Точка $M(x, y, z)$ належить даній прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{s}$ колінеарні, тобто їхні відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (5.28)$$

Рівняння (5.28) називається *канонічним рівнянням прямої у просторі*. Розглянемо часткові випадки цього рівняння:

1. Якщо $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, то рівняння:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$

визначає пряму, що проходить через початок відліку.

2. Якщо $m = 0$, тоді напрямний вектор $\vec{s} = (0, n, p)$ перпендикулярний до осі OX . Отже, рівняння

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

визначає пряму, що перпендикулярна осі OX .

(Будемо вважати, що якщо один із знаменників рівняння (5.28) дорівнює нулю, то відповідний чисельник також дорівнює нулю. Тобто з співвідношення $\frac{x-x_0}{0}$ випливає, що $x - x_0 = 0$ або $x = x_0$)

3. Якщо $n = 0$, тоді напрямний вектор $\vec{s} = (m, 0, p)$ перпендикулярний до осі OY . Отже, рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$$

визначає пряму, що перпендикулярна осі OY .

4. Якщо $p = 0$, тоді напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, 0)$ перпендикулярний до осі OZ . Отже, рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{0}$$

визначає пряму, що перпендикулярна осі OZ .

5. Якщо $m = n = 0$ або $m = p = 0$ або $n = p = 0$, то рівняння (5.28) визначає прямі, що паралельні осям OZ , OY , OX , відповідно.

Введемо у рівнянні (5.28) коефіцієнт пропорційності $t, -\infty < t < +\infty$.
Тоді

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (5.29)$$

Рівняння (5.22) називається *параметричним рівнянням прямої*.

Раніше згадувалося, що пряму лінію в просторі можна задати як перетин двох різних непаралельних площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Отже, система (5.30) визначає пряму лінію у просторі і називається *загальним рівнянням прямої у просторі*.

Покажемо як пряму, що задана загальним рівнянням (5.30) звести до канонічного вигляду (5.29). Для цього достатньо знайти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить прямій (5.30) та визначити координати напрямного вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ цієї прямої. Щоб знайти координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ одну з координат, наприклад x_0 виберемо довільно, а дві інші визначимо з системи (5.30).

Оскільки вектори нормалі $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ перпендикулярні до прямої (5.30), то за напрямний вектор прямої можна вибрати вектор

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Звідки } \vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

Тоді канонічне рівняння прямої матиме вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad (5.31)$$

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка, що належить прямій. Побудуємо вектори $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ та $\vec{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. З умови паралельності векторів $\vec{M_1M_2}$ та $\vec{M_1M}$ одержимо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (5.32)$$

Рівняння (5.25) називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

Розглянемо взаємне розташування прямих у просторі.
Нехай дві прямі у просторі задані канонічними рівняннями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (5.33)$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (5.34)$$

Тоді задача визначення кута між цими прямими зводиться до визначення кута φ між їхніми напрямними векторами.

Умова колінеарності прямих:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Умова ортогональності прямих:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Rightarrow (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0 \Rightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Прямі перетинаються під кутом φ , який визначається формулою

$$\cos(\varphi) = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{(m_1)^2 + (n_1)^2 + (p_1)^2} \sqrt{(m_2)^2 + (n_2)^2 + (p_2)^2}}$$

Отже, дві прямі L_1 та L_2 у просторі можуть:

1. перетинатися (як частковий випадок, бути перпендикулярними);
2. бути паралельними;
3. бути мимобіжними.

В перших двох випадках прямі L_1 та L_2 лежать в одній площині.

Визначимо умову належності двох прямих одній площині. Нехай прямі задані канонічними рівняннями (5.33) та (5.34).

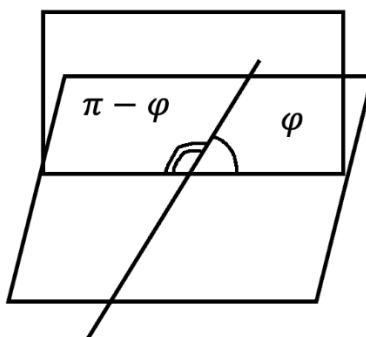


Рис. 5.6.

Прямі L_1 та L_2 будуть лежати в одній площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ компланарні, тобто змішаний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) = 0,$$

або у координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.35)$$

(5.35) – умова належності двох прямих одній площині.

Якщо умова (5.35) порушується, то прямі не належать одній площині, отже, вони **мимобіжні**.

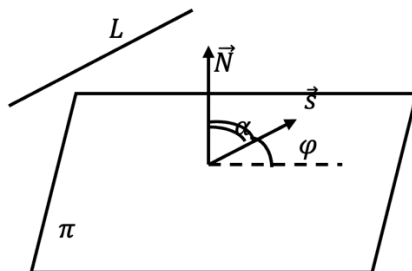


Рис. 5.7

Означення

Кутом між прямою та площиною називається один із суміжних кутів φ або $\pi - \varphi$, що утворює дана пряма з її проекцією на цю площину (рис. 5.7).

Означення

Проекцією прямої на площину називається пряма, що утворена перетином даної площини з площиною, що проходить через дану пряму, перпендикулярно до даної площини (рис. 5.4).

Нехай площина π та пряма L задані відповідно рівняннями:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ \frac{x - x_0}{m} &= \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{aligned}$$

Оскільки кут φ між прямою L та площиною π є доповнюючим до кута α між напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$ прямої L та вектором нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$ площини π , то згідно визначення скалярного добутку:

$$(\vec{s} \cdot \vec{N}) = |\vec{s}| \cdot |\vec{N}| \cdot \cos \alpha,$$

а також враховуючи, що $\cos \alpha = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$,

одержимо наступну формулу для визначення кута φ між прямою L та площиною π :

$$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Умова паралельності прямої L та площини π еквівалентна умові перпендикулярності векторів $\vec{N}$ та $\vec{s}$ і виражається рівністю нулю їх скалярного добутку, отже:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої L та площини π еквівалентна умові паралельності векторів $\vec{N}$ та $\vec{s}$ і виражається пропорційністю координат цих векторів:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Умова належності прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ виражається наступними рівностями:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Am + Bn + Cp = 0 \end{cases},$$

перша з яких означає, що точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить площині, а друга є умовою паралельності прямої і площини.

Знайдемо відстань від точки до прямої у просторі.

Нехай задана пряма (5.28) та точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 5.8). Відстань від точки до прямої – це довжина перпендикуляра проведеного з точки на цю пряму.

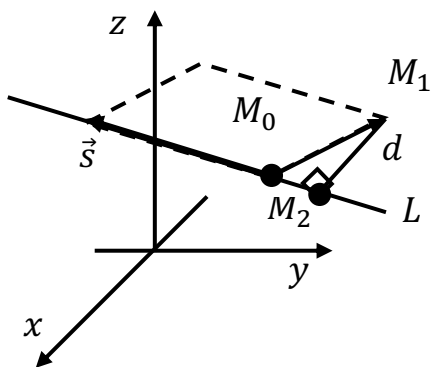


Рис. 5.8 Відстань від точки до прямої

Розглянемо паралелограм побудований на векторах $\vec{s} = (m, n, p)$ та $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Висота цього паралелограма $d = M_1M_2$ це перпендикуляр, проведений з точки M_1 на дану пряму.

Знайдемо площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{s}$ та $\overrightarrow{M_0M_1}$:

$$S = |[\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}]|$$

З геометричних міркувань: $S = |\vec{s}| \cdot d$

Отже, $|\vec{s}| \cdot d = |[\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}]|$

$$d = \frac{|[\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}]|}{|\vec{s}|} = |[\vec{s}_0 \times \overrightarrow{M_0M_1}]|,$$

де $\vec{s}_0$ – орт вектора $\vec{s}$.

Означення

Дві прямі у просторі називаються *мимобіжними*, якщо вони не паралельні і не перетинаються.

Через дві мимобіжні прямі можна провести тільки дві паралельні між собою площини. Відстань між цими площинами є *найкоротша відстань* між даними прямими.

Нехай дві мимобіжні прямі задані рівняннями (5.33) та (5.34) і потрібно знайти відстань між ними d .

Найкоротша відстань між заданими прямими дорівнює довжині відрізка спільного перпендикуляра до цих прямих (рис. 5.9).

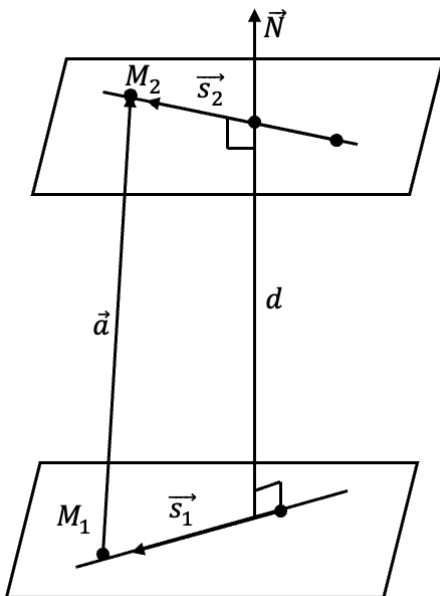


Рис. 5.9 Найкоротша відстань між прямими

Векторний добуток напрямних векторів $\vec{s}_2$ та $\vec{s}_1$ є вектор, який перпендикулярний до кожної із заданих прямих:

$$\vec{N} = [\vec{s}_1 \times \vec{s}_2]$$

Побудуємо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, що з'єднує задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Тоді шукана відстань дорівнює модулю проекції вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{N}$:

$$d = |pr_{\vec{N}} \vec{a}| = \left| \frac{(\vec{a} \cdot \vec{N})}{|\vec{N}|} \right|$$

або

$$d = \frac{|\vec{a} \cdot [\vec{s}_1 \times \vec{s}_2]|}{|[\vec{s}_1 \times \vec{s}_2]|}$$

Означення

Сукупність всіх прямих, що проходять через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається *зв'язкою прямих* з центром у точці M_0 .

Рівняння зв'язки має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

Де m, n, p – довільні числа ($m^2 + n^2 + p^2 \neq 0$).

Контрольні запитання:

1. Наведіть різні форми площини.
2. Що таке неповне рівняння площини?
3. Яка умова перетину площин в одній і тільки одній точці?
4. Як визначити відстань від точки до площини?
5. Наведіть різні форми рівняння прямої у просторі.
6. Що таке відстань між мимобіжними прямими?
7. Що таке зв'язка площин та зв'язка прямих?

Завдання для самостійної роботи:

1. Знаходження бісектральних площин двогранного кута, утвореного двома заданими площинами.
2. Визначення розташування двох заданих точок A та B відносно двогранних кутів, утворених заданими площинами.

Література: [1], с. 150-154.

5.3. Поверхні другого порядку

Загальним рівнянням поверхні другого порядку називається рівняння виду:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0$$

в якому хоча б один із коефіцієнтів a_{11} , a_{22} , a_{33} , a_{12} , a_{13} , a_{23} відмінний від нуля.

Рівняння $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0$ визначає просту циліндричну поверхню з напрямною

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

та твірними, що паралельні осі OZ .

Циліндричні поверхні, у яких твірні паралельні координатним осям називаються *простими циліндричними поверхнями*.

Циліндричні поверхні, у яких напрямні є лініями другого порядку називаються *циліндричними поверхнями другого порядку*.

До них належать:

1. Круговий циліндр (напрямна – коло):

$$x^2 + y^2 = R^2$$

2. Еліптичний циліндр (напрямна – еліпс)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (рис. 5.10а)}$$

3. Гіперболічний циліндр (напрямна – гіпербола)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (рис. 5.10б)}$$

4. Параболічний циліндр (напрямна – парабола)

$$y^2 = 2px \text{ (рис. 5.10в)}$$

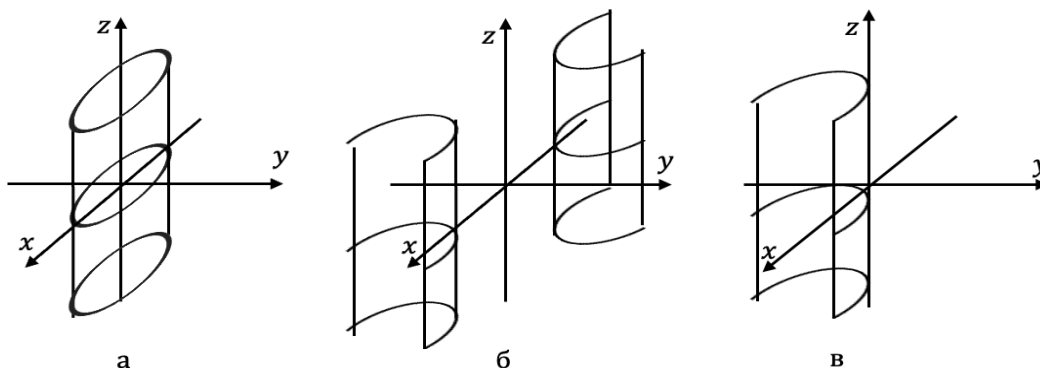


Рис. 5.10 Циліндричні поверхні другого порядку

Означення

Поверхнею обертання називається поверхня, що утворена обертанням кривої навколо прямої, яка лежить в одній площині з кривою.

Нехай у площині YOZ задана крива:

$$\begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad (5.36)$$

яка обертається навколо осі ординат (рис. 5.11).

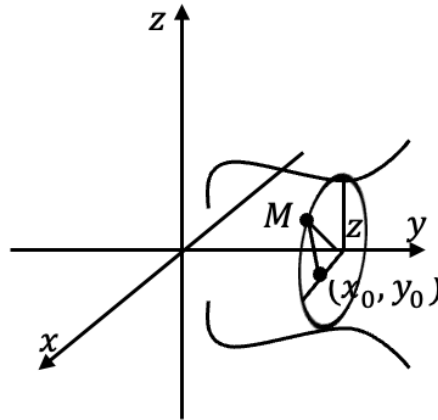


Рис. 5.11 Тіло обертання навколо осі ординат

Складемо рівняння утвореної поверхні обертання. Розглянемо довільну точку поверхні обертання $M(x_0, y_0, z_0)$. Під час обертання точка M опише коло з центром на осі ординат, що перпендикулярне до цієї осі. Ордината довільної точки кола дорівнює відповідній ординаті кривої.

$$y_0 = y, \quad (5.37)$$

а для інших координат виконується:

$$(x_0)^2 + (z_0)^2 = z^2 \quad (5.38)$$

Підставивши (5.37) та (5.38) у (5.36) одержимо рівняння поверхні обертання:

$$F(y_0, \pm\sqrt{(x_0)^2 + (z_0)^2}) = 0 \quad (5.38a)$$

Отже, щоб одержати рівняння поверхні обертання кривої навколо деякої координатної осі, потрібно у рівнянні кривої залишити без змін координату, що відповідає осі обертання, а іншу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.

Приклад

Знайти рівняння поверхні, що утворена обертанням прямої $z = y$ навколо осі абсцис (рис. 5.12).

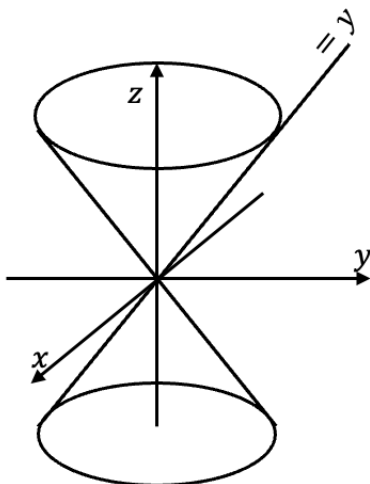


Рис. 5.12 Тіло обертання навколо осі аплікат

Розв'язання:

Зробимо у рівнянні прямої заміну $z = Z$ та $y = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}$. Тоді

$$Z = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}$$

або

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 0 \quad (5.39)$$

Рівняння (5.39) визначає *круговий конус* з вершиною у початку відліку.

Розглянемо поверхні, які утворені обертанням кривих другого порядку навколо своїх осей.

Еліпсоїд обертання. Нехай еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, розташований у площині XOY обертається навколо осі OX або OY . Складемо рівняння поверхні обертання, яка називається *еліпсоїдом обертання*. Для цього у даному рівнянні необхідно виконати заміну згідно (5.38a). Одержимо рівняння еліпсоїда обертання навколо осі OX :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1,$$

або навколо осі OY :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{a^2} = 1$$

Гіперболоїд обертання. Нехай гіпербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ обертається навколо осі OZ . Складемо рівняння поверхні обертання, зробивши в заданому рівнянні заміну $z = Z$ та $y = \pm\sqrt{X^2 + Y^2}$. Тоді одержимо рівняння *однопорожнинного гіперболоїда обертання*:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Якщо гіперболу обертати навколо осі OY , то одержимо рівняння двопорожнинного гіперboloїда обертання:

$$\frac{x^2+z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Параболоїд обертання. Нехай парабола $y^2 = 2pz$, $p > 0$ обертається навколо осі OZ . Тоді рівняння:

$$\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$$

визначає поверхню, яка називається *параболоїдом обертання*.

Розглянемо канонічні рівняння поверхонь другого порядку.

Трьохосним еліпсоїдом називається поверхня, що задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5.40)$$

З рівняння (5.40) випливає, що початок відріку є центром симетрії еліпсоїда, а координатні площини – площинами симетрії еліпсоїда (рис. 5.13).

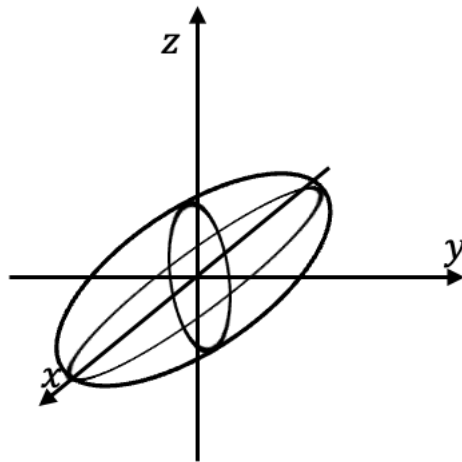


Рис. 5.13 Трьохосний еліпсоїд

Числа a, b, c називаються півосями еліпсоїда, вони є відрізками від початку відріку до точок перетину еліпсоїда з координатними осями. Еліпсоїд – це поверхня, обмежена паралелепіпедом: $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$. Розглянемо лінію перетину еліпсоїда з площиною $z = h$, що паралельна площині XOY . Для цього покладемо у рівнянні (5.40) $z = h$ і одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

або

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1, \quad (5.41)$$

$$\text{де } a^* = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, b^* = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Рівняння (5.41) визначає еліпс з півосями a^* та b^* .

Еліпсоїд можна одержати рівномірним стисненням сфери відносно двох перпендикулярних площин.

Еліпсоїд обертання – це частковий випадок трьохосного еліпсоїда, коли будь-які його дві півосі співпадають.

Однопорожнинним гіперболоїдом (рис. 5.14), називається поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5.42)$$

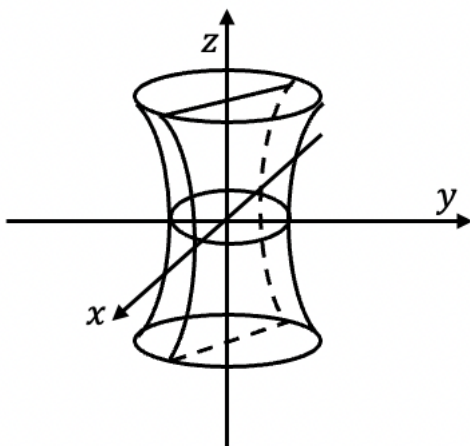


Рис. 5.14 Однопорожнинний гіперболоїд

З рівняння (5.42) випливає, що початок відліку є центром симетрії гіперболоїда, а координатні площини є площинами симетрії.

Розглянемо лінію перетину однопорожнинного гіперболоїда з площиною $z = h$. Для цього покладемо у рівнянні (5.42) $z = h$ і одержимо:

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1, \quad (5.43)$$

$$\text{де } a^* = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, b^* = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

Рівняння (5.43) визначає еліпс з півосями a^* та b^* .

Перетином однопорожнинного гіперболоїда площинами XOZ та YOZ є гіперболи.

Розглянемо *двопорожнинний гіперболоїд* (рис. 5.15), канонічне рівняння якого має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (5.44)$$

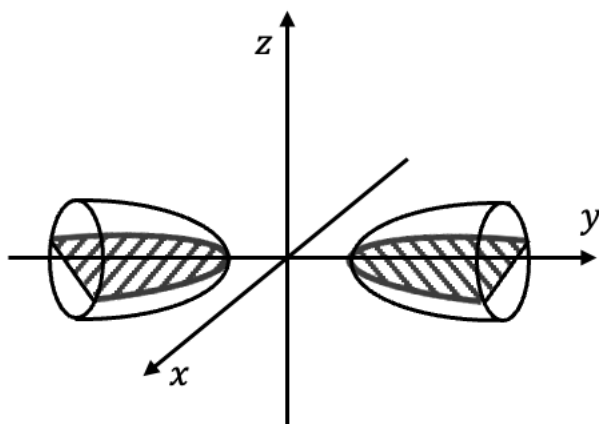


Рис. 5.15 Двопорожнинний гіперболоїд

З рівняння (5.44) випливає, що початок відліку є центром симетрії гіперболоїда, а координатні площини є площинами симетрії.

Лінією перетину двопорожнинного гіперболоїда площиною $z = h$, коли $|h| \geq b$, є еліпс, що задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{z^2}{(c^*)^2} = 1$$

$$\text{Де } a^* = a \sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}, c^* = c \sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}.$$

Канонічне рівняння *еліптичного параболоїда* (рис. 5.16) має вигляд:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (5.45)$$

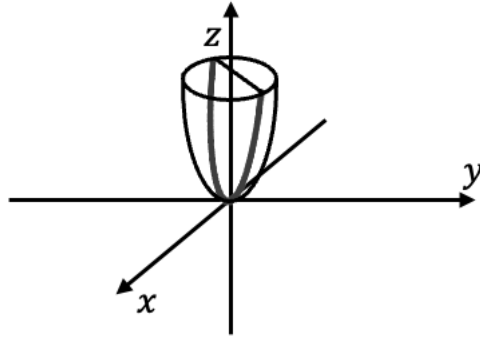


Рис. 5.16 Еліптичний параболоїд

Площини XOZ та YOZ є площинами симетрії параболоїда, вісь OZ його віссю.

З рівняння (5.45) випливає, що еліптичний параболоїд розташований в півпросторі $z \geq 0$.

Лінією перетину параболоїда з площиною $z = h$ є еліпс, що визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1,$$

де $a^* = a\sqrt{h}$, $b^* = b\sqrt{h}$.

Площини $x = h$ та $y = h$ перетинають еліптичний параболоїд по параболам.

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка у деякій ПДСК визначається рівнянням:

$$z = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}, a > 0, b > 0 \quad (5.46)$$

Дана поверхня симетрична відносно площин XOZ, YOZ та осі OZ , проходить через початок координат (рис. 5.17).

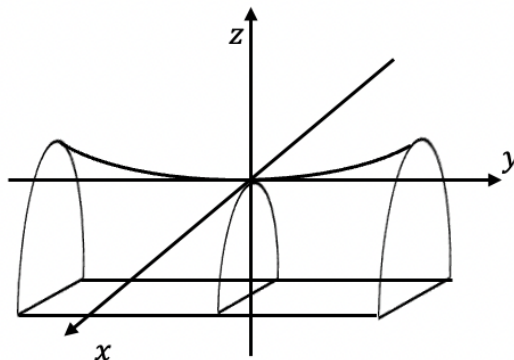


Рис. 5.17 Гіперболічний параболоїд

Дослідимо перерізи поверхні площинами виду $z = h$. Якщо $z = 0$, то з рівняння (5.46) одержимо,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

Це означає, що поверхня перетинає площину XOY по двох прямих, що перетинаються у початку відліку. Якщо $h \neq 0$, то в перерізах одержуємо гіперболи однакової форми.

Площини виду $y = p$ перетинають поверхню по параболах:

$$\begin{cases} z = \frac{p^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} \\ y = p \end{cases}$$

вітки яких напрямлені вниз, а вершини зміщуються вгору при зростанні $|p|$.

Площини виду $x = s$ перетинають поверхню по параболах:

$$\begin{cases} z = \frac{y^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} \\ x = s \end{cases}$$

вітки яких напрямлені вгору, а вершини зміщуються вгору при зростанні $|s|$.

Контрольні питання:

1. Наведіть приклади циліндричних поверхонь другого порядку.
2. Що називають поверхнею обертання?
3. Правила побудови еліпсоїда.
4. Як побудувати однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїд?
5. Як побудувати еліптичний та гіперболічний параболоїд?

Завдання для самостійної роботи:

1. Параметричні рівняння поверхонь.

Література: [6], с. 39-41.

6. Лінійні оператори в евклідових та унітарних просторах

6.1. Спряжений, самоспряжений та унітарний оператори

Нехай $\mathcal{A}$ – лінійний оператор, що діє в скінченновимірному евклідовому просторі E_n .

Означення

Оператор $\mathcal{A}^*$, що діє з E_n у E_n називається *спряженим* до лінійного оператора $\mathcal{A}$, якщо для будь-яких $x, y \in E_n$ виконується співвідношення $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$.

Оператор $\mathcal{A}^*$ є лінійним оператором. Дійсно для $\forall x, y_1, y_2 \in E_n$ та $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливо:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}x, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \bar{\alpha}(\mathcal{A}x, y_1) + \bar{\beta}(\mathcal{A}x, y_2) = \bar{\alpha}(x, \mathcal{A}^*y_1) + \bar{\beta}(x, \mathcal{A}^*y_2) \\ &= (x, \mathcal{A}^*(\alpha y_1 + \beta y_2))\end{aligned}$$

Теорема 6.1

Для кожного лінійного оператора $\mathcal{A}$ існує єдиний спряжений оператор, крім того матриця спряженого оператора в ортонормованому базисі пов'язана з матрицею оператора $\mathcal{A}$ операціями транспонування та комплексного спряження, тобто $A^* = \bar{A}^T$ (риска означає, що всі елементи матриці замінюються на комплексно спряжені)

В довільному (неортонормованому) базисі матриці спряжених операторів пов'язані співвідношенням: $\bar{A}^T \Gamma = \Gamma A^*$ або $A^* = \Gamma^{-1} \bar{A}^T \Gamma$, де Γ – матриця Грама.

Властивості спряжених операторів

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
2. $(\alpha \mathcal{A})^* = \bar{\alpha} \mathcal{A}^*$
3. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$

Доведемо ці властивості для $\forall x, y \in E_n, \alpha \in \mathbb{C}$

1. $((\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x, y) = (\mathcal{A}x, y) + (\mathcal{B}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) + (x, \mathcal{B}^*y) = (x, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)y) = (x, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^*y)$
2. $((\alpha \mathcal{A})x, y) = (x, (\alpha \mathcal{A})^*y) = (\alpha \mathcal{A}x, y) = \alpha(\mathcal{A}x, y) = \alpha(x, \mathcal{A}^*y) = (x, \bar{\alpha} \mathcal{A}^*y)$
3. $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) = \overline{(\mathcal{A}^*y, x)} = \overline{(y, (\mathcal{A}^*)^*x)} = ((\mathcal{A}^*)^*x, y)$

$$4. (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*(\mathcal{A}^*y)) = (x, (\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*)y) = (x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^*y)$$

Означення

Лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з E_n у E_n називається *самоспряженим*, якщо $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, тобто для будь-яких $x, y \in E_n$ виконується співвідношення $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$

Тотожний оператор є самоспряженим. Самоспряжений оператор ще називають *ермітовим*.

Теорема 6.2

У довільному ортонормованому базисі оператор $\mathcal{A}$, що діє у дійсному евклідовому просторі буде самоспряженим тоді і тільки тоді, коли його матриця A буде симетричною.

У випадку дійсного евклідового простору самоспряжений оператор також називається *симетричним оператором*.

Теорема 6.3

Для того, щоб добуток $\mathcal{A}\mathcal{B}$ самоспряжених операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ був самоспряженим оператором, необхідно і достатньо, щоб вони комутували.

Доведення:

Так як $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ - самоспряжені оператори, то для них справедливо $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{A}$. Отже, якщо $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$, то $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{A}\mathcal{B}$, тобто $\mathcal{A}\mathcal{B}$ - самоспряжений. Якщо ж $\mathcal{A}\mathcal{B}$ - самоспряжений оператор, то $\mathcal{A}\mathcal{B} = (\mathcal{A}\mathcal{B})^*$ і тоді $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$. ■

Теорема 6.4

Якщо оператор $\mathcal{A}$ самоспряжений, то для $\forall x \in E_n$ скалярний добуток $(\mathcal{A}x, x)$ є дійсним числом.

Доведення:

$$(\mathcal{A}x, x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)} = \overline{(x, \mathcal{A}x)} = (x, \mathcal{A}x) \quad \blacksquare$$

Теорема 6.5

Власні числа самоспряженого оператора *дійсні*.

Доведення:

Нехай λ – власне число самоспряженого оператора $\mathcal{A}$. За визначенням власного числа оператора $\mathcal{A}$ існує такий ненульовий вектор x , що $\mathcal{A}x = \lambda x$.

Тоді:

$$(\mathcal{A}x, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2$$

Оскільки $(\mathcal{A}x, x)$ та $\|x\|^2$ дійсні числа, то і λ також є дійсним числом. ■

Теорема 6.6

Якщо $\mathcal{A}$ – самоспряжений оператор, то власні вектори, що відповідають різним власним числам цього оператора, *ортогональні*.

Доведення:

Нехай λ_1 та λ_2 – різні власні числа ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) самоспряженого оператора $\mathcal{A}$, а x_1 та x_2 – відповідні їм власні вектори. Тоді:

$$\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$$

Таким чином:

$$(\mathcal{A}x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2) \quad (6.1)$$

$$(x_1, \mathcal{A}x_2) = \lambda_2(x_1, x_2) \quad (6.2)$$

Віднімемо від (6.2) рівняння (6.1) та одержимо

$$(x_1, \mathcal{A}x_2) - (\mathcal{A}x_1, x_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)(x_1, x_2) \quad (6.3)$$

Оскільки оператор $\mathcal{A}$ самоспряжений, то ліва частина рівняння (6.3) дорівнює нулю. Отже,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(x_1, x_2) = 0$$

і так як $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(x_1, x_2) = 0$.

Отже, вектори x_1 та x_2 ортогональні. ■

Означення

Лінійний оператор U , що діє з E_n у E_n називається *унітарним*, якщо для довільних x та y з E_n виконується:

$$(Ux, Uy) = (x, y) \quad (6.4)$$

(6.4) називають *умовою унітарності оператора*.

Оператори евклідового простору з такою властивістю називаються *ортогональними*.

Означення

У дійсному евклідовому просторі квадратна матриця Q називається *ортогональною*, якщо $Q^T Q = E$ ($Q^T = Q^{-1}$). Ортогональні матриці задають перетворення простору, які не змінюють форму геометричних фігур.

Властивості унітарного оператора

1. Унітарний оператор зберігає скалярний добуток.
2. Унітарний оператор зберігає довжину вектора.
3. Визначник матриці ортогонального оператора дорівнює 1 або -1.

4. Добуток двох унітарних операторів є унітарним.

Теорема 6.7

Для того, щоб лінійний оператор $\mathcal{A}: E_n \rightarrow E_n$ був *унітарним* необхідно і достатньо, щоб цей оператор переводив будь-який ортонормований базис в ортонормований.

Доведення:

Необхідність

Нехай $\mathcal{A}$ – унітарний оператор, а $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис простору E_n . Тоді:

$$(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1; & i \neq j; & i, j = \overline{1, n} \\ 0; & i = j; & i, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

А це означає, що система векторів $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots, \mathcal{A}e_n$ – ортонормована.

Достатність

Нехай лінійний оператор $\mathcal{A}$ переводить ортонормований базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в ортонормований $e_1' = \mathcal{A}e_1, e_2' = \mathcal{A}e_2, \dots, e_n' = \mathcal{A}e_n$.

Тоді, якщо

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\ y &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n \end{aligned}$$

то:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= x_1 \mathcal{A}e_1 + x_2 \mathcal{A}e_2 + \dots + x_n \mathcal{A}e_n = x_1 e_1' + x_2 e_2' + \dots + x_n e_n' \\ \mathcal{A}y &= y_1 \mathcal{A}e_1 + y_2 \mathcal{A}e_2 + \dots + y_n \mathcal{A}e_n = y_1 e_1' + y_2 e_2' + \dots + y_n e_n' \\ (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = (x, y) \end{aligned}$$

Отже, оператор $\mathcal{A}$ – унітарний. ■

Теорема 6.8

Для того, щоб лінійний оператор U був *унітарним*, необхідно і достатньо, щоб виконувалося співвідношення:

$$U^* = U^{-1} \tag{6.5}$$

Доведення:

Необхідність

Нехай U – унітарний оператор, тобто виконується умова (6.4). Тоді

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y) \Rightarrow (x, (U^*U - I)y) = 0$$

Вважаючи x довільним, одержимо:

$$(U^*U - I)y = 0$$

Отже, $U^*U = I$. Аналогічно, можна переконатися $UU^* = I$. Отже, U та U^* – взаємно обернені оператори, тобто $U^* = U^{-1}$.

Достатність

Нехай виконується умова (6.5). Тоді очевидно, що $U^*U = UU^* = I$. За властивістю спряженого оператора, для довільних x та y , одержимо:

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, Iy) = (x, y)$$

Отже, умова (6.4) виконується. Таким чином, U – унітарний оператор. ■

Наслідок

Умова (6.4) унітарності оператора еквівалентна наступній:

$$U^*U = UU^* = I \quad (6.6)$$

Означення

Лінійний оператор $\mathcal{A}$ називається *нормальним*, якщо справедливо $A^*A = AA^*$

Отже, довільний унітарний оператор є нормальним оператором.

Теорема 6.9

Нормальний оператор U є *унітарним* тоді і тільки тоді, коли всі його власні числа по модулю дорівнюють одиниці.

Доведення:

Необхідність

Нехай U – унітарний оператор. Виберемо будь-яке його власне число λ та відповідний йому нормований власний вектор x . Тоді:

$$1 = (x, x) = (x, U^*Ux) = (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \bar{\lambda} (x, x) = |\lambda|^2$$

Достатність

Нехай всі власні числа нормального оператора U по модулю дорівнюють одиниці. Позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_m$ ортонормовані власні вектори оператора U , а через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – його власні числа. За умовою $|\lambda_i| = 1$ для всіх i . Крім того $Ux_i = \lambda_i x_i$; $U^*x_i = \bar{\lambda}_i x_i$; $i = \overline{1, m}$

Розкладемо довільний вектор x по власним векторам оператора U .

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$$

Тоді:

$$\begin{aligned} U^*Ux &= U^*(Ux) = U^*(\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m x_m) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \bar{\lambda}_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 \bar{\lambda}_2 x_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m \bar{\lambda}_m x_m \\ &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \end{aligned}$$

Оскільки x – довільний вектор, то $U^*U = I$. Аналогічно доводиться, що $UU^* = I$. Отже, оператор U – унітарний оператор. ■

Нехай X – унітарний простір.

Означення

Базис $y_1, y_2, \dots, y_m$ унітарного простору X називається *двоїстим* по відношенню до базису $x_1, x_2, \dots, x_m$ того ж простору, якщо:

$$(x_i, y_j) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j \\ 1, & \text{якщо } i = j \end{cases}$$

Будь-який базис має двоїстий і причому тільки один.

Базис буде двоїстим сам до себе, якщо він ортонормований. Взаємно двоїсті базиси називаються *біортонормованими*.

Теорема 6.10

Якщо в деякому базисі оператор $\mathcal{A}$ має матрицю J , то у двоїстому базисі, спряжений оператор $\mathcal{A}^*$ має матрицю $J^* = \overline{J^T}$.

Доведення:

Нехай в ортонормованому базисі $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{A}^*$ мають відповідно матриці A_e та A_e^* , а в базисі $x_1, x_2, \dots, x_m$ оператор $\mathcal{A}$ має матрицю J . Нехай T – матриця переходу від базису $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ до базису $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Тоді справедливо:

$$J = T^{-1} A_e T \quad (6.7)$$

Беручи спряження від лівої та правої частини (6.7) одержимо:

$$J^* = (T^{-1} A_e T)^* = (A_e T)^* (T^{-1})^* = T^* A_e^* (T^{-1})^*$$

або

$$J^* = ((T^{-1})^*)^{-1} A_e^* (T^{-1})^* \quad (6.8)$$

З (6.8) випливає, що спряжений оператор $\mathcal{A}^*$ має матрицю J^* у базисі $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ для якого матрицею переходу є $(T^{-1})^*$.

Оскільки $(x, y) = X^T \bar{Y}$, то обчислення попарних скалярних добутків векторів з базису $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ та векторів з базису $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ рівносильне обчисленню елементів матриці $T^T \overline{(T^{-1})^*}$:

$$T^T \overline{(T^{-1})^*} = T^T \overline{(T^{-1})^T} = T^T (T^{-1})^T = (T \cdot T^{-1})^T = E$$

Отже, базис $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ є двоїстим до базису $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. ■

Наслідок

Якщо $\mathcal{A}$ – оператор простої структури, то спряжений оператор $\mathcal{A}^*$ також є оператором простої структури. Крім того, базисні системи власних векторів операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{A}^*$ можна вибрати так, щоб вони були біортонормованими.

Контрольні питання:

1. Які властивості спряженого оператора?
2. Які властивості унітарного оператора?
3. Який базис називається двоїстим?

Завдання для самостійної роботи:

1. Теорема про побудову ортогонального оператора.
2. Ізоморфізми евкладових та унітарних просторів.

Література: [2], с. 247-255; [3], с. 132-142.

6.2. Спектральний розклад самоспряженого оператора

Розглянемо самоспряжений оператор $\mathcal{A}$ та його власні значення $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Нехай $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора $\mathcal{A}$. Для $x \in E_n$ справедливо:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (6.9)$$

Помножимо (6.9) скалярно на e_1 та одержимо $(e_1, x) = x_1$

Отже,

$$x = (e_1, x)e_1 + (e_2, x)e_2 + \dots + (e_n, x)e_n = \sum_{k=1}^n (x, e_k)e_k$$

Оскільки $\mathcal{A}e_k = \lambda_k e_k$, то

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^n (x, e_k)e_k\right) = \sum_{k=1}^n (x, e_k)\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x, e_k)e_k \quad (6.10)$$

Введемо оператор P_k ; що визначається співвідношенням:

$$P_k x = (x, e_k)e_k \quad (6.11)$$

Оператор (6.11) називають *проектором* на одновимірний простір, породжений вектором e_k .

З властивостей скалярного добутку випливає, що P_k – самоспряжений лінійний оператор.

Дійсно,

$$(P_k x, y) = ((x, e_k)e_k, y) = (x, e_k)(e_k, y)$$

$$(x, P_k y) = (x, (y, e_k)e_k) = \overline{(y, e_k)}(x, e_k) = (e_k, y)(x, e_k)$$

Отже, $(P_k x, y) = (x, P_k y)$

Властивості проектора P_k :

1. $P_k^2 = P_k$
2. $P_k P_j = 0$, коли $k \neq j$

Доведення: цих властивостей випливає з співвідношень

$$\begin{aligned} (P_k P_j)x &= P_k(P_j x) = P_k(x, e_j)e_j = (x, e_j)(P_k e_j) = (x, e_j)(e_j, e_k)e_k \\ &= \begin{cases} (x, e_k)e_k, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Відмітимо також, що згідно (6.11) оператор P_k комутує з кожним оператором, що комутує з $\mathcal{A}$. ($\mathcal{A}B = B\mathcal{A} \Rightarrow P_k B = B P_k$)

З (6.10) та (6.11) одержимо:

$$x = \sum_{k=1}^n P_k x \quad (6.12)$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k x \quad (6.13)$$

З (6.12) випливає, що оператор

$$\sum_{k=1}^n P_k$$

є тотожнім

$$I = \sum_{k=1}^n P_k$$

Дійсно,

$$x = \sum_{k=1}^n P_k x = P_1 x + P_2 x + \cdots + P_n x = (P_1 + P_2 + \cdots + P_n) x$$

З (6.13) одержимо спектральний розклад самоспряженого оператора:

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k \quad (6.14)$$

З властивостей проектора P_k та (6.14) випливає, що: (піднести до квадрату (6.14))

$$\mathcal{A}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 P_k$$

Взагалі для довільного $s > 0, s \in \mathbb{Z}$ справедливо:

$$\mathcal{A}^s = \sum_{k=1}^n \lambda_k^s P_k$$

Розглянемо довільний поліном:

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda^i$$

За визначенням

$$p(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{A}^i.$$

Тоді отримаємо формулу (6.15):

$$\begin{aligned} p(\mathcal{A}) &= \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{A}^i = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=1}^n \lambda_k^i P_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_i \lambda_k^i P_k = \sum_{k=1}^n p(\lambda_k) P_k \end{aligned}$$

Теорема Гамільтона-Келі

Якщо $\mathcal{A}$ – самоспряжений оператор та $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ – характеристичний многочлен цього оператора, то $p(\mathcal{A}) = 0$.

Доведення:

Якщо $\mathcal{A}$ – самоспряжений оператор і λ_i – власні числа цього оператора, то вони є коренями характеристичного рівняння, отже $p(\lambda_i) = 0$. Звідси, згідно (6.15) випливає, що $p(\mathcal{A}) = 0$.

Зауваження

Теорема Гамільтона-Келі справедлива для довільної квадратної матриці.

Контрольні питання

1. Наведіть властивості спряжених операторів.
2. Дайте визначення унітарного оператора.
3. Яка необхідна та достатня умова унітарного оператора?
4. Дайте визначення двоїстого базису.
5. Що таке спектральний розклад самоспряженого оператора?

Завдання для самостійної роботи

1. Властивості ортогональних матриць.
2. Розклад довільного оператора.
3. Формально спряжені диференційні оператори.

Література: [2], с. 255-260; [3], с. 142-145.

7. Квадратичні форми

7.1. Білінійні та квадратичні форми

Розглянемо довільний n – вимірний дійсний евклідовий простір E_n .

Означення

Числова функція $B(x, y)$ називається *білінійною формою*, заданою на E_n , якщо для $\forall x, y \in E_n$ та $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення:

$$B(x + z, y) = B(x, y) + B(z, y)$$

$$B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$$

$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$$

$$B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$$

Легко пересвідчитись, що білінійну форму можна подати у вигляді:

$$B(x, y) = (Ax, y) \quad (7.1)$$

Якщо в лінійному просторі E_n зафіксувати базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, то

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

Тоді білінійна форма може бути записана у вигляді:

$$B(x, y) = B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j)$$

Позначимо $B(e_i, e_j) = b_{ij}$

Тоді

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j \quad (7.2)$$

Матриця $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ називається матрицею білінійної

форми в заданому базисі. Формула (7.2) у матричній формі має вигляд:

$$B(x, y) = X^T B Y, \quad (7.3)$$

де $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Розглянемо у лінійному просторі E_n два базиса $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ та $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Нехай $B_e = \{b_{ij}\}$ та $B_f = \{b'_{ij}\}$ - матриці заданої білінійної форми в вибраних базисах.

Теорема 7.1

Матриці B_e та B_f білінійної форми $B(x, y)$ у базисах e та f пов'язані співвідношенням:

$$B_f = C^T B_e C, \text{ де } C - \text{матриця переходу від базису } e \text{ до базису } f.$$

Доведення:

Згідно (7.3):

$$B(x, y) = X^T B_e Y = (X')^T B_f Y'$$

Оскільки

$$CX' = X, CY' = Y$$

то:

$$B(x, y) = X^T B_e Y = (CX')^T B_e CY' = (X')^T C^T B_e CY'$$

таким чином:

$$B_f = C^T B_e C$$

■

Наслідок

Ранг матриці B_e дорівнює рангу матриці B_f , оскільки ранг матриці не змінюється при множенні її на не вироджену матрицю.

Означення

Білінійна форма $B(x, y)$ називається *симетричною (кососиметричною)*, якщо $\forall x, y \in E_n$ для виконуються співвідношення:

$$B(x, y) = B(y, x) \quad (B(x, y) = -B(y, x))$$

Для базисних векторів:

$$b_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = b_{ji} \quad (b_{ij} = -b_{ji})$$

Отже, матриця симетричної (кососиметричної) білінійної форми буде симетричною (кососиметричною), тобто $B^T = B$ ($B^T = -B$). Очевидно, що для кожної білінійної форми наступні функції

$$B_1(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x))$$

$$B_2(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x))$$

є симетричною та кососиметричною білінійними формами, відповідно.

Оскільки:

$$B(x, y) = B_1(x, y) + B_2(x, y),$$

то справедливе наступне твердження:

Твердження

Довільну білінійну форму можна подати у вигляді суми симетричної та косиметричної білінійної форми. Таке подання єдине.

Теорема 7.2

Для того, щоб білінійна форма $B(x, y)$ задана на E_n , була симетричною, необхідно і достатньо, щоб оператор $\mathcal{A}$ з (7.1) був самоспряженим.

Доведення:

Достатність.

Якщо $\mathcal{A}$ – самоспряжений оператор, то:

$$B(x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) = B(y, x)$$

Отже, білінійна форма симетрична.

Необхідність.

Якщо форма симетрична, тобто

$B(x, y) = B(y, x)$, то

$$(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{A}y, x) = (x, \mathcal{A}y)$$

Отже, оператор $\mathcal{A}$ самоспряжений. ■

Означення

Числова функція, яку можна одержати із симетричної білінійної форми $B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i y_j$, якщо покласти $y = x$ називається *квадратичною формою* $B(x, x)$:

$$B(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = K(x)$$

Якщо враховувати, що $a_{ij} = a_{ji}$, $x_i x_j = x_j x_i$ то квадратичну форму можна записати у вигляді:

$$B(x, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

Отже, квадратична форма – це однорідний многочлен другого степеня відносно координат вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Матриця квадратичної форми у заданому базисі має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратичну форму $K(x)$ можна подати у вигляді:

$$K(x) = X^T A X$$

Приклад

Записати матрицю квадратичної форми:

$$K(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 8x_1x_3 + 6x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Кожній квадратичній формі відповідає симетрична матриця, і навпаки, кожній симетричній матриці можна поставити у відповідність квадратичну форму.

Якщо ранг матриці квадратичної форми дорівнює розмірності простору, то форма називається *невиродженою*, інакше – *виродженою*.

Означення

Квадратична форма $K(x)$ називається:

1) *Додатньо (від'ємно) визначеною*, якщо для $\forall x \neq 0$ виконується:

$$K(x) > 0 \quad (K(x) < 0)$$

2) *Знакозмінною (невизначеною)*, якщо існують такі x, y , що:

$$K(x) > 0, \quad K(y) < 0$$

3) *Квазізнакозмінною*, якщо для $\forall x$:

$$K(x) \geq 0 \text{ або } K(x) \leq 0, \text{ але існує } x \neq 0, \text{ для якого } K(x) = 0.$$

Теорема 7.3

Для того, щоб довільна квадратична форма була додатньо (від'ємно) визначена необхідно і достатньо, щоб всі власні числа матриці квадратичної форми були додатні (від'ємні).

Якщо серед власних чисел хоча б одне дорівнює нулю, то квадратична форма напівдодатньо (напіввід'ємно) визначена. Якщо власні числа мають різні знаки, то квадратична форма невизначена.

Якщо матриця квадратичної форми має діагональний вигляд, то квадратичну форму називають *канонічною*. Напрямки в яких квадратична форма є канонічною називають *головними осями*.

Канонічна форма називається *нормальною*, якщо діагональні елементи її матриці дорівнюють 0, 1 або -1.

Контрольні питання:

1. Дайте означення білінійної форми.
2. Як пов'язані матриці білінійної форми у різних базисах?
3. Дайте означення квадратичної форми.
4. Дайте визначення додатньо визначеної квадратичної форми.
5. Яку квадратичну форму називають канонічною?

Завдання для самостійної роботи

1. Закон інерції квадратичних форм.
2. Полілінійні форми.
3. Геометрія квадратичних форм.
4. Конгруентність та матричні розклади.

Література: [1] с. 213 – 221, [3] с. 155 – 163, [2] с. 312 – 317.

7.2. Приведення квадратичної форми до канонічного виду

Розглянемо різні методи зведення квадратичної форми до суми квадратів, тобто вкажемо методи вибору такого базису $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ у лінійному просторі V відповідно до якого квадратична форма $K(x)$ є канонічною

$$K(x) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \dots + \lambda_n \eta_n^2, \quad (7.4)$$

де $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ – координати вектора x в базисі f .

Коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ називаються канонічними коефіцієнтами.

Матриця канонічної квадратичної форми діагональна:

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Базис, у якому матриця квадратичної форми діагональна, називається *канонічним*.

Розглянемо метод ортогональних перетворень, коли канонічний базис складається з ортонормованих власних векторів матриці A , метод Лагранжа та метод Якобі.

З власних векторів матриці квадратичної форми можна побудувати ортонормований базис. У цьому базисі квадратична форма має канонічний вигляд.

Теорема 7.4

Існує ортогональна матриця $P (P^{-1} = P^T)$, яка зводить симетричну матрицю A до діагонального виду:

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Наслідок

Існує ортогональна заміна змінних $X = PY$, яка зводить квадратичну форму $K(x)$ до канонічного виду.

Дійсно,

$$K(x) = X^TAX = (PY)^TAPY = Y^TP^TAPY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Отже, для зведення квадратичної форми до канонічної форми методом ортогональних перетворень, потрібно:

1. Знайти матрицю A квадратичної форми.
2. Знайти власні числа та відповідні власні вектори матриці A :
 - якщо всі власні числа попарно різні, то нормувати власні вектори;

- якщо є кратні власні числа, то за алгоритмом Грама-Шмідта ортогоналізувати вектори відповідного власного підпростору, а потім нормувати всі власні вектори.
3. Побудувати ортогональну матрицю P , стовпчиками якої є ортонормовані власні вектори.
 4. Записати, якщо необхідно, ортогональну заміну змінних $X = PY$.
 5. Записати в канонічному вигляді квадратичну форму.

Приклад

Знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ до канонічного вигляду.

Розв'язання:

Запишемо матрицю квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо власні числа матриці A :

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$(\lambda - 2)^2(\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_{2,3} = 2.$$

Знайдемо власні вектори матриці A :

$$V_{-4} = \ker(A + 4E) = (x_1 = (1, -2, 1))$$

$$V_2 = \ker(A - 2E) = (x_2 = (-1, 0, 1); x_3 = (2, 1, 0))$$

Ортогоналізуємо вектори x_2 та x_3 :

$$u_1 = x_2$$

$$u_2 = x_3 - \frac{(x_3, x_2)}{(x_2, x_2)} x_2 = (1, 1, 1).$$

Нормуємо вектори x_1, u_1, u_2 :

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$e_2 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$e_3 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Тоді ортогональна матриця переходу матиме вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Відповідне ортогональне перетворення координат матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_2 = \frac{-2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \end{cases}$$

Квадратична форма в координатах y_1, y_2, y_3 набуває вигляду:

$$-4y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$$

Матриця квадратичної форми в ортонормованому базисі дорівнює:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Теорема 7.5 (Метод Лагранжа)

Довільна квадратична форма $K(x)$, визначена у n -вимірному лінійному просторі V , за допомогою *невиродженого* лінійного перетворення координат $X = CY$, ($\det C \neq 0$) може бути зведена до канонічного виду.

Доведення:

Доведемо теорему методом Лагранжа. Основна ідея методу – послідовне доповнення квадратного тричлена по кожному аргументу до повного квадрату. Нехай $a_{11} \neq 0$. Виділимо у $K(x)$ всі доданки, що містять x_1 :

$$\begin{aligned} K(x) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i,j=2}^n a_{ij}x_ix_j = \\ &= a_{11} \left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \dots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n \right) + \dots = \\ &= a_{11} \left[\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 \right] + \dots = \end{aligned}$$

$$= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 - a_{11} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 + \dots =$$

$$= a_{11} y_1^2 + f_2(x_2, \dots, x_n)$$

Продовжуючи аналогічні перетворення для форми $f_2(x_2, \dots, x_n)$ одержимо Доведення: теореми по індукції.

Розглянемо особливі випадки. Якщо $a_{11} = 0$, але $\exists k: a_{kk} \neq 0$, тоді заміна змінних $x_k = u_1, x_1 = u_k$ зводить цей випадок до попереднього. Якщо $a_{11} = \dots = a_{nn} = 0$, але $\exists a_{jk} \neq 0$, тоді підстановка $x_j = u_j + u_k, x_k = u_k$, зводить цей випадок до попереднього. Теорема доведена. ■

Теорема 7.6 (Метод Якобі)

Нехай всі головні мінори матриці A квадратичної форми $K(x)$ відмінні від нуля:

$$M_1 = \det A_1 = a_{11} \neq 0$$

$$M_2 = \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M_n = \det A_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тоді існує єдине трикутне перетворення змінних:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n \\ x_2 = y_2 + \dots + c_{2n}y_n \\ \dots \dots \dots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

або в матричній формі:

$$X = CY, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

яке зводить квадратичну форму $K(x)$ до канонічного виду (**формула Якобі**):

$$y_1^2 \det A_1 + y_2^2 \frac{\det A_2}{\det A_1} + \dots + y_n^2 \frac{\det A}{\det A_{n-1}}$$

Матрицю C знаходимо шляхом перетворення:

$$(A|E) \sim \dots \sim (A'|C^T) \quad (7.5)$$

У (7.5) матрицю A зводять до верхнього трикутного вигляду (матриця A'), C^T – транспонована до матриці C матриця.

Теорема 7.7 (Критерій Сільвестра)

Для того, щоб квадратична форма $K(x)$ була додатнєовизначена необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ ($\Delta_j, j = \overline{1, n}$ – головні мінори матриці квадратичної форми).

Для того, щоб квадратична форма $K(x)$ була від’ємновизначена необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів чередувались, причому $\Delta_1 < 0$.

Доведення:

Необхідність

Доведемо, спочатку, що у знаковизначеній квадратичній формі всі кутові мінори **не** дорівнюють нулеві. Дійсно, нехай для деякого k , $\Delta_k = 0$. Розглянемо наступну однорідну СЛАР:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k = 0. \end{array} \right.$$

Оскільки Δ_k визначник цієї системи і $\Delta_k \neq 0$, то система має ненульовий розв'язок (не всі x_i дорівнюють нулеві). Помножимо перше рівняння системи на x_1 , друге на x_2 , останнє на x_k та додамо одержані рівності. В результаті одержимо рівність:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = 0.$$

Ліва частина цієї рівності – це квадратична форма $K(\mathbf{x})$ для ненульового вектора $\mathbf{x}$ з координатами $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Це значення дорівнює нулю, що протирічить знаковизначеності форми. Отже, $\Delta_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Таким чином, ми можемо застосувати метод Якобі зведення квадратичної форми до канонічного виду.

Якщо $K(x)$ – додатньо визначена форма, то всі канонічні коефіцієнти додатні. Але тоді, з *формул Якобі* випливає, що всі кутові мінори додатні. Аналогічно доводимо, для від’ємно визначеної форми.

Достатність

Нехай виконані умови теореми стосовно кутових мінорів. Оскільки мінори ненульові, то можна застосувати метод Якобі зведення форми до канонічного виду.

З формул Якобі випливає, що для всіх додатніх кутових мінорів всі канонічні коефіцієнти будуть додатні, отже форма $K(x)$ – додатньо визначена. Якщо ж знаки мінорів чередуються, починаючи з від’ємного, то всі канонічні коефіцієнти від’ємні і форма від’ємно визначена. ■

Розглянемо схему зведення поверхонь другого порядку до канонічного виду. Нагадаємо загальне рівняння поверхні другого порядку у прямокутній системі координат:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0 \quad (7.6)$$

Як бачимо рівняння (7.6) містить квадратичну форму:

$$K(x) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad (7.7)$$

та лінійну форму:

$$L(x) = a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z \quad (7.8)$$

Щоб звести рівняння (7.6) до канонічного виду потрібно:

1. Записати матрицю квадратичної форми (7.7) та стовпчик коефіцієнтів лінійної форми (7.8):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix}$$

Якщо матриця квадратичної форми діагональна, тобто:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

то покласти $P = E$ і перейти до кроку 4.

2. Скласти характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ та знайти його корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (з врахуванням кратності).
3. Знайти ортонормовані власні вектори S_1, S_2, S_3 , що відповідають власним числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ та скласти з них матрицю $P = (S_1|S_2|S_3)$.
4. Обчислити стовпчик коефіцієнтів лінійної форми $a' = P^T a$ та скласти рівняння поверхні другого порядку:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + 2a'_{30}z' + a_{00} = 0 \quad (7.9)$$

5. а) Якщо $\lambda_i \neq 0$ та $a'_{i0} \neq 0$, то виділивши у рівнянні (7.9) по кожній змінній повний квадрат (що відповідає паралельному переносу системи координат), вихідне рівняння (7.6) зведеться до канонічного виду.

б) Якщо $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ та $a'_{10} = 0, a'_{20} \neq 0, a'_{30} \neq 0$, тоді рівняння матиме вигляд:

$$\lambda_1(x')^2 + 2a'_{20}y' + 2a'_{30}z' + a_{00} = 0.$$

Щоб звести рівняння до канонічного виду потрібно виконати заміну змінних:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = \frac{1}{\mu} \left(a'_{20}y' + a'_{30}z' + \frac{a_{00}}{2} \right), \\ z'' = \frac{1}{\mu} (-a'_{30}y' + a'_{20}z') \end{cases}$$

$$\text{де } \mu = \sqrt{a_{20}'^2 + a_{30}'^2}.$$

Така ортогональна заміна змінних приведе рівняння до виду:

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu y'' = 0.$$

в) Якщо $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ та $a'_{10} = 0$, $a'_{20} = 0$, $a'_{30} \neq 0$, тоді рівняння матиме вигляд:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{30}z' + a_{00} = 0.$$

Щоб звести рівняння до канонічного виду потрібно виконати заміну змінних:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' + \frac{a_{00}}{2a'_{30}} \end{cases}$$

Така ортогональна заміна змінних приведе рівняння до виду:

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + 2a'_{30}z'' = 0.$$

Канонічне рівняння поверхні другого порядку може мати один з наступних виглядів:

$$1) \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0)$$

$$2) \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + bz = 0, \quad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$$

$$3) \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0, \quad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$$

$$4) \lambda_1 x^2 + by = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

$$5) \lambda_1 x^2 + c = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

З точністю до перестановки змінних поверхні 3-5 циліндричні.

Контрольні питання

1. Які є методи зведення квадратичної форми до канонічного виду?
2. Назвіть основні етапи зведення квадратичної форми до канонічного виду за допомогою ортогонального перетворення змінних.
3. Яка основна ідея методу Лагранжа?
4. Як звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного виду?

Завдання для самостійної роботи

1. Зведення рівняння поверхні другого порядку до канонічного виду за допомогою інваріант.
2. Класифікація поверхонь другого порядку.

Література: [8] с.199 – 210.

Література

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит – 2001 г. – 320 с.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука – 1980 г. – 400 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1. – М.: Физматлит – 2001 г. – 272 с.
4. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. – М.: Мир – 1980 г. – 446 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – Санкт-Петербург-Москва-Краснодар – 2005г. – 431с.
6. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука – 1979 г. – 512 с.
7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука – 1987 г. – 320 с.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит – 2001 г. – 224 с.
9. Зайцев Є.П. Вища математика. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу: навч. посіб. / Є. П. Зайцев. - Київ : Алерта, 2017. - 572 с.
10. Клімова Н.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання : навч. посібник для студ. вищ. навч. закл. / Н. П. Клімова, О.Г. Нерух, О.О. Ремаєва. – Харків: Компанія СМІТ, 2012. - 317 с.
11. Парамонова С.М. Аналітична геометрія та лінійна алгебра : конспект лекцій / С. М. Парамонова, А.Ю. Мальцев. - К. : НТУУ «КПІ», 2007. - 124 с.
12. Марчук Р.А. Курс аналітичної геометрії та лінійної алгебри / Р. А. Марчук. - Хмельницький: ХНУ, 2005. - 255 с.