

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**С. Я. Жук**

# **ТЕХНОЛОГІЇ ОПТИМАЛЬНОГО ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ КУРС ЛЕКЦІЙ**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
за освітньою програмою «Радіотехнічні комп'ютеризовані системи»,  
спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2023

Рецензент

*Лисенко О.І.,* докт. техн. наук, проф. кафедри телекомунікацій,  
НН ІТС, Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Відповідальний  
редактор

*Шарпан О.Б.,* докт. техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 7 від 27.04.2023 р.)  
за поданням Вченої ради радіотехнічного факультету  
(протокол № 04/2023 від 27.03.2023 р.)*

Навчальний посібник забезпечує лекційний курс з дисципліни «Технології оптимального оброблення сигналів». В посібнику викладено основи теорії випадкових процесів та наведено їх математичні моделі, які використовуються в радіотехніці. Розглянуто постановки задач, критерії оптимальності та методи оптимального виявлення, розрізнення, оцінювання невідомих параметрів і фільтрації сигналів в радіотехнічних системах, які дозволяють розробляти алгоритми, що забезпечують ефективне функціонування таких систем в умовах завад. Теоретичні результати ілюстровано прикладами.

Для студентів всіх форм навчання, які навчаються за спеціальністю 172 «Електронні комунікації та радіотехніка». Може бути використаний для навчання студентів за іншими спеціальностями.

Обсяг 10,9 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

© С.Я. Жук  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b>	7
<b>РОЗДІЛ I. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ</b>	9
Лекція 1. Закони розподілу ймовірностей, моментні і кореляційні функції випадкових процесів	9
1.1. Закони розподілу ймовірностей випадкового процесу	9
1.2. Моментні і кореляційні функції випадкового процесу	13
1.3. Стаціонарні випадкові процеси	17
1.4. Ергодичні випадкові процеси	18
Лекція 2. Спектральна щільність потужності ергодичного випадкового процесу	26
2.1. Визначення спектральної щільності потужності ергодичного випадкового процесу	26
2.2. Теорема Вінера-Хінчина	31
2.3. Ефективна ширина спектра та інтервал кореляції	35
2.4. Білий шум та його характеристики	38
Лекція 3. Гаусівський та марківські випадкові процеси	42
3.1. Ймовірнісні характеристики гаусівського випадкового процесу	42
3.2. Властивості гаусівського випадкового процесу	48
3.3. Марківська послідовність	50
3.4. Щільність ймовірності переходу і математична модель гаусівської марківської послідовності	53
Лекція 4. Вплив випадкових процесів на лінійні системи	59
4.1. Постановка задачі аналізу.	59
4.2. Перетворення математичного очікування випадкового процесу	61
4.3. Перетворення кореляційної функції випадкового процесу	62
4.4. Перетворення спектральної щільності лінійним пристроєм в стаціонарному режимі	65
4.5. Диференціювання випадкових процесів	69
4.6. Вплив білого шуму на полосовий вузькосмуговий фільтр	73
Лекція 5. Квазігармонійний випадковий процес	78
5.1. Визначення вузькосмугового випадкового процесу	78

5.2. Ймовірнісні характеристики огинаючої та фази вузькосмугового випадкового процесу	82
5.3. Ймовірнісні характеристики огинаючої та фази суми гармонійного сигналу та вузькосмугового випадкового процесу	87
Лекція 6. Статистичні характеристики сигналів з амплітудною модуляцією	93
6.1. Математична модель модульованого сигналу у вигляді вузькосмугового випадкового процесу	93
6.2. Статистичні характеристики сигналів з амплітудною модуляцією	94
6.3. Особливості сигналів з кутовою модуляцією	101
Лекція 7. Статистичні характеристики сигналів з амплітудною, частотною і фазовою маніпуляцією	105
7.1. Статистичні характеристики сигналів з амплітудною маніпуляцією	105
7.2. Статистичні характеристики сигналів з фазовою маніпуляцією	110
7.3. Статистичні характеристики сигналів з частотною маніпуляцією	112
<b>РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ</b>	118
Лекція 8. Апостеріорна щільність ймовірності і функція правдоподібності переданого повідомлення	118
8.1. Основні задачі теорії оптимального прийому	118
8.2. Апостеріорна щільність ймовірності повідомлення, що передається	122
8.3. Функція правдоподібності в гаусівському каналі	126
Лекція 9. Кореляційний прийом сигналів	134
9.1. Кореляційний інтеграл	134
9.2. Властивості сигнальної функції	136
9.3. Властивості шумової функції	140
Лекція 10. Узгоджена фільтрація сигналів	144
10.1. Еквівалентність кореляційного приймача та узгодженого фільтра.	144

10.2. Сигнальна функція узгодженого фільтра	146
10.3. Передавальна характеристика узгодженого фільтра	148
10.4. ВСШ на виході узгодженого фільтра	152
10.5. ВСШ на виході узгодженого фільтра при використанні широкосмугових сигналів і завад з обмеженою потужністю	153
<b>РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО ВИЯВЛЕННЯ ТА РОЗРІЗНЕННЯ СИГНАЛІВ</b>	160
Лекція 11. Байєсівський критерій оптимального виявлення сигналів	160
11.1. Математичні постановки задач виявлення і розрізнення сигналів	160
11.2. Синтез алгоритмів оптимального виявлення сигналів за байєсівським критерієм оптимальності	162
Лекція 12. Критерії виявлення сигналів	173
12.1. Оптимальне виявлення на основі кореляційного приймача	173
12.2. Виявлення сигналу за критерієм ідеального спостерігача	178
12.3. Виявлення сигналу за критерієм Неймана-Пірсона	181
Лекція 13. Оптимальне розрізнення двійкових сигналів	188
13.1. Синтез оптимального алгоритму розрізнення сигналів	188
13.2. Структурна схема розрізнявача і епюри сигналів	190
13.3. Ймовірність помилки прийому сигналів в двійковому каналі	193
13.4. Потенційна завадозахищеність при прийомі маніпульованих сигналів	196
<b>РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛІВ</b>	200
Лекція 14. Оптимальне оцінювання енергетичних параметрів сигналів	200
14.1. Критерії оцінювання параметрів сигналу	200
14.2. Оцінювання енергетичних параметрів сигналу	206
Лекція 15. Оптимальне оцінювання неенергетичних параметрів сигналів	211
15.1. Алгоритм оцінювання неенергетичних параметрів сигналу	211
15.2. Точність оцінювання неенергетичного параметра сигналу	213
15.3. Дисперсія помилки оцінки частоти радіоімпульсу	220

15.4. Оптимальне оцінювання початкової фази радіоімпульсу	221
<b>РОЗДІЛ 5. МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ СИГНАЛІВ</b>	225
Лекція 16. Марківські моделі повідомлень	225
16.1. Постановка задачі фільтрації сигналів	225
16.2. Марківська модель повідомлення в неперервному часі	228
16.3. Марківська модель повідомлення в дискретному часі	230
Лекція 17. Оптимальна фільтрація скалярного повідомлення в дискретному часі	234
17.1. Оптимальна нелінійна фільтрація скалярного повідомлення в дискретному часі	234
17.2. Оптимальна лінійна фільтрація скалярного повідомлення в дискретному часі	238
Лекція 18. Оптимальна лінійна фільтрація векторного повідомлення в дискретному часі	245
18.1. Багатовимірний фільтр Калмана в дискретному часі	245
18.2. Використання фільтра Калмана для оцінювання параметрів руху цілі	249
18.3. Комплексування вимірювачів	251
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ</b>	258
<b>ДОДАТОК. Розрахунок значень функції Лапласа</b>	259

## Вступ

Сигнали, як переносники інформації, невідомі заздалегідь і можуть інтерпретуватися лише як випадкові процеси. Створювані різними джерелами перешкоди непередбачувані і випадкові за своєю природою. Ці фактори на певному етапі розвитку радіотехніки змусили відмовитися від протиприродного детерміністського підходу до вирішення більшості задач передачі інформації і перейти до статистичного аналізу і синтезу, як основного методу дослідження радіотехнічних пристроїв і систем. В умовах складної заводової обстановки, високошвидкісних інформаційних потоків і автоматизації їх обробки, цей підхід призводить до оптимальних рішень.

Під радіотехнічною системою розуміють сукупність пов'язаних радіопристроїв, призначених для вирішення одного або декількох завдань, об'єднаних спільною метою. Сучасні радіотехнічні системи мають значні обчислювальні можливості і, по-суті, є комп'ютеризованими інформаційно-вимірювальними системами. Радіотехнічна система може функціонувати як самостійно, так і входити в систему більш високого рівня ієрархії – комплекс.

Основна і загальна вимога, яка висувається до будь-якої радіотехнічної системи, полягає в *достовірному і своєчасному отриманні інформації з радіосигналів з обмеженою енергією*. Достовірному прийому інформації щодо реальних радіоканалів заважає ряд небажаних факторів:

- випадковий характер самих випромінюваних сигналів;
- випадкові спотворення радіосигналу при поширенні крізь турбулентне середовище;
- наявність різноманітних ненавмисних і навмисних завод.

Забезпечення основної вимоги радіоприйому зводиться до найкращого виділення корисної інформації зі спотвореного радіосигналу випадкового характеру, прийнятого спільно із заводами. В сучасних умовах, що характеризуються складністю завдань, що вирішуються радіотехнічними системами, і різноманітністю заводової обстановки, розробка досконалих систем можлива лише на базі сучасних методів оптимізації – синтезу.

При синтезі оптимальних приймальних пристроїв вихідними є два положення:

- вибір критерію оптимальності відповідно до фізичного змісту і цілі задачі, що вирішується (найменші помилки прийому, найкраще відтворення переданого повідомлення тощо);

- чітке математичне формулювання задачі (модель), що враховує апріорно відомі характеристики переданого корисного сигналу, радіоканалу, завади, а також їх функціональні взаємодії.

Курс лекцій з дисципліни «Технології оптимального оброблення сигналів» відповідає освітній програмі «Радіотехнічні комп'ютеризовані системи» за спеціальністю 172 «Електронні комунікації та радіотехніка».

**Метою навчальної дисципліни** є вивчення основ теорії випадкових процесів і методів оптимального оброблення сигналів в радіотехнічних комп'ютеризованих системах, які дозволяють розробляти алгоритми, що забезпечують ефективне функціонування таких систем в умовах завад.

**Предметом вивчення** є основи теорії випадкових процесів і методи оптимального виявлення, розрізнення, оцінювання невідомих параметрів і фільтрації сигналів в сучасних радіотехнічних комп'ютеризованих системах.

Дисципліна складається з наступних розділів:

1. Основи теорії випадкових процесів.
2. Основи теорії синтезу оптимальних радіотехнічних систем.
3. Методи оптимального виявлення і розрізнення сигналів.
4. Методи оптимального оцінювання параметрів сигналів.
5. Методи оптимальної фільтрації сигналів.

В результаті рішення задачі оптимізації повинні бути отримані:

- алгоритм роботи оптимального пристрою або його структурна схема;
- кількісні характеристики якості роботи відповідно до прийнятого критерія оптимальності.

Дисципліна «Технології оптимального оброблення сигналів» є основою для вивчення всіх наступних спеціальних дисциплін, в яких розглядаються процеси прийому і обробки сигналів в сучасних радіотехнічних комп'ютеризованих системах різного призначення.

В посібнику прийняті наступні скорочення:

БГШ – білий гаусівський шум;

ВСШ – відношення сигнал/шум;

ЕОМ – електронно-обчислювальна машина;

СКП – середній квадрат похибки;

MAP – Maximum A posterior Probability;

ML – Maximum Likelihood;

AR – A posterior Risk;

MSE – Mean Squared Error.

# РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

## Лекція 1. Закони розподілу ймовірностей, моментні і кореляційні функції випадкових процесів

- 1.1. Закони розподілу ймовірностей випадкового процесу.
- 1.2. Моментні і кореляційні функції випадкового процесу.
- 1.3. Стаціонарні і ергодичні випадкові процеси.
- 1.4. Ергодичні випадкові процеси

### 1.1. Закони розподілу ймовірностей випадкового процесу

**Випадковим** називається процес  $x(t)$ , який в кожному  $l$ -му випробуванні представляє функцію часу  $x_l(t)$ , вигляд якої наперед невідомий і змінюється в кожному випробуванні  $l = 1, 2, 3, \dots$ . Конкретний вигляд функції часу  $x_l(t)$  в  $l$ -му випробуванні називається реалізацією випадкового процесу. Таким чином, на відміну від детермінованого сигналу, який описується відомою функцією часу, випадковий процес можна розглядати як множину (ансамбль) реалізацій  $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_l(t), \dots\}$  рис. 1.1. Випадковий процес є різновидом випадкових функцій, аргументом яких є час. Дане визначення відображає фізичний зміст випадкового процесу, але ж не є конструктивним для побудови математичних моделей таких процесів.

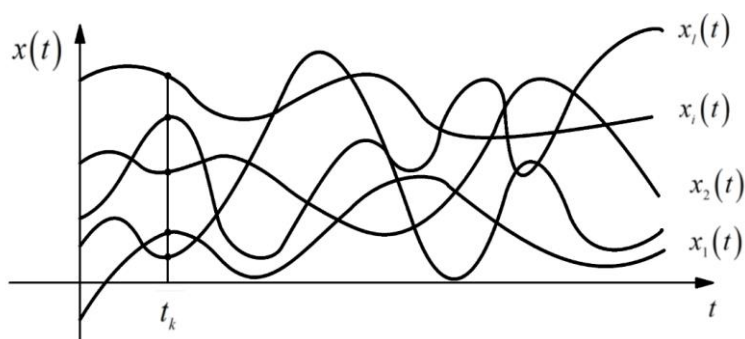


Рис. 1.1 Ансамбль реалізацій випадкового процесу

Значення випадкового процесу при фіксованому аргументі називається його *перерізом*. Випадковим називається процес  $x(t)$ , який в фіксований момент часу  $t_k$  є випадковою величиною  $x(t_k)$ . Таким чином, переріз випадкового процесу є випадковою величиною. *Значення, які може приймати випадкова величина  $x(t_k)$  у випробуванні, позначаються змінною  $x_k$* . Те, що *випадкова величина  $x(t_k)$  у випробуванні прийняла значення  $x_k$* , позначається  $x(t_k) = x_k$  і розглядається як випадкова подія. Так, у першому випробуванні  $x_k = x_1(t_k)$  приймає значення відліку реалізації  $x_1(t)$  в фіксований момент часу  $t_k$ , в  $l$ -му випробуванні  $x_k = x_l(t_k)$  і т. д.

З другого визначення випадкового процесу випливає, що для опису його ймовірнісних характеристик можна використовувати закони розподілу ймовірностей випадкових величин.

Для одного перерізу часу  $t_k$  вводиться поняття *одномірної щільності ймовірності*, як границі відношення ймовірності попадання значення випадкового процесу  $x(t)$  в момент часу  $t_k$  в інтервал  $[x_k, x_k + \Delta x_k]$  до величини цього інтервалу  $\Delta x_k$

$$f(x_k, t_k) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{P(x(t_k) \in [x_k, x_k + \Delta x_k])}{\Delta x_k}. \quad (1.1)$$

Графіки одномірних щільностей ймовірності в перерізах  $t_1$  і  $t_2$  зображені на рис. 1.2.

Одномірна щільність ймовірності для випадкового процесу є лише частковою характеристикою. Вона не відображає статистичні залежності між різними перерізами випадкового процесу. В загальному випадку вводиться  $n$ -мірна щільність ймовірності, яка еквівалентна щільності ймовірності випадкового вектору (системи  $n$  випадкових величин)  $(x(t_1), \dots, x(t_n))$

$$f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{\Delta x_n \rightarrow \infty} \frac{P(\prod_{k=1}^n \{x(t_k) \in [x_k, x_k + \Delta x_k]\})}{\prod_{k=1}^n \Delta x_k}. \quad (1.2)$$

Чим більше  $n$ , тим більш повно описується випадковий процес.

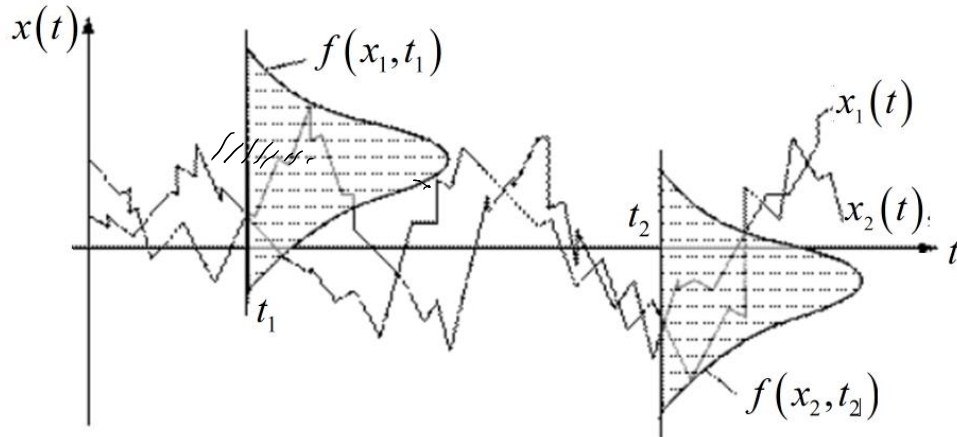


Рис. 1.2 Одномірні щільності ймовірності випадкового процесу

**Властивості  $n$ -мірної щільності ймовірності  $f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ :**

1. Щільність ймовірності  $f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  є **невід'ємною**

$$f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \geq 0. \quad (1.3)$$

2. Щільність ймовірності  $f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  задовольняє **умові нормування**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1. \quad (1.4)$$

3. **Властивість погодженості** - щільність ймовірності меншої розмірності  $f(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k)$  може бути отримана шляхом інтегрування щільності ймовірності більшої розмірності  $f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ ,  $n > k$  за надлишковими аргументами  $x_{k+1}, \dots, x_n$

$$f(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_{k+1} \dots dx_n. \quad (1.5)$$

4. Ймовірність того, що в перерізах  $t_1, \dots, t_n$  випадковий процес сумісно отримає значення на інтервалах  $v_1 \leq x_1 \leq u_1, \dots, v_n \leq x_n \leq u_n$  розраховується за формулою

$$P\left(\prod_{k=1}^n x(t_k) \in [v_k, u_k]\right) = \int_{v_1}^{u_1} \dots \int_{v_n}^{u_n} f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.6)$$

В якості закону розподілу ймовірностей випадкового процесу також використовується  $n$ -мірна функція розподілу ймовірностей

$$F(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) = P\left(\prod_{k=1}^n \{x(t_k) \in (-\infty, u_k]\}\right) \quad (1.7)$$

Як випливає з виразу (6), функція розподілу ймовірностей  $F(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n)$  розраховується за формулою

$$F(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{u_1} \dots \int_{-\infty}^{u_n} f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.8)$$

На основі відомої  $n$ -мірної функції розподілу ймовірностей  $n$ -мірна щільність ймовірності розраховується за формулою

$$f(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}. \quad (1.9)$$

Таким чином, щільність ймовірності  $f(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n)$  є змішана часткова похідна  $n$ -го порядку від функції розподілу  $F(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n)$ , яка береться один раз по кожному аргументу.

Необхідно відмітити, що використання багатовимірних функцій розподілу для визначення ймовірності потрапляння значень випадкового процесу в задану область зустрічає труднощі у порівнянні з багатовимірною щільністю

ймовірності, тому вона є основним законом розподілу для неперервнозначних випадкових процесів.

Умовна сумісна  $k$  - мірна щільність ймовірності випадкового процесу для перерізів  $t_1, \dots, t_k$  за умови, що відомі значення випадкового процесу  $x(t_{k+1}) = x_{k+1}, \dots, x(t_n) = x_n$ , розраховується за формулою

$$f(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k | x_{k+1}, \dots, x_n, t_{k+1}, \dots, t_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)}{f(x_{k+1}, \dots, x_n, t_{k+1}, \dots, t_n)}. \quad (1.10)$$

Щільність ймовірності  $f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  може бути надана у вигляді

$$f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = f(x_1, t_1) f(x_2, t_2 | x_1, t_1) \times \\ \times f(x_3, t_3 | x_1, x_2, t_1, t_2) \dots f(x_n, t_n | x_1, \dots, x_{n-1}, t_1, \dots, t_{n-1}). \quad (1.11)$$

Якщо значення випадкового процесу в перерізах  $t_1, \dots, t_n$  статистично незалежні, то щільність ймовірності  $f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  має вигляд

$$f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k, t_k). \quad (1.12)$$

Одномірну щільність ймовірності  $f(x_k, t_k)$  часто записують у вигляді  $f(x, t)$ , змінна  $x$  характеризує значення випадкового процесу  $x(t)$  в момент часу  $t$ . (Індекси потрібні, коли розглядається кілька перерізів часу і потрібно їх розрізняти). Також для зменшення громіздкості позначень багатомірних щільностей ймовірності залежність від перерізів часу  $t_1, \dots, t_n$  надалі будемо вказувати лише за необхідності.

Багатовимірні закони розподілу випадкового процесу, які є функціями багатьох аргументів, досить складно використовувати на практиці. Крім того, для їх визначення необхідний великий обсяг експериментальних даних. В більшості інженерних застосувань замість законів розподілу, які забезпечують повний опис випадкового процесу, розглядаються їх найважливіші числові характеристики. До них відносяться моментні і кореляційні функції.

## 1.2. Моментні і кореляційні функції випадкового процесу

Хоча закони розподілу повною мірою характеризують випадковий процес, практично більш використовуються числові характеристики, які одержують усередненням значень випадкового процесу. Числові характеристики випадкового процесу називають моментними функціями.

Для одного моменту часу  $t$  визначають одномірні початкові  $\mathbf{M}[x^k(t)]$  та центральні  $\mathbf{M}[x^{\circ k}(t)]$  моментні функції  $k$ -го порядку

$$\mathbf{M}[x^k(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x,t) dx; \quad (1.13)$$

$$\mathbf{M}[x^{\circ k}(t)] = \mathbf{M}[(x(t) - \mathbf{M}[x(t)])^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}[x(t)])^k f(x,t) dx. \quad (1.14)$$

де  $\mathbf{M}[\circ]$  - операція знаходження математичного очікування від функціонального перетворення випадкової величини, що знаходиться в квадратних дужках.

Найбільш вживані.

### 1. Математичне очікування

$$m_x(t) = \mathbf{M}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t) dx. \quad (1.15)$$

За змістом математичне очікування випадкового процесу є деяка детермінована функція, навколо якої групуються і відносно якої коливаються всі можливі реалізації випадкового процесу рис.1.3.

Для електричних сигналів математичне очікування визначає середнє значення випадкового процесу в момент часу  $t$  на опорі 1 Ом.

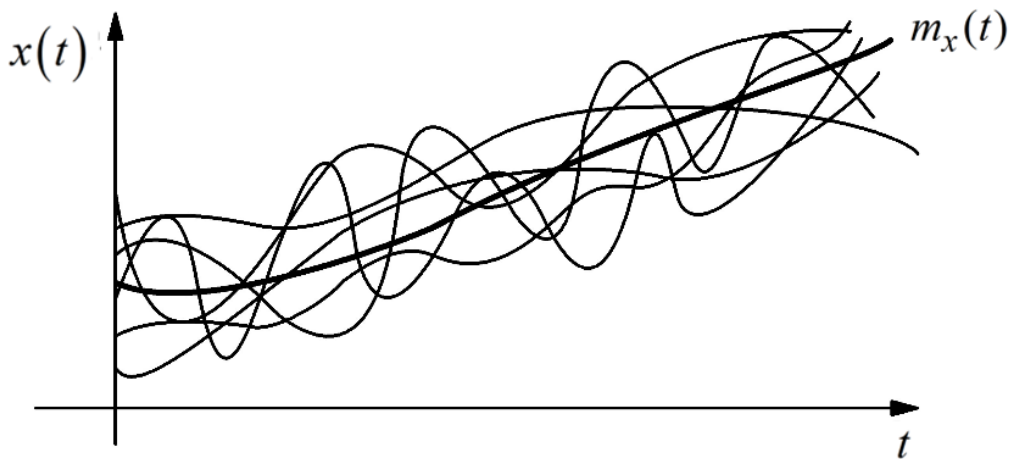


Рис. 1.3 Математичне очікування випадкового процесу

## 2. Середній квадрат

$$P_x(t) = \mathbf{M}[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t) dx. \quad (1.16)$$

Для електричних сигналів характеризує середнє значення миттєвої потужності випадкового процесу в момент часу  $t$  на опорі 1 Ом.

## 3. Дисперсія

$$D_x(t) = \sigma_x^2(t) = \mathbf{M}[x^2(t)] - m_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 f(x,t) dx. \quad (1.17)$$

Дисперсія випадкового процесу характеризує розкид реалізацій випадкової функції щодо математичного очікування. Для електричних сигналів дисперсія визначає середнє значення миттєвої потужності центрованого процесу в момент часу  $t$  на опорі 1 Ом.

Зв'язок між середнім квадратом  $P_x(t)$ , математичним очікуванням  $m_x(t)$  і дисперсією  $\sigma_x^2(t)$  визначається рівнянням

$$P_x(t) = m_x^2(t) + \sigma_x^2(t). \quad (1.18)$$

Для двох перерізів часу  $t$  визначають **двомірні змішані моментні функції**

$\mathbf{M}[x_1^k(t_1)x_2^l(t_2)]$   $k+l$ -го порядку

$$\mathbf{M}[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))^k (x_2 - m_x(t_2))^l f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (1.19)$$

Найбільшого поширення набула змішана моментна функція  $\mathbf{M}[x(t_1)x(t_2)]$ , яка отримала назву **кореляційна функція**

$$K_x(t_1, t_2) = \mathbf{M}[x(t_1)x(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2)) f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (1.20)$$

**Властивості кореляційної функції:**

1. Нормована кореляційна функція

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}. \quad (1.21)$$

Нормована кореляційна функція  $r_x(t_1, t_2)$  приймає значення

$$|r_x(t_1, t_2)| \leq 1. \quad (1.22)$$

По значенню нормованої кореляційної функції  $r_x(t_1, t_2)$  можна оцінити ступінь лінійного зв'язку між значеннями випадкового процесу у моменти часу  $t_1, t_2$ . Якщо  $|r_x(t_1, t_2)| = 1$ , то між значеннями випадкового процесу  $x(t_1), x(t_2)$  існує лінійний функціональний зв'язок. Якщо  $|r_x(t_1, t_2)| = 0$ , то значення випадкового процесу  $x(t_1), x(t_2)$  є некорельованими.

2. При співпадінні моментів часу  $t_1 = t_2$  кореляційна функція дорівнює дисперсії

$$K_x(t_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))^2 f(x_1, t_1) dx_1 = \sigma_x^2(t_1). \quad (1.23)$$

3. Кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1). \quad (1.24)$$

4. Із збільшенням відстані між перерізами  $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$  значення кореляційної функції спрямовується до нуля  $K_x(t_1, t_2) \rightarrow 0$ .

Важливе значення має також взаємна кореляційна функція  $K_{xy}(t_1, t_2)$ . Вона визначається для перерізів  $t_1, t_2$  різних випадкових процесів  $x(t), y(t)$  за формулою

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))(y_2 - m_y(t_2)) f(x_1, y_2, t_1, t_2) dx_1 dy_2 x(t_1), y(t_2). \quad (1.25)$$

На її основі може бути визначена ступінь лінійного зв'язку між значеннями  $x(t_1), y(t_2)$  випадкових процесів.

### 1.3. Стаціонарні випадкові процеси

Випадковий процес називаються стаціонарним у вузькому сенсі, якщо його  $n$ -мірні щільності ймовірності не змінюються при зміщенні перерізів процесу на інтервал  $\tau$

$$f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau). \quad (1.26)$$

Це дуже жорсткі вимоги. На практиці використовується поняття стаціонарності в широкому сенсі. Випадковий процес називається стаціонарними в широкому сенсі, якщо його математичне очікування і дисперсія є постійними (не залежать від часу)

$$m_x(t) = m_x = const ; \quad (1.27)$$

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 = const , \quad (1.28)$$

а кореляційна функція залежить від різниці аргументів

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_1 + \tau) = K_x(\tau) , \quad (1.29)$$

де  $\tau = t_2 - t_1$ .

Надалі розглядатимуться лише стаціонарні у широкому сенсі випадкові процеси.

#### 1.4. Ергодичні випадкові процеси

Ергодичними називаються стаціонарні випадкові процеси, для яких числові характеристики, отримані шляхом осереднення з використанням щільностей ймовірностей (по множині реалізацій), можуть бути розраховані шляхом усереднення за часом однієї нескінченної реалізації.

**Математичне очікування** випадкового процесу при усередненні за часом визначається наступним чином:

$$m_x = \overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_l(t) dt . \quad (1.30)$$

Звідси випливає фізичний зміст: математичне очікування – це середнє значення (постійна складова) процесу.

**Середній квадрат** випадкового процесу при усередненні за часом визначається наступним чином

$$P_x = \overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_l^2(t) dt . \quad (1.31)$$

Характеризує середнє значення потужності процесу на опорі 1 Ом.

**Дисперсія** ергодичного випадкового процесу визначається виразом

$$\sigma_x^2 = \overline{x(t)^2} - \overline{x(t)}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_l(t) - m_x)^2 dt. \quad (1.32)$$

Дисперсія має фізичний зміст середньої потужності флуктаційної складової процесу на опорі 1 Ом.

Величина  $\sigma_x$  називається **середнім квадратичним відхиленням** випадкового процесу. Вона характеризує відхилення значень випадкового процесу відносно математичного очікування рис. 6.

Зв'язок між середнім квадратом  $P_x$ , математичним очікуванням  $m_x$  і дисперсією  $\sigma_x^2$  визначається рівнянням

$$P_x = m_x^2 + \sigma_x^2. \quad (1.33)$$

**Кореляційна функція** ергодичного центрованого випадкового процесу  $x(t)$  визначається на основі реалізації  $x_l(t)$  по формулі

$$K_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_l(t) - m_x)(x_l(t+\tau) - m_x) dt. \quad (1.34)$$

**Властивості кореляційної функції стаціонарного ергодичного процесу:**

1. Кореляційна функція – парна

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (1.35)$$

Доведення.

$$K_x(\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_l(t)x_l(t-\tau) dt = \left. \begin{array}{l} t-\tau = \theta \\ t = \tau + \theta \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2-\tau}^{T/2-\tau} x_j(\tau + \theta) x_j(\theta) d\theta = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2-\tau}^{T/2-\tau} x_l(\theta) x_l(\theta + \tau) d\theta = K_x(-\tau).$$

2. При  $\tau = 0$  кореляційна функція приймає максимальне значення, яке дорівнює дисперсії

$$K_x(0) = \sigma_x^2. \quad (1.36)$$

Доведення.

$$K_x(0) = \overline{x(t)x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_l(t) x_l(t) dt = \sigma_x^2.$$

Доведемо, що при  $\tau = 0$  кореляційна функція приймає максимальне значення. Розглянемо вираз

$$\overline{(x(t) \pm x(t - \tau))^2} = \overline{x^2(t)} \pm 2\overline{x(t)x(t - \tau)} + \overline{x^2(t - \tau)} \geq 0;$$

$$\sigma_x^2 \pm 2K_x(\tau) + \sigma_x^2 \geq 0;$$

$$\sigma_x^2 \geq \mp K_x(\tau);$$

$$|K_x(\tau)| \leq \sigma_x^2.$$

3. Частіше за все, значення кореляційної функції буде тим менше, чим більше проміжок часу  $\tau$ , оскільки зв'язок між значеннями випадкового процесу буде слабший. Виділяють два класи кореляційних функцій: аперіодична, коливальна рис. 1.4.

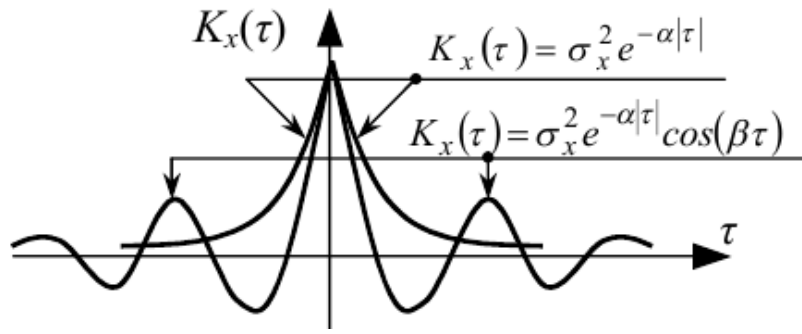


Рис. 1.4 Типи кореляційних функцій

4. За виглядом кореляційної функції можна робити висновки про швидкість змінювання випадкового процесу. Спадання кореляційної функції тим більше, чим швидше змінюється випадковий процес рис.1.5.

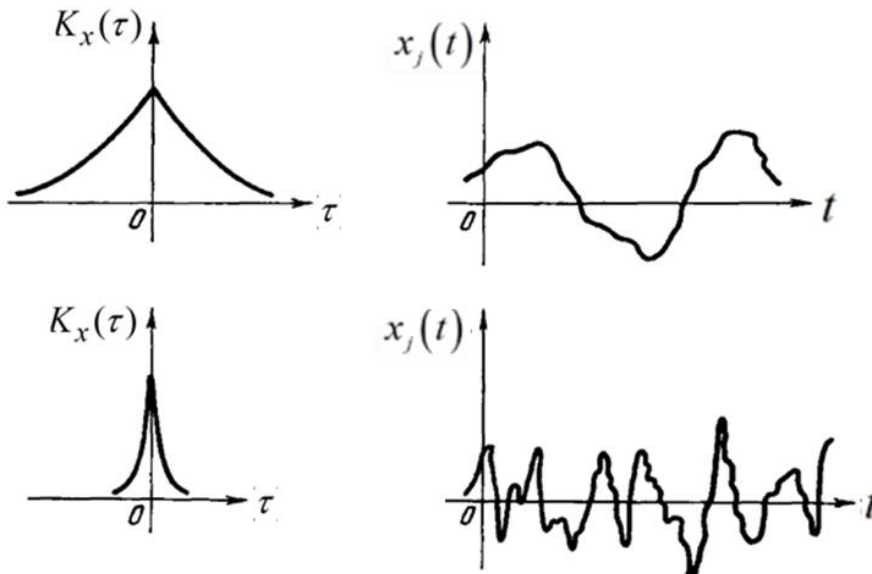


Рис. 1.5 Кореляційні функції випадкових процесів з різною швидкістю зміни реалізацій

5. Нормована кореляційна функція визначається за формулою

$$r_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2}. \quad (1.37)$$

Нормована кореляційна функція  $r_x(\tau)$  приймає значення

$$|r_x(\tau)| \leq 1. \quad (1.38)$$

**Взаємна кореляційна функція** ергодичних стаціонарних випадкових процесів  $x(t), y(t)$  визначається за формулою

$$K_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_l(t) - m_x)(y_l(t+\tau) - m_y) dt. \quad (1.39)$$

На її основі може бути визначена ступінь лінійного зв'язку між значеннями  $x(t_1), y(t_2)$  випадкових процесів.

Часто використовують коефіцієнт взаємної кореляції випадкових процесів  $x(t), y(t)$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}(0)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1.40)$$

причому  $|r_{xy}| \leq 1$ . Два випадкові процеси  $x(t), y(t)$  називаються некорельованими, якщо  $r_{xy} = 0$ .

Кореляційні функції розраховуються і для детермінованих сигналів. Вони використовуються як інтегральні кількісні характеристики форми сигналів і для визначення їх подібності. Стосовно сигналів  $s(t)$  із скінченною енергією, які задані на фіксованому інтервалі  $[0, T]$ , кореляційна функція розраховується за формулою

$$K_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t+\tau) dt. \quad (1.40)$$

При відсутності ділення на  $T$  така операція також називається операцією **скалярного добутку** функцій  $s(t)$  і  $s(t+\tau)$  в деякому нескінченному просторі. З урахуванням парності, графічне вигляд кореляційної функції зазвичай визначається лише для позитивних значень  $\tau$ . Також, з урахуванням парності, кореляційна функція може бути розрахована за формулою

$$K_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t-\tau)dt. \quad (1.41)$$

Вираз  $s(t+\tau)$  означає, що зі збільшенням значень  $t$  від нуля копія сигналу  $s(t)$  зсувається ліворуч по осі  $t$ . Насправді сигнали зазвичай також задаються на інтервалі позитивних значень часу  $t$ . Тому у межах обчислень зручнішим є зсув копії сигналу ліворуч  $s(t-\tau)$  по осі аргументів. При цьому продовження інтервалу  $[0, T]$  доповнюється нульовими значеннями. Тому зручнішим для застосування є вираз (1.41).

Зі збільшенням значення величини зсуву  $t$  для фінітних сигналів тимчасове перекриття сигналу з його копією зменшується, тому значення кореляційної функції спрямовується до нуля.

**Приклад.**

Знайти кореляційну функцію та спектральну щільність потужності прямокутного відеоімпульсу з амплітудою  $A$ , довжиною  $T$ .

Розв'язок.

При зсуві копії сигналу праворуч на  $\tau$ , сигнали перетинаються на інтервалі  $[\tau, T]$ . Тому отримаємо

$$K_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{T} \int_{\tau}^T A^2 dt = A^2(T-\tau) = A^2 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right), \quad \tau \in [0, T]$$

Геометричну інтерпретацію розрахунку кореляційної функції прямокутного відеоімпульсу наведено на рис. 1.6.

З врахуванням парності кореляційної функції отримаємо

$$K_\lambda(\tau) = A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), \quad \tau \in [-T, T]. \quad (1.42)$$

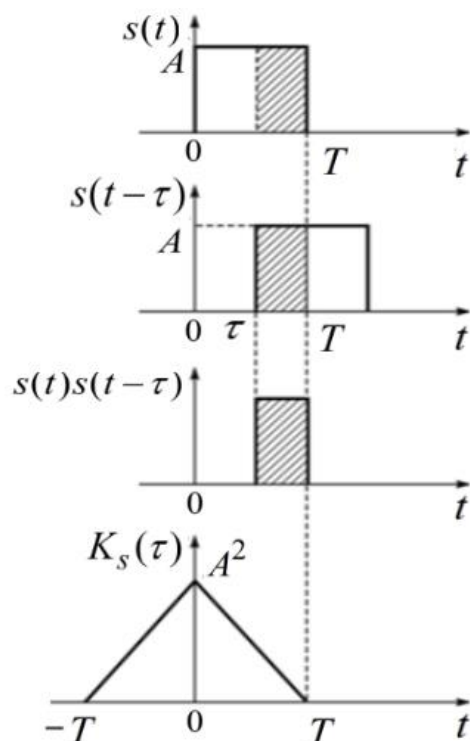


Рис. 1.6. Геометрична інтерпретація розрахунку кореляційної функції прямокутного відеоімпульсу .

Для перевірки виконаємо зсув копії сигналу ліворуч. В даному випадку сигнали перетинаються на інтервалі  $[0, T - |\tau|]$ . Отримаємо при  $\tau < 0$

$$K_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{T} \int_0^{T-|\tau|} A^2 dt = A^2(T-|\tau|) = A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)$$

### Питання до самоперевірки

1. Надайте математичне визначення одномірної щільності ймовірності випадкового процесу і її геометричне представлення.
2. Запишіть і поясніть властивості багатомірної щільності ймовірності випадкового процесу.
3. Як визначається умовна сумісна щільність ймовірності випадкового процесу. Як можна представити безумовну сумісну щільність ймовірності випадкового процесу на основі умовних щільностей ймовірності.

4. Поясніть як пов'язана багатомірна щільність ймовірності з функцією розподілу ймовірностей випадкового процесу.
5. Запишіть, як визначається ймовірність того, що значення випадкового процесу у відповідний момент часу попаде в заданий інтервал. Надати геометричну інтерпретацію цієї ймовірності.
6. Надайте загальні визначення математичного очікування та дисперсії випадкового процесу.
7. Розрахуйте математичне очікування, якщо  $f(x,t) = \frac{1}{b-a}$  на інтервалі  $[a,b]$ .
8. Надайте загальне визначення кореляційної функції. Якими властивостями вона володіє?
9. Які процеси називаються стаціонарними у вузькому і широкому сенсі?
10. Надайте визначення математичного очікування, середнього квадрата та дисперсії ергодичного процесу та їх фізичний зміст. Якими властивостями володіє кореляційна функція ергодичного процесу?

## Лекція №2 Спектральна щільність потужності ергодичного випадкового процесу

- 2.1. Визначення спектральної щільності потужності випадкового процесу.
- 2.2. Теорема Вінера-Хінчина.
- 2.3. Ефективна ширина спектра та інтервал кореляції.
- 2.4. Білий шум та його характеристики.

### 2.1. Визначення спектральної щільності потужності ергодичного випадкового процесу

Передача інформації у радіотехнічних системах пов'язана із спектральними перетвореннями сигналів. Спектральні характеристики детермінованих сигналів досить просто визначаються перетворенням Фур'є

$$S_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.1)$$

де  $s(t)$  – детермінована функція, що описує сигнал;  $S_s(j\omega)$  - спектр сигналу, тобто розподіл комплексних амплітуд по частоті.

Розглянемо стаціонарний в широкому сенсі *центрований* випадковий процес  $x(t)$ , визначений на інтервалі  $[0, T]$ . Виберемо з ансамблю реалізацій процесу будь-яку конкретну реалізацію  $x_l(t)$  рис. 2.1. Вона представляє детерміновану функцію

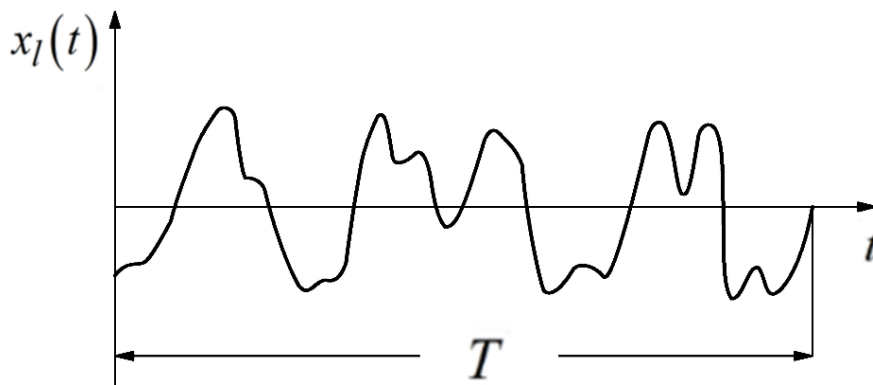


Рис. 2.1 Реалізація випадкового процесу

До реалізації  $x_l(t)$  можна формально застосувати перетворення Фур'є (2.1) та обчислити її спектр  $S_{x_l}(j\omega)$ .

$$S_{x_l}(j\omega) = \int_0^T x_l(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.2)$$

Спектр  $S_{x_l}(j\omega)$  є комплексною функцією. Для різних реалізацій  $x_l(t)$ ,  $x_i(t)$  будуть отримані різні комплексні спектри  $S_{x_l}(j\omega)$ ,  $S_{x_i}(j\omega)$ , оскільки реалізації випадкового процесу є різними. Оскільки реалізації випадкового процесу наперед невідомі, то спектр випадкового процесу є випадковою комплексною функцією  $S_x(j\omega)$  частоти  $\omega$ . Математичне очікування  $S_x(j\omega)$  розраховується за формулою

$$\mathbf{M}[S_x(j\omega)] = \int_0^T \mathbf{M}[x(t)] e^{-j\omega t} dt = 0 \quad (2.3)$$

і дорівнює нулю, оскільки для стаціонарного центрованого процесу  $\mathbf{M}[x(t)] = 0$ . Цей результат має практичне пояснення, оскільки при сумуванні (осередненні) значної кількості спектрів  $S_{x_l}(j\omega)$  завдяки різному набігу фази на однакових частотах спектри будуть компенсувати один одного. Таким чином, середнє значення комплексного спектру центрованого стаціонарного випадкового процесу дорівнює нулю.

Проте для випадкового процесу можна ввести зручну спектральну характеристику. Для цього, щоб уникнути залежності від фаз переходять до аналізу середньої потужності випадкового процесу.

Нехай стаціонарний процес  $x(t)$  володіє властивістю ергодичності. Середня потужність реалізації  $x_l(t)$  випадкового процесу визначається за формулою

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x_l^2(t) dt. \quad (2.4)$$

Використовуючи рівність Парсеваля, можна записати

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x_l^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{x_l}(j\omega) S_{x_l}^*(j\omega)}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_{x_l}(j\omega)|^2}{T} d\omega. \quad (2.5)$$

Чим довше реалізація, тим точніше визначається середня потужність ергодичного випадкового процесу  $x(t)$ . Спрямовуючи  $T$  до нескінченності, отримаємо

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_l^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_{x_l}(j\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega, \quad (2.6)$$

де  $G_x(\omega)$  - визначається за формулою

$$G_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_{x_l}(j\omega)|^2}{T}. \quad (2.7)$$

Функція  $G_x(\omega)$  характеризує розподіл середньої потужності випадкового процесу  $x(t)$  по частоті і отримала назву спектральна щільність середньої потужності. На рис. 2.2 зображено спектральну щільність випадкового процесу.

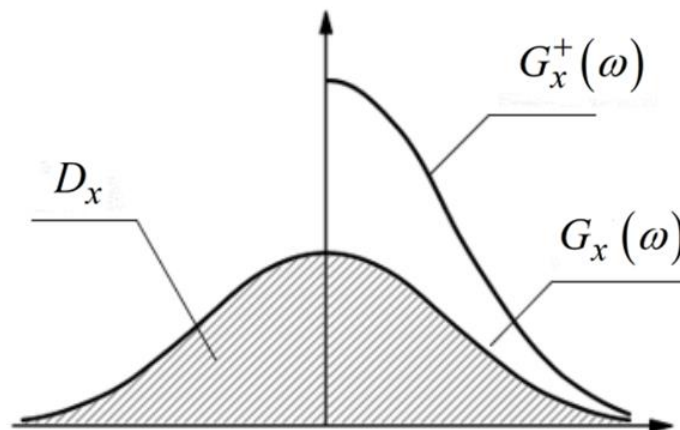


Рис. 2.2 Спектральна щільність потужності випадкового процесу

Відзначимо деякі властивості спектральної щільності:

1. Спектральна щільність  $G_x(\omega)$  є дійсною **невід'ємною** функцією частоти.
2. Спектральна щільність  $G_x(\omega)$  є **парною функцією** частоти, (крива  $G_x(\omega)$  на рис. 2.2), тобто

$$G_x(\omega) = G_x(-\omega). \quad (2.8)$$

На цій підставі часто використовують функцію

$$G_x^+(\omega) = \begin{cases} 2G_x(\omega), & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

яка має назву *односторонньої (фізичної) спектральної щільності* (крива  $G_x^+(\omega)$  на рис. 2.2).

Оскільки ми розглядаємо центрований випадковий процес, тобто процес, з якого виключено математичне очікування (постійна складова), очевидно середня потужність будь-якої його реалізації дорівнює дисперсії процесу. Тоді можна записати

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega. \quad (2.10)$$

Іншими словами, дисперсія процесу дорівнює площі під кривою рис. 2.2.

Формулу (2.10) також можна представити у вигляді

$$D_x = P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(2\pi f) df. \quad (2.11)$$

Для визначення потужності процесу  $x(t)$  в смузі частот  $\Delta f$  рис. 2.3, необхідно визначити площу фігури під графіком спектральної щільності.

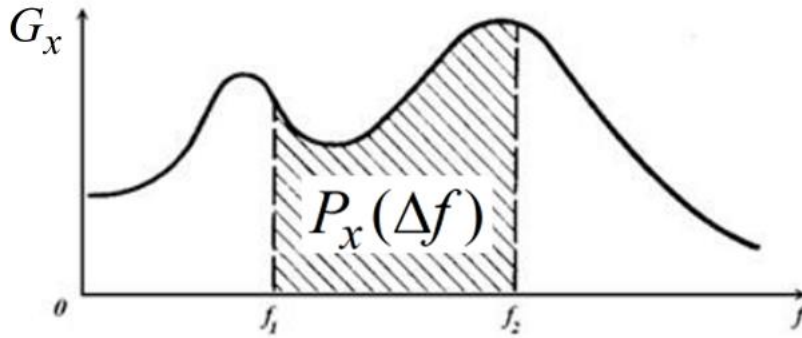


Рис. 2.3 Визначення потужності випадкового процесу в смузі частот

При малих  $\Delta f$  можна записати

$$P_x(\Delta f) \approx G_x(f_1)\Delta f. \quad (2.12)$$

$$G_x(f_1) \approx \frac{P_x(\Delta f)}{\Delta f}. \quad (2.13)$$

Чисельно спектральна щільність показує **потужність спектральних складових випадкового процесу в смузі 1 Гц**, і вона має **розмірність**  $\left[ \frac{Вт}{Гц} \right]$ .

В загальному випадку спектральна щільність  $G_x(\omega)$  стаціонарного процесу з нульовим математичним очікуванням визначається за формулою

$$G_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left[ \frac{S_x(j\omega)S_x^*(j\omega)}{T} \right], \quad (2.14)$$

де  $S_x(j\omega)$  - комплексна випадкова функція частоти, реалізаціями якої є спектри  $S_{x_l}(j\omega)$  реалізацій  $x_l(t)$ , які визначаються за формулою (2.2).

Операція математичного очікування в формулі (2.14) на практиці може бути розрахована за формулою

$$\mathbf{M} \left[ \frac{S_x(j\omega)S_x^*(j\omega)}{T} \right] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \frac{S_{x_l}(j\omega)S_{x_l}^*(j\omega)}{T} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \frac{|S_{x_l}(j\omega)|^2}{T} =$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K G_{x_l}(\omega). \quad (2.15)$$

Математичне очікування розраховується як границя при  $K \rightarrow \infty$  середнього арифметичного спектральних щільностей потужності реалізацій  $G_{x_j}(\omega)$ .

## 2.2. Теорема Вінера-Хінчина

Спектральна щільність та автокореляційна функція випадкового процесу є невинпадковими функціями, пов'язаними між собою. Встановимо цей зв'язок. Кореляційна функція ергодичного центрованого випадкового процесу  $x(t)$  визначається на основі реалізації  $x_l(t)$  за формулою

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_l(t) x_l(t - \tau) dt. \quad (2.16)$$

Використовуючи властивості перетворення Фур'є, можна записати

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_l}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_l}(ju) e^{ju(t-\tau)} dudt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_l}(j\omega) S_{x_l}(ju) e^{-ju\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jt(\omega+u)} dt d\omega du = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt(\omega+u)} dt = \delta(\omega+u) \right| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_l}(j\omega) S_{x_l}(ju) e^{-ju\tau} \delta(\omega+u) dud\omega = \\ &= |u = -\omega| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{x_l}(j\omega) S_{x_l}(-j\omega)}{T} e^{j\omega\tau} d\omega = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_{x_l}(j\omega)|^2}{T} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.17)$$

Отримали, що автокореляційна функція та спектральна щільність випадкового процесу зв'язані зворотнім перетворенням Фур'є

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.18)$$

Очевидно, якщо існує зворотнє перетворення, значить існує і пряме перетворення Фур'є

Відповідно пряме перетворення Фур'є має вигляд

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.19)$$

що пов'язує спектральну щільність з автокореляційною функцією.

Таким чином, АКФ випадкового процесу та його спектральна щільність пов'язані між собою парою перетворень Фур'є. Вперше цей зв'язок було встановлено радянським математиком А. Хінчіним і незалежно від нього американським ученим М. Вінером. Тому співвідношення (2.18) і (2.19) зветься теорема Вінера-Хінчина.

Оскільки автокореляційна функція та спектральна щільність є дійсними парними функціями, можна відмовитися від комплексної форми запису перетворення Фур'є та перейти до іншої форми

$$K_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_x(\omega) \cos\omega\tau d\omega; \quad (2.20)$$

$$G_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos\omega\tau d\tau. \quad (2.21)$$

З цих виразів випливає

$$K_x(0) = D_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega; \quad (2.22)$$

$$G_x(0) = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) d\tau. \quad (2.23)$$

Згідно властивостей перетворення Фур'є, чим коротше кореляційна функція, тим ширше її спектральна щільність. На рис. 2.4 наведено реалізації двох випадкових процесів з різною швидкістю зміни реалізацій та їх кореляційні функції і спектральні щільності потужності. Чим швидше змінюється випадковий процес, тим ширше його спектральна щільність потужності і тим коротше його кореляційна функція.

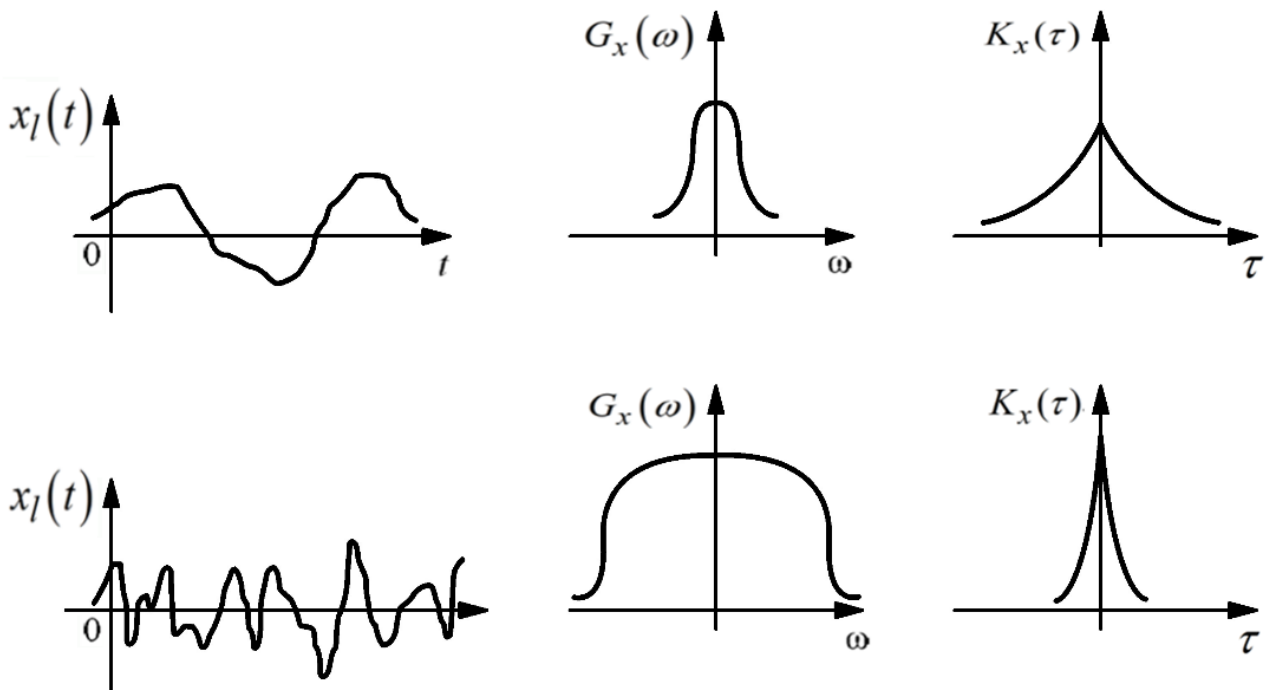


Рис.2.4 Кореляційні функції і спектральні щільності потужності випадкових процесів з різною швидкістю зміни реалізацій

### Приклад

Знайти кореляційну функцію та спектральну щільність потужності гармонійного сигналу з випадковою фазою

$$x(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi], \quad f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \varphi = [-\pi, \pi].$$

Розв'язок.

$$m_x = \overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_l(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cos[\omega_0 t + \varphi] dt = 0.$$

Підінтегральна функція має обмежене значення, а  $T \rightarrow \infty$ . Тоді

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_l(t) - m_x)(x_l(t+\tau) - m_x) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \cos[\omega_0 t + \varphi] \cos[\omega_0 t - \omega_0 \tau + \varphi] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{U_m^2}{2} \int_0^T (\cos[\omega_0 \tau] + \cos[2\omega_0 t - \omega_0 \tau + 2\varphi]) dt = \frac{U_m^2}{2} \cos[\omega_0 \tau]. \end{aligned}$$

Гармонійний сигнал має періодичну кореляційну функцію з тим самим періодом.  
Середня потужність гармонійного сигналу

$$\sigma_x^2 = K_x(0) = \frac{U_m^2}{2}.$$

Спектральна щільність потужності

$$\begin{aligned} G_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_m^2}{2} \cos[\omega_0 \tau] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{U^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} + e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}) d\tau = \frac{2\pi U_m^2}{4} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

Спектральна щільність потужності має дві складові в точках  $\omega = \pm\omega_0$ , які приймають нескінченні значення.

Відзначимо ще один дуже важливий факт, що обчислена кореляційна функція не залежить від початкової фази гармонійного сигналу. З проведеного аналізу випливає важливий висновок: кореляційна функція практично будь-якого сигналу не залежить від його фазового спектра. Отже, сигнали, амплітудні спектри яких повністю збігаються, а фазові різняться, матимуть однакову кореляційну функцію. Ще одне зауваження полягає в тому, що по кореляційній функції не можна відновити вихідний сигнал (знову ж таки внаслідок втрати інформації про фазу).

### 2.3. Ефективна ширина спектра та інтервал кореляції

При спектральних перетвореннях випадкових процесів важливого значення набуває ширина спектра процесу. Ефективна ширина спектра визначається так:

$$\Delta\omega_{ef} = \frac{1}{G_{x\max}} \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega; \quad (2.24)$$

$$\Delta f_{ef} = \frac{1}{G_{x\max}} \int_0^{\infty} G_x(2\pi f) df = \frac{\Delta\omega_{ef}}{2\pi}. \quad (2.25)$$

Цьому визначенню можна надати графічну інтерпретацію. На рис. 2.5 зображено криву односторонньої спектральної щільності. Побудуємо прямокутник з площею, що дорівнює площі під кривою  $G_x(\omega)$ , одна сторона якого становить величину  $G_{x\max}$  (в даному випадку  $G_x(0)$ ). Тоді друга сторона прямокутника характеризуватиме ефективну ширину енергетичного спектра. Представимо вираз (2.24) у наступному вигляді

$$G_{x\max} \Delta\omega_{ef} = \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega. \quad (2.26)$$

Ліва сторона цієї рівності є середньою потужністю випадкового процесу з рівномірною спектральною щільністю у межах смуги частот  $\Delta\omega_{ef}$ , а права – середню потужність аналізованого випадкового процесу.

Тоді *ефективну ширину спектра аналізованого випадкового процесу можна трактувати, як ширину спектра процесу з рівномірною щільністю потужності при рівності середніх потужностей обох процесів.*

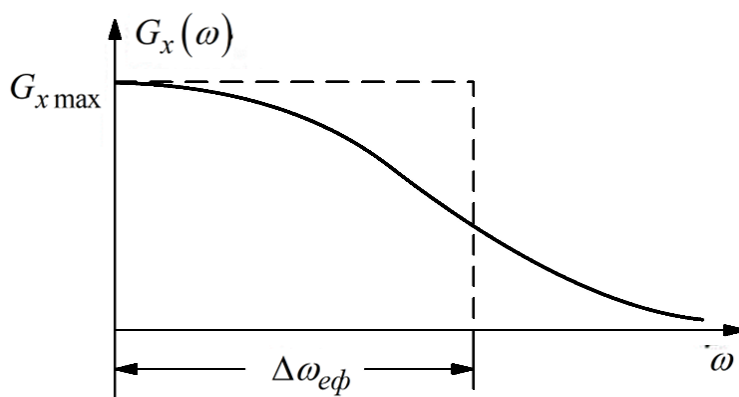


Рис. 2.5 Графічна інтерпретація поняття ефективна ширина спектра

Як наголошувалося вище, автокореляційна функція випадкового процесу характеризує ступінь статистичного зв'язку між значеннями процесу, розділеними інтервалом часу  $\tau$ . При цьому для ергодичних процесів, що вивчаються в радіотехніці, автокореляційна функція прямує до нуля при необмеженому зростанні  $\tau$ . Очевидно, при певному значенні  $\tau$ , значення випадкового процесу  $x(t)$  і  $x(t + \tau)$  можна вважати статистично незв'язаними (некорельованими). Значення  $\tau_k$ , при якому значення випадкового процесу  $x(t)$  і  $x(t + \tau)$  стають статистично не пов'язаними, називається **інтервалом кореляції**.

Інтервал кореляції визначається відповідно до виразу

$$\tau_k = \frac{1}{K_x(0)} \int_0^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau, \quad (2.27)$$

де  $\rho_x(\tau)$  – нормована автокореляційна функція.

Знак модуля (2.27) введений для випадку, коли  $K_x(\tau)$  може приймати негативні значення. На рис. 2.6 наведено графічну інтерпретацію поняття інтервалу кореляції. Інтервал кореляції є стороною прямокутника, площа якого дорівнює площі під кривою  $|K_x(\tau)|$  при  $\tau \geq 0$ .

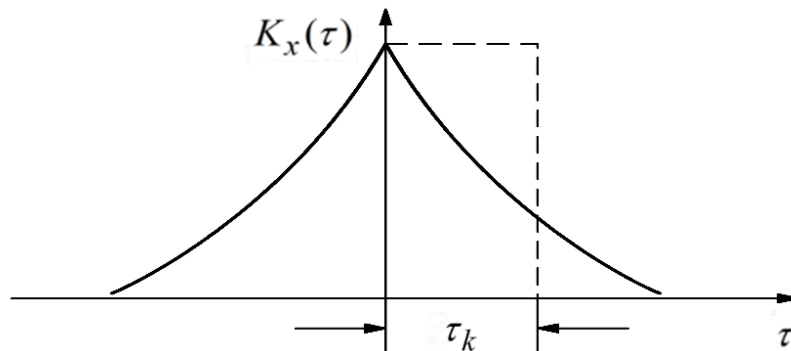


Рис. 2.6 Графічна інтерпретація поняття інтервалу кореляції

Встановимо зв'язок між ефективною шириною спектра і інтервалом кореляції в припущенні, що  $G_{x\max} = G_x(0)$ , а функція кореляції є невід'ємною монотонно спадною функцією, що дозволяє (2.27) вважати  $|K_x(\tau)| = K_x(\tau)$ . Знайдемо добуток  $\Delta\omega_{ef}\tau_k$  з урахуванням (2.24) та (2.27).

$$\Delta\omega_{ef}\tau_k = \frac{1}{G_x(0)} \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega \frac{1}{K_x(0)} \int_0^{\infty} K_x(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

Підставляючи в цей вираз формули (2.22) та (2.23), після нескладних перетворень отримаємо

$$\Delta\omega_{ef}\tau_k = \frac{\pi}{2} = const. \quad (2.29)$$

Аналогічно, використовуючи вирази (2.22), (2.23), (2.25) та (2.27), можна отримати

$$\Delta f_{ef} \tau_k = \frac{1}{4} = const. \quad (2.30)$$

Таким чином, добуток ефективної ширини спектру та інтервалу кореляції є постійною величиною. З цього випливає, що чим ширший енергетичний спектр, тим менший інтервал кореляції між його значеннями, та навпаки. Але ширина енергетичного спектра визначає швидкість зміни значень випадкового процесу: що більше  $\Delta \omega_{ef} \tau_k$  (чи що менше  $\tau_k$ ), то вище швидкість зміни процесу.

## 2.4. Білий шум та його характеристики

Особливе місце при аналізі процесів, що протікають у радіотехнічних та інформаційних системах, займає нормальний випадковий процес з нульовим математичним очікуванням та автокореляційною функцією:

$$K_x(\tau) = \begin{cases} A\delta(\tau), & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0, \end{cases} \quad (2.31)$$

де  $\delta(\tau)$  – дельта функція.

Такий випадковий процес отримав назву "білого шуму". Значення «білого шуму» при скільки завгодно малому значенні  $\tau$  некорельовані. При цьому, як випливає з

$$K_x(0) = D_x = A\delta(0) = \infty, \quad (2.32)$$

середня потужність білого шуму необмежена.

«Білий шум» є математичною абстракцією, яка суттєво спрощує аналіз процесів у радіотехнічних системах. У природі процесів типу «білого шуму» немає, але за певних припущеннях реальні перешкоди можна описати моделлю «білого шуму».

Знайдемо значення коефіцієнта  $A$  в (2.31). Для цього підставимо (2.31) в (2.21)

$$G_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} A\delta(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (2.33)$$

Використовуючи фільтруючу властивість дельта-функції при  $\tau = 0$ , отримаємо

$$G_x(\omega) = 2A = N_0 = \text{const}. \quad (2.34)$$

Звідси випливає, що «білий шум» має рівномірну спектральну щільність в діапазоні частот від  $-\infty$  до  $\infty$  зі спектральною щільністю потужності  $\frac{N_0}{2}$ .

Підставляючи це значення в (2.31), отримаємо

$$K_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} \infty, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Вираз (2.35) найчастіше використовується під час вирішення різних завдань радіотехніки. Свою назву «білий шум» отримав за аналогією зі світловим потоком, відбитим від аркуша білого паперу. Такий потік має рівномірний спектр у дуже широкому діапазоні частот.

Зважаючи на те, що автокореляційна функція «білого шуму» є дельта-функцією, «білий шум» часто називають дельта-корельованим випадковим процесом. Відсутність кореляції між будь-якими, скільки завгодно близькими значеннями «білого шуму» означає нескінченно велику швидкість зміни процесу.

У радіотехнічних завданнях моделлю «білого шуму», зокрема, описуються теплові та дробові шуми елементів радіотехнічних пристроїв.

**Теплові шуми** резисторів виникають через хаотичний тепловий рух заряду в провідних елементах. У середині резистора виникають електромагнітні поля, і на зовнішніх затискачах з'являється шумова різниця потенціалів. Енергетичний спектр шуму виявляється дуже широким через високу швидкість теплового руху електронів і описується виразом

$$G_x(\omega) = \frac{N_0}{2} = 2kT^0R, \quad (2.36)$$

де  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  В<sup>2</sup>с/град - постійна Больцмана,  $T^0$  - абсолютна температура (у градусах по Кельвіну),  $R$  - значення опору резистора.

З (2.33) випливає, що знизити інтенсивність  $\frac{N_0}{2}$  теплового шуму можна, зменшуючи  $R$ . Ось чому в радіолокації, радіоастрономії та космічному зв'язку застосовують глибоке охолодження вхідних ланцюгів радіоприймальних пристроїв.

**Дробовий шум** виникає у електронних приладах (лампах, транзисторах тощо). Природу дробового шуму можна пояснити з прикладу вакуумного діода, у якому електрони емітуються з катода і потім переміщуються до анода під впливом електричного поля. Струм, створюваний потоком електронів, є сумою коротких імпульсів струму, обумовлених переміщенням електронів від катода до анода. Хоча час прольоту електрона від катода до анода становить величину порядку  $10^{-9}$  с, за рахунок випадковості моментів вильоту електронів з поверхні катода сумарний струм носить випадковий характер. Енергетичний спектр дробового шуму також є рівномірним у дуже широкому діапазоні частот за рахунок малої тривалості кожного з імпульсів, що утворюють дробовий шум. Для оцінки енергетичного спектру дробового шуму використовується вираз

$$\frac{N_0}{2} = eI_0, \quad (2.37)$$

де  $I_0 = e\nu$  – середнє значення струму,  $\nu \approx 10^{16} \frac{1}{c}$  - середня кількість електронів, що досягають анода за одиницю часу,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл - електричний заряд, що переноситься кожним електроном. Співвідношення (2.37) отримало назву формули Шоттки.

### Питання до самоперевірки

1. Чому в якості числової характеристики випадкового процесу неможливо використовувати його спектр?
2. Надайте визначення спектральної щільності потужності випадкового процесу.

3. Запишіть властивості спектральної щільності потужності випадкового процесу.
4. Яку розмірність має спектральна щільність потужності випадкового процесу?
5. Запишіть теорему Вінера-Хінчина.
6. Надайте геометричне представлення кореляційних функцій і спектральних щільностей потужності для двох випадкових процесів з різною швидкістю зміни реалізацій.
7. Як визначається ефективна ширина спектра та яка її геометрична інтерпретація?
8. Як визначається інтервал кореляції та яка його геометрична інтерпретація?
9. Дайте визначення білого шуму та його характеристики.
10. Чому дорівнює потужність білого шуму в смузі частот  $[f_1, f_2]$ ?

## Лекція №3 Гаусівські та марківські випадкові процеси

- 3.1. Ймовірнісні характеристики гаусівського випадкового процесу.
- 3.2. Властивості гаусівського випадкового процесу.
- 3.3. Марківська послідовність.
- 3.4. Щільність ймовірності переходу і математична модель гаусівської марківської послідовності.

### 3.1. Ймовірнісні характеристики гаусівського випадкового процесу

Гаусівським випадковим процесом  $x(t)$  називається випадковий процес, який в кожному перетині є гаусівською випадковою величиною. Широке застосування гаусівських випадкових процесів обумовлено наступною властивістю. Якщо підсумувати велику кількість випадкових величин з рівновеликими вкладками, то їх сума наближається до гаусівської випадкової величини. Саме широке розповсюдження гаусівських випадкових процесів на практиці обумовило також таку їх іншу назву як **нормальний** випадковий процес.

#### *Практичні приклади в радіотехніці.*

Якщо на вхід приймального пристрою надходить сума перешкод від незалежних джерел приблизно однієї потужності, то сумарний процес тим ближче до гаусівського, чим більше число незалежних доданків. Розподіл доданків не грає ролі.

Якщо на вхід вузькосмугової системи подати широкосмуговий (імпульсний) процес, то процес на виході близький до гаусівського випадкового процесу, незалежно від розподілу вхідного сигналу. Ця властивість вузькосмугової системи називається нормалізацією випадкового процесу.

**Одновимірна щільність ймовірності** гаусівського випадкового процесу описується виразом

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x(t)}} e^{-\frac{(x-m_x(t))^2}{2\sigma_x^2(t)}}, \quad (3.1)$$

де  $m_x(t)$  – математичне очікування;  $\sigma_x^2(t)$  – дисперсія.

Вигляд одновірної щільності ймовірності гаусівського випадкового процесу показаний на рис. 3.1. Оскільки одновірна щільність ймовірності гаусівського випадкового процесу залежить від двох параметрів, її також позначають  $f(x, t) = N(m_x(t), \sigma_x^2(t))$ .

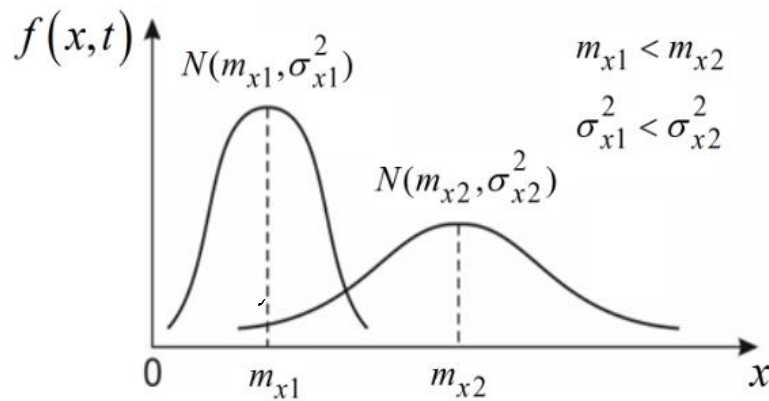


Рис. 3.1 Щільність ймовірності гаусівського випадкового процесу

**Одновірна функція розподілу** гаусівського випадкового процесу  $F(u, t)$  може бути представлена у вигляді:

$$F(u, t) = P(x(t) \leq u) = \int_{-\infty}^u f(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^u \frac{(x-m_x(t))^2}{2\sigma_x^2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-m_x(t)}{\sigma_x(t)} \\ z = \frac{u-m_x(t)}{\sigma_x(t)} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u-m_x(t)}{\sigma_x(t)}} e^{-\frac{(x-m_x(t))^2}{2\sigma_x^2(t)}} d\left(\frac{x-m_x(t)}{\sigma_x(t)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi(z). \quad (3.2)$$

Інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (3.3)$$

називається інтегралом Лапласа і є табличним. На рис. 3.2 наведено гаусівську щільність ймовірності  $f(x) = N(0,1)$  та  $\Phi(z) = F(z,t) = P(x(t) \leq z)$ .

Функція володіє властивістю

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z). \quad (3.4)$$

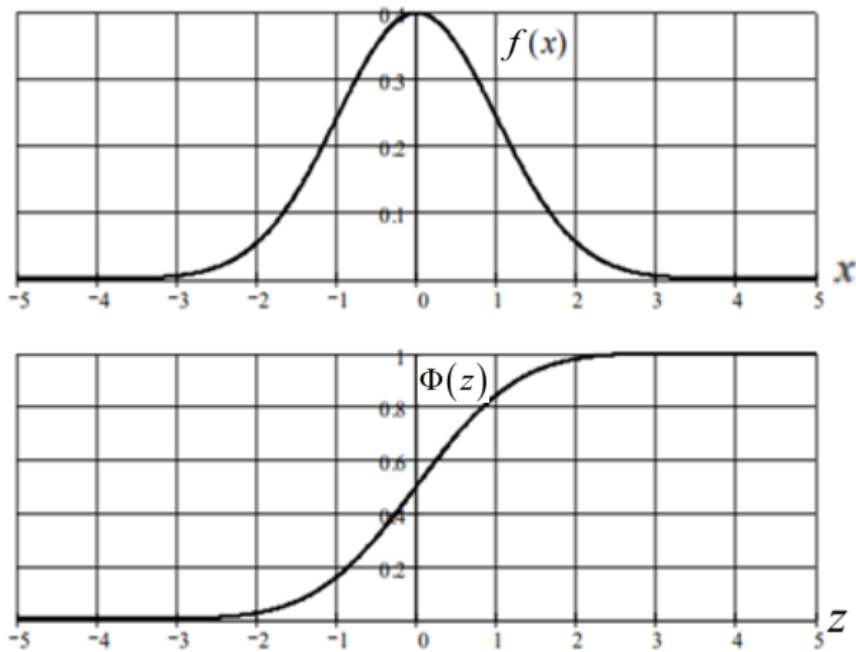


Рис. 3.2 Гаусівська щільність ймовірності  $f(x) = N(0,1)$  і інтеграл Лапласа  $\Phi(z)$

Враховуючи, що

$$F(u,t) = \Phi\left(\frac{u - m_x(t)}{\sigma_x(t)}\right), \quad (3.5)$$

а також властивість

$$P(v \leq x(t) \leq u) = F(u,t) - F(v,t), \quad (3.6)$$

може бути визначена відповідна ймовірність.

### **Приклад**

Помилка вимірювання відстані до цілі за допомогою радіолокаційної станції розподілена за гаусівським законом з  $\sigma_x = 15\text{м}$  та нульовим середнім. Знайти ймовірність того, що помилка вимірювання по модулю буде більше 20м.

Розв'язок.

Знайдемо спочатку ймовірність того, що помилка вимірювання відстані до цілі по модулю не перевищить 20м.

$$\begin{aligned} P(-20\text{м} \leq x(t) \leq 20\text{м}) &= F\left(\frac{20}{15}\right) - F\left(-\frac{20}{15}\right) = F(1.33) - F(-1.33) = \\ &= F(1.33) - (1 - F(1.33)) = 0.9082 - (1 - 0.9082) = 0.9082 - 0.0918 = 0.8164. \end{aligned}$$

Ймовірність того, що помилка вимірювання по модулю буде більше 20м дорівнює

$$P(|x(t)| > 20\text{м}) = 1 - P(|x(t)| \leq 20\text{м}) = 1 - 0.8164 = 0.1836.$$

Часто виникає зворотна задача визначення параметрів гаусівської щільності ймовірності випадкової величини  $x(t)$  або границь інтервалу при заданій ймовірності потрапляння її значень у цей інтервал.

### **Приклад**

Розглядається гаусівська випадкова величина  $x(t)$  з нульовим середнім та середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_x$ . Якою повинна бути величина  $a$ , якщо потрібно, щоб ймовірність того, що випадкова величина  $x(t)$  по модулю не перевищувала  $a/2$ , дорівнювала 0.9?

Розв'язок.

$$P\left(|x(t)| \leq \frac{a}{2}\right) = P\left(-\frac{a}{2} \leq x(t) \leq \frac{a}{2}\right) \leq 0.9.$$

З іншого боку, використовуючи інтеграл ймовірності, одержимо

$$P\left(-\frac{a}{2} \leq x(t) \leq \frac{a}{2}\right) = \Phi\left(\frac{a}{2\sigma_x}\right) - [1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sigma_x}\right)] = 2\Phi\left(\frac{a}{2\sigma_x}\right) - 1 \leq 0.9;$$

$$\Phi\left(\frac{a}{2\sigma_x}\right) \leq 0.95;$$

$$\frac{a}{2\sigma_x} \leq \Phi^{-1}(0.95) = 1.65;$$

$$a \leq 3.3\sigma_x.$$

В загальному випадку гаусівський випадковий процес описується  $n$ -вимірною щільністю ймовірності вигляду

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-0.5(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)\right\}, \quad (3.7)$$

де  $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$  -  $n$ -мірний вектор, компонентами якого є значення випадкового процесу в обраних часових перетинах  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ ;  $\mathbf{m}_x^T = (m_x(t_1), \dots, m_x(t_n))$  -  $n$ -мірний вектор, компонентами якого є математичні очікування випадкового процесу в обраних часових перетинах  $\mathbf{t}$ ;  $\mathbf{K}$  - кореляційна матриця перетинів гаусівського випадкового процесу, яка має вигляд

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}; \quad (3.8)$$

$K_{ij} = M \left[ \overset{\circ}{x}(t_i), \overset{\circ}{x}(t_j) \right] = K_x(t_i, t_j)$  кореляційні моменти відповідних перетинів

гаусівського випадкового процесу, при цьому

$K_{ii} = M \left[ \overset{\circ}{x}(t_i), \overset{\circ}{x}(t_i) \right] = K_x(t_i, t_i) = \sigma_x^2(t_i)$  - дисперсії.

Таким чином, гаусівський випадковий процес повністю визначається своїми моментами до другого порядку включно, а саме:  $m_x(t_i), \sigma_x^2(t_i), K_x(t_i, t_j), i, j = \overline{1, n}$ .

Для ілюстрації і в силу практичної важливості отримаємо двовимірну щільність ймовірності ГВП. При  $n=2$  кореляційна матриця  $\mathbf{K}$  має вигляд:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2(t_1) & \sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)r_x(t_1, t_2) \\ \sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)r_x(t_1, t_2) & \sigma_x^2(t_2) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

де  $r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$  - коефіцієнти кореляції між перетинами  $t_1$  і  $t_2$ .

Детермінант матриці  $\mathbf{K}$  визначається за формулою

$$\det(\mathbf{K}) = \sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2)(1 - r_x^2(t_1, t_2)), \quad (3.10)$$

Зворотна матриця має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{-1} &= \det^{-1}(\mathbf{K}) \left| (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \right| = \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2)(1 - r_x^2(t_1, t_2))} \begin{vmatrix} \sigma_x^2(t_2) & -\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)r_x(t_1, t_2) \\ -\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)r_x(t_1, t_2) & \sigma_x^2(t_1) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{(1 - r_x^2(t_1, t_2))} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2(t_1)} & -\frac{r_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \\ -\frac{r_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} & \frac{1}{\sigma_x^2(t_2)} \end{vmatrix}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

де  $\alpha_{ij}$  - алгебраїчні доповнення  $ij$ -елемента матриці  $\mathbf{K}$ .

Тоді квадратична форма  $(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)$  має вигляд:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) &= \frac{1}{1 - r_x^2(t_1, t_2)} \times \\
&\times \left( \frac{x_1 - m_x(t_1)}{\sigma_x^2(t_1)} - \frac{r_x(t_1, t_2)(x_2 - m_x(t_2))}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}, -\frac{r_x(t_1, t_2)(x_1 - m_x(t_1))}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} + \frac{x_2 - m_x(t_2)}{\sigma_x^2(t_2)} \right) \begin{pmatrix} x_1 - m_x(t_1) \\ x_2 - m_x(t_2) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{1 - r_x^2(t_1, t_2)} \left( \frac{(x_1 - m_x(t_1))^2}{\sigma_x^2(t_1)} + \frac{(x_2 - m_x(t_2))^2}{\sigma_x^2(t_2)} - \frac{2r_x(t_1, t_2)(x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2))}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \right). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Таким чином, двовимірну щільність ймовірності гаусівського випадкового процесу можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = f(x_1, x_2, t_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)(1 - r_x^2(t_1, t_2))} \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r_x^2(t_1, t_2))} \left( \frac{(x_1 - m_x(t_1))^2}{\sigma_x^2(t_1)} + \frac{(x_2 - m_x(t_2))^2}{\sigma_x^2(t_2)} - \frac{2r_x(t_1, t_2)(x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2))}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \right) \right\}. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

### 3.2. Властивості гаусівського випадкового процесу

Гаусівський випадковий процес має такі властивості:

1. Гаусівський випадковий процес повністю визначається числовими характеристиками до другого порядку включно (математичним очікуванням, дисперсією, кореляційною функцією). Це означає, що якщо знати кореляційні моменти  $K_{ij}$  між будь-якою парою перетинів, то можна знайти кореляційну матрицю  $\mathbf{K}$  для  $n$  перетинів і тим самим визначити  $n$ -мірну щільність ймовірності.
2. Якщо перетини гаусівського випадкового процесу некорельовані, то вони і незалежні. Справедливо тільки для гаусівського випадкового процесу. Поклавши  $r_x(t_1, t_2) = 0$ ,  $t_1 \neq t_2$ , отримаємо  $f(x_2, t_2 / x_1, t_1) = f(x_2, t_2)$  - умова незалежності.
3. Поняття стаціонарності у вузькому і широкому сенсі для гаусівського випадкового процесу збігаються. Це обумовлено тим, що  $n$ -вимірні

- щільність ймовірності повністю визначається моментами першого і другого порядків.
4. Умовна щільність ймовірності гаусівського випадкового процесу також є гаусівською.
  5. Сума різних гаусівських випадкових процесів є гаусівський випадковий процес.
  6. Лінійні перетворення гаусівського випадкового процесу дають гаусівський випадковий процес з новими параметрами.
  7. Нелінійне перетворення гаусівського випадкового процесу позбавляє його властивості гаусовості рис. 3.3.

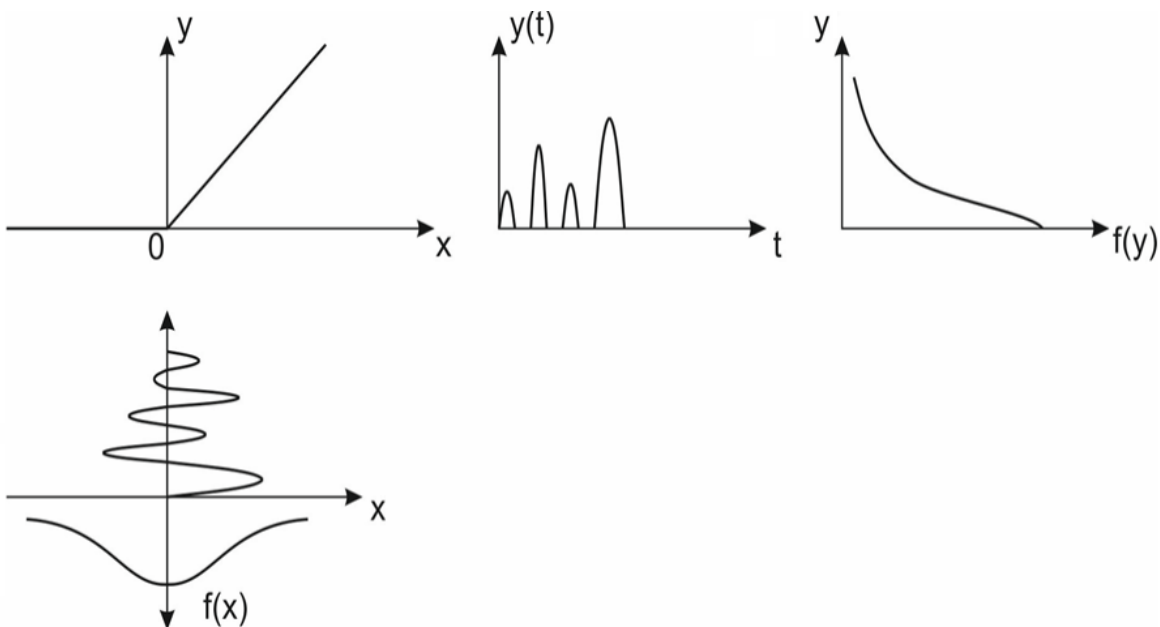


Рис. 3.3 Нелінійне перетворення гаусівського випадкового процесу

8. Властивість нормалізації. При впливі на вузькосмуговий фільтр широкополосного випадкового процесу  $x(t)$  з довільною щільністю ймовірності і смугою  $\Delta F_x$ , що перебиває смугу пропускання фільтра  $\Delta F_\phi$  рис. 3.4, перетворений процес нормалізується і стає тим ближче до гаусівського випадкового процесу, чим краще виконується нерівність  $\Delta F_x \gg \Delta F_\phi$ . На рис. 3.5 дану властивість продемонстровано на прикладі надходження на вхід коливального контуру хаотичної послідовності коротких імпульсів.

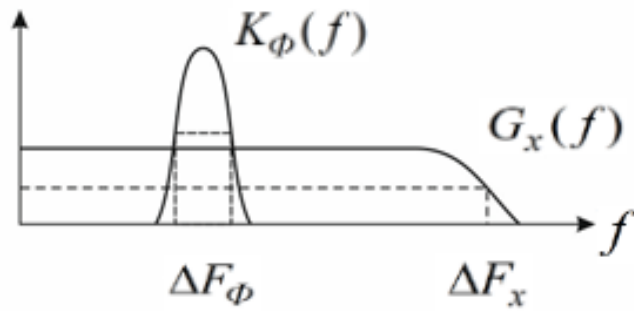


Рис. 3.4 Спектральна щільність випадкового процесу і амплітудно-частотна характеристика фільтра

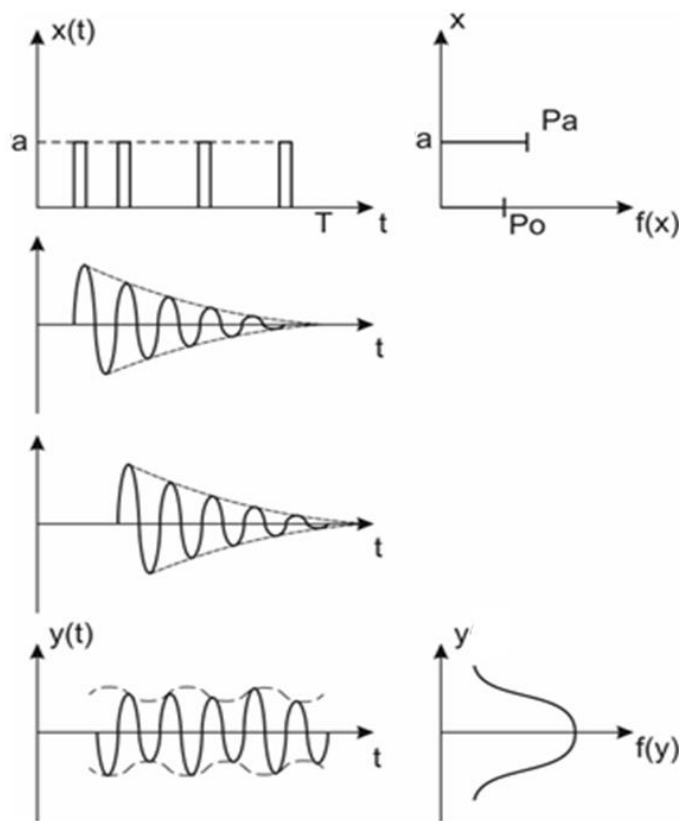


Рис. 3.5 Ефект нормалізації імпульсного процесу візькосмуговим фільтром

### 3. Марківська послідовність

Марківські процеси є частковим видом випадкових процесів. Однак вони широко застосовуються при вирішенні різних прикладних задач. Це обумовлено тим, що відсутність післядії в марківських моделях дозволяє отримувати

рекурентні алгоритми обробки інформації, які відносно просто можуть бути реалізовані на ЦВМ.

Класифікація марківських процесів наведена в табл. 1.1, де введено такі позначення: Д - дискретний, Н - неперервний.

Таблиця 3.1

Класифікація марківських процесів

№	Аргумент	Процес	Назва випадкового процесу
1.	Д	Д	Марковський ланцюг
2.	Д	Н	Марковська послідовність
3.	Н	Д	Дискретний марківський процес
4.	Н	Н	Неперервний марківський процес

Обмежимося розглядом лише одного виду марківських процесів неперервнозначної марківської послідовності, яка дозволяє отримати математичні моделі сигналів і завод в дискретному часі, адекватні цифровим ЕОМ.

Неперервнозначна послідовність  $x(t_k)$  називається простою марківською послідовністю, якщо умовна щільність ймовірності залежить тільки від значень випадкового процесу в попередній момент часу  $k - 1$  і не залежить від інших значень в більш ранні моменти часу  $k - 2, k - 3, \dots$

$$f(x_k, t_k | x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1, t_{k-1}, t_{k-2}, \dots, t_1) = f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}). \quad (3.13)$$

Дана властивість дозволяє представити спільну щільність ймовірності марківської послідовності у вигляді

$$f(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = f(x_1, t_1) f(x_2, t_2 | x_1, t_1) \times \\ \times f(x_3, t_3 | x_1, x_2, t_1, t_2) \dots f(x_n, t_n | x_1, \dots, x_{n-1}, t_1, \dots, t_{n-1}) =$$

$$= f(x_1, t_1) \prod_{k=2}^n f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}). \quad (3.14)$$

Статистичний зв'язок між суміжними станами ще називають пам'яттю на один крок, а умовну щільність ймовірності  $f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1})$  - щільність ймовірності переходу з  $k - 1$  кроку на  $k$ -й крок.

Визначення марковської послідовності не означає, що стан  $x_k$  не залежить від  $x_{k-2}$ ,  $x_{k-3}$  і т.д. Це справедливо лише при відомому  $x_{k-1}$ . Якщо ж  $x_{k-1}$  невідомо, то стан  $x_k$  визначається всією наявною передісторією випадкового процесу.

### **Приклад**

Маємо три сусідніх перетини марківської послідовності  $x(t_1)$ ,  $x(t_2)$ ,  $x(t_3)$ . Вони характеризуються умовними щільностями ймовірності  $f(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ ,  $f(x_3, t_3 | x_2, t_2)$ . Визначимо умовну щільність ймовірності  $f(x_3, t_3 | x_1, t_1)$

$$\begin{aligned} f(x_3, t_3 | x_1, t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_3, x_2, t_3, t_2 | x_1, t_1) dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_3, t_3 | x_2, t_2, x_1, t_1) f(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Враховуючи марківську властивість, останнє рівняння можна записати у вигляді

$$f(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_3, t_3 | x_2, t_2) f(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2. \quad (3.16)$$

Таким чином, маючи проміжні умовні щільності ймовірності для моментів часу  $t_2, t_1$  і  $t_3, t_2$ , можна отримати умовну щільність процесу для моментів часу  $t_3, t_1$ .

В загальному випадку рівняння (3.16) для моментів часу  $t_n > t_k > t_m$  можна переписати у вигляді

$$f(x_n, t_n | x_m, t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n, t_n | x_k, t_k) f(x_k, t_k | x_m, t_m) dx_k. \quad (3.17)$$

Рівняння (3.17) отримало назву рівняння Колмогорова-Чепмена.

Воно дозволяє визначити умовну щільність процесу між довільними перерізами випадкового процесу.

Також дуже важливим є завдання визначення одномірної безумовної щільності ймовірності на  $n$ -му кроці. Маючи  $f(x_n, t_n | x_m, t_m)$  і  $f(x_m, t_m)$  з використанням теореми множення ймовірностей і властивості погодженості,  $f(x_n, t_n)$  визначається за формулою:

$$f(x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n, t_n | x_m, t_m) f(x_m, t_m) dx_m. \quad (3.18)$$

З останнього виразу випливає, що щільності ймовірності значень послідовності на сусідніх кроках пов'язані рекурентним рівнянням

$$f(x_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}) f(x_{k-1}, t_{k-1}) dx_{k-1}. \quad (3.19)$$

Отримана формула дозволяє обчислювати одновимірну щільність ймовірності  $f(x_k, t_k)$  рекурентно при заданій початковій умові  $f(x_1, t_1)$

Марківська послідовність називається однорідною, якщо однокрокові щільності ймовірності переходу  $f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1})$  не залежать від  $k$ . Однорідна марківська послідовність називається стаціонарною, якщо безумовні щільності ймовірності  $f(x_k, t_k)$  не залежать від  $k$ .

### 3.4. Щільність ймовірності переходу і математична модель гаусівської марківської послідовності

Визначимо умовну щільність ймовірності  $f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1})$  гаусівського випадкового процесу. З використанням теореми множення ймовірностей її можна представити у вигляді:

$$f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}) = \frac{f(x_k, x_{k-1}, t_k, t_{k-1})}{f(x_{k-1}, t_{k-1})}. \quad (3.20)$$

Двовірна гаусівська щільність ймовірності  $f(x_k, x_{k-1}, t_k, t_{k-1})$  має вигляд

$$f(x_k, x_{k-1}, t_k, t_{k-1}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x(t_k)\sigma_x(t_{k-1})(1-r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \left( \frac{(x_k - m_x(t_k))^2}{\sigma_x^2(t_k)} + \frac{(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))^2}{\sigma_x^2(t_{k-1})} + \frac{2r_x(t_{k-1}, t_k)(x_k - m_x(t_k))(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))}{\sigma_x(t_k)\sigma_x(t_{k-1})} \right)\right\}. \quad (3.21)$$

З використанням останнього виразу отримаємо:

$$f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t_k)(1-r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \left( \frac{(x_k - m_x(t_k))^2}{\sigma_x^2(t_k)} + \frac{(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))^2}{\sigma_x^2(t_{k-1})} + \frac{2r_x(t_{k-1}, t_k)(x_k - m_x(t_k))(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))}{\sigma_x(t_k)\sigma_x(t_{k-1})} \right)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))^2}{2\sigma_x^2(t_{k-1})}\right\}. \quad (3.22)$$

Використаємо наступні перетворення:

$$\frac{(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))^2}{2\sigma_x^2(t_{k-1})} - \frac{1}{2(1-r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \times$$

$$\times \left( \frac{(x_k - m_x(t_k))^2}{\sigma_x^2(t_k)} + \frac{(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))^2}{\sigma_x^2(t_{k-1})} - \frac{2r_x(t_{k-1}, t_k)(x_k - m_x(t_k))(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))}{\sigma_x(t_k)\sigma_x(t_{k-1})} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2(1-r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{(x_k - m_x(t_k))^2}{\sigma_x^2(t_k)} + \frac{r_x^2(t_{k-1}, t_k)(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))^2}{\sigma_x^2(t_{k-1})} - \frac{2r_x(t_{k-1}, t_k)(x_k - m_x(t_k))(x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))}{\sigma_x(t_k)\sigma_x(t_{k-1})} \right) = \\
& = -\frac{1}{2\sigma_x^2(t_k)(1 - r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \times \\
& \times \left( (x_k - m_x(t_k))^2 - 2r_x(t_{k-1}, t_k) \frac{\sigma_x(t_k)}{\sigma_x(t_{k-1})} (x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))(x_k - m_x(t_k)) + r_x^2(t_{k-1}, t_k) \frac{\sigma_x^2(t_k)}{\sigma_x^2(t_{k-1})} (x_{k-1} - m_x(t_{k-1}))^2 \right) = \\
& = -\frac{1}{2\sigma_x^2(t_k)(1 - r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \left( x_k - m_x(t_k) - r_x(t_{k-1}, t_k) \frac{\sigma_x(t_k)}{\sigma_x(t_{k-1})} (x_{k-1} - m_x(t_{k-1})) \right)^2. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t_k)(1 - r_x^2(t_{k-1}, t_k))}} \times \\
& \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2(t_k)(1 - r_x^2(t_{k-1}, t_k))} \left( x_k - m_x(t_k) - r_x(t_{k-1}, t_k) \frac{\sigma_x(t_k)}{\sigma_x(t_{k-1})} (x_{k-1} - m_x(t_{k-1})) \right)^2 \right\} \\
& \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Умовна щільність ймовірності є гаусівською з математичним очікуванням і дисперсією:

$$\mathbf{M}[x(t_k) | x(t_{k-1}) = x_{k-1}] = m_x(t_k) - r_x(t_{k-1}, t_k) \frac{\sigma_x(t_k)}{\sigma_x(t_{k-1})} (x_{k-1} - m_x(t_{k-1})) = m_x(t_k | x_{k-1}, t_{k-1}); \quad (3.25)$$

$$\mathbf{M}[(x(t_k) - m_x(t_k | x_{k-1}, t_{k-1}))^2 | x(t_{k-1}) = x_{k-1}] = \sigma_x^2(t_k)(1 - r_x^2(t_{k-1}, t_k)) = \sigma_x^2(t_k | x_{k-1}, t_{k-1}). \quad (3.26)$$

Умовна дисперсія  $\sigma_x^2(t_k | x_{k-1}, t_{k-1})$  не залежить від  $x_{k-1}$ . Таким чином, умовну щільність ймовірності  $f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1})$  можна представити у вигляді

$$f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x(t_k | x_{k-1}, t_{k-1})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2(t_k | x_{k-1}, t_{k-1})} (x_k - m_x(t_k | x_{k-1}, t_{k-1}))^2 \right\} \quad (3.27)$$

Розглянемо випадковий процес  $x(t_k)$ , який формується на основі моделі у вигляді різницевого рівняння

$$x(t_k) = \rho x(t_{k-1}) + \omega(t_k), \quad (3.28)$$

де  $\omega(t_{k-1})$  - некорельована послідовність гаусівських випадкових величин  $\omega(t_{k-1})$  з  $\mathbf{M}[\omega(t_{k-1})] = 0$ ,  $\sigma_\omega^2 = \mathbf{M}[\omega^2(t_{k-1})] = \sigma_x^2(1 - \rho^2)$ ;  $\rho$  - відома константа.

Визначимо умовну щільність ймовірності  $f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1})$ . Якщо початковий стан  $x(t_0)$  є гаусівською випадковою величиною, то випадковий процес  $x(t_k)$  буде гаусівською марківською послідовністю.

Знайдемо умовне математичне очікування ВП  $x(t_k)$  за умови, що його значення  $x(t_k) = x_{k-1}$  відомо. Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} m_x(t_k | x_{k-1}, t_{k-1}) &= \mathbf{M}[x(t_k) | x(t_{k-1}) = x_{k-1}] = \mathbf{M}[\rho x(t_{k-1}) + \omega(t_{k-1}) | x(t_{k-1}) = x_{k-1}] = \\ &= \mathbf{M}[\rho x(t_{k-1}) | x(t_{k-1}) = x_{k-1}] + \mathbf{M}[\omega(t_k) | x(t_{k-1}) = x_{k-1}] = \rho x_{k-1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Знайдемо умовну дисперсію випадкового процесу  $x(t_k)$  за умови, що його значення  $x(t_k) = x_{k-1}$  відомо. Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t_k | x_{k-1}, t_{k-1}) &= \mathbf{M}[(x(t_k) - m_x(t_k | x_{k-1}, t_{k-1}))^2 | x(t_{k-1}) = x_{k-1}] = \\ &= \mathbf{M}[\omega^2(t_k) | x(t_{k-1}) = x_{k-1}] = \sigma_x^2(1 - \rho^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

З урахуванням отриманих виразів умовну щільність ймовірності  $f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1})$  можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
f(x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t_k | x_{k-1}, t_{k-1})} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2(t_k | x_{k-1}, t_{k-1})} (x_k - m_x(t_k | x_{k-1}, t_{k-1}))^2 \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x^2(1-\rho^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)} (x_k - \rho x_{k-1})^2 \right\}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Цей вираз збігається із загальним виразом для умовної щільності ймовірності гаусівської марківської послідовності (3.27) при  $\sigma_x^2(t_k) = \sigma_x^2(t_{k-1}) = \sigma_x^2$ ,  $m_x(t_k) = m_x(t_{k-1}) = 0$ ,  $r_x(t_{k-1}, t_k) = \rho$ . Таким чином, розглянута модель формує асимптотично стаціонарну марківську послідовність з нульовим математичним очікуванням. Якщо покласти початковий стан

$$f(x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma_x^2}}, \tag{3.32}$$

то марківська послідовність буде стаціонарною з першого такту.

### Питання до самоперевірки

1. Надайте математичне визначення одномірної щільності ймовірності гаусівського випадкового процесу і її геометричне представлення.
2. Надайте математичне визначення одномірної функції розподілу ймовірностей гаусівського випадкового процесу
3. Як розраховується ймовірність того, що значення випадкового процесу у відповідний момент часу попаде в заданий інтервал, з використанням інтегралу Лапласа?
4. Надайте вираз  $n$ -мірної щільності ймовірності гаусівського випадкового процесу. Поясніть зміст її параметрів.
5. Поясніть математично властивість: якщо перетини гаусівського випадкового процесу некорельовані, то вони і незалежні.

6. Пояснити математично, чому поняття стаціонарності у вузькому і широкому сенсі для гаусівського випадкового процесу збігаються.
7. Математичне визначення марківської властивості випадкової неперервнозначної послідовності.
8. Запишіть і поясніть рівняння Колмогорова-Чепмена.
9. Запишіть і поясніть вираз для щільності ймовірності переходу гаусівської марківської послідовності. Як визначаються її параметри.
10. Запишіть математичну модель марківської послідовності у вигляді різницевого рівняння. Надайте вираз для щільності ймовірності переходу цієї марківської послідовності.

## Лекція №4 Вплив випадкових процесів на лінійні системи

- 4.1. Постановка задачі аналізу.
- 4.2. Перетворення математичного очікування випадкового процесу.
- 4.3. Перетворення кореляційної функції випадкового процесу.
- 4.4. Перетворення спектральної щільності лінійним пристроєм в стаціонарному режимі.
- 4.5. Диференціювання випадкових процесів.
- 4.6. Вплив білого шуму на полосовий вузькосмуговий фільтр.

### 1. Постановка задачі аналізу

#### *Лінійний оператор.*

Оператор  $L$  є лінійним, якщо виконуються властивості:

1. Адитивність

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2). \quad (4.1)$$

2. Скалярний множник можна виносити за оператор

$$L(\alpha x) = \alpha L(x). \quad (4.2)$$

#### *Лінійний пристрій*

В радіоелектронних системах процеси, пов'язанні з фільтрацією, підсиленням, затримкою, диференціюванням, інтегруванням є лінійними. Тому такі системи на 70%-80% складаються з лінійних пристроїв.

Лінійні пристрої з детермінованими, постійними параметрами описуються імпульсною характеристикою  $g(t)$  і коефіцієнтом передачі  $K(j\omega)$ , які зв'язані перетворенням Фур'є

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (4.3)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.4)$$

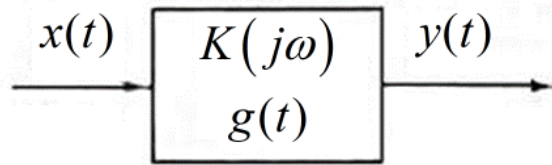


Рис.4.1 Лінійний пристрій з постійними параметрами

Якщо вхідний сигнал *детермінований*, то реакція пристрою при нульових початкових умовах визначається за допомогою інтегралу Дюамеля

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Спектр сигналу на виході визначається за формулою

$$S_y(j\omega) = K(j\omega) S_x(j\omega), \quad (4.6)$$

де  $S_x(j\omega)$  - спектр сигналу  $x(t)$  визначається за формулою

$$S_x(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (4.7)$$

Завдання досліджень в даній темі наступні. Заданий лінійний пристрій, який описується імпульсною характеристикою  $g(t)$  і коефіцієнтом передачі  $K(j\omega)$ . На його вхід поступають реалізації випадкового процесу  $x(t)$ , а на виході формуються реалізації іншого випадкового процесу  $y(t)$ . Математичне очікування  $m_x(t)$ , кореляційна функція  $K_x(t_1, t_2)$ , а у випадку стаціонарності і спектральна щільність  $G_x(\omega)$  випадкового процесу  $x(t)$  є відомими. Необхідно

визначити математичне очікування  $m_y(t)$ , кореляційну функцію  $K_y(t_1, t_2)$  і спектральну щільність  $G_y(\omega)$  випадкового процесу  $y(t)$ .

#### 4.2. Перетворення математичного очікування випадкового процесу

Визначимо математичне очікування  $m_y(t)$  випадкового процесу  $y(t)$  рис. 4.2.

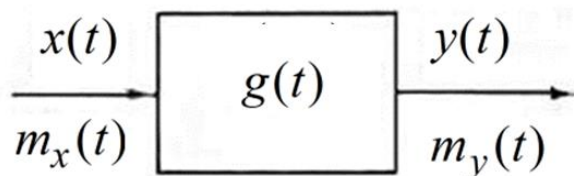


Рис. 4.2 Перетворення математичного очікування випадкового процесу

Якщо вхідний сигнал  $x(t)$  випадковий, то реакція пристрою при нульових початкових умовах визначається за допомогою інтегралу Дюамеля (4.5).

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (4.8)$$

Використаємо наближене представлення інтегралу (4.8) у вигляді

$$y(t) \approx \sum_{i=1}^m x(\tau_i) g(t - \tau_i) \Delta \tau. \quad (4.9)$$

Застосовуючи операцію математичного очікування, отримаємо:

$$\begin{aligned} m_y(t) = \mathbf{M}[y(t)] &\approx \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^m x(\tau_i) g(t - \tau_i) \Delta\right] = \sum_{i=1}^m \mathbf{M}[x(\tau_i)] g(t - \tau_i) \Delta = \\ &= \sum_{i=1}^m m_x(\tau_i) g(t - \tau_i) \Delta \end{aligned} \quad (4.10)$$

Якщо спрямувати  $\Delta \rightarrow 0$ , то наближена рівність (4.10) переходить в інтеграл

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (4.11)$$

Ця формула показує, що *операції взяття математичного очікування і операцію інтегрування можна змінювати місцями*. Цей результат ми використаємо в подальшому.

Для стаціонарного вхідного випадкового процесу  $x(t)$ , у якого  $m_x(t) = m_x$ , отримаємо

$$m_y(t) = m_x \int_0^t g(t-\tau) d\tau. \quad (4.12)$$

Навіть, коли вхідний випадковий процес  $x(t)$  стаціонарний, реакція пристрою є нестаціонарною. Постійне значення  $m_y(t) = m_y$  встановиться через час, який дорівнює часу перехідних процесів  $\tau_{g0}$ .

### 4.3. Перетворення кореляційної функції випадкового процесу

Визначимо кореляційну функцію  $K_y(t_1, t_2)$  випадкового процесу  $y(t)$  рис. 4.3.

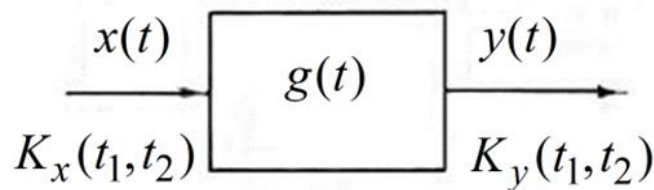


Рис. 4.3 Перетворення кореляційної функції випадкового процесу

За визначенням  $K_y(t_1, t_2) = \mathbf{M}[y(t_1) y(t_2)]$ . Центрований процес

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau - \int_0^t m_x(\tau) g(t-\tau) d\tau = y(t) - m_y(t). \quad (4.13)$$

З урахуванням (4.13) отримаємо

$$\begin{aligned}
 K_y(t_1, t_2) &= \mathbf{M}\left[\int_0^{t_1} x(\tau_1)g(t_1 - \tau_1)d\tau_1 \int_0^{t_2} x(\tau_2)g(t_2 - \tau_2)d\tau_2\right] = \\
 &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{M}[x(\tau_1)x(\tau_2)]g(t_1 - \tau_1)g(t_2 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \\
 &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_1, \tau_2)g(t_1 - \tau_1)g(t_2 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Для стаціонарного вхідного процесу  $x(t)$ , у якого  $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1)$ , отримаємо

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_2 - \tau_1)g(t_1 - \tau_1)g(t_2 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2. \tag{4.15}$$

На ділянці перехідного процесу  $\tau_{g0}$  кореляційна функція  $K_y(t_1, t_2)$  залежить від двох аргументів  $t_1, t_2$ .

Дисперсія визначається за формулою

$$\sigma_y^2(t) = K_y(t, t) = \int_0^t \int_0^t K_x(\tau_2 - \tau_1)g(t - \tau_1)g(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2. \tag{4.16}$$

Дисперсія  $\sigma_y^2(t)$  на ділянці перехідного процесу  $\tau_{g0}$  також залежить від часу  $t$ .

### **Приклад**

Білий шум  $x(t)$  в момент  $t = 0$  подається на вхід  $RC$  - ланцюга рис. 4.4.

$$K_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau); \tag{4.17}$$

$$g(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \alpha = (RC)^{-1}. \quad (4.18)$$

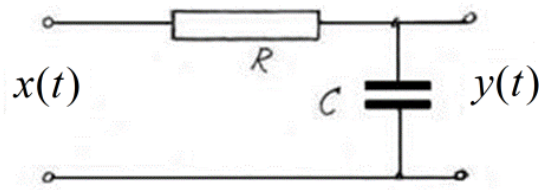


Рис. 4.4 Схема  $RC$  - ланцюга

Розв'язок.

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_2 - \tau_1) g(t_1 - \tau_1) g(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{N_0}{2} \delta(\tau_2 - \tau_1) \alpha^2 e^{-\alpha(t_1 - \tau_1)} e^{-\alpha(t_2 - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= |\tau_2 = \tau_1| = \frac{N_0 \alpha^2}{2} \int_0^{t_1} e^{-\alpha(t_1 + t_2)} e^{2\alpha\tau_1} d\tau_1 = \\ &= \frac{N_0 \alpha^2}{2} e^{-\alpha(t_1 + t_2)} \frac{1}{2\alpha} \int_0^{t_1} e^{2\alpha\tau_1} d2\alpha\tau_1 = \frac{N_0 \alpha}{4} e^{-\alpha(t_1 + t_2)} (e^{2\alpha t_1} - 1) = \\ &= |\tau_2 = t_1 + \tau, t_2 > t_1| = \frac{N_0 \alpha}{4} e^{-\alpha\tau} (1 - e^{-2\alpha t_1}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Кореляційна функція є симетричною відносно аргументів  $t_1, t_2$ . Тому

$$K_y(t_1, t_2) = K_y(t_1, \tau) = \frac{N_0 \alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|} (1 - e^{-2\alpha t_1}). \quad (4.20)$$

Кореляційна функція при  $t_1 \rightarrow \infty$  в стаціонарному режимі рис. 4.5 дорівнює

$$K_y(\tau) = \frac{N_0 \alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (4.21)$$

Дисперсія

$$\sigma_y^2 = K_y(t_1, t_1) = K_y(t_1, \tau = 0) = \frac{N_0\alpha}{4}(1 - e^{-2\alpha t_1}). \quad (4.22)$$

При  $t_1 \rightarrow \infty$  дисперсія в стаціонарному режимі рис. 4.6 дорівнює

$$\sigma_y^2 = \frac{N_0\alpha}{4}. \quad (4.23)$$

При стаціонарних вхідних впливах вихідний процес є асимптотично стаціонарним (тобто при великих  $t$ ).

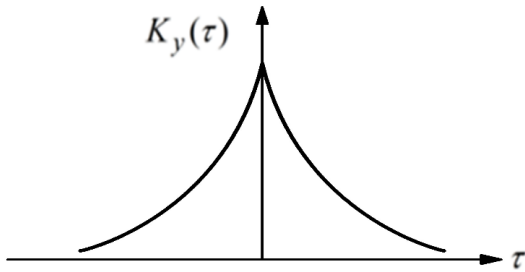


Рис. 4.5 Кореляційна функція процесу на виході RC - ланцюга.

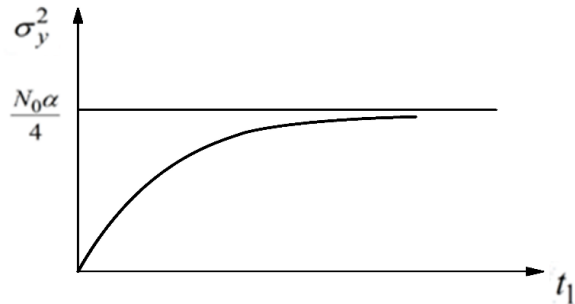


Рис.4.6 Дисперсія процесу на виході RC - ланцюга.

#### 4.4. Перетворення спектральної щільності лінійним пристроєм в стаціонарному режимі

Визначимо спектральну щільність потужності  $G_y(\omega)$  випадкового процесу  $y(t)$  рис. 4.7.

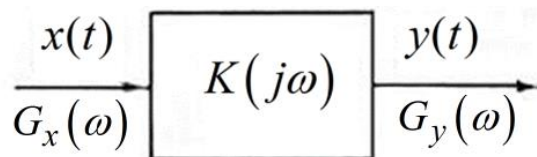


Рис. 4.7. Перетворення спектральної щільності лінійним пристроєм

Лінійний пристрій має коефіцієнт передачі

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.24)$$

де  $|K(j\omega)|$  - амплітудно-частотна характеристика лінійного пристрою;  
 $\varphi(\omega)$  - фазо-частотна характеристика лінійного пристрою.

Аналіз частотних характеристик процесів здійснюється в стаціонарному режимі на вході і виході пристрою. Спектральна щільність потужності  $G_y(\omega)$  стаціонарного ергодичного випадкового процесу  $y(t)$  визначається за формулою

$$G_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{y_j}(j\omega)S_{y_j}^*(j\omega)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K(j\omega)S_{x_j}(j\omega)K^*(j\omega)S_{x_j}^*(j\omega)}{T} =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{S_x(j\omega)S_x^*(j\omega)}{T} \right] K(j\omega)K^*(j\omega) = G_x(\omega)|K(j\omega)|^2. \quad (4.25)$$

Спектральна щільність потужності  $G_x(\omega)$  вхідного процесу перетворюється з коефіцієнтом  $|K(j\omega)|^2$ , де  $|K(j\omega)|^2$  - коефіцієнт передачі лінійного пристрою по потужності.

### ***Проходження білого шуму крізь ідеальний фільтр нижніх частот***

Аналіз будемо проводити в стаціонарному режимі на вході і виході пристрою. Розглянемо рис. 4.8 ідеальний фільтр нижніх частот:

$$K(\omega) = \begin{cases} K, & -\Omega_m \leq \omega \leq \Omega_m, \\ 0, & \omega < -\Omega_m, \omega > \Omega_m. \end{cases} \quad (4.26)$$

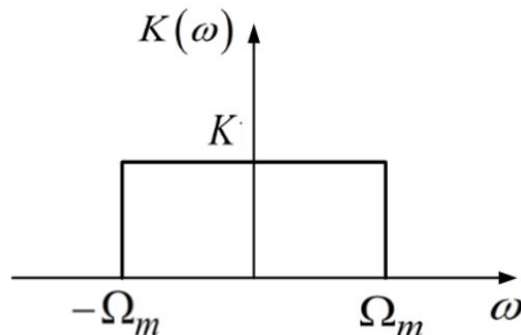


Рис. 4.8 Амплітудно-частотна характеристика ідеального фільтра низьких частот

Спектральна щільність вхідного білого шуму  $G_x(\omega) = \frac{N_0}{2}$ . Тоді спектральна щільність вихідного процесу визначається за формулою

$$G_y(\omega) = \begin{cases} K^2 \frac{N_0}{2}, & -\Omega_m \leq \omega \leq \Omega_m, \\ 0, & \omega < -\Omega_m, \omega > \Omega_m. \end{cases} \quad (4.27)$$

Потужність вихідного процесу визначається за формулою

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \int_{-F_m}^{F_m} K^2 \frac{N_0}{2} df = K^2 \frac{N_0}{2} 2F_m = K^2 \frac{N_0}{2} \Delta F_{\text{ФНЧ}}, \quad (4.28)$$

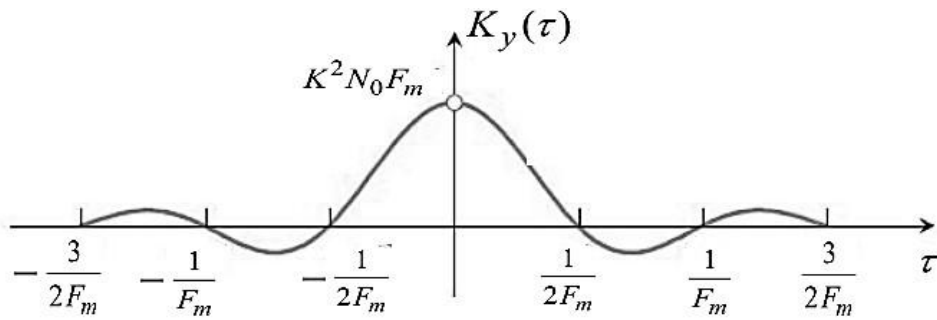
де  $\Delta F_{\text{ФНЧ}} = 2F_m$  - смуга пропуску фільтру.

Потужність вихідного процесу пропорційна смузі пропуску  $\Delta F_{\text{ФНЧ}}$ .

Визначимо кореляційну функцію вихідного процесу

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_m} K^2 \frac{N_0}{2} \cos\omega\tau d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} K^2 \frac{N_0}{2} \int_0^{\Omega_m} \cos\omega\tau d\omega = \frac{K^2 N_0}{2\pi\tau} \sin\Omega_m\tau = K^2 N_0 F_m \frac{\sin\Omega_m\tau}{\Omega_m\tau} = \\ &= \sigma_y^2 \frac{\sin\Omega_m\tau}{\Omega_m\tau}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Кореляційна функція вихідного процесу  $K_y(\tau)$  наведена на рис. 4.9. Чим ширше смуга пропуску фільтру  $\Delta F_{\text{ФНЧ}}$ , тим вужче кореляційна функція, і збільшується швидкість змінювання процесу на виході. При цьому потужність процесу  $\sigma_y^2$  збільшується.



Ріс. 4.9 Кореляційна функція процесу на виході ідеального фільтра низьких частот

### *Проходження білого шуму крізь реальний фільтр нижніх частот*

Розглянемо реальний фільтр нижніх частот в стаціонарному режимі. Коефіцієнт передачі фільтра

$$K(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (4.30)$$

Квадрат модулю коефіцієнта передачі фільтра

$$|K(j\omega)|^2 = \left| \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 (RC)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_m}\right)^2} = \frac{\Omega_m^2}{\omega^2 + \Omega_m^2}, \quad (4.31)$$

де  $\Omega_m$  - гранична частота фільтра на рівні половинної потужності.

Квадрат модулю коефіцієнта передачі  $|K(j\omega)|^2$  наведено на рис. 4.10.

Кореляційна функція вихідного процесу

$$K_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Omega_m^2}{\omega^2 + \Omega_m^2} \frac{N_0}{2} \cos \omega \tau d\omega = \left| \int_0^{\infty} \frac{\cos px}{x^2 + q^2} dx = \frac{\pi}{2q} e^{-|pq|} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{N_0 \Omega_m^2}{2} \frac{\pi}{2\Omega_m} e^{-|\tau\Omega_m|} = \frac{N_0 \Omega_m}{4} e^{-\Omega_m|\tau|}. \quad (4.32)$$

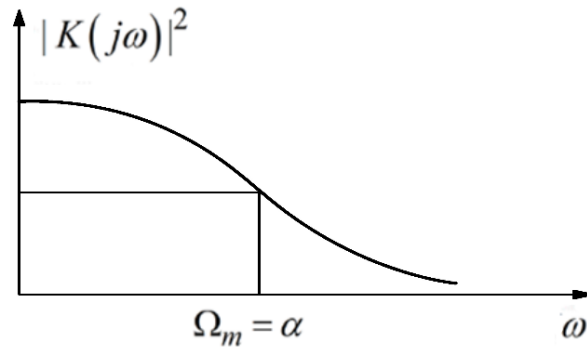


Рис. 4.10 Квадрат модулю коефіцієнта передачі реального фільтра нижніх частот

Можна показати, що інтервал кореляції  $\tau_k$  дорівнює

$$\tau_k = \frac{1}{K_x(0)} \int_0^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau = \frac{1}{\Omega_m} = RC = \frac{1}{\alpha}. \quad (4.33)$$

З врахуванням (4.33) кореляційна функція має вигляд

$$K_y(\tau) = \frac{N_0 \alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (4.34)$$

і співпадає з виразом кореляційної функції (19) для стаціонарного режиму. Добуток  $RC$  є мірою інерційності ланцюга. Чим більше  $RC$ , тим більш інерційний ланцюг, вужче смуга пропускання  $2\Omega_m$ , більше інтервал кореляції  $\tau_k$ .

#### 4.5. Диференціювання випадкових процесів

Операція диференціювання випадкового процесу відбувається шляхом диференціювання його реалізацій. Але ж в теорії випадкових процесів доводиться розширити звичайне поняття збіжності випадкової функції до своєї границі, оскільки границею виступає також випадкова величина. В теорії

випадкових процесів розглядають різні види збіжності і, як результат, різні види неперервності, диференційованості тощо. Даний розділ математики називається стохастичним аналізом випадкових функцій. Далі використовується лише одне поняття збіжності – **збіжність у середньому квадратичному**. Це поняття є також найбільш придатним з точки зору практичного застосування.

Кажуть, що границею випадкового процесу  $x(t)$  при  $t \rightarrow t_0$  у середньому квадратичному є випадкова величина  $\xi$  і позначають

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \xi, \quad (4.34)$$

якщо існує границя

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{M}\{(x(t) - \xi)^2\} = 0. \quad (4.35)$$

Подібним чином визначають поняття безперервності випадкового процесу. Вважають, що випадковий процес  $x(t)$  безперервний у точці  $t_0$  у середньому квадратичному, якщо справедлива гранична рівність

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{M}\{(x(t) - x(t_0))^2\} = 0. \quad (4.36)$$

Випадковий процес  $x(t)$  є **диференційованим у середньому квадратичному**, якщо його похідна  $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  існує в сенсі квадратичної збіжності

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{M}\left\{\left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} - x'(t)\right)^2\right\} = 0. \quad (4.37)$$

Доведено, що умова (4.37) виконується, якщо **математичне очікування  $m_x(t)$  процесу  $x(t)$  є диференційованою функцією і існує змішана похідна другого порядку від кореляційної функції  $K_x(t_1, t_2)$** .

Визначимо математичне очікування похідної випадкового процесу. Допускаючи існування похідної у середньому квадратичному, можемо записати

$$\begin{aligned}
m_{x'}(t) &= \mathbf{M}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \mathbf{M}\left\{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{M}\left\{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right\} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}\{x(t + \Delta t)\} - \mathbf{M}\{x(t)\}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = \frac{dm_x(t)}{dt} \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Математичне очікування похідної  $x'(t)$  дорівнює похідній від математичного очікування  $m_x(t)$ . Якщо процес  $x(t)$  стаціонарний з математичним очікуванням  $m_x$ , то при диференціюванні стаціонарного випадкового процесу виникає новий випадковий процес із нульовим математичним очікуванням.

Вирішимо дещо складніше завдання знаходження функції кореляції похідної  $K_{x'}(t_1, t_2) = \mathbf{M}[x'(t_1)x'(t_2)]$ . Центроване значення похідних  $x'(t_1)$  дорівнюють

$$x'(t_1) = \frac{dx(t_1)}{dt_1} - \frac{dm_x(t_1)}{dt_1} = \frac{d}{dt_1}(x(t_1) - m_x(t_1)) = \frac{d}{dt_1} x(t_1); \quad (4.39)$$

$$x'(t_2) = \frac{dx(t_2)}{dt_2} - \frac{dm_x(t_2)}{dt_2} = \frac{d}{dt_2}(x(t_2) - m_x(t_2)) = \frac{d}{dt_2} x(t_2). \quad (4.40)$$

Отримаємо

$$K_{x'}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\left[\frac{dx(t_1)}{dt_1} \frac{dx(t_2)}{dt_2}\right] = \frac{\partial^2 \mathbf{M}[x(t_1)x(t_2)]}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (4.41)$$

У разі стаціонарного випадкового процесу

$$K_{x'}(t_1, t_2) = K_{x'}(t_2 - t_1) = K_{x'}(\tau). \quad (4.42)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial(\tau)}{\partial t_1} = -1; \quad \frac{\partial(\tau)}{\partial t_2} = 1, \quad (4.43)$$

вираз (4.41) перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} K_{x'}(\tau) &= \frac{\partial^2 K_x(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left[ \frac{\partial K_x(\tau)}{\partial t_2} \right] = \frac{\partial}{\partial t_1} \left[ \frac{dK_x(\tau)}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} \right] = \\ &= \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} (-1) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

За визначенням, випадковий процес є диференційованим, якщо його похідна має кінцеву дисперсію. Відповідно до (4.34) дисперсія похідної визначається за формулою

$$\sigma_{x'}^2 = K_{x'}(0) = -\frac{d^2 K_x(0)}{d\tau^2}. \quad (4.45)$$

Якщо друга похідна його функції кореляції в нулі не буде кінцевою величиною, то і дисперсія похідної також не буде кінцевою. Тому для диференційованості випадкового процесу необхідно, щоб друга похідна його функції кореляції в нулі була кінцевою величиною, а отже, перша похідна цієї функції в нулі — неперервна.

Реалізації випадкових сигналів і завад, з якими приходиться мати справу в техніці, завжди задовольняють вимозі диференційованості. Але в теоретичних дослідженнях часто виникають математичні моделі, які відповідають недиференційованим процесам. Так, недиференційованим є випадковий процес з функцією кореляції (4.21). Він отримується шляхом проходження крізь реальний фільтр нижніх частот білого шуму, який є ідеалізацією і в природі не існує.

Розглянемо також функцію взаємної кореляції  $K_{x'}(t_1, t_2)$  випадкового процесу  $x(t)$  і його похідної  $x'(t)$

$$K_{xx'}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\left[x(t_1) \frac{d\overset{\circ}{x}(t_2)}{dt_2}\right] = \frac{d\mathbf{M}[\overset{\circ}{x}(t_1)\overset{\circ}{x}(t_2)]}{dt_2} = \frac{dK_x(t_1, t_2)}{dt_2}. \quad (4.46)$$

Для стаціонарного процесу

$$K_{xx'}(\tau) = \frac{dK_x(\tau)}{d\tau}. \quad (4.47)$$

Кореляційна функція стаціонарного процесу є парна, а її похідна при  $\tau = 0$  дорівнює нулю. Тому взаємна кореляційна функція  $K_{xx'}(0) = 0$ . Таким чином, значення випадкового процесу  $x(t)$  і його похідної  $x'(t)$  для однакових моментів часу некорельовані. Якщо процес  $x(t)$  ще і гаусівський, то вони також і статистично незалежні.

#### 4.6. Вплив білого шуму на полосовий вузькосмуговий фільтр

Розглянемо вплив білого шуму на ідеальний полосовий вузькосмуговий фільтр рис. 4.11. Коефіцієнт передачі фільтра

$$K(\omega) = \begin{cases} K, & -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1, \\ K, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \omega < -\omega_2, \omega > \omega_2, -\omega_1 \leq \omega \leq -\omega_1. \end{cases} \quad (4.48)$$

Смуга пропускання і центральна частота смуги в області позитивних частот

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (4.49)$$

Фільтр називається вузькосмуговим, якщо виконується вимога

$$\Delta\omega \ll \omega_0. \quad (4.50)$$

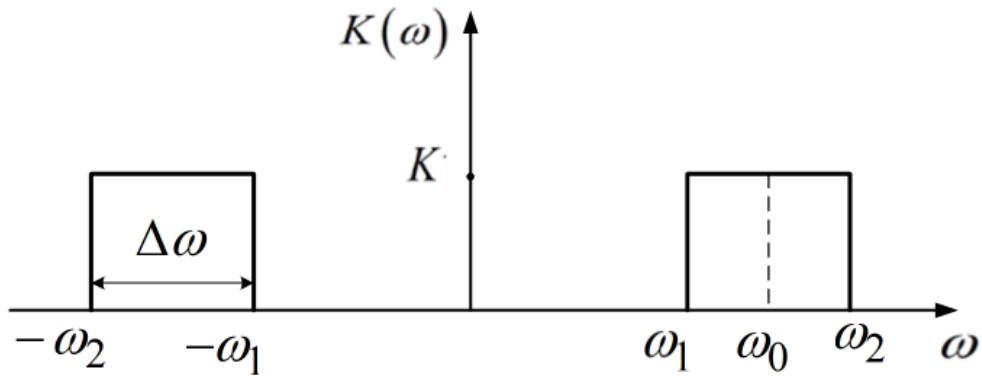


Рис. 4.11 Амплітудно-частотна характеристика ідеального полосового вузькосмугового фільтра

Спектральна щільність вхідного білого шуму  $G_x(\omega) = \frac{N_0}{2}$ .

Аналіз будемо проводити в стаціонарному режимі. Тоді спектральна щільність вихідного процесу визначається за формулою

$$G_y(\omega) = \begin{cases} K^2 \frac{N_0}{2}, & -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1, \\ K^2 \frac{N_0}{2}, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \omega < -\omega_2, \omega > \omega_2, -\omega_1 \leq \omega \leq -\omega_1. \end{cases} \quad (4.51)$$

Спектральна щільність потужності випадкового процесу також задовольняє вимозі (4.50), і такий процес називається вузькосмуговим.

Потужність вихідного процесу визначається за формулою

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = 2 \int_{f_1}^{f_2} K^2 \frac{N_0}{2} df = 2K^2 \frac{N_0}{2} \Delta f = K^2 N_0 \Delta f, \quad (4.52)$$

Потужність вихідного процесу пропорційна смузі фільтра  $\Delta f$ .

Кореляційна функція вихідного процесу

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} K^2 \frac{N_0}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\omega\tau d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K^2 N_0}{2\pi\tau} (\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau) = \frac{K^2 N_0}{2\pi\tau} 2 \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)\tau}{2} = \\
&\frac{2K^2 N_0 \Delta f}{2\pi \Delta f \tau} \sin \frac{\Delta\omega\tau}{2} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)\tau}{2} = K^2 N_0 \Delta f \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0 \tau = \\
&= \sigma_y^2 \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0 \tau = \sigma_y^2 r_y(\tau) \cos \omega_0 \tau. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Кореляційна функція  $K_y(\tau)$  вузькосмугового процесу показана на рис 4.12.

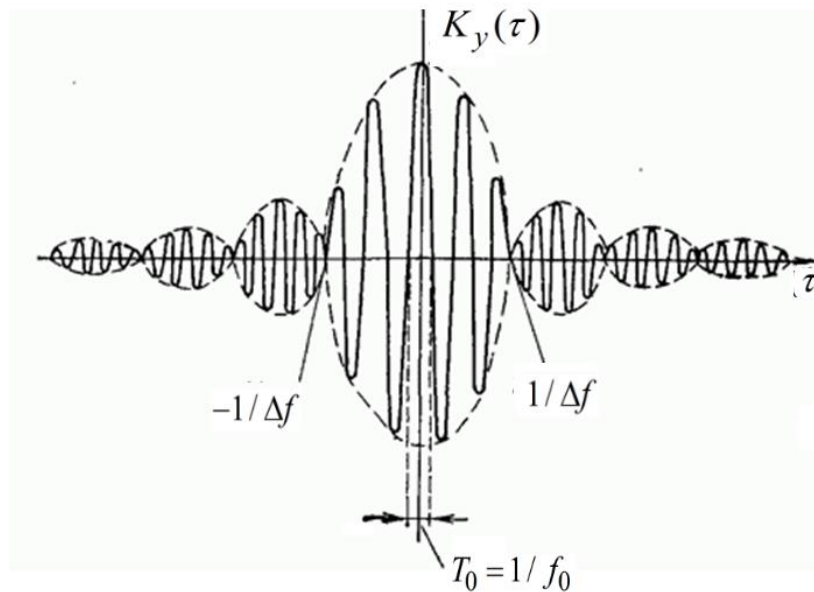


Рис. 4.12 Кореляційна функція випадкового процесу на виході вузькосмугового фільтра

Огинаюча кореляційної функції  $K_y(\tau)$  (штрихова лінія) за формою подібна кореляційній функції сигналу на виході ідеального фільтра низьких частот рис. 4.8 при однакових розмірах смуг пропускання фільтрів. При цьому функція  $r_y(\tau)$  співпадає з нормованою функцією кореляції сигналу на виході ідеального фільтра низьких частот. Функція  $r_y(\tau)$  відіграє роль нормованої огинаючої

функції кореляції вузькосмугового випадкового процесу. Високочастотне заповнення функції має частоту  $\omega_0$ , яка дорівнює центральній частоті спектра шуму.

На рис.4.13 показано приблизний вигляд реалізацій широкосмугового шуму на вході вузькосмугового фільтра і вузькосмугового процесу на його виході. Вхідний шум має гілчасту структуру з тонкими викидами. Вигляд кореляційної функції (4.52) дозволяє отримати уявлення про вигляд реалізації вузькосмугового випадкового процесу. Коливання кореляційної функції з частотою  $\omega_0$  вказує на те, що і миттєві значення вихідного сигналу змінюється в середньому з частотою  $\omega_0$ . Нагадаємо, що кореляційна функція гармонійного коливання є гармонійною функцією тієї ж частоти. Вигляд огинаючої кореляційної функції свідчить, що огинаюча вихідного процесу змінюється повільно, подібно процесу, обмеженому найвищою частотою  $\frac{\Delta\omega}{2}$ .



Рис. 4.13 Вигляд реалізацій випадкових процесів на вході і виході вузькосмугового фільтра

Таким чином, вузькосмуговий випадковий процес доцільно представляти високочастотним коливанням, амплітуда і фаза якого змінюються повільно. Математичні моделі і ймовірнісні характеристики вузькосмугових процесів будуть розглянуті у наступній лекції.

### Питання до самоперевірки

1. Якими властивостями володіє лінійний оператор?
2. Якими функціональними характеристиками описується лінійний пристрій?
3. Запишіть вираз для перетворення математичного очікування випадкового процесу.

4. Запишіть вираз для перетворення кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу.
5. Як розраховується дисперсія випадкового процесу на виході лінійного пристрою?
6. Який вигляд має кореляційна функція на виході  $RC$  - ланцюга при подачі на його вхід білого шуму?
7. Запишіть вираз для перетворення спектральної щільності потужності лінійним пристроєм в стаціонарному режимі.
8. Який вигляд мають спектральна щільність потужності і кореляційна функція на виході ідеального фільтра нижніх частот при подачі на його вхід білого шуму?
9. Як визначається диференційований у середньому квадратичному випадковий процес?
10. При виконанні яких умов випадковий процес є диференційованим у середньому квадратичному?
11. Чому дорівнює функція взаємної кореляції стаціонарного випадкового процесу і його похідної?
12. Який полосовий фільтр називається вузькосмуговий?
13. Який вид має кореляційна функція вузькосмугового випадкового процесу?
14. Який вигляд мають реалізацій широкосмугового шуму на вході вузькосмугового фільтра і вузькосмугового процесу на його виході?

## Лекція №5. Вузькосмуговий випадковий процес

- 5.1. Визначення вузькосмугового випадкового процесу.
- 5.2. Ймовірнісні характеристики огинаючої та фази вузькосмугового випадкового процесу.
- 5.3. Ймовірнісні характеристики огинаючої та фази суми гармонійного сигналу та вузькосмугового випадкового процесу.

### 5.1. Визначення вузькосмугового випадкового процесу

Радіотехнічні пристрої, що працюють на високих і проміжних частотах, як правило, є вузькосмуговими. Тобто ширина смуги пропускання значно менше центральної частоти. Як відмічалось в лекції №5, при впливі на вузькосмуговий фільтр широкополосного випадкового процесу з довільною щільністю ймовірності і смугою, що перекриває смугу пропускання фільтра, перетворений процес нормалізується. Саме тому в радіотехнічних застосунках дуже важливу роль відіграють гаусівські вузькосмугові випадкові процеси.

Вузькосмуговим називається процес, ширина односторонньої спектральної щільності потужності  $\Delta\omega$  якого рис. 5.1, значно менше центральної частоти  $\omega_0$  (частоти спектрального максимуму)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (5.1)$$

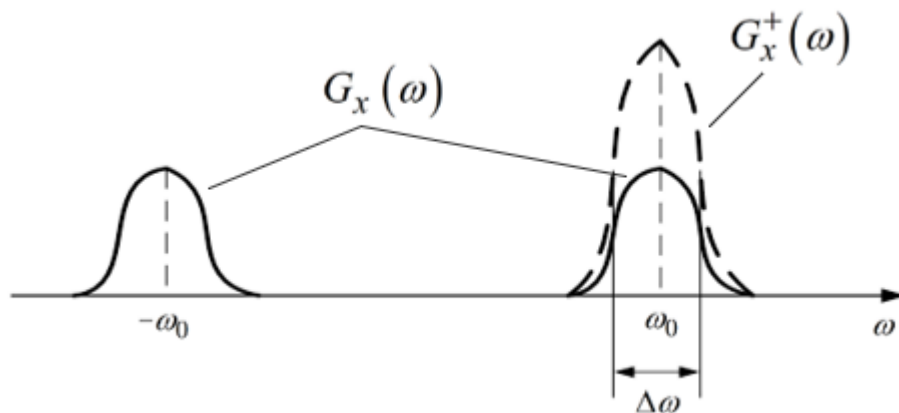


Рис. 5.1 Спектральна щільність потужності вузькосмугового процесу

За виглядом, реалізації вузькосмугового процесу нагадують модульоване гармонійне коливання рис.5.2 і значно відрізняються від реалізацій

широкосмугових процесів, які мають гілчастий характер. Саме тому модель вузькосмугового процесу представляють у вигляді гармонійного коливання, випадково модульованого за амплітудою і фазою

$$x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (5.2)$$

де  $U(t) \geq 0$  - **огинача** (миттєва амплітуда) вузькосмугового процесу;  $\varphi(t)$  - **фаза** вузькосмугового процесу ( $-\pi \leq \varphi(t) \leq \pi$ );  $\phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$  - миттєва фаза вузькосмугового процесу.

Огинача  $U(t)$  і фаза  $\varphi(t)$  є випадковими функціями, що повільно змінюються порівняно з  $\cos \omega_0 t$ . Пунктирною лінією на рис. 5.2 показана огинача  $U(t)$  реалізації вузькосмугового процесу.

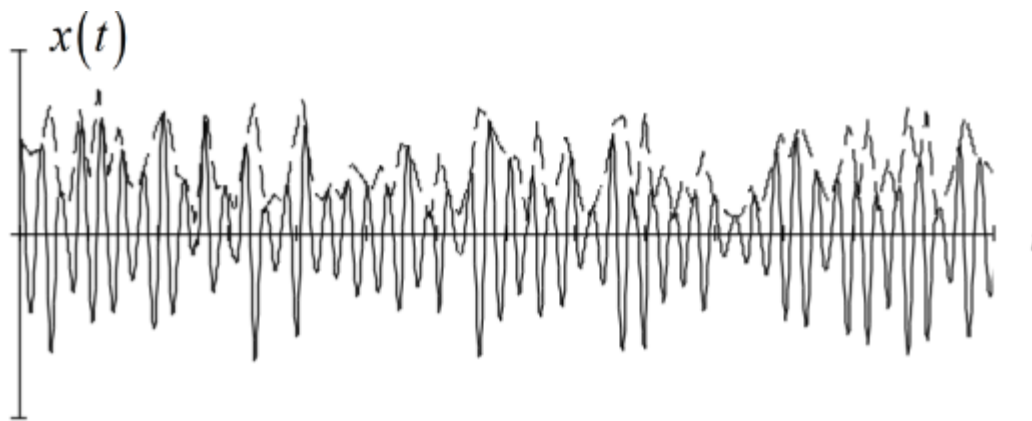


Рис.5.2 Реалізація і огинача вузькосмугового процесу

Скориставшись відомим тригонометричним співвідношенням

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (5.3)$$

представимо (5.2) у вигляді

$$x(t) = U(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - U(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t \quad (5.4)$$

або

$$x(t) = U_c(t) \cos \omega_0 t - U_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.5)$$

де

$$U_c(t) = U(t)\cos\varphi(t); \quad U_s(t) = U(t)\sin\varphi(t). \quad (5.6)$$

Випадкові процеси  $U_c(t)$ ,  $U_s(t)$ , так само, як і огинаюча  $U(t)$  і фаза  $\varphi(t)$ , повільно змінюються порівняно з  $\cos\omega_0 t$ . Низькочастотні сигнальні компоненти  $U_c(t)$ ,  $U_s(t)$  можна розглядати як сигнали, що модулюють за амплітудою несучі  $\cos\omega_0 t$  і  $\sin\omega_0 t$ . Оскільки ці несучі знаходяться у квадратурі (зміщені по фазі на 90 град.),  $U_c(t)$ ,  $U_s(t)$  називають відповідно косінусною і синусною *квадратурними* складовими випадкового процесу  $x(t)$ .

Виконаємо перетворення

$$U_c^2(t) + U_s^2(t) = U^2(t)\cos^2\varphi(t) + U^2(t)\sin^2\varphi(t) = U^2(t).$$

Звідки

$$U(t) = \sqrt{U_c^2(t) + U_s^2(t)}. \quad (5.7)$$

Також розглянемо перетворення

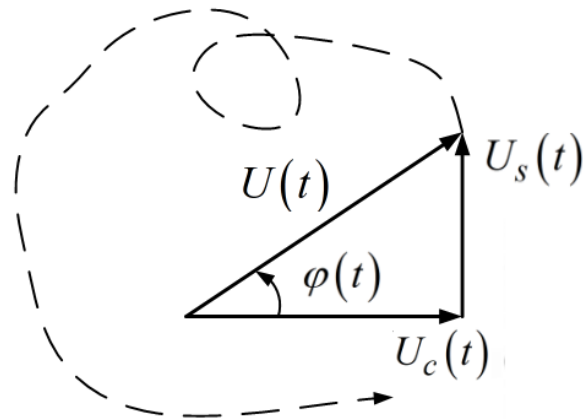
$$\frac{U_s(t)}{U_c(t)} = \frac{U(t)\sin\varphi(t)}{U(t)\cos\varphi(t)} = \operatorname{tg}\varphi(t).$$

Отримаємо

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{U_s(t)}{U_c(t)}. \quad (5.8)$$

З виразів (5.7), (5.8) випливає, що квадратурні складові  $U_c(t)$ ,  $U_s(t)$  є проєкціями вектору довжини  $U(t)$  на осі прямокутної системи координат. Графічно квазігармонійний процес  $x(t)$  можна представити вектором рис.5.3, який обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$  і має довжину  $U(t)$  і фазу  $\varphi(t)$ . За

рахунок випадкових повільних змін  $U(t)$  і  $\varphi(t)$  кінець вектора блукає на площині.



.Рис. 5.3 Геометричне представлення вузькосмугового процесу

Найбільш повний, узагальнений опис вузькосмугового процесу може бути виконано на основі перетворення Гільберта. При цьому до розгляду вводиться комплексний вузькосмуговий процес, який називають аналітичним сигналом

$$\dot{x}(t) = \dot{U}(t)e^{j\omega_0 t}, \quad (5.9)$$

де  $\dot{U}(t)$  - комплексна огибаюча аналітичного сигналу, яка дорівнює

$$\dot{U}(t) = U(t)e^{j\varphi(t)} = U_c(t) + jU_s(t). \quad (5.10)$$

Вузькосмуговий процес  $x(t)$ , який описується моделлю (5.2), є дійсною частиною аналітичного сигналу  $\dot{x}(t)$ .

Аналітичний сигнал  $\dot{x}(t)$  є моделлю випадкового процесу, який має односторонню спектральну щільність потужності  $G_x^+(\omega)$  на позитивних частотах рис. 5.1. Вузькосмуговий процес  $x(t)$  має двосторонню спектральну щільність потужності  $G_x(\omega)$ .

Якщо одностороння спектральна щільність потужності симетрична відносно центральної частоти  $\omega_0$ , кореляційну функцію вузькосмугового процесу  $K_x(\tau)$  можна представити у вигляді

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 r_x(\tau) \cos(\omega_0 \tau). \quad (5.11)$$

В формулі (5.11) функція  $r_x(\tau)$  відіграє роль нормованої огинаючої функції кореляції вузькосмугового випадкового процесу. Загальний вигляд функції кореляції  $K_x(\tau)$  наведено на рис. 5.4. Функція  $r_x(\tau)$  змінюється повільно в порівнянні з  $\cos(\omega_0 \tau)$ , тобто функція  $r_x(\tau)$  практично не змінюється за час  $T_0 = 2\pi / \omega_0$ . Гаусівські стаціонарні вузькосмугові випадкові процеси з нульовим математичним очікуванням і кореляційною функцією (5.11), які описуються моделлю (5.2), також називають **квazігармонійними** (майже гармонійними) випадковими процесами.

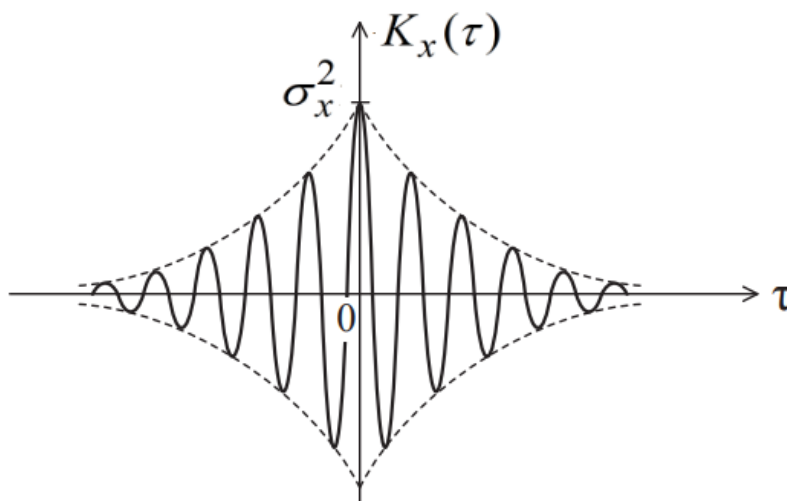


Рис. 5.4 Типова кореляційна функція вузькосмугового процесу

## 5.2. Ймовірнісні характеристики огинаючої та фази вузькосмугового випадкового процесу

У багатьох радіотехнічних задачах виникає потреба врахування випадкового характеру огинаючих та фаз вузькосмугових випадкових процесів. При цьому, як вже зазначалося, в якості вузькосмугового процесу найчастіше

виступає нормальний випадковий процес. Тому і надалі ми зупинимося на вивченні такого виду процесів.

Отже, нехай  $x(t)$  – стаціонарний вузькосмуговий випадковий процес, миттєві значення якого  $x(t_k)$  розподілені за нормальним законом із нульовим математичним очікуванням  $m_x = 0$  і дисперсією  $\sigma_x^2$

$$f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (5.12)$$

Будемо також вважати, що огибаюча  $U(t)$  і фаза  $\varphi(t)$  є взаємно незалежними випадковими процесами.

Як видно з (5.4),  $x(t)$  є лінійною комбінацією випадкових процесів  $U_c(t)$  і  $U_s(t)$ , тому вони також повинні бути стаціонарними. Вибірки процесу  $U_c(t)$  в моменти часу  $t_k$ , що задовольняють рівнянню

$$\omega_0 t_k = 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.13)$$

співпадають з вибірками вузькосмугового процесу

$$x(t_k) = U_c(t_k). \quad (5.14)$$

Відповідно в моменти часу  $t_k$  співпадають і щільності ймовірності

$$f(x_k) = f(U_{ck}). \quad (5.15)$$

Для стаціонарних випадкових процесів одномірна щільність не залежить від часу. Таким чином, випадковий процес  $U_c(t)$  є гаусівським з нульовим математичним очікуванням і дисперсією  $\sigma_x^2$

$$f(U_{ck}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{U_{ck}^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (5.16)$$

Аналогічно, розглядаючи вибірки процесу  $U_s(t)$  в моменти часу  $t_k$ , що задовольняють рівнянню

$$\omega_0 t_k = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.17)$$

можна встановити, що випадковий процес  $U_s(t)$  також є гаусівським з нульовим математичним очікуванням і дисперсією  $\sigma_x^2$

$$f(U_{sk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{U_{sk}^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (5.18)$$

Розглянемо взаємну кореляційну функцію процесів  $U_c(t)$  і  $U_s(t)$  в один і той же момент часу

$$\begin{aligned} K_{U_c U_s}(t_k, t_k) &= \mathbf{M}[U_c(t_k)U_s(t_k)] = \mathbf{M}[U^2(t_k)\cos\varphi(t_k)\sin\varphi(t_k)] = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{M}[U^2(t_k)\sin(2\varphi(t_k))]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Оскільки огибаюча  $U(t)$  і фаза  $\varphi(t)$  є статистично незалежними випадковими процесами, використовуючи властивість математичного очікування незалежних випадкових величин, рівняння (14) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} K_{U_c U_s}(t_k, t_k) &= \frac{1}{2}\mathbf{M}[U^2(t_k)]\mathbf{M}[\sin(2\varphi(t_k))] = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{M}[U^2(t_k)] \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2\varphi_k) f(\varphi_k) d\varphi_k. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Для будь-якої парної щільності ймовірності

$$f(\varphi_k) = f(-\varphi_k) \quad (5.21)$$

інтеграл в (5.20) дорівнює нулю і випадкові процеси  $U_c(t)$  і  $U_s(t)$  є некорельованими в один і той же момент часу. Оскільки вони є гаусівськими, то некорельованість для них означає і статистичну незалежність. Таким чином, при виконанні умови (5.21) двомірна щільність ймовірності  $f(U_{ck}, U_{sk})$  є добутком одновірних щільностей ймовірності (5.12), (5.16)

$$f_{U_c U_s}(U_{ck}, U_{sk}) = f(U_{ck})f(U_{sk}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U_{ck}^2 + U_{sk}^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (5.22)$$

Огинаюча  $U(t)$  і фаза  $\varphi(t)$  отримуються в результаті нелінійних перетворень (5.7), (5.8) незалежних гаусівських випадкових процесів  $U_c(t)$  і  $U_s(t)$ , сумісна щільність ймовірності яких має вигляд (17). В теорії ймовірності показано, що сумісна щільність ймовірності  $f_{U\varphi}(U_k, \varphi_k)$  в цьому випадку може бути розрахована за формулою

$$f_{U\varphi}(U_k, \varphi_k) = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial U_c(U_k, \varphi_k)}{\partial U_k} & \frac{\partial U_c(U_k, \varphi_k)}{\partial \varphi_k} \\ \frac{\partial U_s(U_k, \varphi_k)}{\partial U_k} & \frac{\partial U_s(U_k, \varphi_k)}{\partial \varphi_k} \end{bmatrix} \right| f_{U_c U_s}(U_c(U_k, \varphi_k), U_s(U_k, \varphi_k)). \quad (5.23)$$

де  $U_c(U_k, \varphi_k), U_s(U_k, \varphi_k)$  описується виразами

$$U_c(U_k, \varphi_k) = U_k \cos \varphi_k; \quad U_s(U_k, \varphi_k) = U_k \sin \varphi_k. \quad (5.24)$$

Якобіан перетворення має вигляд

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x(U_k, \varphi_k)}{\partial U_k} & \frac{\partial x(U_k, \varphi_k)}{\partial \varphi_k} \\ \frac{\partial \hat{x}(U_k, \varphi_k)}{\partial U_k} & \frac{\partial \hat{x}(U_k, \varphi_k)}{\partial \varphi_k} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi_k & -U_k \sin \varphi_k \\ \sin \varphi_k & U_k \cos \varphi_k \end{bmatrix} =$$

$$= U_k \cos^2 \varphi_k + U_k \sin^2 \varphi_k = U_k. \quad (5.25)$$

Підстановка (5.22) і (5.25) в (5.24) дає

$$f_{U\varphi}(U_k, \varphi_k) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{(U_k \cos\varphi_k)^2 + (U_k \sin\varphi_k)^2}{2\sigma_x^2}} U_k = \frac{U_k}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U_k^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (5.26)$$

Вираз (5.26) є двомірною щільністю ймовірності значень огибаючої і фази вузькосмугового випадкового процесу.

Для того, щоб знайти одномірну щільність розподілу огибаючої, необхідно проінтегрувати (5.26) по всіх значеннях фази від  $-\pi$  до  $\pi$

$$f(U_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{U\varphi}(U_k, \varphi_k) d\varphi_k = \frac{U_k}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U_k^2}{2\sigma_x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_k = \frac{U_k}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U_k^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (5.27)$$

Таким чином, значення огибаючої вузькосмугового випадкового процесу розподілені за законом Релея. На рис.5.5 представлені криві щільності ймовірності огибаючої вузькосмугового процесу.

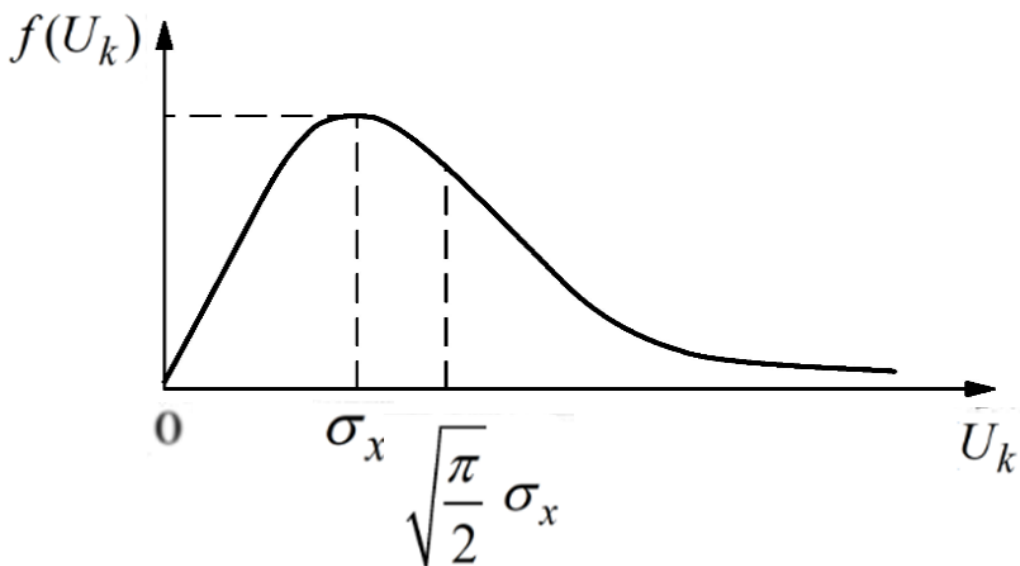


Рис. 5.5 Щільність ймовірності Релея

Математичне очікування

$$M[U(t_k)] = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,253 \sigma_x. \quad (5.28)$$

Дисперсія

$$D[U(t_k)] = \frac{4 - \pi}{2} \sigma_x^2 \approx 0,429 \sigma_x^2. \quad (5.29)$$

Аналогічно для визначення одномірної щільності розподілу значень фази проінтегруємо (5.26) за всіма значеннями  $U_k$  від 0 до  $\infty$

$$f(\varphi_k) = \int_0^{\infty} f_{U\varphi}(U_k, \varphi_k) dU_k. \quad (5.30)$$

Підстановка в цей вираз формули (21) з огляду на те, що

$$\int_0^{\infty} \frac{U_k}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U_k^2}{2\sigma_x^2}} dU_k = 1$$

(умова нормування), дає:

$$f(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi}. \quad (5.31)$$

Звідси випливає, що значення фази вузькосмугового випадкового процесу розподілені за рівномірним законом в межах від  $-\pi$  до  $\pi$ .

### 5.3. Ймовірнісні характеристики огинаючої та фази суми гармонійного сигналу та вузькосмугового випадкового процесу

Розглянемо випадок, коли випадковий процес  $y(t)$  становить суму детермінованого гармонійного сигналу

$$s(t) = A_m \cos \omega_0 t \quad (5.32)$$

та вузькосмугового випадкового процесу (5.2). З використанням представлення вузькосмугового процесу (5.5), сумарний сигнал  $y(t)$  можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} y(t) = s(t) + x(t) &= A_m \cos \omega_0 t + U_c(t) \cos \omega_0 t - U_s(t) \sin \omega_0 t = \\ &= (A_m + U_c(t)) \cos \omega_0 t - U_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Представленню суми сигналу і завади (5.33) можна надати геометричну інтерпретацію рис.5.6, аналогічну рис. 5.3. Процес  $y(t)$  представлено вектором, який обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$  і має довжину  $V(t)$  і фазу  $\psi(t)$ . Синфазна складова цього вектору дорівнює  $A_m + U_c(t)$ , а сінусна складова відповідно  $U_s(t)$ . Квазігармонійний процес  $x(t)$  представлено вектором, який обертається синхронно з  $y(t)$  також з кутовою швидкістю  $\omega_0$  і має довжину  $U(t)$  і фазу  $\varphi(t)$ . За рахунок випадкових повільних змін  $U(t)$  і  $\varphi(t)$ , кінець вектора  $V(t)$  блукає на площині.

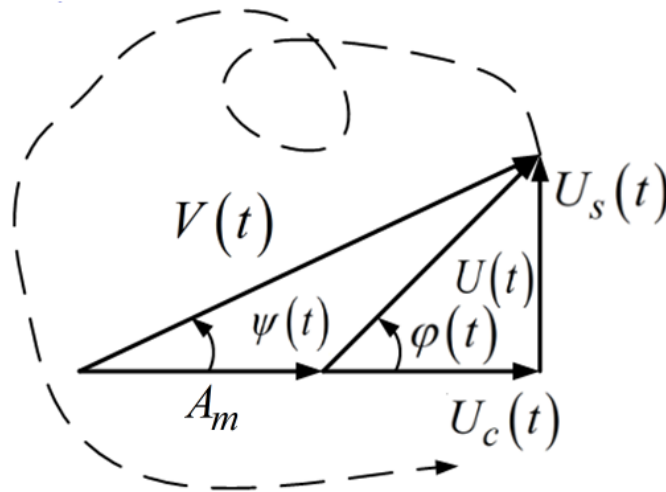


Рис. 5.6 Геометричне представлення суми гармонійного сигналу і вузькосмугового процесу

З рис. 5.6 випливає, що огинаюча  $V(t)$  і фаза  $\psi(t)$  сумарного сигналу  $y(t)$  визначаються за формулами

$$V(t) = \sqrt{(A_m + U_c(t))^2 + U_s^2(t)}; \quad (5.34)$$

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{U_s(t)}{A_m + U_c(t)}. \quad (5.35)$$

Таким чином, сумарний сигнал можна представити у вигляді

$$y(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]. \quad (5.36)$$

Визначимо сумісну щільність ймовірності  $f_{V\psi}(V_k, \psi_k)$  огинаючої  $V(t_k)$  і фази  $\psi(t_k)$  сумарного сигналу  $y(t_k)$  в моменти часу  $t_k$ . Для цього використаємо сумісну щільність ймовірності  $f(U_{ck}, U_{sk})$  (5.22) незалежних гаусівських квадратурних складових  $U_c(t)$  і  $U_s(t)$  квазігармонійного процесу і розглянутий вище підхід визначення щільності ймовірності при нелінійному перетворенні випадкових величин, що описується формулою (5.23). Як впливає з рис. 5.7, квадратурні складові  $U_c(t), U_s(t)$  та огинаючої  $V(t)$  і фази  $\psi(t)$  пов'язані співвідношеннями

$$U_c(t) = V(t) \cos \psi(t) - A_m, \quad U_s(t) = V(t) \sin \psi(t). \quad (5.37)$$

Тому якобіан такого перетворення дорівнює

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial U_c(V_k, \psi_k)}{\partial V_k} & \frac{\partial U_c(V_k, \psi_k)}{\partial \psi_k} \\ \frac{\partial U_s(V_k, \psi_k)}{\partial V_k} & \frac{\partial U_s(V_k, \psi_k)}{\partial \psi_k} \end{bmatrix} = V_k. \quad (5.38)$$

Відповідно сумісна щільність ймовірності  $f_{V\psi}(V_k, \psi_k)$  може бути представлена у вигляді

$$\begin{aligned}
f_{U\varphi}(V_k, \psi_k) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{(V_k \cos\psi_k - A_m)^2 + (V_k \sin\psi_k)^2}{2\sigma_x^2}} V_k = \\
&= \frac{V_k}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{V_k^2 + A_m^2 - V_k A_m \cos\psi_k}{2\sigma_x^2}}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Шляхом інтегрування (5.39) знаходимо вираз для одновірної щільності ймовірності огинаючої у вигляді

$$\begin{aligned}
f(V_k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_{V\psi}(V_k, \psi_k) d\psi_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{V_k}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{V_k^2 + A_m^2 - V_k A_m \cos\psi_k}{2\sigma_x^2}} d\psi_k = \\
&= \frac{V_k}{\sigma_x^2} e^{-\frac{A_m^2 + V_k^2}{2\sigma_x^2}} I_0\left(\frac{A_m V_k}{\sigma_x^2}\right),
\end{aligned} \tag{5.40}$$

де  $I_0\left(\frac{A_m V_k}{\sigma_x^2}\right)$  - модифікована функція Бесселя нульового порядку.

Вираз (5.40) є узагальнений закон Релея або закон Райса. На рис.5.7 представлені криві щільності ймовірності огинаючої сумарного процесу. З малюнка випливає, що форма кривої  $f(V_k)$  залежить від відношення  $\frac{A_m}{\sigma_x}$ , тобто від відношення амплітуди сигналу до середньо-квадратичного значення шуму (відношення сигнал/шум по напрузі). При  $\frac{A_m}{\sigma_x} \gg 1$  крива закону Райса наближається до нормального закону. При цьому огинаюча  $V(t)$  залежить головним чином від синфазної складової  $U_c(t)$ , а синусна квадратурна складова  $U_s(t)$  практично не впливає. При відсутності сигналу  $A_m = 0$  ( $I_0(0) = 1$ ) щільність ймовірності (5.40) переходить в закон Релея. Тому щільність ймовірності (5.40) також називають узагальнений закон Релея.

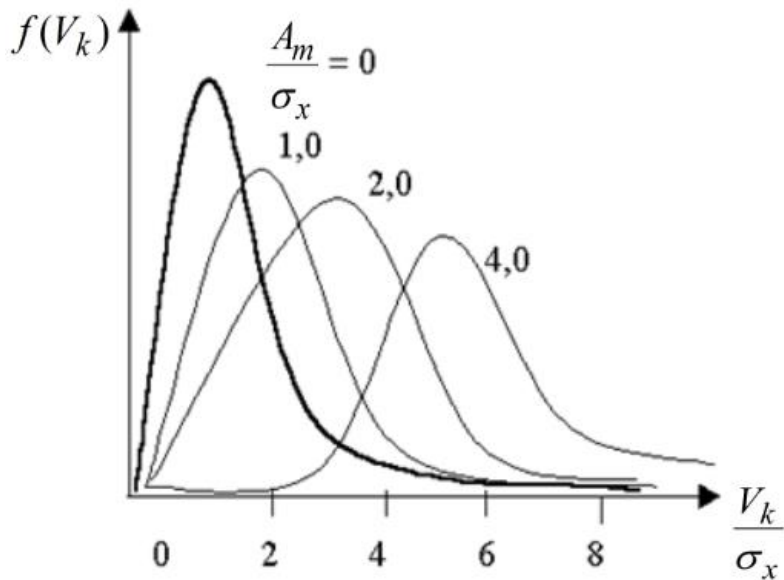


Рис. 5.7 Щільності ймовірності Райса

Доведено, що одномірна щільність розподілу значень фази суми гармонійного сигналу і квазігармонійного шуму має вигляд

$$f(\psi_k) = \int_0^{\infty} f_{V\psi}(V_k, \psi_k) dV_k =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{a^2}{2}} \left[ 1 + \sqrt{2\pi} a \cos \psi_k \Phi(a \cos \psi_k) e^{\frac{a^2 \cos^2 \psi_k}{2}} \right], \quad (5.41)$$

де  $a = \frac{A_m}{\sigma_x}$  - відношення сигнал/шум по напрузі;  $\Phi(z)$  - інтеграл Лапласа.

Чим більше відношення сигнал/шум  $a$ , тим більше фаза наближається до фази сигналу. При цьому флуктуації фази  $\psi(t)$  визначаються головним чином синусною квадратурною складовою  $U_s(t)$

Отримані вище залежності огинаючої і випадкової фази як одного квазігармонійного шуму, так і суми гармонійного сигналу і квазігармонійного шуму на практиці спостерігаються на виходах амплітудних детекторів радіоприймачів.

## Питання до самоперевірки

1. Дайте визначення вузькосмугового випадкового процесу.
2. Запишіть математичну модель вузькосмугового випадкового процесу у вигляді квазігармонійного коливання.
3. Запишіть математичне представлення вузькосмугового випадкового процесу з використанням квадратурних складових.
4. Надайте геометричне представлення вузькосмугового процесу.
5. Запишіть математичне представлення комплексного вузькосмугового випадкового процесу. Яку він має спектральну щільність потужності?
6. Доведіть, що квадратурні складові  $A(t)$  і  $B(t)$  вузькосмугового процесу є статистично незалежні і мають такий самий закон розподілу щільності ймовірності, як і його миттєве значення.
7. Запишіть вираз, який встановлює зв'язок між сумісними щільностями ймовірності огинаючої і фази, а також квадратурних складових вузькосмугового випадкового процесу і пояснити його.
8. Запишіть сумісну щільність ймовірності огинаючої і фази вузькосмугового випадкового процесу і розкрити його параметри.
9. Яку характеристику вузькосмугового процесу описує закон Релея?
10. Запишіть математичну модель суми гармонійного сигналу і вузькосмугового випадкового процесу і надайте геометричну інтерпретацію.
11. Запишіть сумісну щільність ймовірності огинаючої і фази вузькосмугового випадкового процесу.
12. Яким законом описується огинаюча суми гармонійного сигналу і вузькосмугового випадкового процесу?

## Лекція №6 «Статистичні характеристики сигналів з аналоговою модуляцією»

- 6.1. Математична модель модульованого сигналу у вигляді вузькосмугового випадкового процесу.
- 6.2. Статистичні характеристики сигналів з амплітудною модуляцією.
- 6.3. Особливості сигналів з кутовою модуляцією.

### 6.1. Математична модель модульованого сигналу у вигляді вузькосмугового випадкового процесу

Для ефективної передачі сигналу по радіоканалу інформаційний параметр  $\lambda(t)$  перетворюється у високочастотний радіосигнал  $s(t, \lambda(t))$ . Радіосигнал з несучою частотою  $\omega_0$ , огибаючою  $U(t)$  і флюктуючою фазою  $\varphi(t)$  виразимо як вузькосмуговий випадковий процес:

$$s(t, \lambda(t)) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = U(t) \cos \phi(t) \quad , \quad (6.1)$$

$\phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$  - миттєва фаза сигналу.

Для вузькосмугового процесу характерно, що  $U(t)$  і  $\varphi(t)$  повільно змінюються в порівнянні з  $\cos \omega_0 t$ .

У класичних видах модуляції інформаційний процес  $\lambda(t)$  впливає на один з параметрів радіосигналу: амплітуду, частоту, фазу. Будемо вважати, що  $\lambda(t)$  - нормований до максимуму  $|\lambda(t)| \leq 1$ , центрований  $\mathbf{M}[\lambda(t)] = 0$  випадковий стаціонарний ергодичний процес рис.6.1.

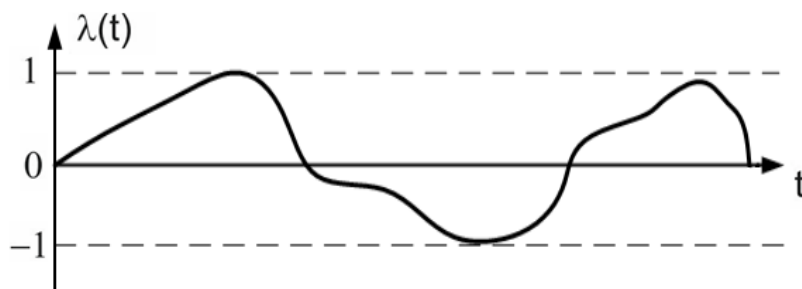


Рис.6.1 Реалізація інформаційного процесу  $\lambda(t)$

Керуючий сигнал для різних видів модуляції має вигляд

$$\text{АМ: } U(t) = U_m + \Delta U \lambda(t); \quad (6.2)$$

$$\text{ФМ: } \varphi(t) = \varphi_0 + \Delta \varphi \lambda(t); \quad (6.3)$$

$$\text{ЧМ: } \omega(t) = \omega_0 + \Delta \omega \lambda(t), \quad (6.4)$$

де  $U_m, \varphi_0, \omega_0$  - параметри несучого коливання при  $\lambda = 0$ ;  $\Delta U, \Delta \varphi, \Delta \omega$  - девіація амплітуди, фази і частоти.

## 6.2. Статистичні характеристики сигналів з амплітудною модуляцією

Відповідно до (1) і (2) отримуємо:

$$s_{AM}(t) = U_m (1 + m \lambda(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.5)$$

де  $m = \frac{\Delta U}{U_m} \leq 1$  - коефіцієнт амплітудної модуляції.

Сигнал (6.5) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= U_m (1 + m \lambda(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ m U_m \lambda(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = s_H(t) + s_B(t), \end{aligned} \quad (6.6)$$

де  $s_H(t)$  - несуча і  $s_B(t)$  - балансно-модульоване коливання, які визначаються за формулами

$$s_H(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (6.7)$$

$$s_B(t) = m U_m \lambda(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (6.8)$$

Таким чином, сигнал (6.5) можна представити у вигляді суми несучої і балансно-модульованого коливання:

$$s_{AM}(t) = s_H(t) + s_B(t). \quad (6.9)$$

Вигляд АМ-сигналу  $s_{AM}(t)$ , несучої  $s_H(t)$  і балансно-модульованого коливання  $s_B(t)$  показані на рис 6.2. а, б, в відповідно.

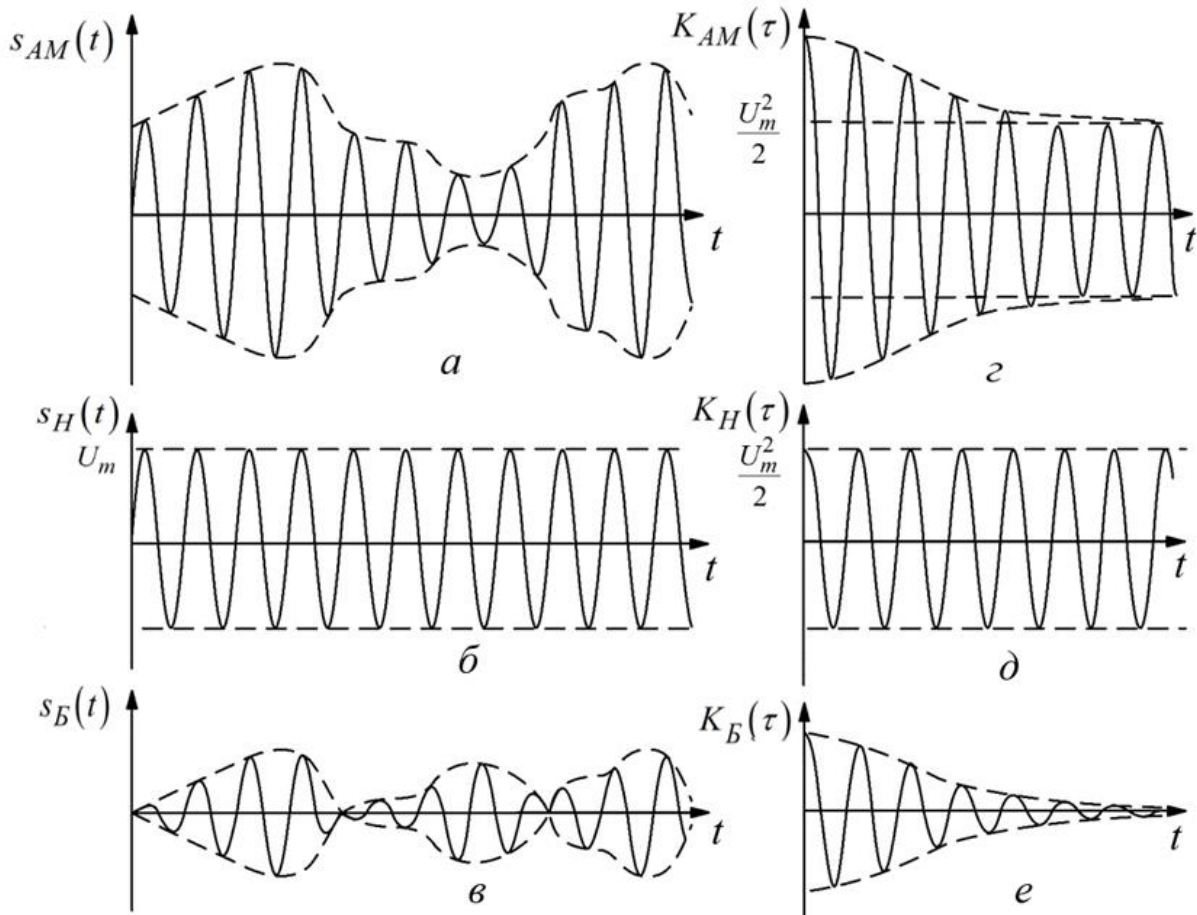


Рис. 6.2 АМ-сигнал, несуча і балансно-модульоване коливання та їх кореляційні функції

Визначимо кореляційні властивості АМ-сигналу  $s_{AM}(t)$ . Кореляційна функція АМ-сигналу визначається за формулою

$$K_{AM}(\tau) = \mathbf{M}[s_{AM}(t)s_{AM}(t+\tau)] = \mathbf{M}[s_H(t)s_H(t+\tau)] + \\ + \mathbf{M}[s_H(t)s_B(t+\tau)] + \mathbf{M}[s_B(t)s_H(t+\tau)] + \mathbf{M}[s_B(t)s_B(t+\tau)] +$$

$$K_H(\tau) + \mathbf{M}[s_H(t)s_B(t+\tau)] + \mathbf{M}[s_B(t)s_H(t+\tau)] + K_B(\tau). \quad (6.10)$$

Розглянемо складову

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[s_H(t)s_B(t+\tau)] &= \mathbf{M}[U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) m U_m \lambda(t) \cos(\omega_0(t+\tau) + \varphi_0)] = \\ &= m U_m^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos(\omega_0(t+\tau) + \varphi_0) \mathbf{M}[\lambda(t)] = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Таким чином, складові  $s_H(t)$  і  $s_B(t)$  некорельовані, і кореляційна функція АМ-сигналу складається з кореляційних функцій складових

$$K_{AM}(\tau) = K_H(\tau) + K_B(\tau). \quad (6.12)$$

Визначимо кореляційну функцію несучої  $K_H(\tau)$ . Для цього використаємо властивість ергодичності процесу  $s_H(t)$

$$\begin{aligned} K_H(\tau) &= \overline{s_H(t)s_H(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s_H(t)s_H(t+\tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) U_m \cos(\omega_0(t+\tau) + \varphi_0) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{U_m^2}{2} \left( \int_0^T \cos(-\omega_0 \tau) dt + \int_0^T \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi_0) dt \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{U_m^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \int_0^T dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{U_m^2}{2} \int_0^T \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi_0) dt = \\ &= \frac{U_m^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Визначимо кореляційну функцію балансно-модульованого коливання

$$K_B(\tau) = \overline{s_B(t)s_B(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s_{Bl}(t)s_{Bl}(t+\tau) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T mU_m \lambda_l(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) mU_m \lambda_l(t + \tau) \cos(\omega_0(t + \tau) + \varphi_0) dt = \\
&= \frac{(mU_m)^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \lambda_l(t) \lambda_l(t + \tau) dt + \\
&+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{(mU_m)^2}{2} \int_0^T \lambda_l(t) \lambda_l(t + \tau) \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi_0) dt = \\
&= \frac{(mU_m)^2}{2} K_\lambda(\tau) \cos(\omega_0 \tau), \tag{6.14}
\end{aligned}$$

де  $K_\lambda(\tau)$  - кореляційна функція повідомлення, яка обчислюється шляхом усереднення за часом  $K_\lambda(\tau) = \overline{\lambda(t)\lambda(t+\tau)}$ .

Графіки кореляційних функцій АМ-сигналу  $K_{AM}(\tau)$ , несучої  $K_H(\tau)$  і балансно-модульованого коливання  $K_B(\tau)$  показані на рис 6.2. г, д, е відповідно. Кореляційна функція повідомлення відіграє роль нормованої огинаючої функції кореляції вузькосмугового випадкового процесу  $r_x(\tau)$  (див. формулу (5.11)).

За допомогою формул Вінера-Хінчина отримаємо спектральні щільності потужності розглянутих вище сигналів. Використовуючи властивість адитивності перетворення Фур'є, спектральну щільність АМ-сигналу можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
G_{AM}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{AM}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (K_H(\tau) + K_B(\tau)) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
&= G_H(\omega) + G_B(\omega). \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Визначимо спектральну щільність потужності несучої

$$G_H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_H(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{U_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{U_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}}{2} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{U_m^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + \\
&+ \frac{U_m^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)\tau} d\tau = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau = \delta(\omega) \right| = \\
&= \frac{2\pi U_m^2}{4} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{2\pi U_m^2}{4} \delta(\omega + \omega_0). \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Визначимо спектральну щільність потужності балансно-модульованого коливання

$$\begin{aligned}
G_B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{(mU_m)^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(\tau) \cos(\omega_0\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
&= \frac{(mU_m)^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}}{2} K_\lambda(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{(mU_m)^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(\tau) e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + \\
&+ \frac{(mU_m)^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(\tau) e^{-j(\omega+\omega_0)\tau} d\tau = \\
&= \frac{(mU_m)^2}{4} G_\lambda(\omega - \omega_0) + \frac{(mU_m)^2}{4} G_\lambda(\omega + \omega_0), \tag{6.17}
\end{aligned}$$

де  $G_\lambda(\omega)$  - спектральна щільність потужності повідомлення, що визначається, як пряме перетворення Фур'є кореляційної функції  $K_\lambda(\tau)$ .

На рис. 6.3 показана спектральна щільність потужності повідомлення  $G_\lambda(\omega)$ . На рис. 6.4 приведена спектральна щільність потужності АМ-сигналу  $G_{AM}(\omega)$ .

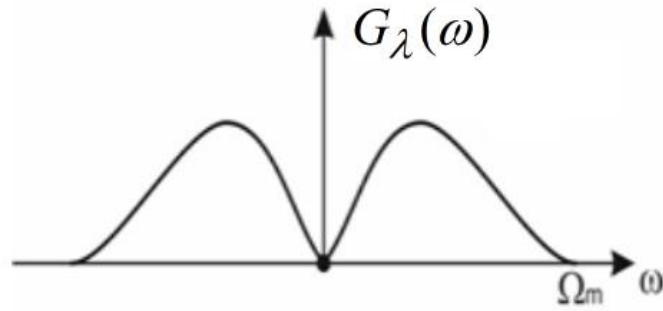


Рис. 6.3 Спектральна щільність потужності повідомлення

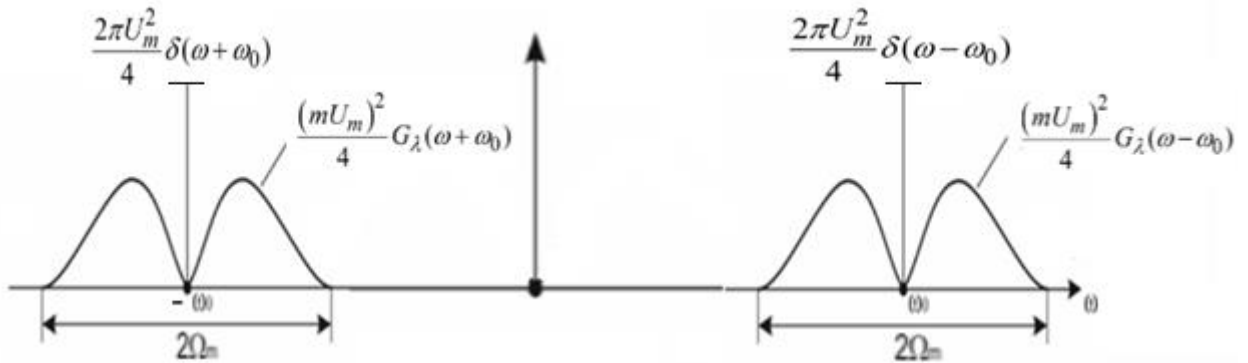


Рис. 6.4 Спектральна щільність потужності АМ-сигналу

Ширина спектра АМ-сигналу в два рази більше максимальної частоти спектра модулюючого сигналу – є дворазова частотна надмірність.

Визначимо коефіцієнт енергетичної ефективності як частку корисної потужності сигналу:

$$\gamma_{AM}^2 = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_H^2 + \sigma_B^2} = \left| \begin{array}{l} \sigma_H^2 = K_H(0) = \frac{U_m^2}{2} \\ \sigma_B^2 = K_B(0) = \frac{(mU_m)^2}{2} \sigma_\lambda^2 \end{array} \right| = \frac{m^2 \sigma_\lambda^2}{1 + m^2 \sigma_\lambda^2} = \frac{m^2}{m^2 + \Pi_\lambda^2}. \quad (6.18)$$

$\Pi_\lambda^2 = \frac{1}{\sigma_\lambda^2}$  пік-фактор повідомлень - визначається як відношення пікової

потужності  $\lambda_{max}^2 = 1$  до середньої  $\sigma_\lambda^2$ .

Оскільки  $m \leq 1$ ,  $\Pi_{\lambda}^2 \geq 1$ , то  $\gamma \leq \frac{1}{2}$ .

**Приклади.**

1. Телеграфний сигнал.

Інформаційний сигнал приймає два значення  $\lambda = \pm 1$ . Тому його також називають сигналом з двійковою маніпуляцією рис. 6.5.

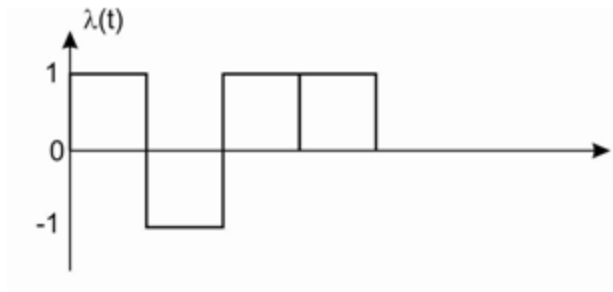


Рис. 6.5 Телеграфний сигнал

Дисперсія такого сигналу  $\sigma_{\lambda}^2 = 1$ . Тому

$$\Pi_{\lambda}^2 = 1, \gamma_{AM}^2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \max. \quad (6.19)$$

2. Тональна модуляція

Інформаційний сигнал є гармонійним коливанням  $\lambda(t) = \cos(\Omega t)$  рис. 7.

Дисперсія такого сигналу  $\sigma_{\lambda}^2 = 0.5$ . Тому

$$\Pi_{\lambda}^2 = 2, \gamma_{AM}^2 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}. \quad (6.20)$$

3. Гаусівська модуляція.

Випадкова реалізація інформаційного сигналу показана на рис. 8. Гаусівський випадковий процес із заданими кореляційними властивостями використовується в якості моделі мовного повідомлення.

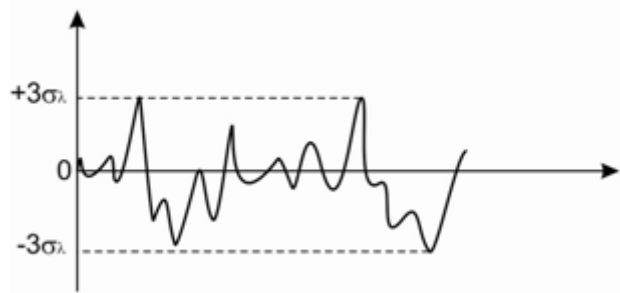


Рис.6.6 Корельований гаусівський процес

Дисперсія такого сигналу

$$3\sigma_\lambda = 1, \quad \sigma_\lambda^2 = \frac{1}{9}, \quad \gamma_{AM}^2 = \frac{1}{10}. \quad (6.21)$$

Тому

$$P_\lambda^2 = \frac{1}{\sigma_\lambda^2} = 9, \quad \gamma_{AM}^2 = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}. \quad (6.22)$$

Кращою з точки зору енергетичної ефективності є система з найменшим піковим фактором, тобто сигнали з амплітудною маніпуляцією. Модуляція гаусівським процесом – не ефективна, лише 10% потужності є корисними. При амплітудній модуляції мовним повідомленням енергетичні характеристики ще нижче через  $m < 1$  і паузи в мові. В цілому АМ-сигнали з енергетичної та частотної точки зору неефективні і все рідше використовуються в каналах зв'язку.

### 6.3. Особливості сигналів з кутовою модуляцією

Використання методів кутової модуляції (ФМ і ЧМ) дозволяє істотно поліпшити енергетичні характеристики сигналу.

ФМ и ЧМ сигнали можна виразити:

$$s_{\Phi M}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi \lambda(t)); \quad (6.23)$$

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \left( \omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right). \quad (6.24)$$

Наприклад, при пилкоподібній зміні  $\lambda(t)$  тимчасові діаграми для ФМ-і ЧМ-сигналів мають різний вигляд і зображені на рис. 6.7.

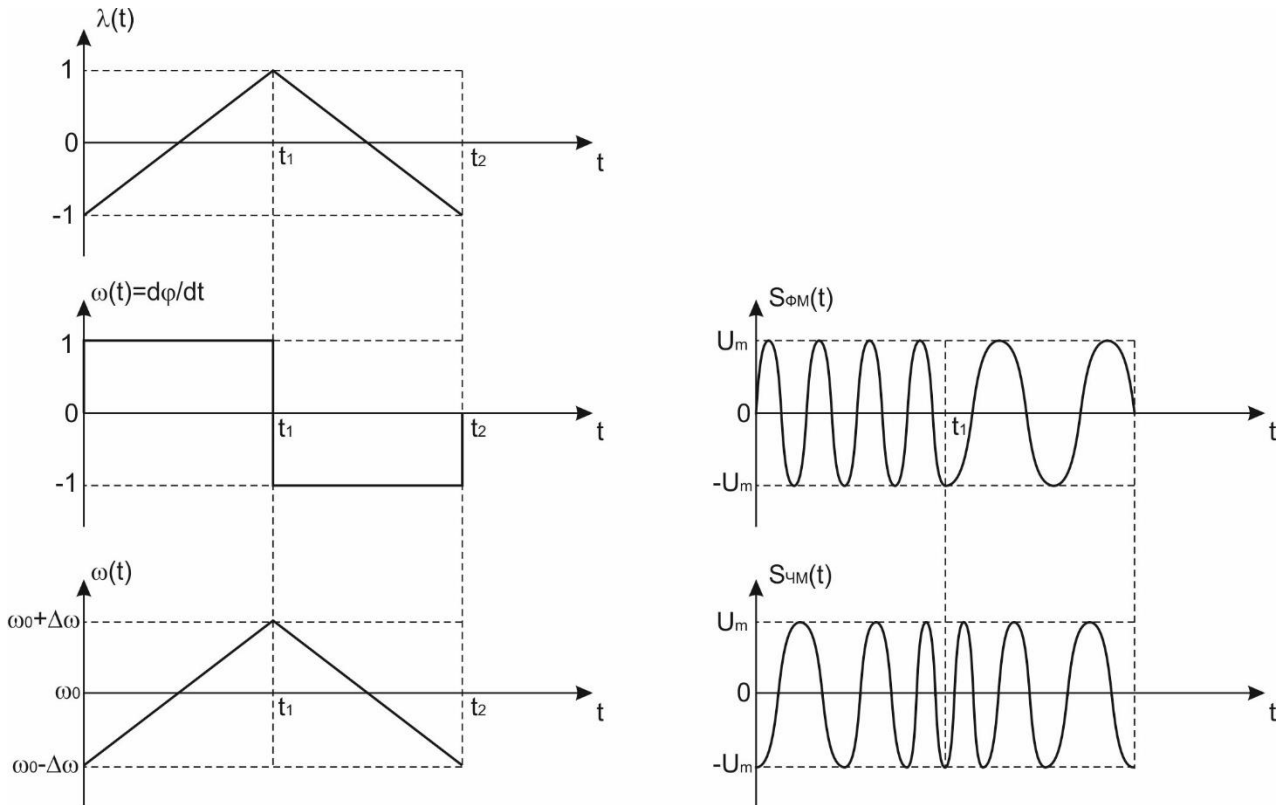


Рис. 6.7 ФМ-і ЧМ-сигнали при пилкоподібній зміні  $\lambda(t)$

Аналіз кореляційних і спектральних характеристик сигналів з кутовою модуляцією складний через нелінійний зв'язок  $s(t, \lambda(t))$ . Тому нагадаємо лише відомості для випадку тональної модуляції  $\lambda(t) = \cos \Omega t$ . Для фазової і частотної модуляції повна фаза має вигляд:

$$\text{ФМ: } \varphi(t) = \omega_0 t + \Delta\varphi \cos \Omega t ; \quad (6.25)$$

$$\text{ЧМ: } \varphi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t, \quad (6.26)$$

де  $\frac{\Delta\omega}{\Omega} = m_{\text{Ч}}$  - індекс частотної модуляції. При  $\Delta\varphi = m_{\text{Ч}}$  спектри амплітуд ФМ і ЧМ сигналів збігаються.

При широкосмуговій ЧМ  $m_{\text{Ч}} \gg 1$  спектр амплітуд сигналу показаний на рис. 6.8.

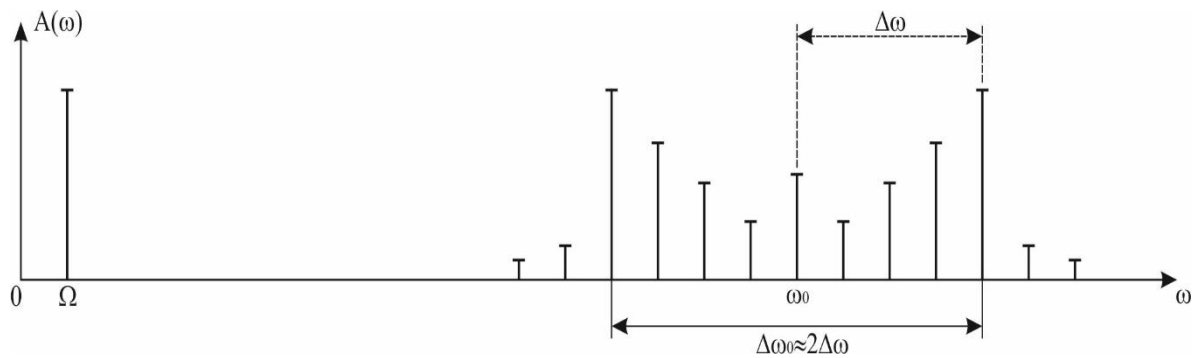


Рис. 6.8 Спектри амплітуд ФМ і ЧМ сигналів при тональній модуляції

Спектр є дискретним, з відстанню між спектральними складовими, що дорівнює частоті модуляції  $\Omega$ , і шириною спектру, яка наближено дорівнює подвоєній девіації частоти

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} \approx 2\Delta\omega = 2m_{\text{Ч}}\Omega. \quad (6.27)$$

Число спектральних складових вважається рівним  $2m_{\text{Ч}}$ . Основна частина спектра складається з корисних бічних складових. Тому  $\gamma_{\text{ЧМ}}^2$  прагне до одиниці. Однак широкосмугова кутова модуляція призводить до розширення спектра в  $m_{\text{Ч}}$  разів в порівнянні з АМ, що є платою за кращі енергетичні характеристики.

При вирішенні завдань фільтрації принципово важливими є поняття лінійної і нелінійної модуляції. Лінійною називається модуляція, при якій залежність  $s(t, \lambda(t))$  є лінійною. В іншому випадку модуляція нелінійна. АМ, БМ - лінійні види модуляції. Кутові види модуляції нелінійні в зв'язку з тригонометричною залежністю  $s(t, \lambda(t))$ .

## Питання до самоперевірки

1. Запишіть математичну модель АМ-сигналу та його складових. Надайте їх геометричне представлення.
2. Доведіть, що несуча і балансно-модульована складові АМ-сигналу є некорельованими.
3. Який математичний вигляд має кореляційна функція несучої АМ-сигналу?
4. Який математичний вигляд має кореляційна функція балансно-модульованої складової АМ-сигналу?
5. Надайте геометричне представлення кореляційних функцій несучої, балансно-модульованої складової та АМ-сигналу в цілому.
6. Який математичний вигляд має спектральна щільність потужності несучої АМ-сигналу?
7. Який математичний вигляд має спектральна щільність потужності балансно-модульованої складової АМ-сигналу?
8. Надайте геометричне представлення спектральних щільностей потужності несучої, балансно-модульованої складової та АМ-сигналу в цілому.
9. Як розраховується коефіцієнт енергетичної ефективності АМ-сигналу?
10. Запишіть математичні моделі ФМ- і ЧМ-сигналів.
11. Чим обумовлена складність розрахунку кореляційних функцій і спектральних щільностей потужності ФМ- і ЧМ-сигналів?

## Лекція №7 Статистичні характеристики сигналів з дискретною модуляцією

- 7.1. Статистичні характеристики сигналів з амплітудною маніпуляцією.
- 7.2. Статистичні характеристики сигналів з фазовою маніпуляцією.
- 7.3. Статистичні характеристики сигналів з частотною маніпуляцією.

### 7.1. Статистичні характеристики сигналів з амплітудною маніпуляцією

У зв'язку з кращими енергетичними показниками і зручністю дискретної (цифрової) обробки сигнали з дискретною модуляцією знаходять все більший практичний інтерес. Вони застосовуються в каналах обміну цифровими даними в обчислювальних мережах, в каналах телеуправління і телеметрії, при цифровій передачі мови. Найбільшого поширення набули двійкові сигнали (двійкові коди), що передаються методом амплітудної, частотної або фазової маніпуляції. Перші їх застосування зв'язувалися з телеграфією. Тому для них часто використовуються позначення АТ, ЧТ, ФТ.

АТ-сигнал представляють собою випадкову послідовність посилок і пауз з тривалістю такту  $T$ . На інтервалі  $t \in [kT, (k+1)T]$  його можна представити у вигляді

$$s_{AT}(t) = a(t)U_m \cos \omega_0 t = \begin{cases} s_1(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), & a = "1", \\ s_2(t) = 0 & , \quad a = "0", \end{cases} \quad (7.1)$$

де  $a(t)$  – однополярний сигнал.

Введемо біполярний сигнал  $\lambda(t)$ , який пов'язаний з однополярним сигналом  $a(t)$  співвідношенням

$$a(t) = \frac{(1 + \lambda(t))}{2}. \quad (7.2)$$

Геометрично зв'язок між сигналами  $\lambda(t)$  і  $a(t)$  показано на рис. 7.1.

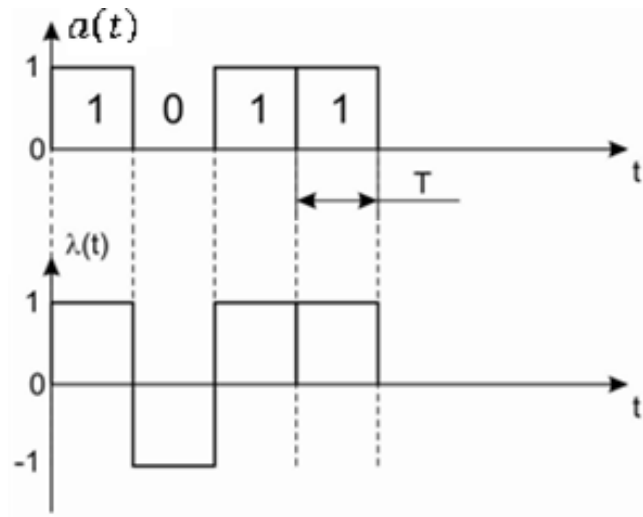


Рис. 7.1 Зв'язок між сигналами  $\lambda(t)$  і  $a(t)$

З використанням (7.2) АТ-сигнал можна представити у формі АМ-сигналу:

$$s_{AT}(t) = \frac{U_m}{2}(1 + \lambda(t))\cos \omega_0 t, \quad \varphi_0 = 0. \quad (7.3)$$

Порівнюючи з виразом (5) лекції №6, бачимо, що амплітуда АМ-сигналу в виразі (3) дорівнює  $U_m/2$ , а коефіцієнт амплітудної модуляції  $m=1$ .

Як і при амплітудній модуляції, АТ-сигнал містить несучу  $s_H(t)$  і складову з балансною модуляцією  $s_B(t)$ :

$$s_{AT}(t) = s_H(t) + s_B(t), \quad (7.4)$$

які описуються виразами

$$s_H(t) = \frac{U_m}{2}\cos \omega_0 t; \quad (7.5)$$

$$s_B(t) = \frac{U_m}{2}\lambda(t)\cos \omega_0 t. \quad (7.6)$$

На рис. 7.2. показаний АТ-сигнал  $s_{AT}(t)$ , несуча  $s_H(t)$  и балансно-модульований сигнал  $s_B(t)$ .

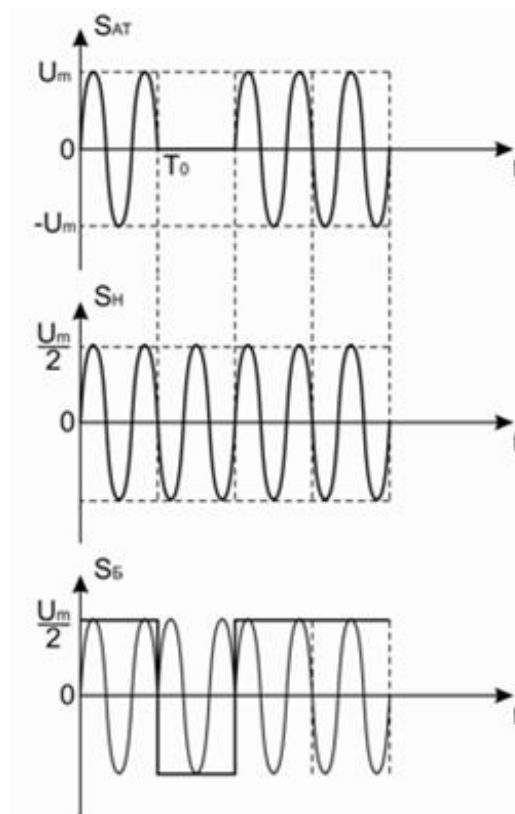


Рис. 7.2 АТ-сигнал, несуча і балансно-модульований сигнал

Несуча  $s_H(t)$  і балансна складова  $s_B(t)$  мають амплітуду  $U_m/2$  вдвічі меншу, ніж амплітуда  $U_m$  АТ-сигналу.

На приймальній стороні значення  $\lambda(t)$  невідомі. Тому його можна розглядати як випадковий процес з двома станами. Нехай значення  $\lambda(t)$  на різних тактах незалежні, і відомі ймовірності їх появи  $p(1)=p(-1)=0.5$ . В загальному випадку для ненормованого телеграфного сигналу  $A\lambda(t)$  кореляційна функція сигналу має трикутний вигляд

$$K_\lambda(\tau) = A^2 \left( 1 - \frac{|\tau|}{T} \right), \quad \tau \leq T. \quad (7.7)$$

Знайдемо спектральну щільність потужності

$$\begin{aligned}
G_{\lambda}(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} K_{\lambda}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 2 \int_0^T A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cos \omega \tau d\tau = \\
&= 2A^2 T \int_0^1 (1-x) \cos \omega x dx = 2A^2 T \left( \frac{\sin \omega T}{\omega T} - \frac{\cos \omega T - 1 + \omega T \sin \omega T}{(\omega T)^2} \right) = \\
&= A^2 T \left( \frac{\sin \left( \frac{\omega T}{2} \right)}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 = A^2 T \left( \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2. \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Дисперсія сигналу  $A\lambda(t)$  дорівнює  $\sigma_{\lambda}^2 = A^2$ . Для нормованого телеграфного сигналу  $A=1$ . Вид кореляційної функції при  $\tau > 0$  і спектральної щільності потужності  $G_{\lambda}(f)$  при  $f > 0$  нормованого телеграфного сигналу  $\lambda(t)$  показано на рис.7.3,а і рис.7.3,б відповідно.

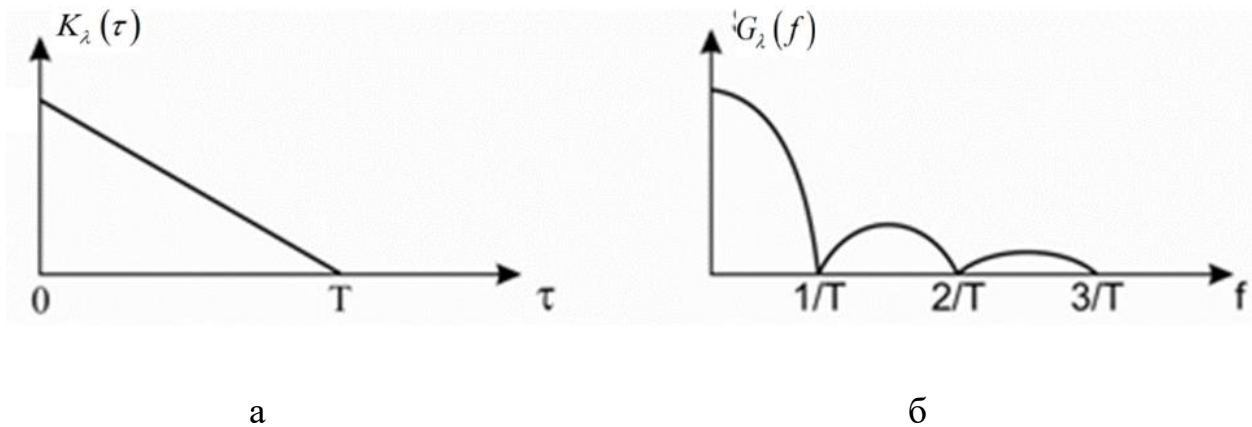


Рис. 7.3 Кореляційна функція і спектральна щільність потужності телеграфного сигналу

З урахуванням отриманих виразів для кореляційної функції і фізичної спектральної щільності потужності АМ-сигналу, покладаючи  $m=1$ ,  $\sigma_{\lambda}^2=1$ , аналогічні характеристики для АТ-сигналу можна представити у вигляді

$$K_{AT}(\tau) = \frac{U_m^2}{8} \cos \omega_0 \tau + \frac{U_m^2}{8} K_\lambda(\tau) \cos \omega_0 \tau; \quad (7.9)$$

$$G_{AT}(\omega) = \frac{U_m^2}{16} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) + G_\lambda(\omega - \omega_0)] + \frac{U_m^2}{16} [2\pi\delta(\omega + \omega_0) + G_\lambda(\omega + \omega_0)]. \quad (7.10)$$

Спектральна щільність потужності АТ-сигналу, як і при АМ, містить несучу, пропорційну  $\delta$ -функції, і бокові складові. Її вигляд показано на рис. 7.4.

**Ширина спектра** прийнята як ширина головної пелюстки

$$\Delta f_{AT} = \frac{2}{T} = 2V, \quad (7.11)$$

тобто пропорційна **швидкості передачі символів**

$$V = \frac{1}{T}. \quad (7.12)$$

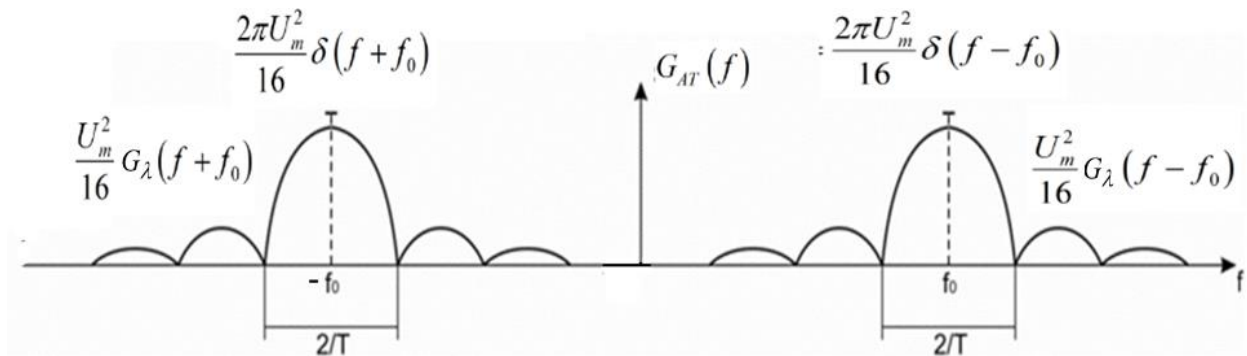


Рис. 7.4 Спектральна щільність потужності АТ-сигналу

Визначимо розподіл потужності АТ-сигналу між бічними складовими і несучою:

$$\sigma_H^2 = K_H(0) = \frac{U_m^2}{8}, \quad \sigma_B^2 = K_B(0) = \frac{U_m^2}{8}. \quad (7.13)$$

Таким чином, потужність АТ-сигналу розподілена порівну між несучою і бічними, коефіцієнт енергетичної ефективності дорівнює  $\gamma_{AT}^2 = 0.5$ .

Повна середня потужність АТ-сигналу:

$$\sigma_{AT}^2 = \sigma_H^2 + \sigma_B^2 = \frac{U_m^2}{4}. \quad (7.14)$$

Вона вдвічі менше потужності гармонічного сигналу з амплітудою  $U_m$  в силу пасивних пауз, які займають в середньому половину часу на необмеженому відрізку.

## 7.2. Статистичні характеристики сигналів з фазовою маніпуляцією

Бінарний ФТ-сигнал на інтервалі  $t \in [kT, (k+1)T]$  можна представити у вигляді:

$$s_{\Phi T}(t) = \begin{cases} s_1(t) = U_m \cos \omega_0 t & , \quad a = "1", \\ s_2(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \pi) = -s_1(t) & , \quad a = "0", \end{cases} \quad (7.15)$$

ФТ-сигнал можна записати у формі:

$$s_{\Phi T}(t) = \lambda(t) U_m \cos \omega_0 t. \quad (7.16)$$

З порівняння виразів (7.6) і (7.16) випливає, що ФТ-сигнал - це балансно-модульоване коливання (7.6), взяте з подвоєною амплітудою:

$$S_{\Phi T}(t) = 2S_{B_{AT}}(t). \quad (7.17)$$

ФТ-сигнал може бути отриманий з АТ-сигналу після усунення в ньому несучої.

Графіки моделюючого інформаційного  $\lambda(t)$  і ФТ-сигналів зображені на рис. 7.5.

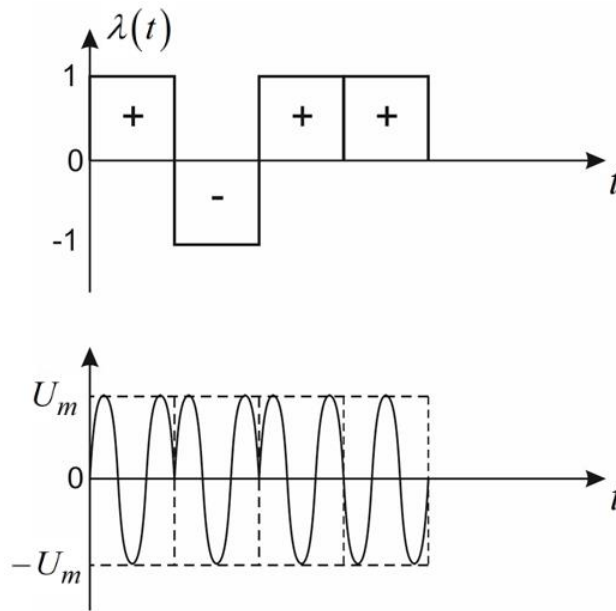


Рис. 7.5 Модуючий інформаційний сигнал і ФТ-сигнал

З урахуванням отриманих виразів для кореляційної функції і фізичної спектральної щільності потужності АМ-сигналу аналогічні характеристики для ФТ-сигналу можна представити у вигляді

$$K_{\Phi T}(\tau) = \frac{U_m^2}{2} K_{\lambda}(\tau) \cos \omega_0 \tau ; \quad (7.18)$$

$$G_{\Phi T}(f) = \frac{U_m^2}{4} G_{\lambda}(f - f_0) + \frac{U_m^2}{4} G_{\lambda}(f + f_0) . \quad (7.19)$$

Отримані співвідношення дозволяють зробити наступні висновки:

У ФТ-сигналі відсутня несуча  $\sigma_H^2 = 0$ , і вся потужність міститься в корисних бічних складових. Тому коефіцієнт енергетичної інтенсивності  $\gamma_{\Phi T}^2 = 1$ .

1. Спектральна щільність потужності ФТ-сигналу має аналогічну форму, що і у АТ-сигналу (без несучої), але в 4 рази вище, рис. 7.6.

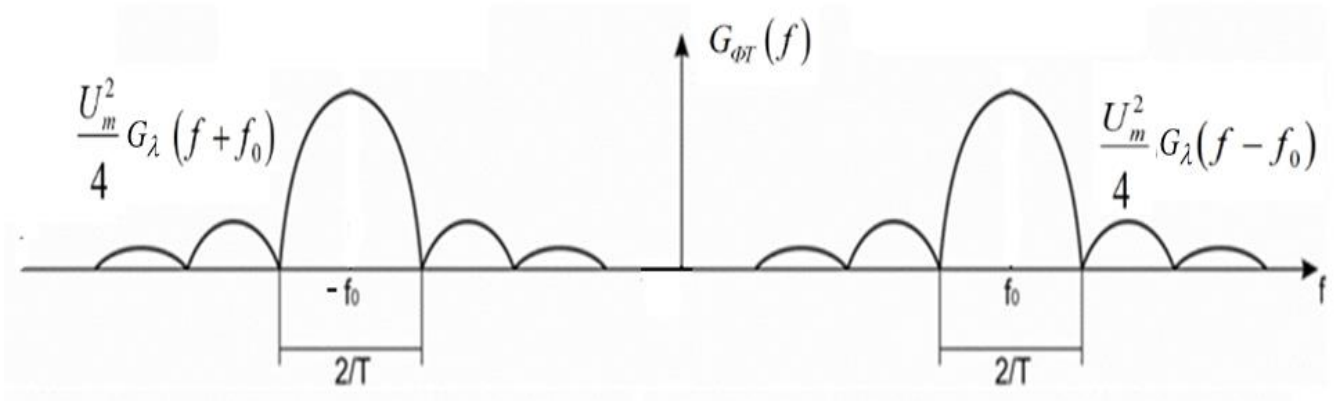


Рис. 7.6 Спектральна щільність потужності ФТ-сигналу

2. Середня потужність сигналу з фіксованою амплітудою  $U_m$  дорівнює:

$$\sigma_{\Phi T}^2 = K_{\Phi T}(0) = \frac{U_m^2}{2}. \quad (7.20)$$

Середня потужність  $\sigma_{\Phi T}^2$  в 2 рази вище, ніж у АТ-сигналу, через активні паузи, оскільки вся потужність несе корисну інформаційну навантаження, що в порівнянні з корисною потужністю АТ  $\sigma_b^2 = \frac{U_m^2}{8}$ . Тому ФТ-сигнал забезпечує 4-кратний вигравш по енергетиці сигналу.

### 7.3. Статистичні характеристики сигналів з частотною маніпуляцією

ЧТ-сигнал, як і ФТ-сигнал, є сигналом з активною паузою, причому в якості елементів в ньому використовуються посилки з різними частотами. На інтервалі  $t \in [kT, (k+1)T]$  його можна представити у вигляді

$$s_{\text{ЧТ}}(t) = \begin{cases} s_1(t) = U_m \cos \omega_1 t & , \quad a = "1", \\ s_2(t) = U_m \cos \omega_2 t & , \quad \omega_2 > \omega_1, \quad a = "0". \end{cases} \quad (7.21)$$

Вид ЧТ-сигналу з розривом фази зображений на рис. 7.7.

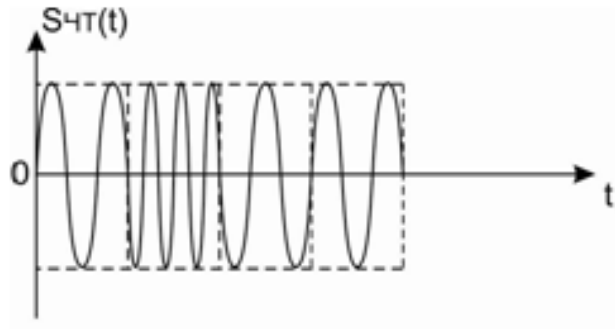


Рис.7.7 ЧТ-сигнал

ЧТ-сигнал можна представити у вигляді суми двох АТ-сигналів з частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  :

$$s_{CT}(t) = s_{AT_1}(t) + s_{AT_2}(t). \quad (7.22)$$

Для прикладу, розглянутого на рис.7, АТ-сигнали мають вигляд

$$s_{AT_1} = \{s_1, 0, s_1, s_1, \dots\}, \quad s_{AT_2} = \{0, s_2, 0, 0, \dots\}, \quad (7.23)$$

Кореляційна функція ЧТ-сигналу дорівнює:

$$K_{CT}(\tau) = \overline{S_{CT}(t)S_{CT}(t-\tau)} = K_{AT_1}(\tau) + K_{AT_2}(\tau) + 2K_{12}(\tau), \quad (7.24)$$

де  $K_{AT_i}(\tau)$  - кореляційні функції АТ-сигналів

$$K_{AT_i}(\tau) = \frac{U_m^2}{8}(1 + K_\lambda(t))\cos \omega_i \tau; \quad (7.25)$$

$K_{12}(\tau) = \overline{s_{AT_1}(t)s_{AT_2}(t+\tau)}$  - взаємкореляційна функція АТ-сигналів.

В точці  $\tau=0$ ,  $K_{12}(0)=0$ , оскільки сигнали  $s_{AT_1}(t)$ ,  $s_{AT_2}(t+\tau)$  не перетинаються в часі. При достатньому частотному зсуві  $f_p = f_2 - f_1 \geq \frac{2}{T}$  складовими  $K_{12}(\tau)$  можна знехтувати

$$K_{\text{ЧТ}}(\tau) = K_{AT_1}(\tau) + K_{AT_2}(\tau). \quad (7.26)$$

В цьому випадку спектральну щільність потужності ЧТ-сигналу можна представити у вигляді

$$G_{\text{ЧТ}}(f) = G_{AT_1}(f) + G_{AT_2}(f). \quad (7.27)$$

Якщо зсув між частотами  $f_p = \frac{2}{T}$ , рис. 7.8, то основні пелюстки не перекриваються, що достатньо для надійного поділу каналів прийому. Ширина спектра, що вміщає головні пелюстки,

$$\Delta f_{\text{ЧТ}} = \Delta f_p + \frac{2}{T} = \frac{4}{T} = 4V. \quad (7.28)$$

Ширина спектра ЧТ-сигналу вдвічі більше, ніж у АТ- і ФТ-сигналів. Таким чином, з ростом швидкості передачі символів  $V$  необхідно збільшити частотний зсув  $\Delta f_p$ .

В силу надання ЧТ-сигналу у вигляді суми двох АТ-сигналів, потужності всіх складових подвоюються в порівнянні з АТ-сигналом:

$$\sigma_{\text{ЧТ}}^2 = \frac{U_m^2}{2}, \quad \sigma_{\text{НЧТ}}^2 = \sigma_{\text{БЧТ}}^2 = \frac{U_m^2}{4}. \quad (7.29)$$

В результаті ЧТ-сигнал дає дворазовий енергетичний виграш в порівнянні з АТ сигналом, але досягається ціною розширення смуги частот ЧТ-сигналу.

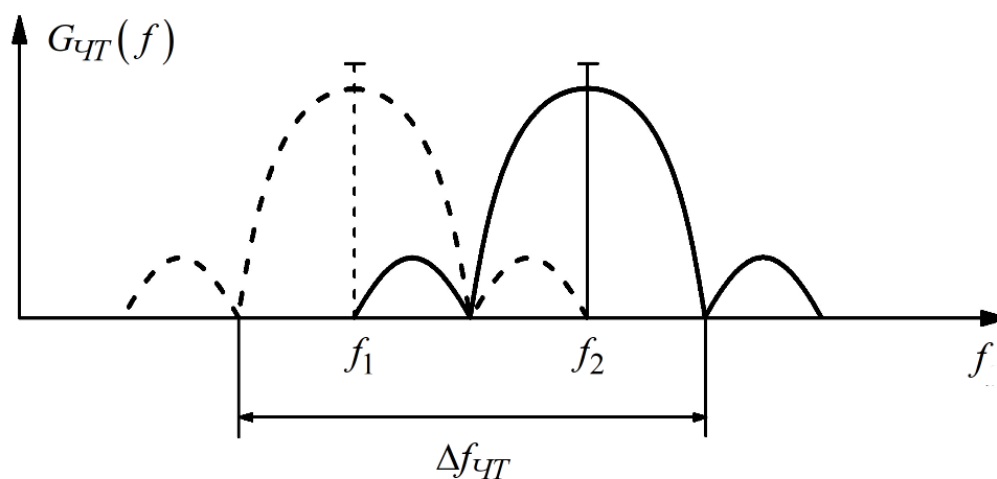


Рис. 7.8 Спектральна щільність потужності ЧТ-сигналу

Зведення енергетичних параметрів маніпульованих сигналів наведено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Енергетичні параметри маніпульованих сигналів

Вид маніпуляції	$\sigma^2$	$\sigma_H^2$	$\sigma_B^2$
АТ	$U_m^2/4$	$U_m^2/8$	$U_m^2/8$
ЧТ	$U_m^2/2$	$U_m^2/4$	$U_m^2/4$
ФТ	$U_m^2/2$	-	$U_m^2/2$

Остання колонка дає співвідношення між корисними потужностями балансно-модульованих складових:

$$\sigma_{БФТ}^2 = 2\sigma_{БЧТ}^2 = 4\sigma_{БАТ}^2. \quad (7.30)$$

Таким чином, ФТ-сигнал має дворазовий енергетичний вигреш в порівнянні з ЧТ-сигналом (відсутність несучої), і чотириразовий – в порівнянні з АТ-сигналом (відсутність несучої і активні паузи).

У задачі розрізнення елементів  $s_1(t)$  і  $s_2(t)$  двійкових сигналів велике значення мають взаємкореляційні властивості елементів. При  $\tau=0$  взаємна кореляція пропорційна взаємній енергії:

$$E_{12} = \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt = (s_1, s_2). \quad (7.31)$$

Елементи  $s_1(t)$  і  $s_2(t)$  можна розглядати як вектори в нескінченномірному просторі. У такому просторі зазвичай вводиться відстань між векторами у вигляді метрики Евкліда:

$$d_{12}^2 = \int_0^T (s_1(t) - s_2(t))^2 dt = E_1 + E_2 - 2E_{12}, \quad E_i = (s_i, s_i). \quad (7.32)$$

Векторне представлення АТ-, ЧТ-, ФТ- сигналів і відстаней між ними на- дано на рис. 7.9.

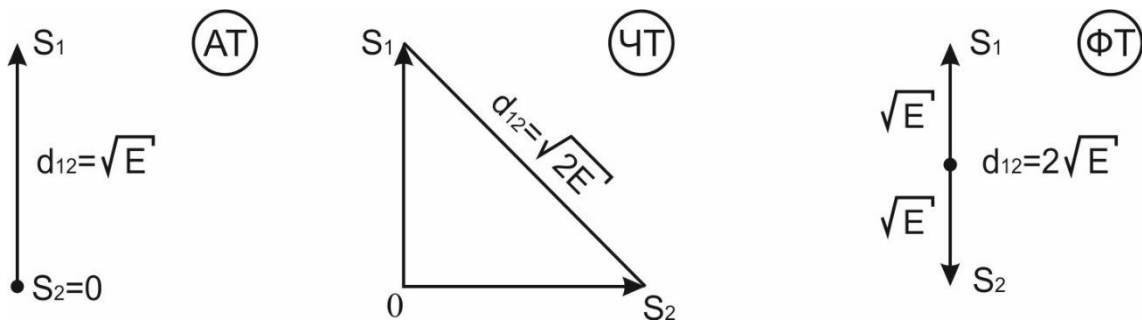


Рис.7.9 Векторне представлення АТ-, ЧТ-, ФТ- сигналів і відстаней між ними

При  $E_i=E$  отримаємо:

$$\text{ФТ: } E_{12} = (S_1, -S_1) = -E, \quad d_{12}^2 = 4E, \quad d_{12} = 2\sqrt{E}; \quad (7.33)$$

$$\text{ЧТ: } E_{12} = 0, \quad d_{12} = \sqrt{2E}; \quad (7.34)$$

$$\text{АТ: } E_{12} = 0 \quad , \quad d_{12} = \sqrt{E} . \quad (7.35)$$

Найбільша відстань між елементами забезпечується ФТ-сигналами, оскільки тут елементи протилежні і, отже, найбільш розрізняються при прийомі.

### Питання до самоперевірки

1. Запишіть математичну модель АТ-сигналу та його складових. Надайте їх геометричне представлення.
2. Надайте математичні вирази кореляційної функції і спектральної щільності потужності телеграфного сигналу з рівноймовірними значеннями та їх геометричне представлення.
3. Який математичний вигляд має кореляційна функція АТ-сигналу. Надайте її геометричне представлення.
4. Який математичний вигляд має спектральна щільність потужності АТ-сигналу. Надайте її геометричне представлення.
5. Наведіть основні властивості АТ-сигналу.
6. Запишіть математичну модель ФТ-сигналу. Надайте її геометричне представлення.
7. Який математичний вигляд має кореляційна функція ФТ-сигналу? Надайте її геометричне представлення.
8. Який математичний вигляд має спектральна щільність потужності ФТ-сигналу? Надайте її геометричне представлення.
9. Наведіть основні властивості ФТ-сигналу.
10. Запишіть математичну модель ЧТ-сигналу та його представлення у вигляді суми двох АТ-сигналів.
11. Запишіть умову некорельованості АТ-сигналів і її геометричне пояснення з використанням спектрального представлення.
12. Який математичний вигляд має кореляційна функція ЧТ-сигналу?
13. Який математичний вигляд має спектральна щільність потужності ЧТ-сигналу? Надайте її геометричне представлення.

## РОЗДІЛ №2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ РАДІОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ.

### Лекція №8 Апостеріорна щільність ймовірності і функція правдоподібності переданого повідомлення

- 8.1. Основні задачі теорії оптимального прийому.
- 8.2. Апостеріорна щільність ймовірності повідомлення, що передається.
- 8.3. Функція правдоподібності в гаусівському каналі.

#### 8.1. Основні задачі теорії оптимального прийому

**Завадостійкість** – це здатність системи передачі інформації забезпечити достатню достовірність інформації, що передається в умовах завад, тобто здатність її протидіяти перешкодам, які заважають.

Гранично досяжною завадостійкістю (мінімальний рівень спотворень) називається **потенційна завадостійкість**. Приймач, що забезпечує мінімальні спотворення (згідно обраному критерію), називається **оптимальним**.

В радіозв'язку та радіолокації сигнали, які приймаються, піддаються дії перешкод. При цьому завадостійкість реальних систем не може перевищувати потенційно досяжної.

Вирішення основних задач теорії оптимального радіоприйому базується на методах математичної статистики (А.М. Колгмороров, Н. Віннер та інші). Щоб уявити характер цих задач, розглянемо наступний приклад. Нехай на інтервалі  $[0, T]$  приймається сигнал  $z(t)$ , який представляє собою суму корисного сигналу  $s(t)$  і шуму  $n(t)$

$$z(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8.1)$$

Нехай  $s(t)$  – прямокутний радіоімпульс тривалістю  $\tau_s$ , рис. 1.

$$s(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega(t - \tau) + \varphi_0), & 0 < \tau \leq t \leq \tau + \tau_s < T, \\ 0, & t < \tau, t > T. \end{cases} \quad (8.2)$$

Сигнал  $s(t)$  залежить від п'яти параметрів:

1. амплітуда  $U_m$ ;
2. частота  $\omega$ ;
3. початкова фаза  $\varphi_0$ ;
4. момент появи  $\tau$ ;
5. тривалість  $\tau_s$ .

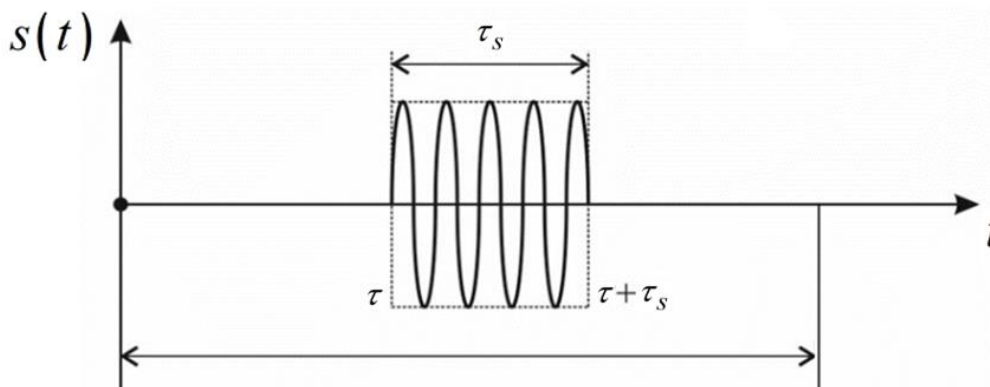


Рис. 8.1 Параметри прямокутного радіоімпульсу

В значеннях цих параметрів може міститися корисна інформація, яка повинна бути вилучена з прийнятого коливання при прийомі.

Якби не було ніяких попередніх відомостей про  $s(t)$ , тоді було б неможливо відрізнити сигнал від перешкоди. Навпаки, прийом сигналу з повністю відомими параметрами, не несе ніякої інформації. Тому носієм інформації є невідомі параметри сигналу. Ці параметри називаються інформаційними, всі інші – супроводжуючими.

Розглянемо основні задачі теорії оптимального прийому.

### **Виявлення сигналу.**

Сигнал на вході приймача є випадковим процесом, який можна записати у вигляді наступної моделі

$$z(t) = \lambda s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.3)$$

де  $s(t)$  - корисний детермінований сигнал;  $\lambda$  – дискретна випадкова величина, яка приймає два значення  $\lambda_1 = 1$  (сигнал  $s(t)$  присутній) і  $\lambda_0 = 0$  (сигнал  $s(t)$  відсутній) з відомими ймовірностями  $P(\lambda = \lambda_i) = P(\lambda_i), i = \overline{0,1}$ ;  $n(t)$  – завада, яка є гаусівським білим шумом (ГБШ) з нульовим математичним очікуванням, кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$  і спектральною щільністю потужності  $G_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$ ;  $T$  – тривалість інтервалу спостереження. Невідомим являється факт наявності сигналу в суміші  $\lambda = \lambda_1 = 1$  або його відсутність  $\lambda = \lambda_0 = 0$ .

Необхідно у відповідності до визначеного критерію оптимальності по прийнятій конкретній реалізації отриманого сигналу  $z(t) = z_l(t)$  в кінці інтервалу спостереження  $t = T$  прийняти рішення  $\hat{\lambda}_j, j = \overline{0,1}$  про наявність або відсутність корисного сигналу  $s(t)$ . Рішення  $\hat{\lambda}_1 = \hat{1}$  означає, що сигнал  $s(t)$  є в прийнятій реалізації сигналу  $z(t) = z_l(t)$ . Рішення  $\hat{\lambda}_0 = \hat{0}$  означає, що сигнал  $s(t)$  в прийнятій реалізації сигналу  $z(t) = z_l(t)$  відсутній. Задача виявлення характерна в радіолокації і дискретних системах зв'язку з пасивною паузою.

### ***Розрізнення сигналів***

Нехай у сигналі  $z(t)$ , що потрапляє на вхід приймача, може бути лише один з двох відомих по формі сигналів:  $s_1(t)$  або  $s_0(t)$ . Модель спостереження в цьому випадку можна записати у вигляді

$$z(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda_i) s_0(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.4)$$

де  $\lambda$  – дискретна випадкова величина, яка приймає два значення  $\lambda_1 = 1$  (присутній сигнал  $s_1(t)$ ) і  $\lambda_0 = 0$  (присутній сигнал  $s_0(t)$ ) з відомими

ймовірностями  $P(\lambda=\lambda_i) = P(\lambda_i), i = \overline{0,1}$ ;  $n(t)$  – ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ ;  $T$  – тривалість інтервалу спостереження.

Необхідно у відповідності до визначеного критерію оптимальності по прийнятій конкретній реалізації сигналу  $z(t) = z_l(t)$  в кінці інтервалу спостереження  $t = T$  прийняти рішення  $\hat{\lambda}_j, j = \overline{0,1}$  про присутність або сигналу  $s_1(t)$ , або  $s_0(t)$ . При  $s_0(t) = 0$  задача розрізнення переходить в задачу виявлення.

Цю задачу можна сформулювати для будь-якого параметру радіосигналу  $s(t)$ , який приймає два значення (амплітуди, частоти, фази). Сформульована задача розрізнення характерна для передачі двійкових сигналів у системах радіозв'язку. В загальному випадку вона може бути сформульована як задача розрізнення  $M$  сигналів.

### ***Оцінювання параметрів сигналу.***

Нехай корисний сигнал  $s(t, \lambda)$  відомий з точністю до деякого параметру  $\lambda$ , який являється неперервною випадковою величиною з відомою апіорною щільністю ймовірності  $f(\lambda)$ . Модель спостереження  $z(t)$  на вході приймача представляє адитивну суміш сигналу  $s(t, \lambda)$  і завади  $n(t)$  у вигляді

$$z(t) = s(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.5)$$

де  $n(t)$  – ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ ,

Необхідно у відповідності до визначеного критерію оптимальності по прийнятій конкретній реалізації сигналу  $z(t) = z_l(t)$  в кінці інтервалу спостереження  $t = T$  визначити оцінку (невідоме значення)  $\hat{\lambda}$  параметру  $\lambda$ . Дана задача характерна для вимірювальних систем, радіолокації, радіонавігації. Наслідком вирішення цієї задачі є структурні схеми оптимальних пристроїв вимірювання і граничні точності вимірювання параметрів сигналів.

### ***Фільтрація сигналів.***

Нехай невідомий параметр корисного сигналу залежить від часу  $\lambda(t)$  і являє собою випадковий процес з відомими ймовірнісними характеристиками. Модель сигналу  $z(t)$  на вході приймача при наявності адитивної завади має вигляд

$$z(t) = s(t, \lambda(t)) + n(t), \quad (8.6)$$

де  $n(t)$  – ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ .

Необхідно оптимальним чином отримати (відфільтрувати) оцінку  $\hat{\lambda}(t)$  реалізації  $\lambda(t) = \lambda_l(t)$ , яка знаходиться в реалізації суміші  $z(t) = z_l(t)$  на всьому інтервалі спостереження.

Задача подібного типу розглядається в загальній теорії фільтрації. В якості прикладу можна привести задачу передачі і прийому мовного повідомлення.

Задача фільтрації переходить в задачу оцінювання параметра сигналу, якщо цей параметр за час спостереження суттєво не змінюється. Задача фільтрації є більш загальною і складною, ніж задача оцінювання параметрів.

### ***Розділення сигналів.***

При наявності на вході приймача одночасно двох та більше сигналів ставиться задача їх роздільного виявлення і оцінювання параметрів, характерна для радіолокації та радіонавігації. В даній дисципліні задача розділення сигналів не розглядається.

## **8.2. Апостеріорна щільність ймовірності повідомлення, що передається**

Задачі теорії оптимального прийому вирішуються на основі попередніх (апріорних) знань і аналізу прийнятих даних. Найбільш повною характеристикою випадкової величини являються закони розподілу ймовірностей. Отримані з врахуванням інформації, яка надійшла, закони розподілу ймовірностей називаються апостеріорними. Розглянемо задачу визначення апостеріорних розподілів на прикладі задачі оцінювання невідомого параметру сигналу (8.5).

Обробка прийнятого на вході приймача сигналу  $z(t)$  може здійснюватися двома методами: дискретним і неперервним. Розгляд почнемо з дискретної постановки задачі, властивої цифровим ЕОМ.

При дискретному спостереженні виконується дискретизація прийнятої реалізації сигналу  $z_l(t)$  в дискретні моменти часу з шагом  $\Delta$ . Отриманий набір результатів спостереження  $z_l(t_k), k = \overline{1, m}$  представимо у вигляді вектору  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ . В статистиці такий вектор називається *вибіркою*.

Вибірка прийнятого сигналу  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  є *реалізацією* випадкового вектору  $(z(t_1), \dots, z(t_m))$ , який містить перерізи випадкового процесу  $z(t)$  для моментів часу  $t_1, \dots, t_m$ . Вектор  $(z(t_1), \dots, z(t_m))$  описується сумісною щільністю ймовірності  $f(z_1, \dots, z_m)$  для перерізів  $t_1, \dots, t_m$  випадкового процесу  $z(t)$ . Невідомий параметр  $\lambda$  є випадковою величиною з відомою щільністю ймовірності  $f(\lambda)$ . Згідно теореми множення ймовірностей, представимо сумісну щільність ймовірності  $f(\lambda, z_1, \dots, z_m)$  у вигляді

$$f(\lambda, z_1, \dots, z_m) = f(z_1, \dots, z_m) f(\lambda | z_1, \dots, z_m) = f(\lambda) f(z_1, \dots, z_m | \lambda), \quad (8.7)$$

де  $f(\lambda) = f_{pr}(\lambda)$  – апіорна щільність ймовірності;  $f(z_1, \dots, z_m | \lambda)$  – умовна щільність ймовірності випадкового вектора  $(z(t_1), \dots, z(t_m))$  при умові, що значення параметра  $\lambda$  відомо;  $f(\lambda | z_1, \dots, z_m)$  – умовна щільність ймовірності параметра  $\lambda$  при умові, що відома реалізація випадкового вектора  $(z(t_1), \dots, z(t_m)) = (z_1, \dots, z_m)$ , яка отримала назву апостеріорна щільність ймовірності параметра  $\lambda$ .

З (8.7) отримаємо, що апостеріорна щільність ймовірності  $f(\lambda | z_1, \dots, z_m)$  визначається за формулою

$$f(\lambda | z_1, \dots, z_m) = \frac{f(z_1, \dots, z_m | \lambda) f(\lambda)}{f(z_1, \dots, z_m)}. \quad (8.8)$$

Сумісна щільність ймовірності  $f(z_1, \dots, z_m)$  не залежить від  $\lambda$ . Вона визначається шляхом інтегрування сумісної щільності ймовірності  $f(\lambda, z_1, \dots, z_m)$  за параметром  $\lambda$

$$f(z_1, \dots, z_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, z_1, \dots, z_m) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) f(z_1, \dots, z_m / \lambda) d\lambda. \quad (8.9)$$

В задачі, що розглядається, **відоме значення вектора**  $(z(t_1), \dots, z(t_m)) = (z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ . Тож підставляючи його у формулу (8.8), отримаємо

$$\begin{aligned} f_{ps}(\lambda) = f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) &= \frac{f(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m) | \lambda) f(\lambda)}{f(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))} = \\ &= k^{-1} L_l(\lambda) f_{pr}(\lambda), \end{aligned} \quad (8.10)$$

де  $L_l(\lambda) = f(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m) / \lambda)$  - функція параметра  $\lambda$ ;  $k = f(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ .

Умовна щільність ймовірності  $f(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m) | \lambda) = L_l(\lambda)$  після підстановки в неї відомого значення вектора  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  являється функцією від  $\lambda$  і називається **функцією правдоподібності** параметра  $\lambda$ . Така назва  $L_l(\lambda)$  випливає з наступних міркувань. Умовна щільність ймовірностей  $f(z_1, \dots, z_m | \lambda)$  при відомому значенні параметра  $\lambda$  дозволяє визначити найбільш вірогідну реалізацію  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  сигналу, ймовірність появи якої максимальна. Це реалізація, при якій щільність ймовірностей  $f(z_1, \dots, z_m | \lambda)$  досягає максимального значення. З іншого боку, якщо реалізація  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  вже отримана, але ж значення параметра  $\lambda$  невідоме, доцільно взяти в якості його оцінки  $\hat{\lambda}$  значення, при якому функція  $f(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m) | \lambda) = L_l(\lambda)$  досягає максимального значення. Таким чином,

при відомих значеннях вектора вимірювань  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  функція правдоподібності  $L_l(\lambda)$  показує, наскільки одне можливе значення параметра  $\lambda$  більш правдоподібне (ймовірне), ніж інше.

Необхідно відмітити, що вигляд функції правдоподібності  $L_l(\lambda)$  залежить від вимірювань  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  і змінюється у різних випробуваннях випадково. Тому функція правдоподібності  $L_l(\lambda)$  є реалізацією випадкової функції  $L(\lambda)$  аргументу  $\lambda$ .

Після отримання реалізації вектора спостереження  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ , щільність ймовірності  $f(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) = k$  являється константою і виконує функцію нормуючого множника.

Таким чином, для визначення апостеріорної щільності ймовірності  $f_{ps}(\lambda)$  необхідно на першому етапі визначити умовну  $f(z_1, \dots, z_m | \lambda)$  і безумовні  $f(\lambda)$ ,  $f(z_1, \dots, z_m)$  щільності ймовірності, які входять в праву частину формули (8.8). На другому етапі необхідно підставити в отриманий вираз відому реалізацію вектора  $(z(t_1), \dots, z(t_m)) = (z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ . Апостеріорна щільність ймовірності  $f_{ps}(\lambda)$  являється найбільш повною характеристикою випадкового параметру  $\lambda$ . Вона містить всю наявну інформацію про нього, яка знаходиться в апіорній щільності ймовірності  $f(\lambda)$  і отриманій реалізації випадкового вектору  $(z(t_1), \dots, z(t_m)) = (z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ .

Формула (8.10) представляє собою математичний запис теореми Байєса для розгнаної задачі спостереження і показує, яким чином із апіорних даних  $f_{pr}(\lambda)$  і результатів спостереження  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  формуються апостеріорні знання. Апіорна щільність ймовірності формується завчасно на основі попередньої обробки статистичних даних. Для визначення апостеріорної щільності ймовірності  $f_{ps}(\lambda)$  необхідно також вміти розраховувати і функцію правдоподібності  $L_l(\lambda)$ .

### 8.3. Функція правдоподібності в гаусівському каналі

Математична модель задачі оцінювання невідомого параметру сигналу в неперервному часі описується рівнянням (8.5). При дискретному спостереженні виконується дискретизація прийнятого сигналу  $z(t)$  в дискретні моменти часу з шагом  $\Delta$ . Для обмеження дії впливу завад будемо вважати, що на вході приймача встановлено ідеальний фільтр нижніх частот з граничною частотою  $F_m$  рис. 8.2. Завада на виході фільтра нижніх частот, яка потрапляє в тракт обробки приймача, також є гаусівською, але ж корельованою. Спектральна щільність потужності  $G_{\tilde{n}}(f)$  завади показана штриховою лінією на рис. 8.2.

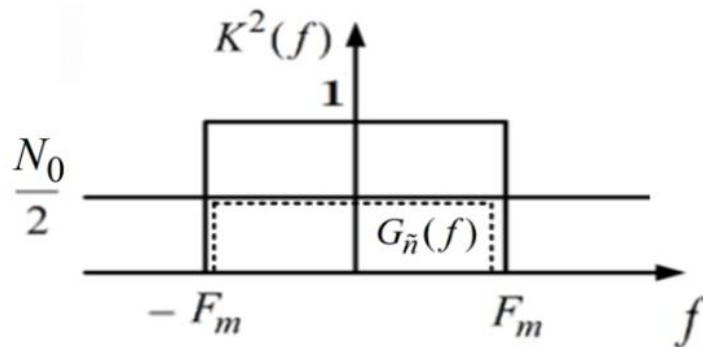


Рис.8.2 Проходження БГШ крізь ідеальний фільтр нижніх частот

Кореляційна функція завади представлена на рис. 8.3 і описується виразом

$$K_{\tilde{n}}(\tau) = N_0 F_m \frac{\sin 2\pi F_m \tau}{2\pi F_m \tau}. \quad (8.11)$$

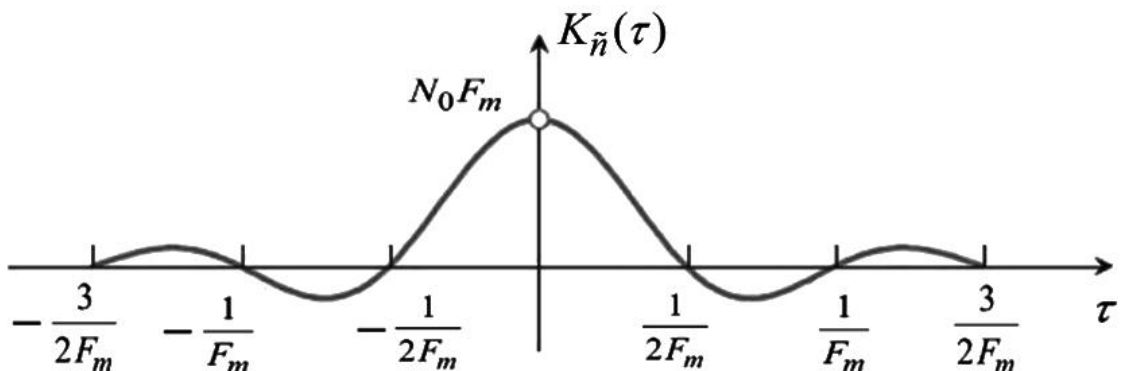


Рис.8.3 Кореляційна функція завади на виході фільтра нижніх частот

Виберемо шаг дискретизації  $\Delta$  у відповідності до теорему Котельникова

$$\Delta = \frac{1}{2F_m}. \quad (8.12)$$

Як випливає з рис. 8.3, відліки дискретизованої завади  $\tilde{n}(t_k)$  будуть некорельовані. А оскільки процес  $\tilde{n}(t)$  є гаусівським, то і незалежні. Дисперсія дискретизованої завади  $\tilde{n}(t_k)$  дорівнює

$$\sigma_{\tilde{n}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\tilde{n}}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} K^2(f) df = \frac{N_0}{2} 2F_m = \frac{N_0}{2\Delta} = N_0 F_m. \quad (8.13)$$

Дискретизований некорельований гаусівський процес  $\tilde{n}(t_k)$  отримав назву дискретний білий гаусівський шум.

Отримане після дискретизації з кроком дискретизації (8.12) рівняння спостереження (8.5) можна представити у вигляді:

$$z(t_k) = s(t_k, \lambda) + \tilde{n}(t_k), \quad k = \overline{1, m}. \quad (8.14)$$

Для визначення функції правдоподібності  $L(\lambda)$  необхідно розрахувати умовну щільність ймовірності  $f(z_1, \dots, z_m / \lambda)$ . Визначимо щільність ймовірності  $f(z_k / \lambda)$  спостереження  $z(t_k)$  за умови, коли значення параметра  $\lambda$  відомо. В цьому випадку, як випливає з рівняння (8.11),  $z(t_k)$  є сумою константи  $s(t_k, \lambda)$  і гаусівської випадкової величини  $\tilde{n}(t_k)$ . Тому  $z(t_k)$  є гаусівською, а умовна щільність ймовірності має вигляд

$$f(z_k / \lambda) = N(m_z(t_k | \lambda), \sigma_z^2(t_k | \lambda)), \quad (8.15)$$

де  $m_z(t_k | \lambda)$  - умовне математичне очікування;  $\sigma_z^2(t_k | \lambda)$  - умовна дисперсія.

Знайдемо умовне математичне очікування  $m_z(t_k | \lambda)$  випадкової величини  $z(t_k)$ . Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} m_z(t_k | \lambda) &= \mathbf{M}[z(t_k) | \lambda] = \mathbf{M}[s(t_k, \lambda) + \tilde{n}(t_k) | \lambda] = \\ &= \mathbf{M}[s(t_k, \lambda) | \lambda] + \mathbf{M}[\tilde{n}(t_k) | \lambda] = s(t_k, \lambda). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Знайдемо умовну дисперсію  $\sigma_z^2(t_k | \lambda)$  випадкової величини  $z(t_k)$ . Виконаємо перетворення

$$\sigma_z^2(t_k | \lambda) = \mathbf{M}[(z(t_k) - m_z(t_k | \lambda))^2 | \lambda] = \mathbf{M}[\tilde{n}^2(t_k) | \lambda] = \sigma_{\tilde{n}}^2. \quad (8.17)$$

З урахуванням отриманих виразів умовну щільність ймовірності  $f(z_k / \lambda)$  можна представити у вигляді

$$f(z_k / \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\tilde{n}}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}(z_k - s(t_k, \lambda))^2\right\}. \quad (8.18)$$

Сумісна щільність ймовірності статистично незалежних відліків дискретного БГШ  $\tilde{n}(t_k)$  визначається по формулі

$$f(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_m) = \prod_{k=1}^m f(\tilde{n}_k, t_k). \quad (8.19)$$

Як впливає з рівняння (8.11), при відомому значенні параметра  $\lambda$  статистичні властивості спостереження  $z(t_k)$  визначаються статистичними властивостями дискретного БГШ  $\tilde{n}(t_k)$ . Тому при відомому значенні параметра  $\lambda$  спостереження  $z(t_k)$  також будуть статистично незалежні, а умовна сумісна щільність ймовірності  $f(z_1, \dots, z_m / \lambda)$  може бути представлена у вигляді

$$f(z_1, \dots, z_m / \lambda) = \prod_{k=1}^m f(z_k / \lambda). \quad (8.20)$$

З використанням (8.15) вираз (8.17) можна перетворити до вигляду

$$f(z_1, \dots, z_m / \lambda) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_{\tilde{n}}^2} \right)^{\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\tilde{n}}^2} \sum_{k=1}^m (z_k - s(t_k, \lambda))^2 \right\}. \quad (8.21)$$

Після отримання вектору вимірювань  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  умовна щільність ймовірності  $f(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m) / \lambda)$  являється функцією від  $\lambda$  і є функцією правдоподібності  $L_l(\lambda)$  параметру  $\lambda$ . Вона має вигляд

$$L_l(\lambda) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_{\tilde{n}}^2} \right)^{\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\tilde{n}}^2} \sum_{k=1}^m (z_l(t_k) - s(t_k, \lambda))^2 \right\}. \quad (8.22)$$

З використанням функції правдоподібності (8.22) на основі формули Байєса (8.10) може бути розрахована апостеріорна щільність ймовірності  $f(\lambda / z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  в гаусівському каналі при дискретному спостереженні.

Функцію правдоподібності  $L_l(\lambda)$  в гаусівському каналі при неперервному спостереженні визначимо шляхом граничного переходу, спрямовуючи крок дискретизації  $\Delta$  до нуля. З використанням (8.13) перепишемо (8.22) у вигляді

$$L_l(\lambda) = \left( \frac{\Delta}{\pi N_0} \right)^{\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^m (z_l(t_k) - s(t_k, \lambda))^2 \Delta \right\}. \quad (8.23)$$

Спрямовуючи крок дискретизації  $\Delta$  до нуля і необмежено розширюючи полосу фільтра, в граничному випадку отримаємо вигляд функціонала правдоподібності при неперервному спостереженні

$$L_l(\lambda) = c \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - s(t, \lambda))^2 dt \right\} = cF(\lambda). \quad (8.24)$$

де  $c$  - константа, яка не залежить від реалізації  $z_l(t)$

$$c = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta}{\pi N_0} \right)^{\frac{m}{2}} = const. \quad (8.25)$$

Вираз (8.24) називається функціоналом, тому що він кожній отриманій реалізації  $z_l(t)$ , яка є функцією часу, ставить у відповідність деяку функцію  $L_l(\lambda)$ . Константа  $c$  в формулі (8.24) суттєвого значення не має, і часто нею можна знехтувати.

Побудувати функціонал правдоподібності  $L_l(\lambda)$  можна, визначаючи різні значення  $\lambda$  у відомій функції  $s(t, \lambda)$  для отриманої реалізації  $z_l(t)$ . Це досягається шляхом формування опорних сигналів  $s(t, \lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  в оптимальному приймачі.

Неперервне спостереження забезпечує більш високу точність вирішення задачі оптимального прийому, оскільки використовується інформація, яка міститься в усій реалізації  $z_l(t)$ . При цьому коефіцієнт  $c$  може бути включений в множник  $k$  в формулі (8.8), і вона прийме вигляд:

$$f_{ps}(\lambda) = k^{-1} F_l(\lambda) f_{pr}(\lambda) \quad (8.26)$$

Апостеріорна щільність ймовірності і функціонал правдоподібності використовуються в якості критеріальних функцій при знаходженні оптимальних оцінок параметра  $\lambda$ . В якості оцінки  $\hat{\lambda}_{MAP}$  параметра  $\lambda$ , оптимальною за критерієм максимуму апостеріорної щільності ймовірності (MAP) використовується його значення, при якому апостеріорна щільність ймовірності  $f_{ps}(\lambda)$  приймає максимальне значення. Вирішальне правило знаходження оцінки можна представити у вигляді

$$\hat{\lambda}_{MAP} = \arg \max_{\lambda} f_{ps}(\lambda) = \arg \max_{\lambda} L_l(\lambda) f_{pr}(\lambda). \quad (8.27)$$

При невідомому апіорному розподілі  $f_{pr}(\lambda)$  користуються критерієм максимальної правдоподібності (ML). Згідно з цим критерієм, в якості оцінки  $\hat{\lambda}_{ML}$  параметра  $\lambda$  використовується його значення, при якому функціонал (функція) правдоподібності  $L_l(\lambda)$  приймає максимальне значення. Вирішальне правило знаходження оцінки можна представити у вигляді

$$\hat{\lambda}_{ML} = \arg \max_{\lambda} L_l(\lambda). \quad (8.28)$$

Геометричний зміст оцінок  $\hat{\lambda}_{MAP}$  і  $\hat{\lambda}_{ML}$  наведено на рис. 8.4.

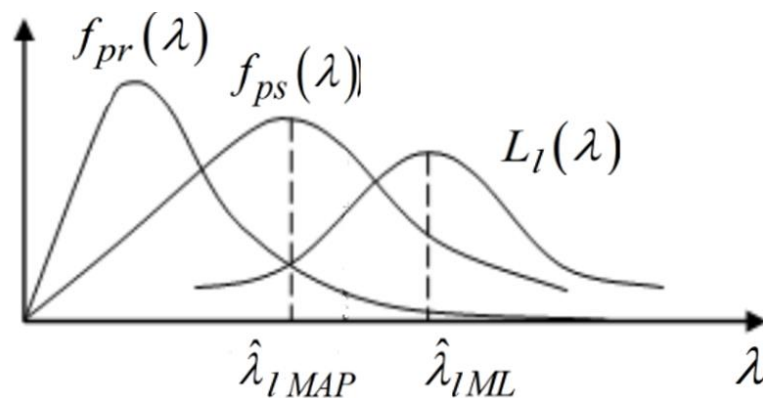


Рис. 8.4. Геометричний зміст оцінок  $\hat{\lambda}_{MAP}$  і  $\hat{\lambda}_{ML}$

Як випливає з проведеного аналізу, оцінки  $\hat{\lambda}_{MAP}$  і  $\hat{\lambda}_{ML}$  є випадковими величинами, які приймають у випробуваннях значення  $\hat{\lambda}_{MAP}$  і  $\hat{\lambda}_{ML}$ .

### Приклад.

Необхідно отримати вираз для апостеріорної щільності ймовірності невідомої затримки  $\lambda = \tau$  прийнятого корисного сигналу  $s(t, \lambda) = s(t - \tau)$  в гаусівському каналі. Вважаємо, що всі параметри сигналу, окрім  $\tau$ , відомі.

Рівняння спостереження (8.5) має вигляд

$$z(t) = s(t - \tau) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.29)$$

На основі моделі (8.29), з врахуванням (8.24), (8.26), отримаємо

$$f_{ps}(\tau) = k^{-1} F_l(\tau) f_{pr}(\tau) = k^{-1} f_{pr}(\tau) \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - s(t - \tau))^2 dt \right\}. \quad (8.30)$$

Виконаємо аналіз показника експоненти в (8.30)

$$\begin{aligned} \int_0^T (z_l(t) - s(t - \tau))^2 dt &= \int_0^T z_l^2(t) dt - 2 \int_0^T z_l(t) s(t - \tau) dt + \int_0^T s^2(t - \tau) dt = \\ &= E_z - 2q_l(\tau) + E_s, \end{aligned} \quad (8.31)$$

де  $E_z$  - енергія прийнятого сигналу  $z_l(t)$

$$E_z = \int_0^T z_l^2(t) dt; \quad (8.32)$$

$E_s$  - енергія корисного сигналу  $s(t - \tau)$

$$E_s = \int_0^T s^2(t - \tau) dt; \quad (8.33)$$

$q_l(\tau)$  - розраховується за формулою

$$q_l(\tau) = \int_0^T z_l(t) s(t - \tau) dt. \quad (8.34)$$

Енергія прийнятого сигналу  $z_l(t)$  і сигналу  $s(t - \tau)$  від  $\tau$  не залежить. Тому вираз (8.31) можна представити у вигляді

$$f_{ps}(\tau) = k^{-1} f_{pr}(\tau) \exp \left\{ \frac{2}{N_0} q_l(\tau) \right\} \quad (8.35)$$

Згортка (8.34) між отриманою реалізацією  $z_l(t)$  і відомим сигналом  $s(t-\tau)$  називається кореляційним інтегралом. Кореляційний інтеграл  $q_l(\tau)$  характеризує міру взаємної кореляції між прийнятим коливанням  $z_l(t)$  і корисним сигналом  $s(t-\tau)$ . Отже, при відомих  $f_{pr}(\tau)$  і  $N_0$ , визначення  $f_{ps}(\tau)$  еквівалентне знаходженню функції  $q_l(\tau)$ .

Необхідно відмітити, що вигляд функції  $q_l(\tau)$  залежить від отриманої реалізації  $z_l(t)$  і змінюється у різних випробуваннях випадково. Тому функція  $q_l(\tau)$  є реалізацією випадкової функції  $q(\tau)$  аргументу  $\tau$ .

### Питання до самоперевірки

1. Надайте визначення завадостійкості радіотехнічної системи. Який приймач називається оптимальним?
2. Наведіть параметри прямокутного радіоімпульсу.
3. Назвіть основні задачі оптимального прийому сигналів.
4. Запишіть формулу для апостеріорної щільності ймовірності повідомлення і поясніть її складові.
5. Як розраховується дисперсія дискретного БГШ?
6. Запишіть вираз і параметри умовної щільності ймовірності  $f(z_k / \lambda)$  спостереження  $z(t_k)$ .
7. Запишіть вираз функції правдоподібності  $L(\lambda)$  параметра  $\lambda$  при векторному спостереженні в каналі з БГШ.
8. Запишіть вираз функціоналу правдоподібності  $L(\lambda)$  параметра  $\lambda$  при неперервному спостереженні в каналі з БГШ.
9. Запишіть критерії оптимальності максимуму апостеріорної щільності ймовірності і максимуму функції правдоподібності і поясніть геометричний зміст оцінок.
10. Запишіть вираз для апостеріорної щільності ймовірності невідомої затримки сигналу і поясніть його складові.

## Лекція №9 Кореляційний прийом

- 9.1. Кореляційний інтеграл.
- 9.2. Властивості сигнальної функції.
- 9.3. Властивості шумової функції.

### 9.1. Кореляційний інтеграл

В загальному випадку, якщо параметр  $\lambda$  є неенергетичним (затримка, частота або початкова фаза сигналу), функцію правдоподібності можна записати у вигляді

$$L_l(\lambda) = c \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T z_l(t) s(t, \lambda) dt \right\}, \quad (9.1)$$

де  $z_l(t)$  - отримана реалізація радіосигналу, яка описується виразом

$$z_l(t) = s(t, \lambda_0) + n_l(t); \quad (9.2)$$

$\lambda_0$  - істинне значення параметру радіосигналу;  $n_l(t)$  - реалізація шуму.

Згортку  $q_l(\lambda)$  вхідного спостереження  $z_j(t)$  і сигналу  $s(t, \lambda)$  із заданим параметром  $\lambda$  називають кореляційним інтегралом

$$q_l(\lambda) = \int_0^T z_l(t) s(t, \lambda) dt. \quad (9.3)$$

На практиці параметр  $\lambda$  приймає значення в інтервалі  $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ .

Пристрій для знаходження  $q_l(\lambda)$  називається кореляційним приймачем. Його структурна схема показана на рис. 9.1. Опорний сигнал  $s(t, \lambda)$  може приймати різні значення в залежності від значення випадкового параметру  $\lambda$ , а вхідний сигнал  $s(t, \lambda_0)$  містить значення  $\lambda_0$ .

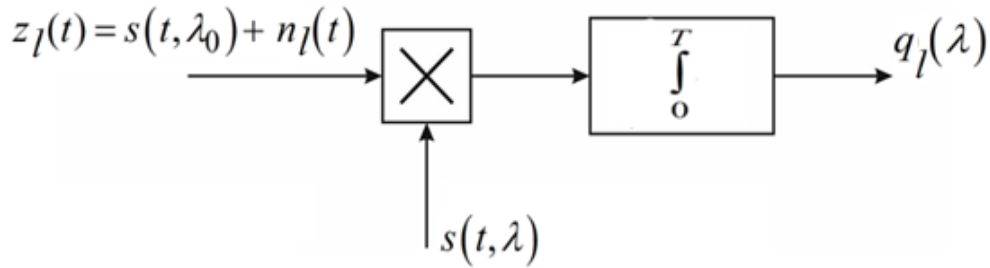


Рис. 9.1 Структурна схема кореляційного приймача

З використанням (9.1), (9.3) вирішальне правило знаходження оцінки  $\hat{\lambda}_{lML}$  можна представити у вигляді

$$\hat{\lambda}_{lML} = \arg \max_{\lambda} L(\lambda) = \arg \max_{\lambda} c \exp \left\{ \frac{2}{N_0} q_l(\lambda) \right\}. \quad (9.4)$$

Оскільки логарифм є монотонно зростаючою функцією, функція  $\ln L_l(\lambda)$  не змінює положення екстремуму функції  $L_l(\lambda)$ . Тому

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{lML} &= \arg \max_{\lambda} \ln L_l(\lambda) = \arg \max_{\lambda} \ln \left( c \exp \left\{ \frac{2}{N_0} q_l(\lambda) \right\} \right) \\ &= \arg \max_{\lambda} \left( \ln c + \frac{2}{N} q_l(\lambda) \right) = \arg \max_{\lambda} q_l(\lambda). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Таким чином, для визначення оцінки  $\hat{\lambda}_{lML}$  в якості критеріальної функції може бути використана функція  $q_l(\lambda)$ . В якості оцінки  $\hat{\lambda}_{lML}$  параметра  $\lambda$  використовується його значення, при якому функція  $q_l(\lambda)$  приймає максимальне значення. Вирішальне правило знаходження оцінки можна представити у вигляді

$$\hat{\lambda}_{lML} = \arg \max_{\lambda} q_l(\lambda). \quad (9.6)$$

Таким чином, змінюючи опорний сигнал  $s(t, \lambda)$  шляхом зміни параметру  $\lambda$  по максимальному значенню  $q_l(\lambda)$ , може бути визначена оцінка  $\hat{\lambda}_{lML}$ .

## 9.2. Властивості сигнальної функції

В результаті вирішення *задачі синтезу* була отримана структурна схема оптимального кореляційного приймача. Проведемо його *аналіз*. Розглянемо кореляційний інтеграл (9.2). Функція  $q_l(\lambda)$  залежить від отриманої реалізації  $z_l(t)$  і змінюється у різних випробуваннях випадково. Тому її можна розглядати як реалізацію випадкової функції  $q(\lambda)$  аргументу  $\lambda$ . Для аналізу статистичних характеристик  $q(\lambda)$  використаємо ймовірнісну модель процесу спостереження  $z(t)$  (6.3)

$$z(t) = s(t, \lambda_0) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9.7)$$

де  $\lambda_0$  - істинне значення параметру радіосигналу;  $n(t)$  – ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ .

З використанням (9.7), перетворення випадкового сигналу  $z(t)$  кореляційним приймачем, який реалізує алгоритм (9.3), можна представити у вигляді

$$q(\lambda) = \int_0^T z(t) s(t, \lambda) dt = \int_0^T s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt + \int_0^T n(t) s(t, \lambda) dt = q_s(\lambda) + q_n(\lambda), \quad (9.8)$$

де  $q_s(\lambda)$ ,  $q_n(\lambda)$  - сигнальна і шумова функції параметра  $\lambda$ .

Кореляційний інтеграл включає дві складові. Сигнальна складова (функція) описується виразом

$$q_s(\lambda) = \int_0^T s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt. \quad (9.9)$$

Вона має такі властивості:

1. Сигнальна функція пропорційна кореляційній функції сигналу відомої форми і є детермінованою функцією

$$q_s(\lambda) = T \frac{1}{T} \int_0^T s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt = T K_s(\lambda - \lambda_0), \quad (9.10)$$

де  $K_s(\lambda - \lambda_0)$  - кореляційна функція сигналу.

2. Максимум  $q_s(\lambda)$  досягається в точці  $\lambda = \lambda_0$  і дорівнює енергії сигналу

$$q_{s \max} = q_s(\lambda_0) = T K_s(0) = T \sigma_s^2 = E_s. \quad (9.11)$$

Тому кажуть, що кореляційний приймач являється накопичувачем енергії сигналу. Сигнальна функція  $q_s(\lambda)$  показана на рис. 9.2.

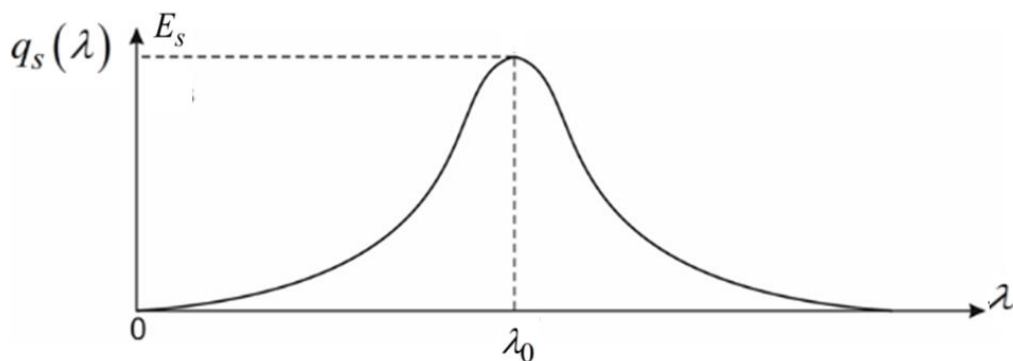


Рис. 9.2 Загальний вигляд сигнальної функції  $q_s(\lambda)$

**Приклад.**

Сигналом  $s(t, \lambda)$  є відеоімпульс з невідомим часом приходу  $s(t, \lambda) = s(t - \tau)$  і тривалістю  $T$ . Нехай  $\lambda = \tau$  - затримка опорного сигналу  $s(t, \lambda) = s(t - \tau)$ . При цьому  $\tau_0$  - справжня затримка сигналу в реалізації. Сигнальна функція має вигляд:

$$q_s(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+T} s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt. \quad (9.12)$$

При цьому інтервал інтегрування  $[\tau, \tau+T]$  рівний тривалості опорного сигналу, тому що поза цим інтервалом опорний сигнал дорівнює нулю і інтегрувати марно. Виконаємо заміну змінних і ряд перетворень сигнальної складової

$$t - \tau = \eta; \quad t = \eta + \tau; \quad t - \tau_0 = \eta + \tau - \tau_0 = \eta + (\tau - \tau_0); \quad (9.13)$$

$$q_s(\tau) = T \frac{1}{T} \int_0^T s(\eta) s(\eta + (\tau - \tau_0)) d\eta = TK_s(\tau - \tau_0). \quad (9.14)$$

Враховуючи вид кореляційної функції відеоімпульсу, отримаємо

$$q_s(\tau) = TA^2 \left( 1 - \frac{|\tau - \tau_0|}{T} \right), \quad |\tau - \tau_0| \leq T. \quad (9.15)$$

Сигнальна функція має вигляд, наведений на рис. 9.3. При  $\tau = \tau_0$  вхідний і опорний сигнали співпадають, і сигнальна складова досягає максимального значення

$$q_{s \max} = q_s(\tau_0) = TK_s(0) = E_s = A^2 T. \quad (9.16)$$

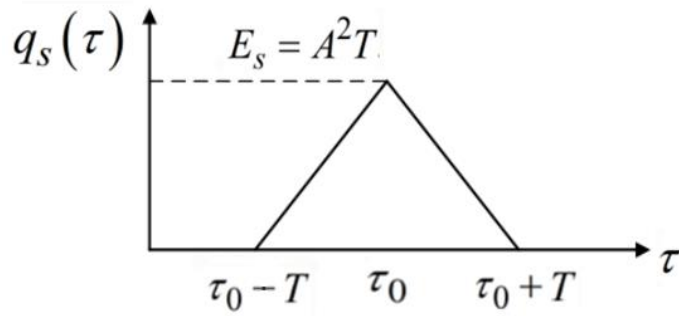


Рис. 9.3 Сигнальна функція при використанні корисного сигналу у вигляді відеоімпульсу з невідомою затримкою

Геометричну інтерпретацію обчислення сигнальної функції з використанням кореляційного приймача показано на рис. 9.4.

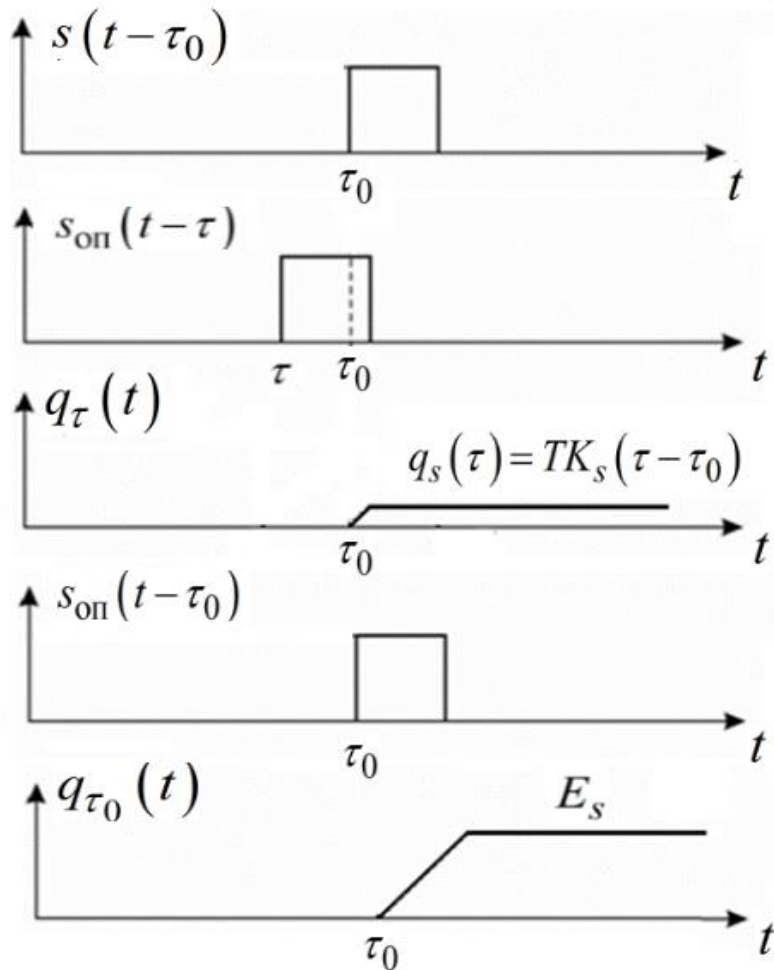


Рис. 9.4 Геометрична інтерпретація обчислення сигнальної функції з використанням кореляційного приймача

Функції  $q_\tau(t)$  і  $q_{\tau_0}(t)$  описують вихід кореляційних інтегралів при затримках опорних сигналів  $\tau$  і  $\tau_0$  відповідно. Після закінчення інтегрування на виходах кореляційних інтервалів отримаємо відповідні значення сигнальної функції. Таким чином, для визначення виду сигнальної функції необхідно весь інтервал часу приходу сигналу розбити на підінтервали і сформувати набір опорних сигналів  $s(t - \tau_i)$ . В результаті будуть обраховані значення сигнальної функції у відповідні моменти часу.

### 9.3. Властивості шумової функції

Шумова функція описується виразом

$$q_n(\lambda) = \int_0^T n(t)s(t, \lambda) dt \quad (9.17)$$

Вона носить випадковий характер і призводить до зміщення максимуму функції  $q(\lambda)$  і помилок оцінювання.

Для кожного фіксованого  $\lambda$  шумова функція  $q_n(\lambda)$  є гаусівською, оскільки являється лінійним перетворенням реалізацій гаусівського білого шуму  $n(t)$ . Числові характеристики отримаємо на основі властивості ергодичності БГШ  $n(t)$ .

Математичне очікування  $q_n(\lambda)$  визначається наступним чином:

$$\mathbf{M}[q_n(\lambda)] = \mathbf{M}\left[\int_0^T n(t)s(t, \lambda) dt\right] = \int_0^T \mathbf{M}[n(t)]s(t, \lambda) dt = 0. \quad (9.18)$$

Таким чином, математичне очікування  $q_n(\lambda)$  дорівнює нулю.

Дисперсія  $q_n(\lambda)$  визначається за формулою:

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= \mathbf{M}\left[q_n^2(\lambda)\right] = \int_0^T \int_0^T \mathbf{M}\left[n(t_1)n(t_2)\right] s(t_1, \lambda) s(t_2, \lambda) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t_2 - t_1) s(t_1, \lambda) s(t_2, \lambda) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t_1, \lambda) dt_1 = \frac{N_0 E_s}{2}. \quad (9.19)\end{aligned}$$

Аналогічно визначається кореляційна функція шумової функції:

$$\begin{aligned}K_{q_n}(\lambda_1, \lambda_2) &= \mathbf{M}\left[q_n(\lambda_1)q_n(\lambda_2)\right] = \int_0^T \int_0^T \mathbf{M}\left[n(t_1)n(t_2)\right] s(t_1, \lambda_1) s(t_2, \lambda_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t_2 - t_1) s(t_1, \lambda_1) s(t_2, \lambda_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T s(t_1, \lambda_1) s(t_1, \lambda_2) dt_1 = \frac{N_0 T}{2} K_s(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (9.20)\end{aligned}$$

Кореляційна функція шумової функції повторює по формі кореляційну функцію сигналу  $K_s(\lambda_2 - \lambda_1)$ . Це зумовлено тим, що в формуванні  $q_n(\lambda)$ , крім вхідного шуму, бере участь опорний сигнал.

Визначимо *відношення сигнал/шум* (ВСШ) на виході кореляційного приймача, як відношення максимальної (пікової) потужності  $P_{s \text{ макс}}$  сигнальної функції  $q_s(\lambda)$  до середньої потужності  $\sigma_q^2$  шумової функції  $q_n(\lambda)$

$$h^2 = \frac{P_{s \text{ макс}}}{\sigma_{qn}^2} = \frac{E_s^2}{\frac{N_0}{2} E_s} = \frac{2E_s}{N_0} = \text{max}. \quad (9.21)$$

Доведено, що в каналі з гаусівським білим шумом це відношення являється максимальним.

Таким чином, кореляційний приймач забезпечує при  $\lambda = \lambda_0$  максимальне ВСШ.

З (9.21) випливає, що ВСШ  $h^2$  не залежить від форми сигналу, а від його енергії  $E_S$ .

З (9.21) також випливає, що для досягнення максимального ВСШ необхідно синхронізувати сигнал  $s(t, \lambda)$  з вхідним  $s(t, \lambda_0)$ , щоб виконувалось співвідношення  $\lambda = \lambda_0$ .

Якщо вирішити задачу синхронізації не вдається, то алгоритм будується по багатоканальній схемі. Наприклад, структурна схема багатоканального кореляційного приймача для визначення невідомого часу приходу сигналу відомої форми показана на рис. 9.5.

Лінія затримки має загальну затримку, яка дорівнює апріорному інтервалу очікуваних затримок. Від лінії затримки зроблені рівномірні відводи. Різниця в затримках між сусідніми відводами дорівнює постійній величині. Схема дозволяє розрахувати значення  $q(\tau_i)$  з відповідним кроком. У вирішальному пристрої (ВП) визначається максимальне значення  $q(\tau_i)$  і відповідно оцінка невідомого часу приходу сигналу. Для імпульсних РЛС різниця в затримках між сусідніми відводами приблизно дорівнює тривалості імпульсу.

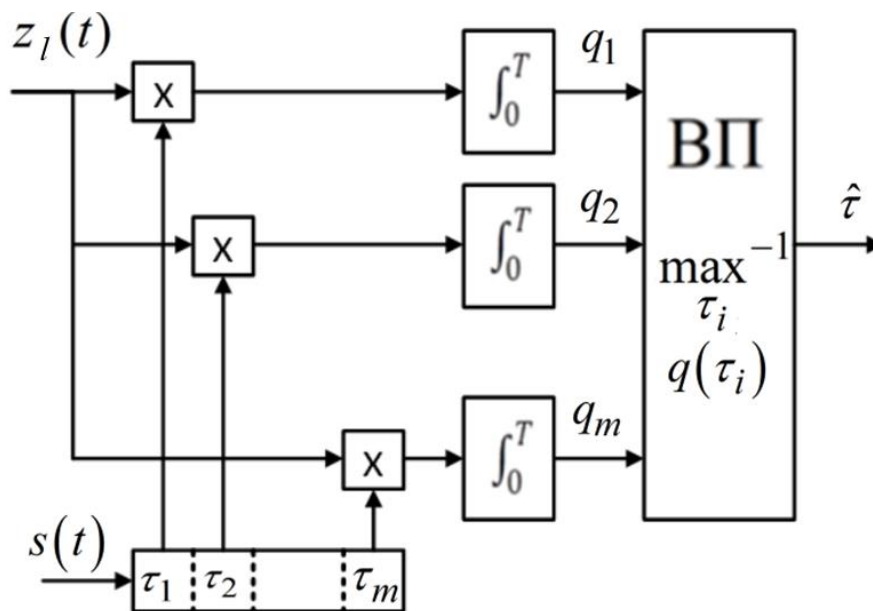


Рис. 9.5 Структурна схема багатоканального кореляційного приймача для визначення невідомого часу приходу сигналу відомої форми

## Питання до самоперевірки

1. Запишіть функцію правдоподібності неенергетичного параметра сигналу в каналі з БГШ.
2. Запишіть вираз для кореляційного інтеграла.
3. Наведіть структурну схему кореляційного приймача.
4. Запишіть вирішальне правило знаходження максимально правдоподібної оцінки неенергетичного параметра на основі кореляційного інтеграла і поясніть його.
5. Як визначається сигнальна складова кореляційного інтеграла і якими властивостями вона володіє?
6. Наведіть геометричну інтерпретацію обчислення сигнальної функції з використанням кореляційного приймача на прикладі прямокутного відеоімпульсу.
7. Як визначається шумова складова кореляційного інтеграла? Чому дорівнює її математичне очікування?
8. Наведіть формулу для дисперсії шумової складової та поясніть її складові.
9. За якою формулою розраховується відношення сигнал/шум на виході кореляційного приймача? Від яких характеристик сигналу і завади воно залежить?
10. Поясніть, в чому полягає задача синхронізації кореляційного приймача.

## Лекція №10. Узгоджений прийом

- 10.1. Еквівалентність кореляційного приймача та узгодженого фільтра.
- 10.2. Сигнальна функція узгодженого фільтра.
- 10.3. Передавальна характеристика узгодженого фільтра.
- 10.4. ВСШ на виході узгодженого фільтра.
- 10.5. ВСШ на виході узгодженого фільтра при використанні широкосмугових сигналів і завад з обмеженою потужністю.

### 10.1. Еквівалентність кореляційного приймача і узгодженого фільтра

Розглянемо випадок, коли невідомим параметром сигналу є затримка часу його приходу  $\lambda = \tau$ . Кореляційний приймач забезпечує потенційні характеристики лише тоді, коли момент можливого приходу сигналу є відомим. Але ж на практиці часто така вимога не виконується. Також кореляційний приймач є активним лінійним фільтром у зв'язку з наявністю опорного сигналу. Структурна схема кореляційного приймача, що працює при умові відомого часу приходу сигналу, показана на рис. 1.

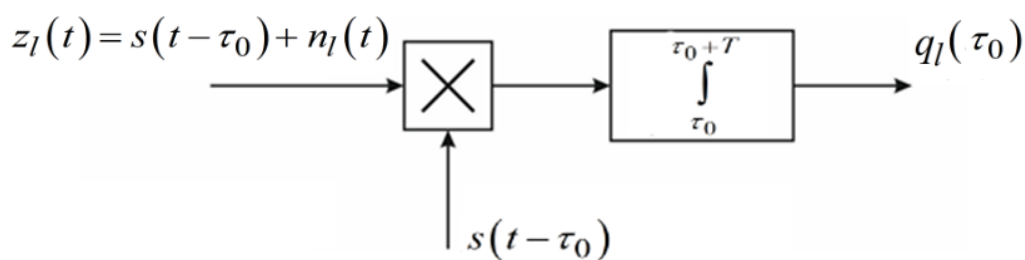


Рис.10.1 Структурна схема кореляційного приймача за умови відомого часу приходу сигналу

Виникає питання, чи можна замінити кореляційний приймач іншим пристроєм, який також дозволяє отримати максимальне ВСШ на виході, але не вимагає знання часу приходу сигналу.

Схемі кореляційного приймача рис. 10.1 можна поставити у відповідність пасивний лінійний фільтр рис. 10.2, що не вимагає опорного сигналу



Рис. 10.2. Структурна схема пасивного лінійного фільтра

Розглянемо математичну модель кореляційного приймача

$$q_l(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+T} z_l(t) s(t-\tau) dt, \quad (10.1)$$

де  $T$  - тривалість сигналу.

Нехай час приходу сигналу відомий і дорівнює  $\tau_0=0$ . В цьому випадку рівняння (1) перетворюється до вигляду

$$q_l(0) = \int_0^T z_l(t) s(t) dt. \quad (10.2)$$

Сигнал на виході лінійного фільтра описується згорткою

$$y_l(t) = \int_0^t z_l(\eta) g(t-\eta) d\eta, \quad (10.3)$$

де  $g(t)$  - імпульсна характеристика фільтра.

*Умовою еквівалентності кореляційного приймача і лінійного фільтра є рівність їх відгуків в момент  $t = T$ , який відповідає закінченню накопичення енергії сигналу*

$$q_l(0) = y_l(T). \quad (10.4)$$

В момент  $t = T$  сигнал на виході лінійного фільтра описується згорткою

$$y_l(T) = \int_0^T z_l(\eta) g(T-\eta) d\eta. \quad (10.5)$$

Прирівнюючи вирази (10.2), (10.5) відповідно до (10.4), отримаємо рівняння

$$g(T - \eta) = s(\eta). \quad (10.6)$$

Вводячи нову змінну  $t = T - \eta$  отримаємо

$$g(t) = s(T - t). \quad (10.7)$$

Імпульсна характеристика фільтра збігається за формою з сигналом, але інвертована в часі. Тому такий фільтр називається *узгодженим* (matched filter). На рис. 10.3 наведені сигнали  $s(t)$ ,  $s(-t)$  і імпульсна характеристика узгодженого фільтра  $g(t)$ .

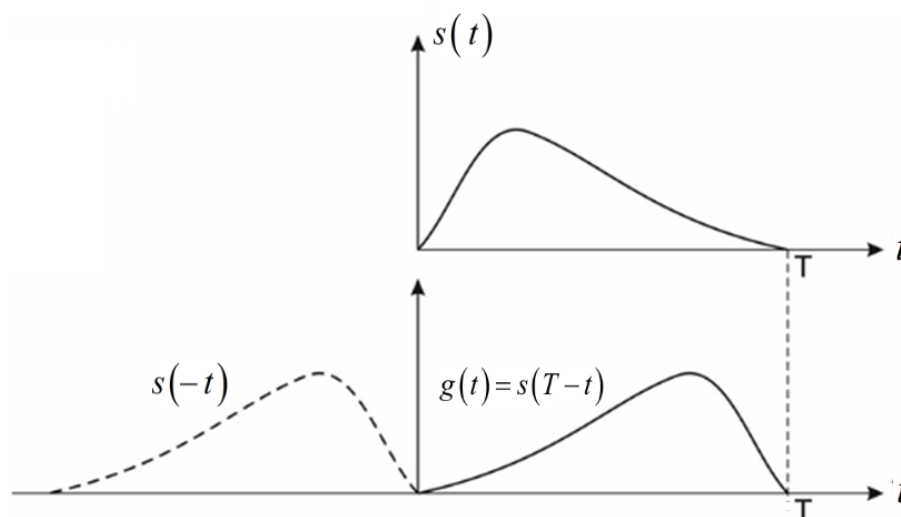


Рис. 10.3 Зв'язок між сигналом і імпульсною характеристикою узгодженого фільтра

## 10.2. Сигнальна функція узгодженого фільтра

Сигнальна функція узгодженого фільтра - це реакція фільтра на сигнал без завади  $s(t)$ , з яким фільтр узгоджений. Згідно з (10.3) отримаємо

$$y_s(t) = \int_0^t s(\eta) g(t - \eta) d\eta = \left| g(x) = s(T - x); g(t - \eta) = s(T - t + \eta) \right| =$$

$$= \int_0^T s(\eta)s(\eta - (t - T))d\eta = T \frac{1}{T} \int_0^T s(\eta)s(\eta - (t - T))d\eta = TK_s(t - T). \quad (10.8)$$

*Відгук узгодженого фільтра на «свій» сигнал  $s(t)$  повторює по формі його кореляційну функцію з максимумом в момент закінчення сигналу  $T$ . Цей максимум дорівнює енергії сигналу:*

$$y_{s\max} = y_s(T) = TK_s(0) = E_s. \quad (10.9)$$

Узгоджений фільтр, як і кореляційний приймач, можна розглядати як пристрій накопичення енергії вхідного сигналу. За рахунок цього, як буде показано нижче, забезпечується і максимальне ВСШ  $h^2$  в момент закінчення сигналу  $T$ . Сигнальна функція узгодженого фільтра  $y_s(t)$  показана на рис. 10.4.

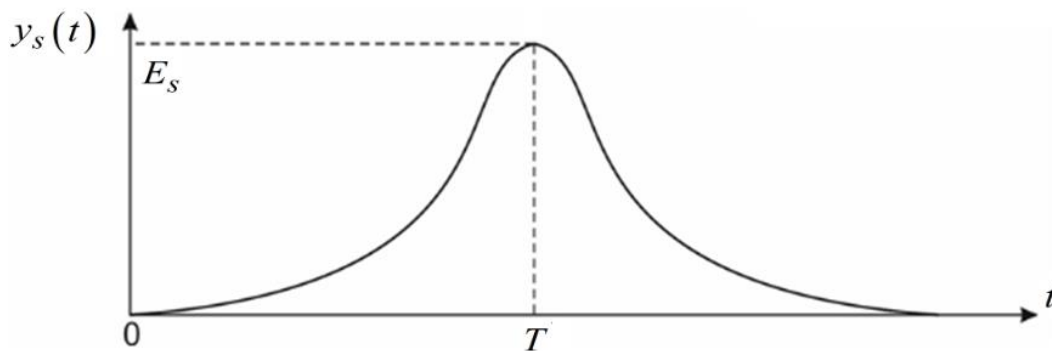


Рис. 10.4 Сигнальна функція узгодженого фільтра

Лінійний фільтр володіє властивістю інваріантності в часі. Вона полягає в тому, що часовий зсув вхідного сигналу приводить до аналогічного часового зсуву вихідного сигналу в лінійній системі. Таким чином, якщо реакцією узгодженого фільтра на свій вхідний сигнал  $s_1(t)$  є сигнальна функція фільтра  $y_{s1}(t)$ , то для вхідного сигналу  $s_2(t) = s_1(t - \tau_0)$  реакцією буде зміщена у часі на  $\tau_0$  сигнальна функція фільтра  $y_{s2}(t) = y_{s1}(t - \tau_0)$  рис. 10.5. Таким чином, узгоджений фільтр дозволяє отримати максимальне ВСШ  $h^2$ , але не вимагає знання часу приходу сигналу. Максимальне ВСШ на виході досягається в момент закінчення вхідного сигналу.

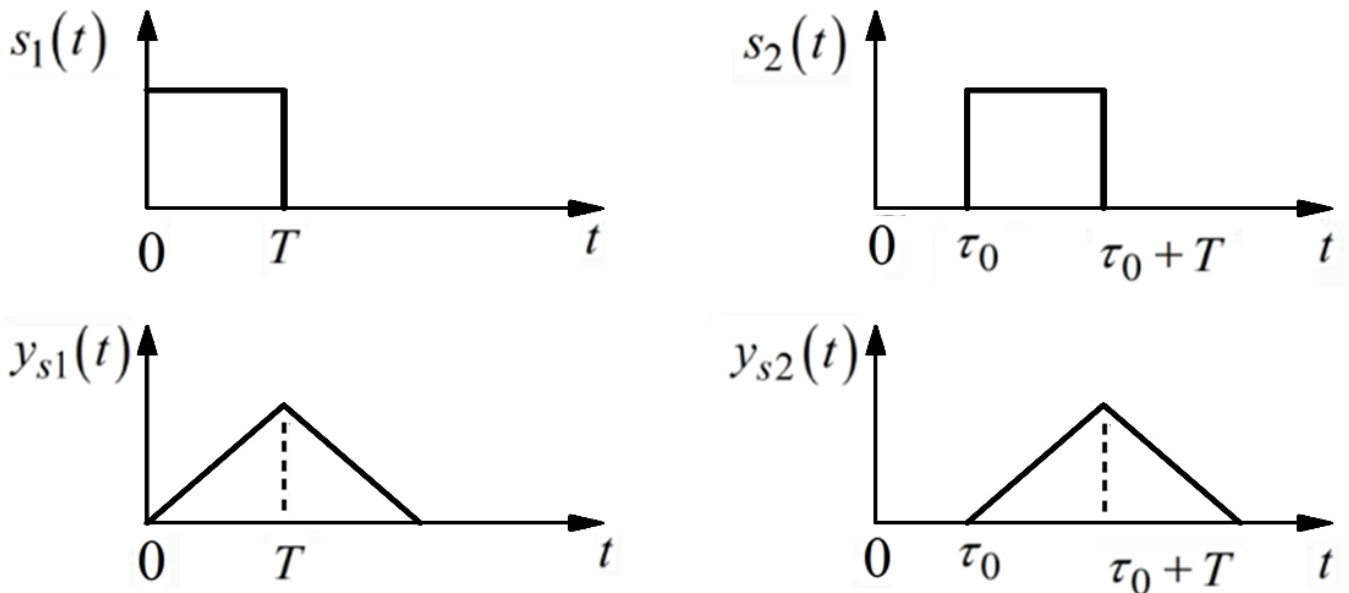


Рис. 10.5 Властивість інваріантності узгодженого фільтра

### 10.3. Передавальна характеристика узгодженого фільтра

Передавальна характеристика узгодженого фільтра - комплексний коефіцієнт передачі визначається перетворенням Фур'є від імпульсної характеристики:

$$\begin{aligned}
 K_m(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = |g(t) = s(T-t)| = \int_{-\infty}^{\infty} s(T-t) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= |T-t = \tau; t = T-\tau| = - \int_{\infty}^{-\infty} s(\tau) e^{-j\omega(T-\tau)} d\tau = e^{-j\omega T} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \\
 &= e^{-j\omega T} S_s^*(j\omega), \tag{10}
 \end{aligned}$$

де  $S_s^*(j\omega) = |S_s(j\omega)| e^{-j\Psi_s(\omega)}$  - комплексно-спряжений спектр сигналу.

Таким чином, передавальна функція узгодженого фільтра пропорційна комплексно - спряженому спектру вхідного сигналу з множником  $e^{-j\omega T}$ .

Амплітудно – частотна характеристика (АЧХ) узгодженого фільтра збігається з амплітудно-частотним спектром  $|S_s(j\omega)|$  сигналу  $s(t)$

$$K_m(\omega) = |K_m(j\omega)| = |S_s(j\omega)| = S_s(\omega). \quad (10.11)$$

Фазо-частотна характеристика (ФЧХ) узгодженого фільтра  $\psi_m(\omega)$  протилежна за знаком фазо - частотному спектру сигналу  $\psi_s(\omega)$  з адитивною складовою, що характеризує затримку  $T$

$$\psi_m(\omega) = -\Psi_s(\omega) - \omega T. \quad (10.12)$$

На рис. 10.6 показані відеоімпульс, радіоімпульс і амплітудно-частотні характеристики відповідних узгоджених фільтрів. В першому випадку узгоджений фільтр є за частотними властивостями фільтром низьких частот, в другому – полосовим фільтром.

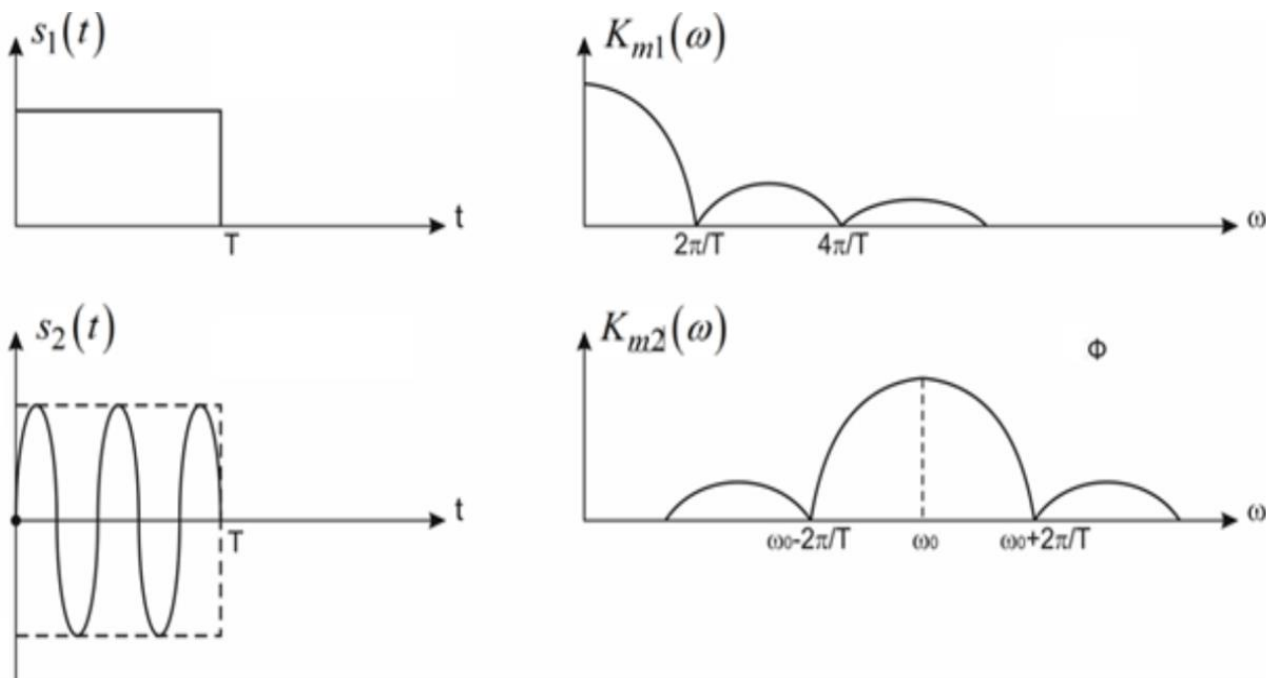


Рис. 10.6 Відеоімпульс, радіоімпульс і амплітудно - частотні характеристики відповідних узгоджених фільтрів

### Приклад

Визначити комплексний коефіцієнт передачі фільтра, узгодженого з прямокутним імпульсом  $s_1(t)$  з амплітудою  $A$  та тривалістю  $T$ , показаним на рис. 10.6. Побудувати структурну схему фільтра.

Розв'язок.

Спектр прямокутного імпульсу розраховується за формулою

$$S_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^T Ae^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega}(e^{-j\omega T} - 1).$$

З використанням формули (10.10) комплексний коефіцієнт передачі узгодженого фільтра отримаємо у вигляді

$$\begin{aligned} K_m(j\omega) &= e^{-j\omega T} S_s^*(j\omega) = |S_s^*(j\omega)| = S_s(-j\omega) = e^{-j\omega T} \frac{A}{-j\omega}(e^{-j\omega T} - 1) = \\ &= \frac{A}{j\omega}(1 - e^{-j\omega T}). \end{aligned}$$

Згідно з властивостями перетворення Фур'є

$$\int s(t)dt \Leftrightarrow \frac{S_s(j\omega)}{j\omega}; \quad s(t-T) \Leftrightarrow S_s(j\omega)e^{-j\omega T},$$

комплексному коефіцієнту передачі буде відповідати схема рис. 10.7.

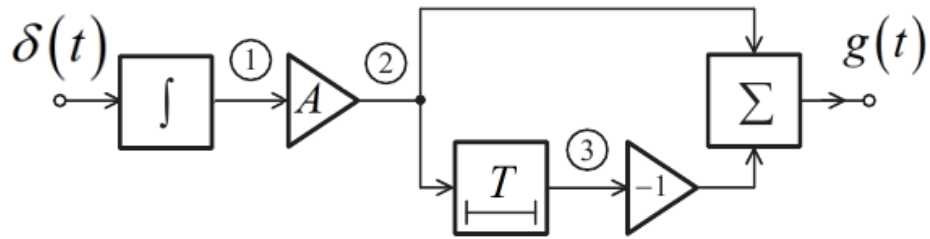


Рис. 10.7 Структурна схем фільтра, узгодженого з прямокутним імпульсом

Для перевірки отриманої схеми подамо на її вхід дельта-функцію. В цьому випадку вихідним сигналом пристрою є його імпульсна характеристика, яка в даному випадку співпадає з прямокутним імпульсом. Часові діаграми, що пояснюють формування імпульсної характеристики, наведені на рис. 10.8. З них видно, що схема на рис. 10.7 має потрібну імпульсну характеристику.

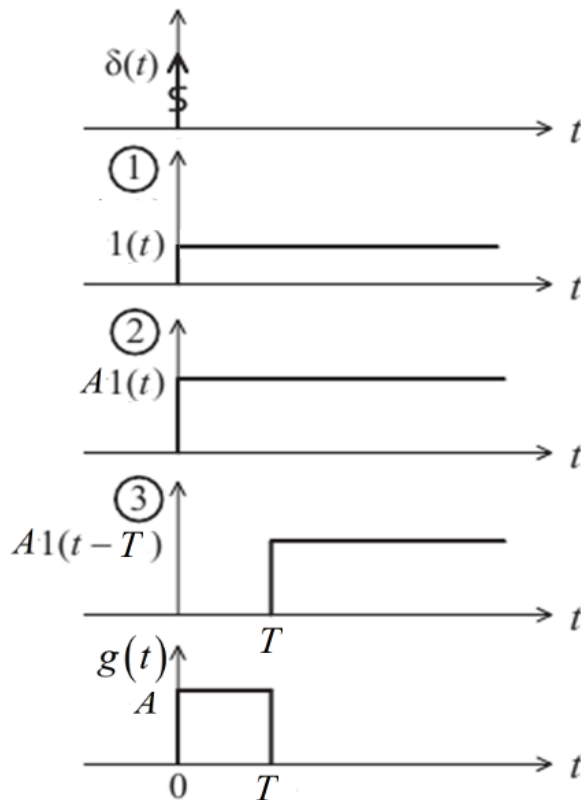


Рис. 10.8 Часові діаграми, що пояснюють формування імпульсної характеристики

#### 10.4. ВСШ на виході узгодженого фільтра

Як і для кореляційного приймача, ВСШ  $h^2$  на виході узгодженого фільтра при заваді у вигляді гаусівського білого шуму визначимо як:

$$h^2 = \frac{y_{s\max}^2}{\sigma_{n\text{вих}}^2} = \frac{P_{qs\text{нік}}}{\sigma_{n\text{вих}}^2}, \quad (10.13)$$

де  $y_{s\max} = E_s$  - значення сигнальної функції узгодженого фільтра у момент часу закінчення сигналу  $T$ ;  $\sigma_{n\text{вих}}^2$  - середня потужність шуму на виході узгодженого фільтра:

$$\sigma_{n\text{вих}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |K_m(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s^2(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} E_s. \quad (10.14)$$

При цьому

$$h^2 = \frac{2E_s}{N_0}. \quad (10.15)$$

Кореляційний приймач і узгоджений фільтр забезпечують максимальне ВСШ на виході. Воно залежить лише від енергії сигналу та спектральної щільності шуму і не залежить від форми сигналу.

На рис. 10.9 показано вихідний сигнал узгодженого фільтра  $y(t)$  при подачі на вхід сигналу  $z(t)$ , який включає прямокутний відеоімпульс  $s(t)$  і заваду  $n(t)$ . Наявність шуму призводить до зміщення максимуму вихідного сигналу узгодженого фільтра  $y(t)$  відносно максимуму сигнальної функції  $y_s(t)$ . Це призводить до похибки вимірювання часу приходу імпульсу за критерієм максимуму функції правдоподібності.

Перевагою узгодженого фільтра є відсутність вимоги синхронізації опорного сигналу. Однак при цьому для кожного сигналу  $s(t)$  потрібно розробляти свій фільтр, що ускладнює перестройку апаратури і робить її більш громіздкою при

використанні більшої кількості сигналів. При програмній реалізації узгодженого фільтра на обчислювальних пристроях цей недолік усувається.

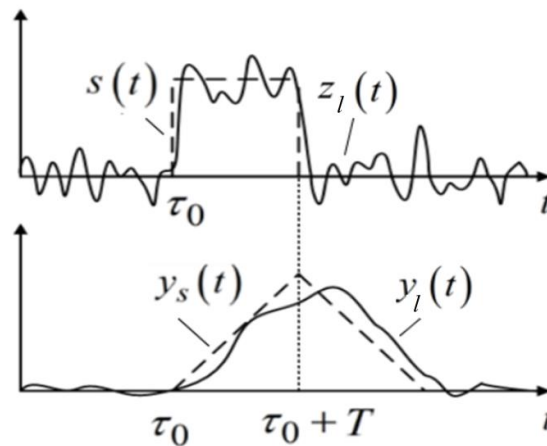


Рис. 10.9 Вхідний і вихідний сигнали узгодженого фільтра при відсутності і наявності завади

### 10.5. ВСШ на виході узгодженого фільтра при використанні сигналів з розширенням спектра і завад з обмеженою потужністю

Нехай сигнал має обмежену смугою  $\Delta f_s$  спектральну щільність потужності. Узгоджений фільтр має ту ж саму смугу пропускання  $\Delta f_\phi = \Delta f_s$ . Він не пропускає складові білого шуму, які знаходяться за межами смуги пропускання. Таким чином, отриманий вираз (13) визначає також ВСШ  $h^2$  на виході узгодженого фільтра, при впливі завади з рівномірною щільністю потужності  $N_0$  в смузі сигналу  $\Delta f_s$  рис.10.10. Така завада має обмежену потужність, яка визначається за формулою

$$\sigma_n^2 = N_0 \Delta f_s ; \quad (10.16)$$

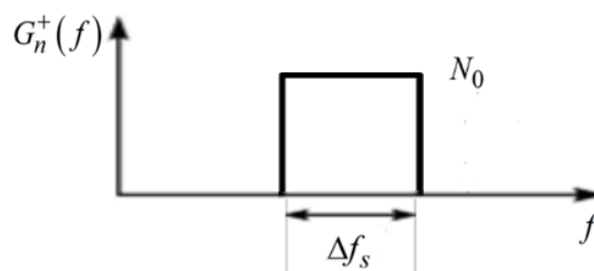


Рис.10.10 Спектральна щільність завади з обмеженою потужністю

Виначимо ВСШ  $h^2$  при передаванні двійкових символів з використанням класичної фазової маніпуляції і  $N$ -елементних сигналів з розширенням спектру. Довжина інформаційного символу дорівнює  $T$ . Довжина елементу  $T_0$ . При цьому виконується умова

$$\frac{T}{T_0} = N. \quad (10.17)$$

На рис 10.11 показано процес формування сигналів з розширенням спектру. На рис. 10.11,а зображені інформаційні символи. На рис. 10.11,б показана кодова послідовність, яка циклічно повторюється. На рис. 10.11,в показана моделююча послідовність, а на рис. 10.11,г – двійковий фазоманіпульований радіосигнал. Такі сигнали використовуються в системах з кодовим розділенням каналів типу CDMA (code-division multiple access).

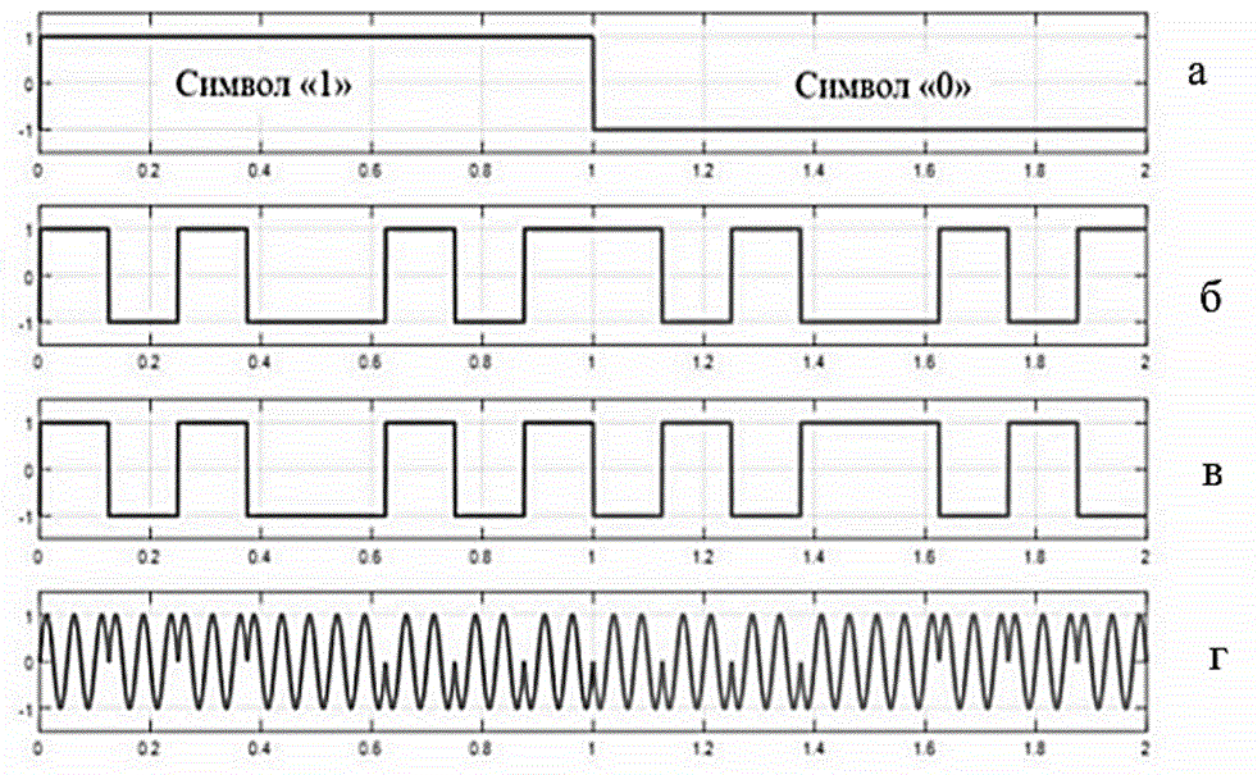


Рис. 10.11 Формування сигналів з розширенням спектру

При передачі інформаційних імпульсів з використанням класичної фазової маніпуляції одностороння фізична спектральна щільність потужності описується виразом

$$G_{\Phi T}^+(f) = \frac{U_m^2}{2} G_\lambda(f - f_0) = \frac{U_m^2}{2} T \left( \frac{\sin(\pi(f - f_0)T)}{\pi(f - f_0)T} \right)^2. \quad (10.18)$$

Ширина спектра прийнята як ширина головної пелюстки і дорівнює

$$\Delta f_{\Phi T} = 2/T = 2V. \quad (10.19)$$

Трактуючи сигнал з розширенням спектру як фазоманіпульований сигнал, але ж з довжиною елементарного імпульсу  $T_0$ , отримаємо спектральну щільність потужності

$$G_{PC}^+(f) = \frac{U_m^2}{2} G_\lambda(f - f_0) = \frac{U_m^2}{2} T_0 \left( \frac{\sin(\pi(f - f_0)T_0)}{\pi(f - f_0)T_0} \right)^2. \quad (10.20)$$

Відповідно ширина спектра дорівнює

$$\Delta f_{PC} = 2/T_0, \quad (10.21)$$

Спектральні щільності потужності  $G_{\Phi T}^+(f)$  і  $G_{PC}^+(f)$  показані на рис. 10.10.

Будемо вважати, що на ці сигнали впливають завади однакової потужності  $\sigma_n^2$  з рівномірними щільностями потужності в смугах частот  $\Delta f_{\Phi T}$  і  $\Delta f_{PC}$  рис. 10.12, які розраховуються за формулами

$$N_{\Phi T} = \frac{\sigma_n^2}{\Delta f_{\Phi T}} = \frac{1}{2} \sigma_n^2 T; \quad (10.22)$$

$$N_{PC} = \frac{\sigma_n^2}{\Delta f_{PC}} = \frac{1}{2} \sigma_n^2 T_0 = \frac{1}{2} \sigma_n^2 \frac{T}{N} = \frac{N_{\Phi T}}{N}. \quad (10.23)$$

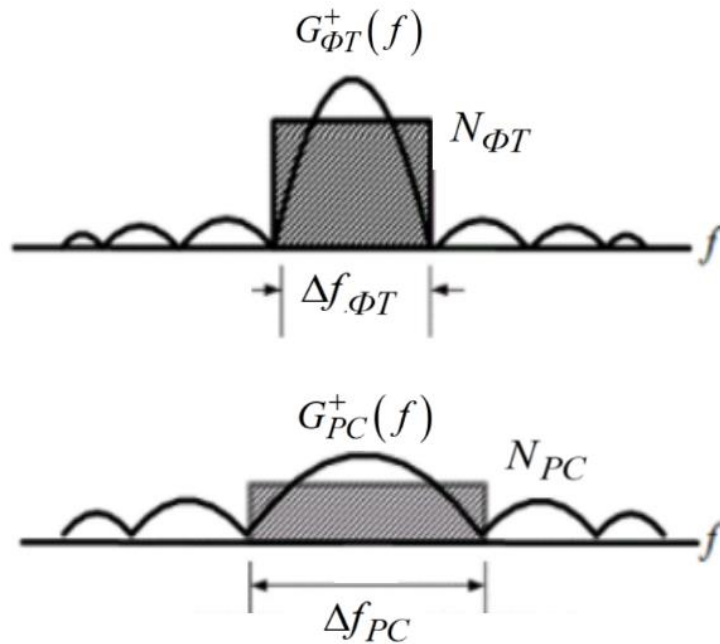


Рис. 10.12 Вплив завади з обмеженою потужністю на вузькосмуговий сигнал і сигнал з розширенням спектру

Відповідно ВСШ  $h^2$  при використанні ФТ- і РС- сигналів дорівнює

$$h_{\Phi T}^2 = \frac{2E_s}{N_{\Phi T}}. \quad (10.24)$$

$$h_{PC}^2 = \frac{2E_s}{N_{PC}} = \frac{2E_s}{N_{\Phi T}} N = h_{\Phi T}^2 N. \quad (10.25)$$

ВСШ  $h^2$  при використанні РС-сигналів більше, ніж при використанні ФТ-сигналів, в  $N$  разів. Нагадаємо, що бази ФТ- і РС- сигналів розраховуються за формулами

$$V_{\Phi T} = 2\Delta f_{\Phi T} T = 2\frac{2}{T} T = 4; \quad (10.26)$$

$$V_{PC} = 2\Delta f_{PC} T = 2\frac{2}{T_0} T = 4N. \quad (10.27)$$

Таким чином, база сигналів з розширенням спектру більше, ніж у вузькосмугових сигналів, в  $N$  разів.

При заваді типу білого гаусівського шуму при використанні сигналів з розширенням спектру і вузькосмугових сигналів з однаковою енергією ВСШ  $h^2$  буде однаковим, що обумовлено однаковою спектральною щільністю потужності шуму в смугах сигналів рис. 10.13.

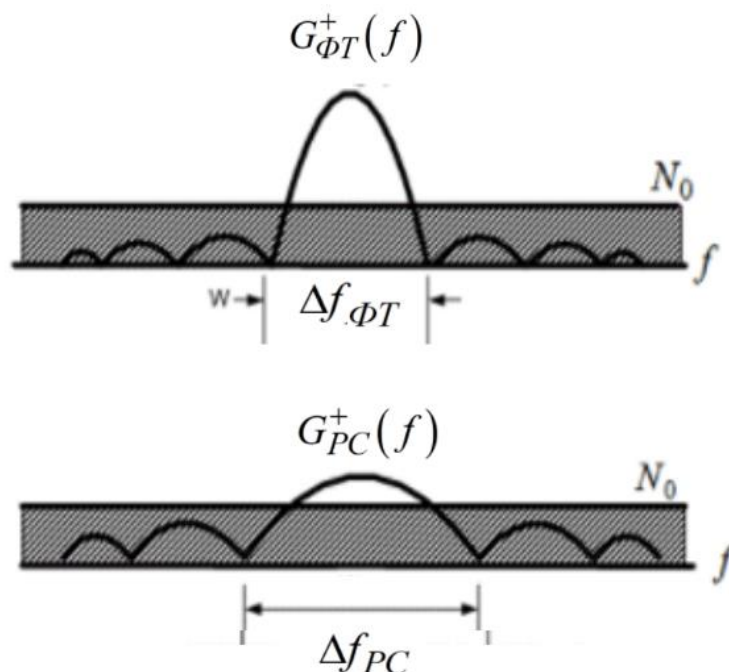


Рис. 10.13 Вплив ГБШ на вузькосмуговий сигнал і сигнал з розширенням спектру

**Перевагами сигналів з розширенням спектру є:**

1. Завадозахищеність щодо навмисних завад.
2. Прихованість.
3. Висока точність вимірювання часу отримання сигналу.
4. Забезпечення множинного доступу з кодовим розділенням каналів.

**Приклад.**

Заданий прямокутний відеоімпульс  $s(t)$  із внутрішньоімпульсною модуляцією рис. 10.14,а . Необхідно зобразити імпульсну характеристику узгодженого фільтра та побудувати узгоджений фільтр.

Розв'язок.

Для побудови імпульсної характеристики узгодженого фільтра необхідно використати її властивість (10.7). Графічну побудову імпульсної характеристики показано на рис.10.14,б. Щоб визначити імпульсну характеристику  $g(t)$ , сигнал

$s(t)$  необхідно відобразити дзеркально щодо вертикальної осі, а потім зсунути праворуч на величину, рівну тривалості сигналу.

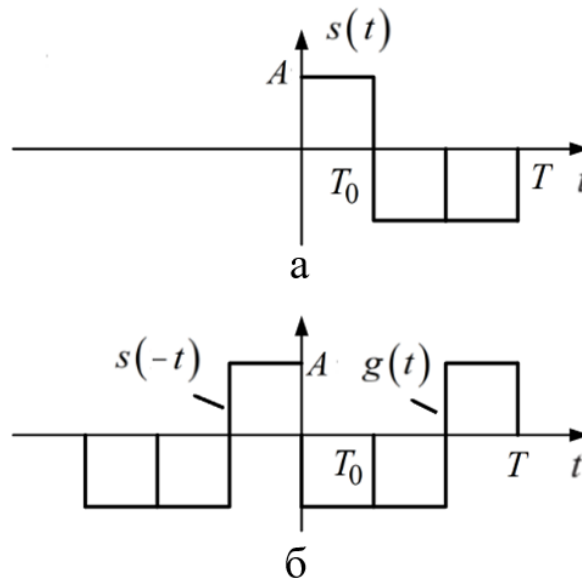


Рис. 10.14 Графічна побудова імпульсної характеристики

Для вирішення задачі побудови узгодженого фільтра використовуємо властивість лінійних систем - сигнал на виході лінійної системи при подачі на вхід дельта-функції збігається з імпульсною характеристикою. Імпульсна характеристика у вигляді одного прямокутного імпульсу формується з допомогою структурної схеми, показаної на рис. 10.7. Щоб сформувати імпульсну характеристику, показану на рис.10.14, необхідно схему на рис. 10.7 доповнити лінією затримки з відводами та суматором. Структурну схему такого пристрою показано на рис. 10.15 . На ній СФОІ - узгоджений фільтр для одиночного імпульсу, структурна схема якого наведена на рис. 10.13.

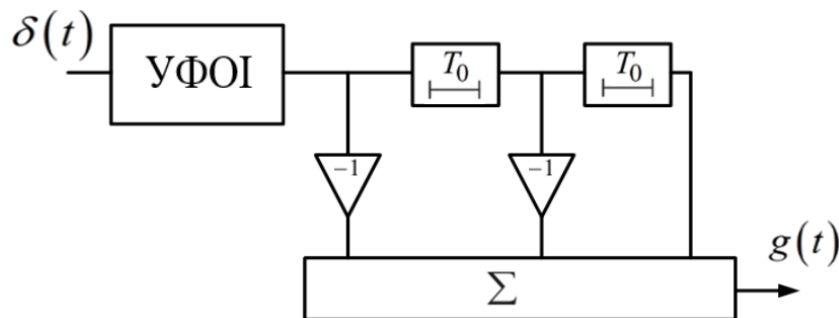


Рис. 10.15 Структурна схем фільтра, узгодженого з прямокутним відеоімпульсом із внутрішньоімпульсною модуляцією

## Питання до самоперевірки

1. Запишіть умову еквівалентності кореляційного приймача та узгодженого фільтра.
2. Як пов'язані імпульсна характеристика узгодженого фільтра і сигналу?
3. Як визначається сигнальна функція узгодженого фільтра? Наведіть її геометричну інтерпретацію і зв'язок з кореляційною функцією сигналу.
4. Який вигляд має передавальна функція узгодженого фільтра і як вона пов'язана із спектром сигналу?
5. Наведіть амплітудно-частотні характеристики узгоджених фільтрів з відео- і радіоімпульсами.
6. За якою формулою розраховується ВСШ на виході узгодженого фільтра?
7. Опишіть процес формування сигналів з розширенням спектра.
8. Порівняйте вихідне ВСШ для сигналів з розширенням спектра і фазоманіпульованих сигналів.
9. Наведіть переваги сигналів з розширенням спектра.
10. Для відеоімпульса із внутрішньоімпульсною модуляцією побудувати графік імпульсної характеристики і структурну схему узгодженого фільтра.

### РОЗДІЛ №3. МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО ВИЯВЛЕННЯ І РОЗРІЗНЕННЯ СИГНАЛІВ

#### Лекція №11. Байєсівський критерій оптимального виявлення сигналів

11.1. Математичні постановки задач виявлення і розрізнення сигналів.

11.2. Синтез алгоритмів оптимального виявлення сигналів за байєсівським критерієм оптимальності.

#### 11.1. Математичні постановки задач виявлення і розрізнення сигналів

Завдання розрізнення сигналів містить в собі як частковий випадок задачу виявлення, і формулюється таким чином:

$$z(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda) s_0(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11.1)$$

де  $s_i(t), i = \overline{0,1}$  - сигнали з повністю відомими параметрами;  $\lambda$  - дискретна випадкова величина, яка приймає два значення  $\lambda_1 = 1$  і  $\lambda_0 = 0$  з відомими ймовірностями  $P(\lambda = \lambda_i) = P(\lambda_i), i = \overline{0,1}$ ;  $n(t)$  - ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$  і спектральною щільністю потужності  $G_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$ ;  $T$  - тривалість інтервалу спостереження.

При  $\lambda_1 = 1$  в прийнятому сигналі  $z(t)$  присутній сигнал  $s_1(t)$ , а при  $\lambda_0 = 0$  - сигнал  $s_0(t)$ . Невідомі значення  $\lambda_i, i = \overline{0,1}$  називаються *гіпотезами*.

Необхідно у відповідності до визначеного критерію оптимальності по прийнятій конкретній реалізації сигналу  $z(t) = z_l(t)$  в кінці інтервалу спостереження  $t = T$  прийняти рішення  $\hat{\lambda}_j, j = \overline{0,1}$  про присутність або сигналу  $s_1(t)$ , або  $s_0(t)$ . Рішення  $\hat{\lambda}_1 = \hat{1}$  означає, що в прийнятій реалізації сигналу  $z(t) = z_l(t)$  присутній сигнал  $s_1(t)$ . Рішення  $\hat{\lambda}_0 = \hat{0}$  означає, що в прийнятій

реалізації сигналу  $z(t) = z_l(t)$  присутній сигнал  $s_0(t)$ . При  $s_0(t) = 0$  і  $s(t) = s_1(t)$  задача розрізнення переходить в задачу виявлення сигналів

$$z(t) = \lambda s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11.2)$$

Оскільки сигнали, що передаються, на приймальній стороні невідомі і в радіоканалі присутня завада, рішення  $\hat{\lambda}_j, j = \overline{0,1}$  носять випадковий характер і є значеннями дискретної випадкової величини  $\hat{\lambda}$ .

Значення випадкової величини  $\lambda_j, i = \overline{0,1}$  можна розглядати як двійкові символи, що передаються, а значення випадкової величини  $\hat{\lambda}_j, j = \overline{0,1}$  – відповідно як символи, що отримані на виході приймача. Тоді задачу розрізнення можна описати за допомогою графа передачі символів рис. 11.1. На передавальній стороні передаються символи  $\lambda_1 = 1$  і  $\lambda_0 = 0$ . На приймальній стороні приймаються рішення щодо переданих символів і формуються прийняті символи  $\hat{\lambda}_1 = \hat{1}$  і  $\hat{\lambda}_0 = \hat{0}$ . Однак в результаті впливу завад сигнали в каналі зв'язку спотворюються, що може призводити до помилкових рішень. Варіанти передачі символів без помилок показані суцільними лініями, а з помилками - штриховими.

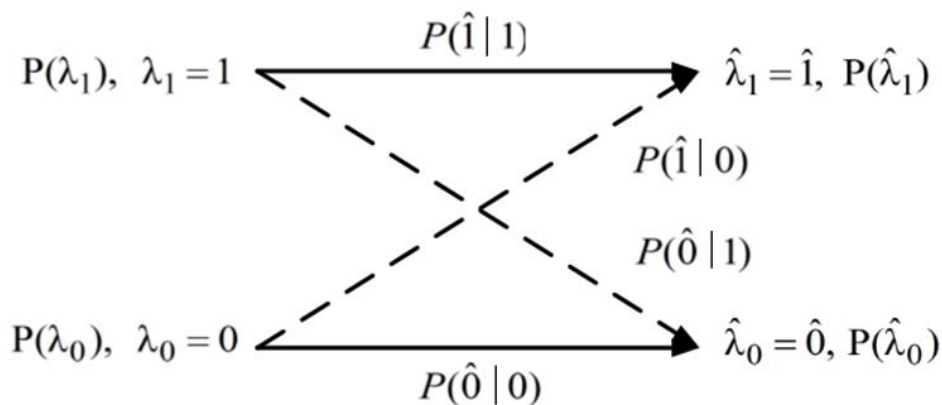


Рис. 11.1 Граф передачі символів

Також на рис. 11.1 показані апіорні ймовірності передачі символів  $P(\lambda_i), i = \overline{0,1}$ , ймовірності прийняття рішень  $P(\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_j) = P(\hat{\lambda}_j), j = \overline{0,1}$ , а також умовні ймовірності  $P(\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_j | \lambda = \lambda_i) = P(\hat{\lambda}_j | \lambda_i), i = \overline{0,1}, j = \overline{0,1}$  того, що на

приймальному боці прийнято рішення  $\hat{\lambda}_j$  про те, що передавався символ  $\lambda_j$  за умови, що в дійсності передавався символ  $\lambda_i$ .

В радіолокації в задачі виявлення умовні ймовірності  $P(\hat{\lambda}_1 | \lambda_0)$  і  $P(\hat{\lambda}_0 | \lambda_1)$  отримали назву ймовірності хибної тривоги й імовірності пропуску цілі. Ймовірність помилки прийняття рішення визначається за формулою

$$p_e = P(\hat{\lambda}_1 | \lambda_0)P(\lambda_0) + P(\hat{\lambda}_0 | \lambda_1)P(\lambda_1). \quad (11.3)$$

В дискретних каналах зв'язку ймовірність помилки прийняття рішення  $p_e$  є однією з кількісних характеристик заводо захищеності, як спроможності приймача правильно відтворювати інформацію в умовах завод.

## 11.2. Синтез алгоритмів оптимального виявлення сигналів за байєсівським критерієм оптимальності

Почнемо з більш простої задачі виявлення сигналу. Виконаємо дискретизацію прийнятого сигналу  $z(t)$  в дискретні моменти часу з шагом  $\Delta$  у відповідності до методики, розглянутої в лекції №8. Отриману після дискретизації з кроком дискретизації (8.12) модель спостереження (11.2) можна представити у вигляді:

$$z(t_k) = \lambda s(t_k) + \tilde{n}(t_k), \quad k = \overline{1, m}. \quad (11.4)$$

де  $\tilde{n}(t_k)$  – дискретний білий гаусівський шум  $f(\tilde{n}_k) = N(0, \sigma_{\tilde{n}}^2)$  з дисперсією

$$\sigma_{\tilde{n}}^2 = \frac{N_0}{2\Delta}. \quad (11.5)$$

Розглянемо спочатку задачу виявлення для випадку одноразового вимірювання в момент часу  $t_k$ , в якій по отриманій реалізації спостереження  $z_l(t_k)$  необхідно прийняти рішення про наявність або відсутність відліку сигналу  $s(t_k)$ .

Рішення  $\hat{\lambda}_1 = \hat{1}$  або  $\hat{\lambda}_0 = \hat{0}$  у випробуванні можуть бути прийняті в результаті порівняння отриманої реалізації спостереження  $z_l(t_k)$  з деяким порогом  $H$

$$z_l(t_k) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} H. \quad (11.6)$$

Задача прийняття рішення на основі вирішального правила (11.8) – це задача *математичної статистики* - обробки отриманих вибіркового даних. Після того, як алгоритм обробки отриманий, виникає задача *аналізу його ефективності з використанням ймовірнісного підходу*.

Спостереження  $z_l(t_k)$  є числовим значенням випадкової величини  $z(t_k)$ , яке вона приймає в  $l$ -му випробуванні в момент  $t_k$ . Визначимо щільність ймовірності  $f(z_k | \lambda_i)$  спостереження  $z(t_k)$ , за умови, коли значення параметра  $\lambda_i, i = \overline{0,1}$  відомо. За умови  $\lambda_0 = 0$  спостереження має вигляд

$$z(t_k) = \tilde{n}(t_k), \quad (11.7)$$

і умовна щільність ймовірності  $f(z_k / 0) = N(0, \sigma_{\tilde{n}}^2)$ . За умови  $\lambda_1 = 1$  спостереження

$$z(t_k) = s(t_k) + \tilde{n}(t_k), \quad (11.8)$$

і умовна щільність ймовірності  $f(z_k / 1) = N(s(t_k), \sigma_{\tilde{n}}^2)$ .

На основі відомих умовних щільностей ймовірності  $f(z_k|1)$ ,  $f(z_k|0)$  випадкової величини  $z(t_k)$  можуть бути розраховані наступні чотири умовні ймовірності:

$$P(\hat{1}|1) = P(z(t_k) \geq H | 1) = \int_H^{\infty} f(z_k|1) dz_k; \quad (11.9)$$

$$P(\hat{0}|1) = P(z(t_k) < H | 1) = \int_{-\infty}^H f(z_k|1) dz_k; \quad (11.10)$$

$$P(\hat{1}|0) = P(z(t_k) \geq H | 0) = \int_H^{\infty} f(z_k|0) dz_k; \quad (11.11)$$

$$P(\hat{0}|0) = P(z(t_k) < H | 0) = \int_{-\infty}^H f(z_k|0) dz_k. \quad (11.12)$$

Геометрична інтерпретація умовних ймовірностей наведена на рис. 11.2. Отримані умовні ймовірності (11.9)-(11.12) є **показниками** отриманого алгоритму виявлення.

Як випливає з виразів (11.9)-(11.12), умовні ймовірності залежать від порогу  $H$ . Виникає задача **оптимізації** значення порогу за визначеним показником ефективності (критерієм оптимальності).

Сумісну передачу символів  $\lambda_i$  і прийом символів  $\hat{\lambda}_j$  на графі рис.11.1 можна розглядати, як добуток випадкових подій  $(\lambda = \lambda_i)(\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_j)$ ,  $i = \overline{0,1}$ ,  $j = \overline{0,1}$ , які приймають значення із ймовірностями  $P((\lambda = \lambda_i)(\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_j))$ ,  $i = \overline{0,1}$ ,  $j = \overline{0,1}$ .

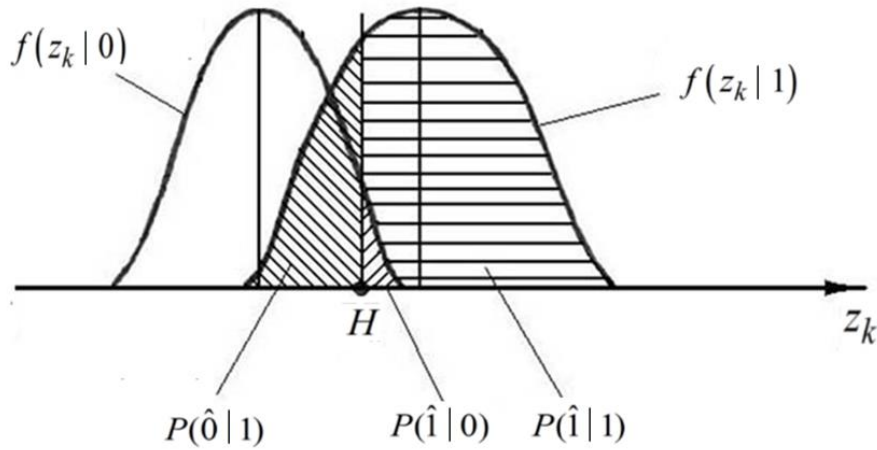


Рис. 11.2 Геометрична інтерпретація умовних ймовірностей

На практиці різним комбінаціям значень  $\lambda_i, \hat{\lambda}_j, i = \overline{0,1}, j = \overline{0,1}$  відповідають різні втрати. Введемо втрати  $C_{ij}$ , що ставляться у відповідність різним комбінаціям значень  $\lambda_i, \hat{\lambda}_j, i = \overline{0,1}, j = \overline{0,1}$ . Для вирішення завдання виявлення вводиться середній ризик  $J$ , який дорівнює середньому значенню (математичному очікуванню) втрат

$$J = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 C_{ij} P(\lambda = \lambda_i) P(\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_j). \quad (11.13)$$

Виконаємо перетворення середнього ризику

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 C_{ij} P(\lambda_i) P(\hat{\lambda}_j | \lambda_i) = \\ &= C_{00} P(\lambda_0) \int_{-\infty}^H f(z_k | 0) dz + C_{01} P(\lambda_0) \int_H^{\infty} f(z_k | 0) dz_k + \\ &+ C_{10} P(\lambda_1) \int_{-\infty}^H f(z_k | 1) dz + C_{11} P(\lambda_1) \int_H^{\infty} f(z_k | 1) dz. \end{aligned} \quad (11.14)$$

З огляду на властивість

$$\int_H^{\infty} f(z_k | \lambda_i) dz = 1 - \int_{-\infty}^H f(z_k | \lambda_i) dz_k, \quad (11.15)$$

отримаємо

$$J = C_{00}P(\lambda_0) \int_{-\infty}^H f(z_k | 0) dz_k + C_{01}P(\lambda_0) \left[ 1 - \int_{-\infty}^H f(z_k | 0) dz_k \right] + \\ + C_{10}P(\lambda_1) \int_{-\infty}^H f(z_k | 0) dz + C_{11}P(\lambda_1) \left[ 1 - \int_{-\infty}^H f(z_k | 0) dz_k \right]. \quad (11.16)$$

Залежність середнього ризику від порога  $J(H)$  показана на рис.11.3.

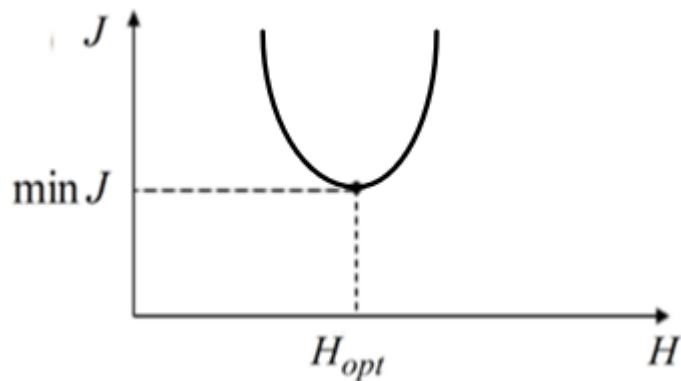


Рис. 11.3 Залежність середнього ризику від порога  $J(H)$

У точці екстремуму похідна функції  $J(H)$  дорівнює нулю. Тому  $H_{opt}$  визначається шляхом рішення рівняння

$$\frac{dJ(H)}{dH} = 0. \quad (11.17)$$

Виконуючи диференціювання, отримаємо, що  $H_{opt}$  задовольняє рівнянню

$$(C_{01} - C_{00})P(\lambda_0)f(H_{opt}|0) = (C_{10} - C_{11})P(\lambda_1)f(H_{opt}|1). \quad (11.18)$$

Рішення рівняння (18) може бути отримано геометричним методом рис.11.4.

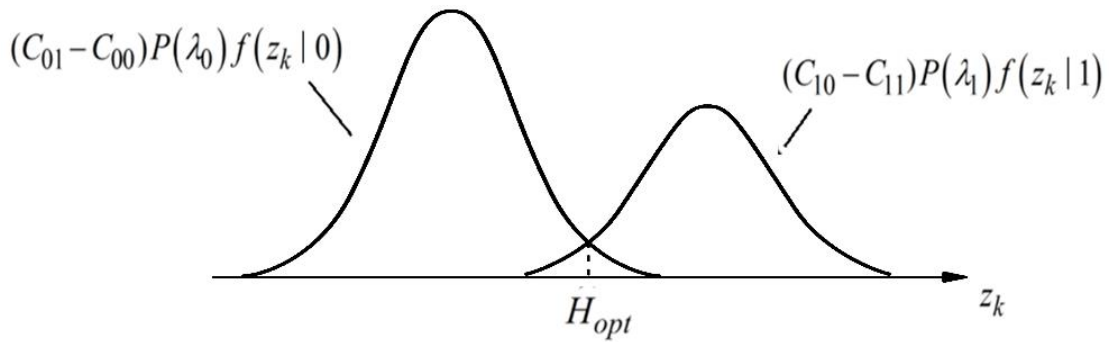


Рис. 11.4 Геометричне визначення порога  $H_{opt}$

Після знаходження  $H_{opt}$  вирішальне правило (11.8) має вигляд

$$z_l(t_k) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\gtrless}} H_{opt} \quad (11.19)$$

Якщо підставити отримане  $z_l(t_k)$  в умовні щільності ймовірності  $f(z_l(t_k)|0)$ ,  $f(z_l(t_k)|1)$  у виразах на рис. 11.4, то з огляду на властивості зважених законів розподілів рис. 11.4, умова (11.19) еквівалентна умові

$$(C_{10} - C_{11})P(\lambda_1)f(z_l(t_k)|1) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\gtrless}} (C_{01} - C_{00})P(\lambda_0)f(z_l(t_k)|0). \quad (11.20)$$

Для отриманого правила не потрібно обчислення  $H_{opt}$ . Отримане спостереження  $z_l(t_k)$  підставляється в вираз (11.20), і визначається вигляд нерівності. При цьому умовна щільність ймовірності  $f(z_k|\lambda_i)$  перетворюється

в функцію правдоподібності  $L_l(\lambda_i, t_k) = f(z_l(t_k) | \lambda_i), i = \overline{0,1}$ . Вираз (11.19) можна привести до стандартного вигляду

$$\Lambda_l(t_k) = \frac{L_l(1, t_k)}{L_l(0, t_k)} = \frac{f(z_l(t_k) | 1)}{f(z_l(t_k) | 0)} \stackrel{\hat{1}}{\geq} \frac{(C_{01} - C_{00})P(\lambda_0)}{(C_{10} - C_{11})P(\lambda_1)} \stackrel{\hat{0}}{=} \gamma. \quad (11.21)$$

Відношення

$$\Lambda_l(t_k) = \frac{L_l(1, t_k)}{L_l(0, t_k)} = \frac{f(z_l(t_k) | 1)}{f(z_l(t_k) | 0)} \quad (11.22)$$

отримало назву відношення правдоподібності. Таким чином, задача одноразового виявлення може бути вирішена шляхом порівняння відношення правдоподібності  $\Lambda_l(z(t_k))$  з порогом  $\gamma$ , який визначається за формулою.

$$\gamma = \frac{(C_{01} - C_{00})P(\lambda_0)}{(C_{10} - C_{11})P(\lambda_1)}. \quad (11.23)$$

Визначимо також значення оптимального порогу  $H_{opt}$ , з яким порівнюється вимірювання  $z(t_k)$ . Розкриваючи гаусівські умовні щільності ймовірності  $f(z_k | \lambda_i), i = \overline{0,1}$  в формулі (11.20), отримаємо

$$\Lambda_l(t_k) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} \exp\left(-\frac{(z_l(t_k) - s(t_k))^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} \exp\left(-\frac{z_l^2(t_k)}{2\tilde{\sigma}^2}\right)} = \exp\left(\frac{2z_l(t_k)s(t_k) - s^2(t_k)}{2\tilde{\sigma}^2}\right). \quad (11.24)$$

В результаті логарифмування виразу (11.24) отримаємо:

$$\frac{2z_l(t_k)s(t_k) - s^2(t_k)}{2\tilde{\sigma}^2} \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} \ln \gamma; \quad (11.25)$$

$$z_l(t_k) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} \frac{s(t_k)}{2} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \ln \gamma = H_{opt}. \quad (11.26)$$

Вираз (11.26) дозволяє отримати оптимальне рішення задачі одноразового виявлення шляхом порівняння вимірювання  $z_l(t_k)$  з порогом  $H_{opt}$ . Розглянутий критерій мінімального середнього ризику отримав назву байєсівського критерію. Розглянута задача визначення оптимального значення порогу виявлення і відповідних вирішальних правил відноситься до задач *синтезу* оптимальних радіотехнічних пристроїв і систем.

Структура отриманого вирішального правила (11.21) є справедливою і в загальному випадку векторного і неперервного спостереження. При цьому поріг  $\gamma$  зберігається незмінним, а змінюється вид відношення правдоподібності, що визначається моделлю вимірювання. Для його визначення необхідно вміти визначати функції правдоподібності  $L_l(\lambda_i), i = \overline{0,1}$ .

Розглянемо методику визначення функцій правдоподібності  $L_l(\lambda_i), i = \overline{0,1}$  при векторному спостереженні  $(z(t_1), \dots, z(t_m))$ . Для цього необхідно знайти умовну щільність ймовірності  $f(z_1, \dots, z_m | \lambda_i)$ . Оскільки відліки завади  $\tilde{n}(t_k), k = \overline{1, m}$  в рівнянні (11.4) статистично незалежні, сумісна щільність ймовірності цих відліків буде дорівнювати добутку одномірних щільностей ймовірності:

$$f(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_m) = \prod_{k=1}^m f(\tilde{n}_k, t_k). \quad (11.27)$$

Як випливає з рівняння (11.4), при відомому значенні параметра  $\lambda_i$  спостереження  $z(t_k)$  також будуть статистично незалежні, а умовна сумісна щільність ймовірності  $f(z_1, \dots, z_m | \lambda)$  може бути представлена у вигляді

$$f(z_1, \dots, z_m | \lambda_i) = \prod_{k=1}^m f(z_k | \lambda_i), \quad (11.28)$$

де  $f(z_k | \lambda_i)$  визначається за формулою

$$f(z_k | \lambda_i) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma_{\tilde{n}}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\tilde{n}}^2} (z_k - \lambda_i s(t_k))^2 \right\}. \quad (11.29)$$

Підставляючи отриману в експерименті реалізацію векторного спостереження  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  в формулу (11.28), вираз для відношення правдоподібності можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \Lambda_l &= \frac{L_l(1)}{L_l(0)} = \frac{\left( \frac{1}{2\pi\sigma_{\tilde{n}}^2} \right)^{\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\tilde{n}}^2} \sum_{k=1}^m (z_l(t_k) - s(t_k))^2 \right\}}{\left( \frac{1}{2\pi\sigma_{\tilde{n}}^2} \right)^{\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\tilde{n}}^2} \sum_{k=1}^m z_l^2(t_k) \right\}} = \\ &= \exp \left( -\frac{1}{2\sigma_{\tilde{n}}^2} \sum_{k=1}^m (2z_l(t_k)s(t_k) - s^2(t_k)) \right). \end{aligned} \quad (11.30)$$

Таким чином, в разі векторного вимірювання вирішальне правило має аналогічний вигляд

$$\Lambda_l \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} \frac{(C_{01} - C_{00})P(\lambda_0)}{(C_{10} - C_{11})P(\lambda_1)} = \gamma. \quad (11.31)$$

Вектор вимірювань  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  підставляється в вираз (11.30), і отриманий результат порівнюється з порогом  $\gamma$ .

Як було показано в лекції 8, функція правдоподібності в гаусівському каналі при неперервному спостереженні перетворюється в функціонал правдоподібності. У відповідності до методики, наведеної в лекції 8, з урахуванням (11.5) переписемо вираз для відношення правдоподібності при векторному спостереженні у вигляді

$$\Lambda_l = \exp \left( -\frac{2}{N_0} \sum_{k=1}^m (2z_l(t_k)s(t_k) - s^2(t_k)) \Delta \right). \quad (11.32)$$

Спрямувавши крок дискретизації до нуля  $\Delta \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\Lambda_l = \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T z_l(t)s(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt \right\}, \quad (11.33)$$

де  $z_l(t)$  - отримана реалізація сигналу на вході приймача.

Таким чином, в разі неперервного вимірювання на інтервалі  $0 \leq t \leq T$  вирішальне правило має вигляд

$$\hat{1} > \frac{(C_{01} - C_{00})P(\lambda_0)}{(C_{10} - C_{11})P(\lambda_1)} = \gamma. \quad (11.34)$$

$$\hat{0}$$

Отримана реалізація сигналу  $z_l(t)$  підставляється в вираз (11.33), і розраховане значення відношення правдоподібності  $\Lambda$  порівнюється з порогом  $\gamma$ .

### Питання до самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі виявлення сигналів.

2. Побудуйте граф прийняття рішень і поясніть його. Які назви в задачі виявлення мають ймовірності помилкового прийняття рішень?
3. Запишіть вираз для умовної ймовірності правильного виявлення цілі  $P(\hat{1}|1)$ .  
Надайте її геометричну інтерпретацію, як площі під кривою щільності ймовірності.
4. Запишіть вираз для умовної ймовірності хибної тривоги  $P(\hat{1}|0)$ . Надайте її геометричну інтерпретацію, як площі під кривою щільності ймовірності.
5. Надати вираз для середнього ризику і геометричну інтерпретацію задачі його мінімізації (одноразове вимірювання).
- 6.. Поясніть рішення задачі мінімізації середнього ризику геометричним методом.
- 7.. Запишіть вирішальне правило прийняття рішення на основі відношення правдоподібності і поясніть його складові (одноразове вимірювання).
8. Запишіть вираз для відношення правдоподібності і вирішальне правило на його основі - випадок векторного спостереження.
9. Запишіть вираз для відношення правдоподібності і вирішальне правило на його основі - випадок неперервного спостереження.

## Лекція №12. Критерії виявлення сигналів

- 12.1. Оптимальне виявлення на основі кореляційного приймача.
- 12.2. Виявлення сигналу за критерієм ідеального спостерігача.
- 12.3. Виявлення сигналу за критерієм Неймана-Пірсона.

### 12.1. Оптимальне виявлення на основі кореляційного приймача

Оптимальне за байєсівським критерієм вирішальне правило виявлення сигналів описується виразом (11.34) і полягає у порівнянні розрахованого значення відношення правдоподібності  $\Lambda$  з порогом  $\gamma$ .

Виконаємо перетворення вирішального правила (11.34) з використанням виразу (11.33). Після логарифмування лівої і правої частин одержимо

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T z_l(t) s(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} \ln \gamma. \quad (12.1)$$

Використовуючи позначення для кореляційного інтеграла і енергії сигналу

$$q_l = \int_0^T z_l(t) s(t) dt; \quad (12.2)$$

$$E_s = \int_0^T s^2(t) dt, \quad (12.3)$$

отримаємо

$$\frac{2}{N_0} q_l - \frac{1}{N_0} E_s \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} \ln \gamma \quad (12.4)$$

В результаті вирішальне правило можна представити у вигляді

$$q_l \begin{matrix} \hat{1} \\ \geq \\ & \frac{E_s}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \gamma = H_q \\ < \\ \hat{0} \end{matrix} \quad (12.5)$$

Структурна схема оптимального приймача, який обраховує значення кореляційного інтегралу, показана на рис. 12.1. Розраховане значення  $q_l$  в момент  $t = T$  порівнюється у вирішальному пристрої ВП з порогом  $H_q$ .

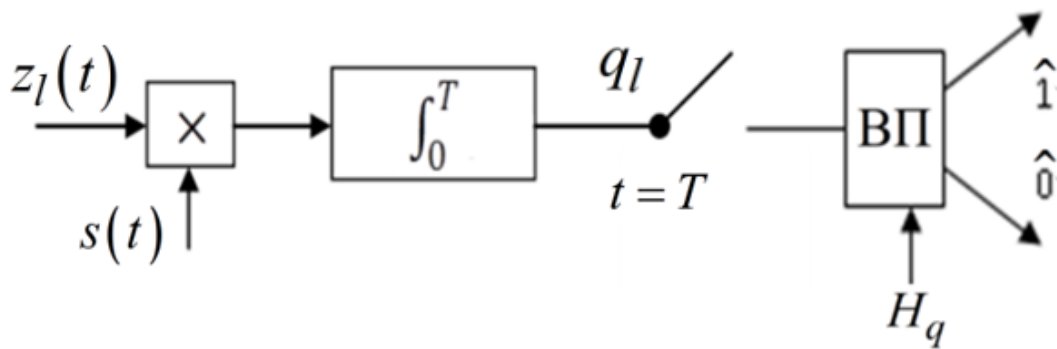


Рис. 12.1 Пристрій виявлення на основі кореляційного приймача

Еквівалентна схема також може бути отримана на основі узгодженого фільтра рис. 12.2.

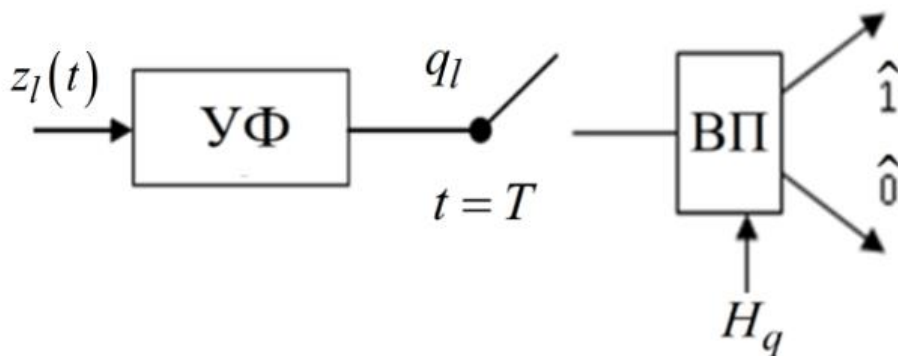


Рис. 12.2 Пристрій виявлення на основі узгодженого фільтра

Випадкова величина  $q$ , що розраховується на виході кореляційного інтеграла і приймає у конкретному випробуванні значення  $q_l$ , отримала назву вирішальної статистики. Вона є функціональним перетворенням випадкового

процесу  $z(t)$ . Вирішальна статистика містить всю інформацію про корисний сигнал, що знаходиться в отриманій реалізації сигналу  $z_l(t)$ .

Виконаємо **аналіз** статистичних характеристик вирішальної статистики  $q$ . Перетворення випадкового процесу спостереження  $z(t)$  з використанням кореляційного інтеграла можна представити у вигляді

$$q = \int_0^T (\lambda_i s(t) + n(t)) s(t) dt = \begin{cases} E_s + q_n & \text{при } \lambda = 1, \\ q_n & \text{при } \lambda = 0. \end{cases} \quad (12.6)$$

Сигнальна складова кореляційного інтеграла при  $\lambda = 1$  дорівнює енергії сигналу  $q_s(T) = E_s$ , а при  $\lambda = 0$  - нулю. Шумова складова  $q_n$ , як було показано в лекції №9, є гаусівською випадковою величиною з нульовим математичним очікуванням і дисперсією

$$\sigma_{q_n}^2 = \frac{E_s N_0}{2}. \quad (12.7)$$

Таким чином, математичну модель сигналу на виході кореляційного приймача можна представити у вигляді

$$q = \lambda_i E_s + q_n. \quad (12.8)$$

З формули (12.8) випливає, що умовні щільності ймовірності вирішальної статистики  $q$  є гаусівськими і мають вигляд

$$f(q/1) = N\left(E_s, \frac{E_s N_0}{2}\right), \quad f(q/0) = N\left(0, \frac{E_s N_0}{2}\right). \quad (12.9)$$

Їх геометрична інтерпретація показана на рис. 12.3.

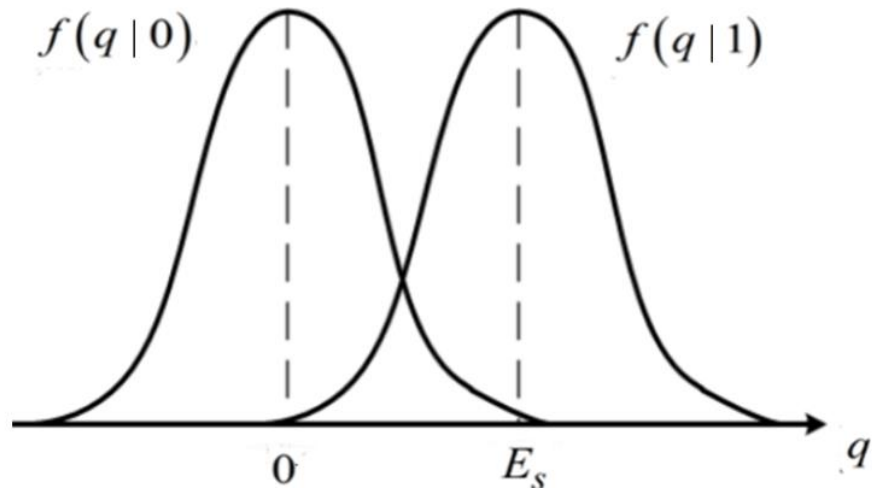


Рис. 12.3 Умовні щільності ймовірності вирішальної статистики  $q$

ВСШ на виході кореляційного приймача розраховується за формулою

$$h^2 = \frac{q_s^2(T)}{\sigma_{qn}^2} = \frac{E_s^2}{\frac{N_0}{2} E_s} = \frac{2E_s}{N_0} = \max \quad (12.10)$$

Таким чином, *в каналі з БГШ кореляційний приймач забезпечує максимальне ВСШ і є оптимальним.* Задача оптимального виявлення сигналів зводиться до порівняння виходу кореляційного приймача – вирішальної статистики  $q$  з порогом  $H_q$  (12.5).

Визначимо ймовірності прийняття правильних і помилкових рішень на виході кореляційного приймача. З врахуванням (12.9), ймовірності прийняття правильних і помилкових рішень на виході кореляційного приймача визначаються за формулами

$$P(\hat{1}|1) = P(q \geq H_q | 1) = \int_{H_q}^{\infty} f(q|1) dq; \quad (12.11)$$

$$P(\hat{0}|1) = P(q < H_q | 1) = \int_{-\infty}^{H_q} f(q|1) dq; \quad (12.12)$$

$$P(\hat{1}|0) = P(q \geq H_q | 0) = \int_{H_q}^{\infty} f(q|0) dq; \quad (12.13)$$

$$P(\hat{0}|0) = P(q < H_q | 0) = \int_{-\infty}^{H_q} f(q|0) dq \quad (12.14)$$

Отримані вирази аналогічні отриманим раніше при одноразовому спостереженні.

### **Приклад**

Сигнал  $s(t) = A \cos(\omega t)$ , прямокутний радіоімпульс з амплітудою  $A = 2$  мВ і довжиною  $T = 8$  мс. Спектральна щільність БГШ  $N_0 = 2 \times 10^{-9}$  Вт/Гц. Визначити енергію сигналу, ВСШ  $h^2$ , СКВ достатньої статистики. Для заданої імовірності хибної тривоги  $P_{ЛТ} = 0.01$  визначити значення порогу  $H_q$ .

Розв'язок.

Енергія радіосигналу дорівнює

$$E = \frac{A^2 T}{2} = 16 \times 10^{-9} \text{ В}^2 \text{ с}.$$

ВСШ має значення

$$h^2 = \frac{2E_s}{N_0} = 16$$

Дисперсія і СКВ достатньої статистики дорівнюють

$$\sigma_{q_n}^2 = \frac{NE_s}{2} = \frac{2 \times 10^{-9} \times 16 \times 10^{-9}}{2} = 1.6 \times 10^{-18} \text{ В}^2;$$

$$\sigma_{q_n} = \sqrt{\sigma_{q_n}^2} = 4 \times 10^{-9} \text{ В}$$

Розрахуємо поріг

$$P(\hat{1}|0) = 1 - \Phi\left(\frac{H_q}{\sigma_{q_n}}\right);$$

$$H_q = \sigma_{q_n} \times \Phi^{-1}(1 - P(1|0)) = 4 \times 10^{-9} \times \Phi^{-1}(1 - 0.01) =$$

$$= 4 \times 10^{-9} \times \Phi^{-1}(0.99) = 4 \times 10^{-9} \times 2.3 = 9.2 \times 10^{-9} \text{ В}.$$

## 12.2. Виявлення сигналу за критерієм ідеального спостерігача.

Як було показано вище, задача оптимального виявлення сигналів зводиться до порівняння виходу кореляційного приймача – вирішальної статистики  $q$  з порогом. Це обумовлено тим, що кореляційний приймач забезпечує максимальне ВСШ на виході в момент прийняття рішення. В результаті задача оптимізації зводиться до вибору порога у відповідності з вибраним критерієм оптимальності. Розглянемо задачу вибору порогу за критерієм ідеального спостерігача.

Помилки при прийнятті рішень у відповідності з графом передачі двійкових символів виникають при спільній появі подій  $(\lambda = 1)(\hat{\lambda} = \hat{0})$  і  $(\lambda = 0)(\hat{\lambda} = \hat{1})$ . Ймовірності цих подій  $P(1\hat{0})$  і  $P(0\hat{1})$ . Оскільки події  $1\hat{0}$  і  $0\hat{1}$  несумісні, то ймовірність помилки дорівнює сумі цих ймовірностей. Ймовірність помилки прийняття рішення визначається за формулою

$$p_e = P((\lambda = 1)(\hat{\lambda} = \hat{0})) + P((\lambda = 0)(\hat{\lambda} = \hat{1})) = P(\hat{0}|1)P(1) + P(\hat{1}|0)P(0). \quad (12.15)$$

Відповідно до критерія ідеального спостерігача, оптимальним вважається приймач, який забезпечує мінімальну ймовірність помилки  $p_e$ :

$$\begin{aligned} \min_H p_e &= \min_H (P(\hat{0}|1)P(1) + P(\hat{1}|0)P(0)) = \\ &= \min_H \left( \int_{-\infty}^H f(q|1)dqP(1) + \int_H^{\infty} f(q|0)dqP(0) \right). \end{aligned} \quad (12.16)$$

В точці екстремуму показника ефективності  $p_e$  виконується умова

$$\frac{dp_e}{dH_e} = f(H_e|1)P(1) - f(H_e|0)P(0) = 0. \quad (12.17)$$

Графічна інтерпретація рішення рівняння (12.5) показана на рис. 12.4. Оптимальний поріг  $H_e$  вибирається в точці перетину умовних щільностей ймовірності  $f(q|\lambda_i)$  з ваговими коефіцієнтами  $P(\lambda_i)$

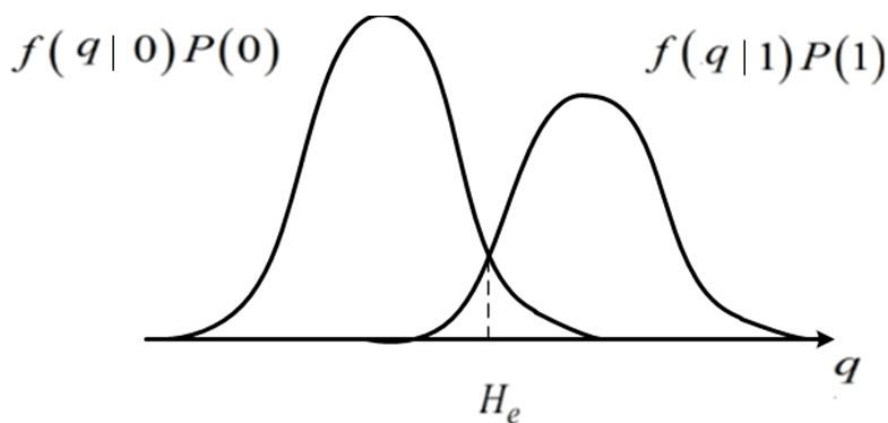


Рис. 12.4 Геометричне визначення порога  $H_e$

Вирішальне правило має вигляд

$$q_l \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} H_e . \quad (12.18)$$

З огляду на властивості зважених законів розподілів рис. 12.3, еквівалентне вирішальне правило має вигляд

$$P(1)f(q_l|1) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} P(0)f(q_l|0) \quad (12.19)$$

$$\Lambda_l = \frac{f(q_l|1) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} P(0)}{f(q_l|0) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{<}} P(1)} = \gamma_e \quad (12.20)$$

Вираз (12.20) описує вирішальне правило на основі відношення правдоподібності. Він збігається з вирішальним правилом за байєсівським критерієм, коли  $C_{01} - C_{00} = 1$ ,  $C_{10} - C_{11} = 1$ . На практиці  $C_{11}$  і  $C_{00}$  прирівнюють до 0, тому  $C_{01} = C_{10}$ .

Розділимо ліву і праву частину виразу (12.19) на  $f(q_l)$ :

$$\frac{f(q_l|1)P(1)}{f(q_l)} \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{>}} \frac{f(q_l|0)P(0)}{f(q_l)}. \quad (12.21)$$

У відповідності до формули Байєса, отримаємо

$$P(1|q_l) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{>}} P(0|q_l), \quad (12.22)$$

де  $P(1|q_l)$ ,  $P(0|q_l)$ - апостеріорні ймовірності наявності - 1 і відсутності - 0 сигналу за умови, що отримана достатня статистика  $q = q_l$ .

Відповідно до отриманого вирішального правила, в якості оптимального рішення  $\hat{\lambda}_j, j = \overline{0,1}$  вибирається те, апостеріорна ймовірність якого максимальна. Оцінка за таким вирішальним правилом є оптимальною за критерієм максимуму апостеріорної ймовірності. Таким чином, критерій ідеального спостерігача, який мінімізує помилку  $p_e$ , тотожний до критерію максимуму апостеріорної ймовірності.

У випадку, коли апріорні ймовірності однакові

$$P(0) = P(1) = 0.5, \quad (12.23)$$

вирішальне правило (12.19) перетвориться до вигляду

$$f(q_l|1) \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{>}} f(q_l|0). \quad (12.24)$$

Відповідно до отриманого вирішального правила, в якості оптимального рішення  $\hat{\lambda}_j, j = \overline{0,1}$  вибирається те, для якого функція правдоподібності максимальна. Оцінка за таким критерієм є оптимальною за критерієм максимуму

функції правдоподібності. Таким чином, критерій максимуму функції правдоподібності є частковим випадком критерія ідеального спостерігача.

Розглянуті оптимальні виявлювачі відрізняються тільки величиною порогу.

Визначимо значення порогу  $H_e$  для критерію ідеального спостерігача. Підставивши в формулу (12.20) вирази умовних щільностей ймовірності  $f(q_l | \lambda_i)$ ,  $i = \overline{0,1}$  (12.9), отримаємо

$$\exp \left\{ \frac{2E_s q_l - E_s^2}{E_s N_0} \right\} \begin{matrix} \hat{1} \\ \geq P(0) \\ \hat{0} \\ < P(1) \end{matrix}; \quad (12.25)$$

$$\frac{2E_s q_l - E_s^2}{E_s N_0} \begin{matrix} \hat{1} \\ \geq \ln \frac{P(0)}{P(1)} \\ \hat{0} \\ < \end{matrix}; \quad (12.26)$$

$$q_l \begin{matrix} \hat{1} \\ \geq \frac{E_s}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \frac{P(0)}{P(1)} \\ \hat{0} \\ < \end{matrix} = H_e. \quad (12.27)$$

Поріг  $H_e$  розраховується за формулою, аналогічною (12.5), в якій замість байєсівського порогу  $\gamma$  використовується поріг  $\gamma_e$  (12.20).

### 13. Виявлення сигналу за критерієм Неймана-Пірсона

Даний критерій найбільш широко використовується в радіолокації. Згідно цього критерію оптимальним вважається приймач, який при заданій ймовірності хибної тривоги  $\alpha = P(\hat{1}|0)$  забезпечує максимальну ймовірність правильного виявлення  $P(\hat{1}|1)$ . Математично критерій Неймана-Пірсона має вигляд

$$\max_H P(\hat{1}|1), \quad (12.28)$$

$$\alpha = P(\hat{1}|0) = \text{const} \quad (12.29)$$

За допомогою методу множників Лагранжа показано, що оптимальним пристроєм для вирішення даного завдання є кореляційний приймач рис.12.1. Максимум ймовірності правильного виявлення  $P(\hat{1}|1)$  досягається тим, що він забезпечує максимальне значення ВСШ в момент прийняття рішення.

Умовні щільності ймовірності  $f(q|\lambda_i)$ ,  $i = \overline{0,1}$  при прийнятті рішень за критерієм Неймана-Пірсона показані на рис. 12.5. З рисунка випливає, що ймовірність хибної тривоги  $\alpha$  однозначно визначає поріг  $H_\alpha$  і пов'язана з ним рівнянням

$$\alpha = \int_{H_\alpha}^{\infty} f(q|0) dq. \quad (12.30)$$

Визначимо значення оптимального за критерієм Неймана-Пірсона порогу  $H_\alpha$ . Умовна щільність ймовірності  $f(q|0) = N\left(0, \frac{E_s N_0}{2}\right)$  є гаусівською. Використовуючи правило обчислення інтеграла від гаусівської щільності ймовірності на основі функції Лапласа, можна записати

$$P(x < a) = \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right). \quad (12.31)$$

Використовуючи формулу

$$P(x \geq a) = 1 - P(x < a), \quad (12.32)$$

отримаємо

$$\alpha = P(\hat{1}|0) = 1 - \Phi\left(\frac{H_\alpha}{\sqrt{E_s N_0 / 2}}\right). \quad (12.33)$$

З (12.33) можна визначити значення оптимального за критерієм Неймана-Пірсона порогу  $H_\alpha$  шляхом перетворень

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha) = \frac{H_\alpha}{\sqrt{E_s N_0 / 2}} = \frac{H_\alpha}{\sigma_{q_n}}; \quad (12.34)$$

$$H_\alpha = \sqrt{\frac{E_s N_0}{2}} \Phi^{-1}(1 - \alpha), \quad (12.35)$$

де  $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$  - обернена функція Лапласа.

Таким чином, поріг встановлюється при наявності лише шуму на вході приймача без сигналу.

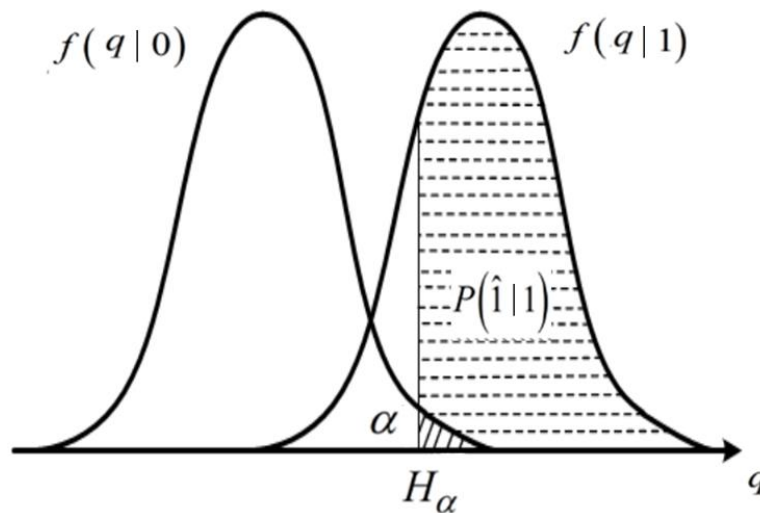


Рис. 12.5 Геометричне представлення ймовірностей хибної тривоги  $\alpha$  і правильного виявлення сигналу  $P(\hat{1}|1)$

Визначимо ймовірність правильного виявлення

$$P(\hat{1}|1) = \int_{H_\alpha}^{\infty} f(q|1) dq . \quad (12.36)$$

Умовна щільність ймовірності  $f(q|1) = N\left(E_s, \frac{E_s N_0}{2}\right)$  є гаусівською.

Використовуючи правило обчислення інтеграла від гаусівської щільності ймовірності на основі функції Лапласа, отримаємо

$$P(\hat{1}|1) = 1 - \Phi\left(\frac{H_\alpha - E_s}{\sqrt{E_s N_0 / 2}}\right). \quad (12.37)$$

Виконаємо перетворення. З використанням властивості функції Лапласа

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \quad (12.38)$$

отримаємо

$$\Phi\left(\frac{E_s}{\sqrt{E_s N_0 / 2}} - \frac{H_\alpha}{\sqrt{E_s N_0 / 2}}\right) = \Phi\left(h - \frac{H_\alpha}{\sigma_{q_n}}\right) = \Phi(h - \overline{H_\alpha}), \quad (12.39)$$

де  $\overline{H_\alpha} = \frac{H_\alpha}{\sqrt{E_s N_0 / 2}}$  - нормований поріг.

Залежності  $P(\hat{1}|1)$  від  $h$  при фіксованому значенні  $\alpha$  називають характеристиками виявлення. Вони показані на рис.12.6 суцільними лініями. Як видно з рис. 12.6, щоб домогтися збільшення  $P(\hat{1}|1)$ , потрібно збільшити відношення сигнал / шум, тобто енергію сигналу. Також, чим менше  $\alpha$ , тим вище поріг  $H_\alpha$ , і необхідно вище ВСШ для досягнення заданої ймовірності  $P(\hat{1}|1)$ .

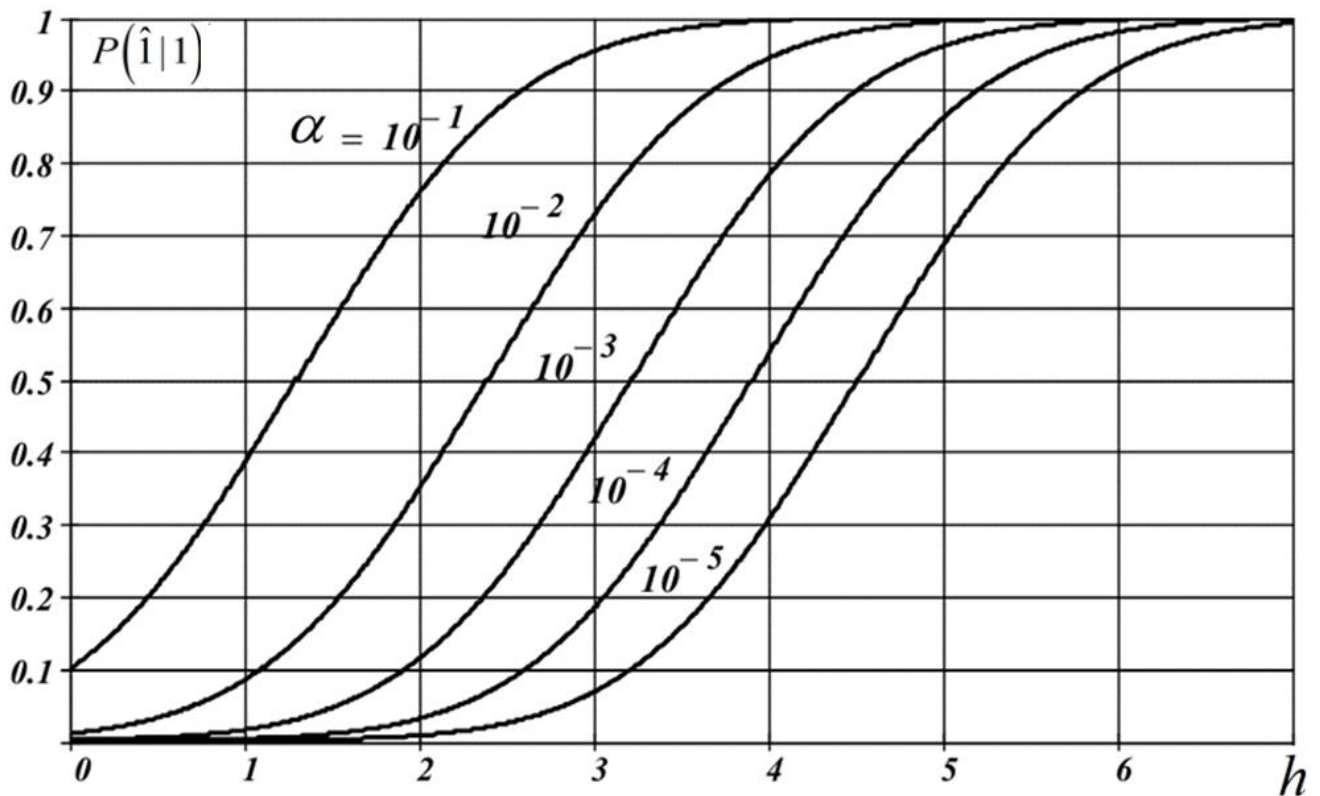


Рис. 12.6 Характеристики виявлення сигналу

### Приклад

При ймовірностях хибної тривоги:  $\alpha_1 = 10^{-3}$  та  $\alpha_2 = 2 \times 10^{-3}$  і спектральній щільності потужності шуму в каналі  $N_0 = 3 \times 10^{-9}$  Вт/Гц визначити амплітуду радіоімпульсів довжиною  $T = 1$  мс, які забезпечують ймовірність правильного виявлення  $P(\hat{1}|1) \geq 0.9$ . Як зміниться амплітуда, якщо прийняти  $T = 2$  мс?

Розв'язок.

З використанням формули (12.34) отримаємо

$$\frac{H_{\alpha_1}}{\sigma_{q_n}} = \Phi^{-1}(0.999) = 3.03;$$

$$\frac{H_{\alpha_2}}{\sigma_{q_n}} = \Phi^{-1}(0.998) = 2.88.$$

Ймовірність правильного виявлення задовольняє нерівності

$$P(\hat{1}|1) = 1 - \Phi\left(\frac{H_\alpha}{\sigma_{q_n}} - \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) \geq 0.9;$$

Враховуючи властивість  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ , отримаємо

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} - \frac{H_\alpha}{\sigma_{q_n}}\right) \geq 0.9.$$

Звідси отримаємо

$$\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} - \frac{H_\alpha}{\sigma_{q_n}} \geq \Phi^{-1}(0.9) = 1.28.$$

Виконаємо перетворення

$$\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} = U_m \sqrt{\frac{T}{N}} \geq \frac{H_\alpha}{\sigma_{q_n}} + 1.28.$$

$$U_m \geq \sqrt{\frac{N_0}{T}} \left(\frac{H_\alpha}{\sigma_{q_n}} + 1.28\right).$$

Визначимо амплітуди імпульсів

$$U_m \geq \sqrt{\frac{3 \times 10^{-9}}{10^{-3}}} (3.03 + 1.28) = \sqrt{3} \times 4.31 \times 10^{-3} \text{ В} = 7.32 \text{ мВ}.$$

$$U_m \geq \sqrt{\frac{3 \times 10^{-9}}{10^{-3}}} (2.88 + 1.28) = \sqrt{3} \times 4.16 \times 10^{-3} \text{ В} = 7.07 \text{ мВ}.$$

При збільшенні  $T$  у 2 рази амплітуда  $U_m$  зменшується у  $\sqrt{2}$  разів.

## Питання до самоперевірки

1. Запишіть вирішальне правило прийняття рішення на основі вирішальної статистики  $q$  і пояснити його складові.
2. Надати структурну схему оптимального виявлювача детермінованого сигналу на основі кореляційного приймача і узгодженого фільтра.
3. Запишіть умовні щільності ймовірності достатньої статистики і поясніть їх параметри.
4. Запишіть вираз для умовної ймовірності  $P(\hat{1}|0)$  на основі умовної щільності ймовірності достатньої статистики. Надати геометричну інтерпретацію, як площі під кривою щільності ймовірності.
5. Запишіть вираз для умовної ймовірності на основі умовної щільності ймовірності достатньої статистики  $P(\hat{1}|1)$ . Надати геометричну інтерпретацію, як площі під кривою щільності ймовірності.
6. Запишіть постановку задачі виявлення за критерієм ідеального спостерігача.
7. Запишіть вирішальне правило прийняття рішення за критерієм ідеального спостерігача.
8. Запишіть вирішальне правило прийняття рішення за критерієм максимуму апостеріорної ймовірності.
9. Запишіть вирішальне правило прийняття рішення за критерієм максимуму правдоподібності.
10. Запишіть постановку задачі виявлення за критерієм Неймана-Пірсона.
11. Запишіть вирішальне правило прийняття рішення за критерієм Неймана-Пірсона.
12. За якою формулою розраховується поріг за критерієм Неймана-Пірсона.
13. Від яких параметрів залежить ймовірність правильного виявлення за критерієм Неймана-Пірсона?

## Лекція №13. Розрізнення двох детермінованих сигналів

- 13.1. Синтез оптимального алгоритму розрізнення сигналів.
- 13.2. Структурна схема розрізнявача і епюри сигналів.
- 13.3. Ймовірність помилки прийому сигналів в двійковому каналі.
- 13.4. Потенційна завадозахищеність при прийомі маніпульованих сигналів.

### 13.1. Синтез оптимального алгоритму розрізнення сигналів

Задача розрізнення сигналів формулюється таким чином:

$$z(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda) s_0(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13.1)$$

де  $s_i(t), i = \overline{0,1}$  - сигнали з повністю відомими параметрами;  $\lambda$  - дискретна випадкова величина, яка приймає два значення  $\lambda_1 = 1$  і  $\lambda_0 = 0$  з відомими ймовірностями  $P(\lambda = \lambda_i) = P(\lambda_i), i = \overline{0,1}$ ;  $n(t)$  - ГБШ з кореляційною функцією

$$K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau); T - \text{тривалість інтервалу спостереження.}$$

При  $\lambda_1 = 1$  в прийнятому сигналі  $z(t) = z_1(t)$  присутній сигнал  $s_1(t)$ , а при  $\lambda_0 = 0$  - сигнал  $s_0(t)$ .

Необхідно у відповідності до визначеного критерію оптимальності по прийнятій конкретній реалізації суміші  $z(t) = z_l(t)$  в кінці інтервалу спостереження  $t = T$  прийняти рішення  $\hat{\lambda}_j, j = \overline{0,1}$  про присутність або сигналу  $s_1(t)$ , або  $s_0(t)$ . Рішення  $\hat{\lambda}_1 = \hat{1}$  означає, що в прийнятому сигналі  $z(t) = z_l(t)$  присутній сигнал  $s_1(t)$ . Рішення  $\hat{\lambda}_0 = \hat{0}$  означає, що в прийнятому сигналі  $z(t)$  присутній сигнал  $s_0(t)$ .

Дотримуючись розглянутої при вирішенні задачі виявлення методики синтезу, можна показати, що оптимальне за байєсівським критерієм вирішальне правило розрізнення сигналів на основі відношення правдоподібності має вигляд, аналогічний до вирішального правила виявлення сигналів (11.34), і описується виразом

$$\Lambda_l = \frac{L_l(\lambda_1) \geq (C_{01} - C_{00})P(\lambda_0)}{L_l(\lambda_0) < (C_{10} - C_{11})P(\lambda_1)} = \gamma. \quad (13.2)$$

Але ж функції правдоподібності  $L_l(\lambda_i), i = \overline{0,1}$  гіпотез  $\lambda_i, i = \overline{0,1}$  в (13.1) мають вигляд

$$L_l(\lambda_i) = C \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - \lambda_i s_1(t) - (1 - \lambda_i) s_0(t))^2 dt \right\}, \lambda_i = \overline{0,1}. \quad (13.3)$$

При використанні критерію ідеального спостерігача поріг в (13.2) визначається за формулою

$$\gamma_e = \frac{P(0)}{P(1)}, \quad (13.4)$$

а при використанні критерію максимальної правдоподібності поріг дорівнює одиниці

$$\gamma_{ML} = 1. \quad (13.5)$$

При вирішенні задачі розрізнення найбільш широко використовуються критерії ідеального спостерігача і максимальної правдоподібності.

Перетворимо (13.2) з урахуванням (13.3) :

$$\Lambda_l = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - s_1(t))^2 dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - s_0(t))^2 dt \right\} \stackrel{\hat{1}}{>} \gamma. \quad (13.6)$$

Після логарифмування лівої і правої частини одержимо

$$-\frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - s_1(t))^2 dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - s_0(t))^2 dt \stackrel{\hat{1}}{>} \ln \gamma. \quad (13.7)$$

Введемо позначення

$$\int_0^T z_l(t)^2 dt = E_z, \quad \int_0^T s_i(t)^2 dt = E_{s_i}, \quad \int_0^T z_l(t) s_i(t) dt = q_{li}, i = \overline{0,1}. \quad (13.8)$$

Отримаємо

$$-E_z + 2q_{l1} - E_{s1} + E_z - 2q_{l0} + E_{s0} \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} N_0 \ln \gamma; \quad (13.9)$$

$$q_{l1} - q_{l0} \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} \frac{E_{s1} - E_{s0}}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \gamma = H. \quad (13.10)$$

Результатом (13.10) є вирішальне правило прийняття рішень, яке описує алгоритм роботи оптимального розрізнявача двох детермінованих сигналів.

Як правило, в двійкових каналах  $P(0) = P(1) = 0,5$ . Тоді оптимальним є критерій максимальної правдоподібності, і вирішальне правило має вигляд

$$q_{l1} - q_{l0} \underset{\hat{0}}{\overset{\hat{1}}{\geq}} \frac{E_{s1} - E_{s0}}{2} = H_E, \quad (13.11)$$

$H_E$  - називають енергетичним порогом.

### 13.2. Структурна схема розрізнявача і епюри сигналів

Схема оптимального приймача розрізнявача двійкових сигналів, що реалізує алгоритм (13.10), наведена на рис. 13.1. Приймач обчислює значення кореляційних інтегралів  $q_{l1}$  і  $q_{l0}$  з використанням опорних відомих сигналів  $s_1(t)$  і  $s_0(t)$ , після чого, в момент закінчення спостереження  $T$ , порівнює їх різницю з порогом  $H$  і приймає рішення у відповідності з (13.10). В реальних двійкових каналах інформація передається послідовностями сигналів  $s_i(t)$ , з можливими змінами в тактові моменти часу  $kT$ . При цьому в схемі повинна

виконуватись фазова синхронізація для опорних сигналів  $s_i(t)$  і тактова синхронізація для зняття даних з інтеграторів і їх обнуління.

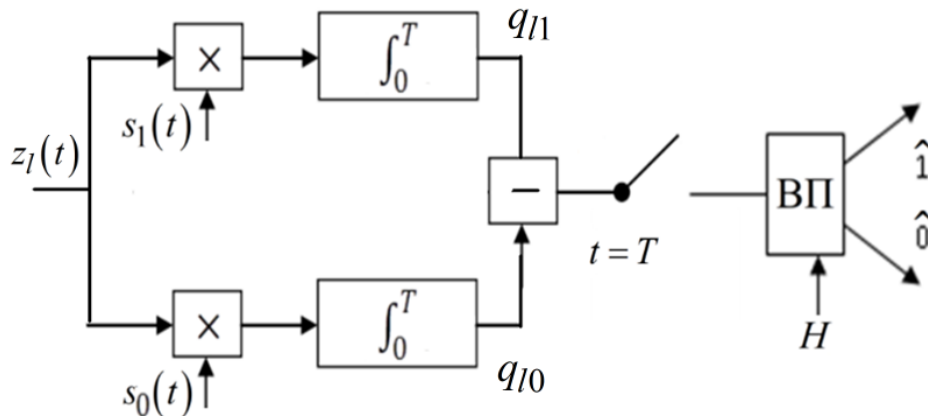


Рис. 13.1 Пристрій розрізнення на основі кореляційного приймача

Еквівалентна схема розрізнявача двійкових сигналів також може бути отримана на основі узгодженого фільтра рис. 13.2. В схемі повинна виконуватись тактова синхронізація для зняття даних з виходів узгоджених фільтрів.

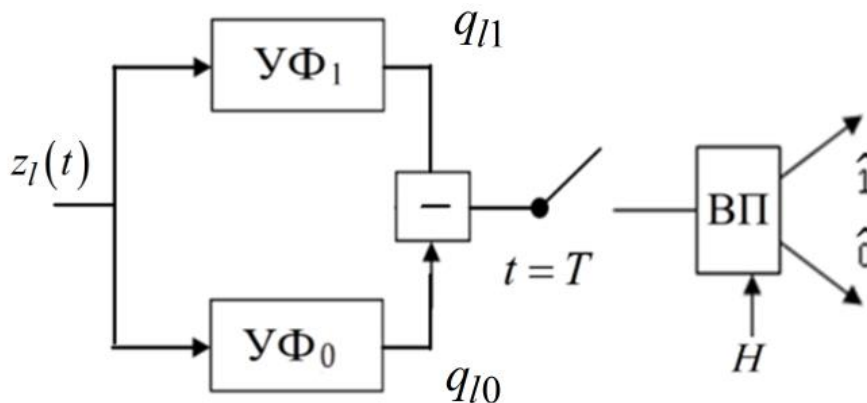


Рис. 13.2 Пристрій розрізнення на основі узгоджених фільтрів

Часові діаграми, що пояснюють роботу розрізнявача при прийомі амплітудно (АТ) -, частотно (ЧТ) - і фазоманіпульованих (ФТ) сигналів показані на рис.13.3. На них наведені: часові діаграми сигналів, сигнали на виходах інтеграторів  $q_{li}(t), i = \overline{0,1}$ , різниць  $q_{l1}(t) - q_{l0}(t)$ , виходи вирішальних пристроїв. При АТ поріг

$$H_E = \frac{E_{s1}}{2}. \quad (13.12)$$

При ЧТ і ФТ, коли  $E_{s1} = E_{s0}$ , поріг

$$H_E = 0. \quad (13.13)$$

Порівняння діаграм  $q_{11}(t) - q_{10}(t)$  дозволяє зробити висновок, що найменша відстань між значеннями  $q_{11}(T) - q_{10}(T)$  і енергетичним порогом  $H_E$  при АТсигнілів ( $\frac{E_{s1}}{2}$  при відсутності завад), а найбільша у ФТ сигналів ( $2E_{s1}$  при відсутності завад). Це призводить і до відповідних результатів в завадозахищеності оптимального прийому.

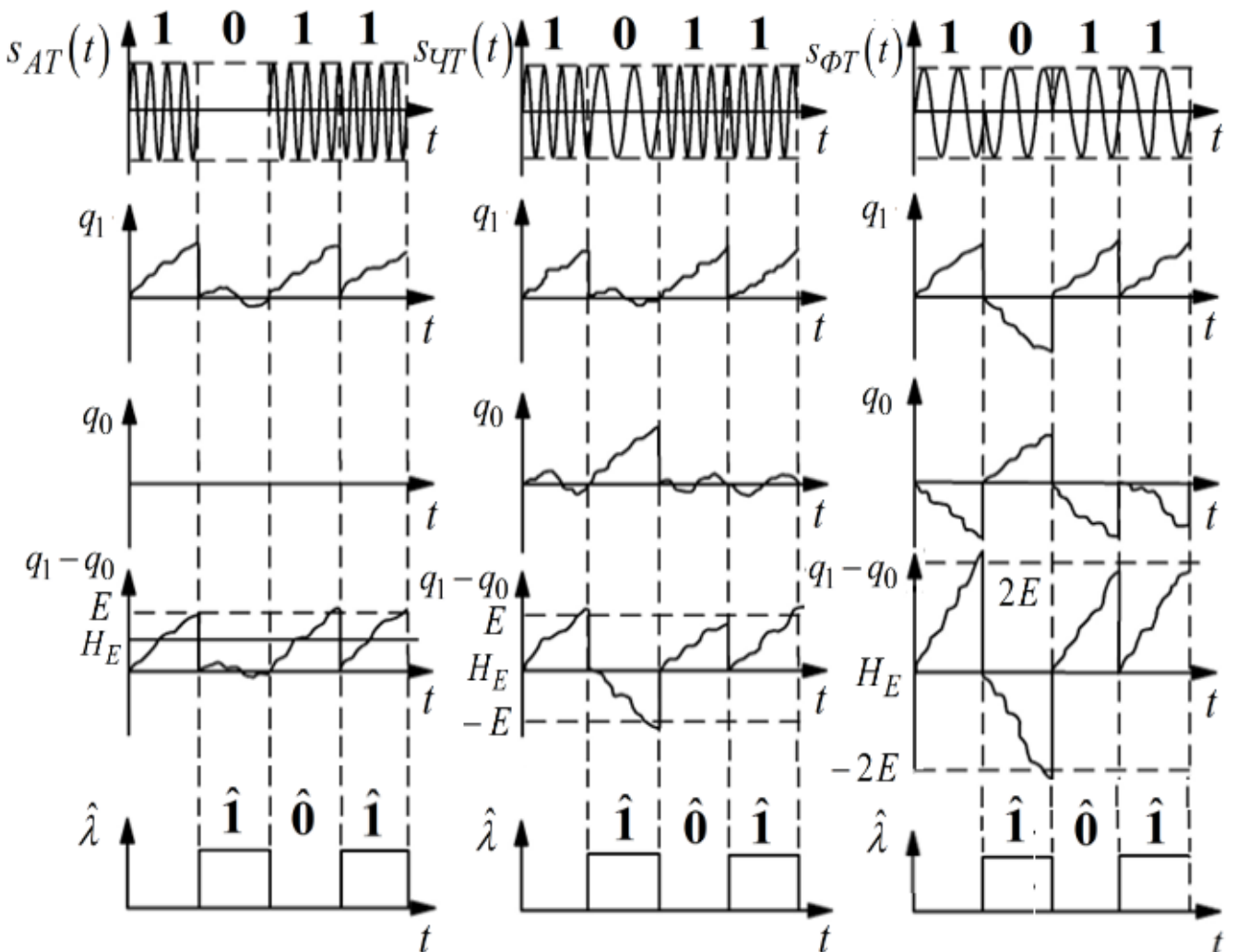


Рис. 13.3 Часові діаграми при прийомі АТ -, ЧТ - і ФТ- сигналів

### 13.3. Ймовірність помилки прийому символу в двійковому каналі

Кількісною оцінкою завадостійкості приймача розрізнявача є ймовірність помилки  $p_e$ , яка при  $P(1) = P(0) = 0.5$  дорівнює

$$p_e = \frac{1}{2} \left( P(\hat{1}|0) + P(\hat{0}|1) \right). \quad (13.14)$$

Визначимо умовну ймовірність  $P(\hat{1}|0)$ . Така ситуація виникає, якщо передано  $s_0(t)$  і прийнято рішення  $\hat{\lambda}_1 = \hat{1}$ , тобто

$$q_{l1} - q_{l0} > H_E. \quad (13.15)$$

Випадкові величини  $q_i, i = \overline{0,1}$ , що розраховуються на виходах кореляційних інтегралів і приймають у конкретному випробуванні значення  $q_{li}, i = \overline{0,1}$ , є випадковими скалярними статистиками. Відповідно достатня статистика для розглянутої задачі має вигляд  $q_1 - q_0$ . Для визначення умовної ймовірності  $P(\hat{1}|0)$  виконаємо **аналіз** статистичних характеристик вирішальної статистики  $q_1 - q_0$ .

Модель повідомлення при  $\lambda_0 = 0$  має вигляд

$$z(t) = s_0(t) + n(t). \quad (13.16)$$

Введемо позначення для згортки

$$\int_0^T a(t)b(t)dt = (a,b). \quad (13.17)$$

Тоді статистики на виходах кореляційних інтеграторів каналів можна представити у вигляді

$$q_1 = \int_0^T z(t)s_1(t)dt = (z, s_1) = (s_2 + n, s_1) = (s_0, s_1) + (n, s_1) = E_{10} + (n, s_1); \quad (13.18)$$

$$q_0 = \int_0^T z(t) s_0(t) dt = (z, s_0) = (s_0 + n, s_0) = (s_0, s_0) + (n, s_0) = E_0 + (n, s_0). \quad (13.19)$$

Підставимо вирази (13.18) і (13.19) в (13.15) і виконаємо наступні перетворення

$$E_{10} + (n, s_1) - E_{s_0} - (n, s_0) > \frac{E s_1 - E s_0}{2}; \quad (13.20)$$

$$(n, s_1 - s_0) > \frac{E s_1 - E s_0}{2} + \frac{2E s_0}{2} - \frac{2E_{10}}{2} = \frac{E s_1 + E s_0 - 2E_{10}}{2} = E, \quad (13.21)$$

де  $(n, s_1 - s_0) = \eta$  - гаусівська випадкова величина.

Рішення  $\hat{1}$  за умови  $0$  приймається, коли

$$\eta > E_s. \quad (13.22)$$

Тому  $P(\hat{1}|0)$  може бути представлена у вигляді

$$P(\hat{1}|0) = P(q_1 - q_0 > H_E | s_0(t)) = P(\eta > E). \quad (13.23)$$

Визначимо математичне очікування і дисперсію  $\eta$

$$m_\eta = \mathbf{M}[\eta] = \mathbf{M}\left[\int_0^T n(t)(s_1(t) - s_0(t)) dt\right] = \int_0^T \mathbf{M}[n(t)](s_1(t) - s_0(t)) dt = 0; \quad (13.24)$$

$$\sigma_\eta^2 = \mathbf{M}[\eta^2] = \int_0^T \int_0^T \mathbf{M}[n(t_1)n(t_2)](s_1(t_1) - s_0(t_1))(s_1(t_2) - s_0(t_2)) dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^T (s_1(t_1) - s_0(t_1))^2 dt_1 = \frac{N_0}{2} (E_{s1} + E_{s0} - 2E_{10}) = N_0 E. \quad (13.25)$$

Вигляд гаусівської щільності ймовірності  $f(\eta) = N(0, \sigma_\eta^2)$  показано на рис. 13.4.

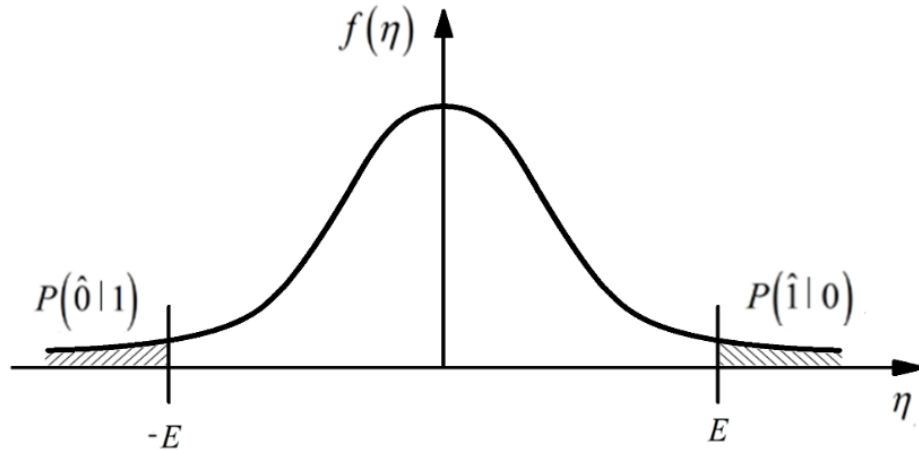


Рис. 13.4. Геометрична інтерпретація розрахунку умовних ймовірностей помилок прийняття рішень

Тоді ймовірність  $P(\hat{1}|0)$  визначається за формулою

$$P(\hat{1}|0) = P(x > E) = 1 - \Phi\left(\frac{E}{\sigma_\eta}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_{s1} + E_{s0} - 2E_{10}}{2N_0}}\right). \quad (13.26)$$

Аналогічно можна переконатися, що коли передається  $s_1(t)$  і приймається рішення  $\hat{\lambda}_0 = \hat{0}$ , то ймовірність помилки  $P(\hat{0}|1)$  дорівнює

$$P(\hat{0}|1) = P(\eta < -E). \quad (13.27)$$

Оскільки щільність ймовірності  $f(\eta)$  симетрична функція, то

$$P(\hat{0}|1) = P(\hat{1}|0). \quad (13.28)$$

Тоді вираз (13.14) перетвориться до вигляду

$$p_e = \frac{1}{2} \left( P(\hat{1}|0) + P(\hat{0}|1) \right) = P(\hat{1}|0). \quad (13.29)$$

Остаточно отримаємо

$$p_e = 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{E_{s1} + E_{s0} - 2E_{10}}{2N_0}} \right). \quad (13.30)$$

Таким чином, ймовірність помилки прийому символу в двійковому каналі  $p_e$  залежить від:

- 1) енергії сигналів  $E_{si}$ ,  $i = \overline{0,1}$ ;
- 2) взаємної кореляції сигналів  $E_{10}$ ;
- 3) спектральної щільності потужності шуму  $N_0$ .

Максимальна ймовірність помилки  $p_{e \max} = 0.5$ .

### 13.4 . Потенційна стійкість при прийомі маніпульованих сигналів

Визначимо ймовірність помилки прийому символів при прийомі АТ -, ЧТ - і ФТ- сигналів. Для АТ- сигналів маємо

$$E_{s1} = E_s; \quad E_{s0} = 0; \quad E_{10} = (s_1, s_0) = 0 \quad (13.31)$$

З врахуванням (13.30) ймовірність помилки прийому АТ-сигналів визначається за формулою

$$p_{e \text{ АТ}} = 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} \right) = 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{h^2}{4}} \right). \quad (13.32)$$

Необхідне ВСШ  $h^2$ , що забезпечує задану ймовірність помилки, визначається за формулою

$$h^2 = 4(\Phi^{-1}(1 - p_{eAT}))^2. \quad (13.33)$$

Для некорельованих ЧТ- сигналів з однаковими амплітудами маємо

$$E_{s1} = E_{s0} = E_s; \quad E_{10} = (s_1, s_0) = 0 \quad (13.34)$$

Ймовірність помилки прийому ЧТ-сигналів визначається за формулою

$$p_{eЧТ} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{h^2}{2}}\right). \quad (13.35)$$

Необхідне ВСШ  $h^2$ , що забезпечує задану ймовірність помилки, визначається за формулою

$$h^2 = 2(\Phi^{-1}(1 - p_{eЧТ}))^2. \quad (13.36)$$

Енергетичний вигравш в порівнянні з АТ-сигналами - в 2 рази.

ФТ- сигнали є протилежними, тому маємо

$$E_{s1} = E_{s0} = E_s; \quad E_{10} = (s_1, s_0) = (s_1, -s_1) = -E_s \quad (13.37)$$

Ймовірність помилки прийому ФТ-символів визначається за формулою

$$p_{eФТ} = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{h^2}\right). \quad (13.38)$$

Необхідне ВСШ  $h^2$ , що забезпечує задану ймовірність помилки, визначається за формулою

$$h^2 = (\Phi^{-1}(1 - p_{eФТ}))^2. \quad (13.39)$$

Енергетичний вигравш в порівнянні з АТ-сигналами - в 4 рази, з ЧТ-сигналами - в 2 рази.

Графіки залежності ймовірності помилкового прийому  $p_e$  від ВСШ  $h^2$  в логарифмічному масштабі для розглянутих випадків маніпуляції показані на рис. 13.5 .

Завадостійкість оптимального приймача називається потенційною, в тому сенсі, що в заданих умовах перевищити її неможливо.

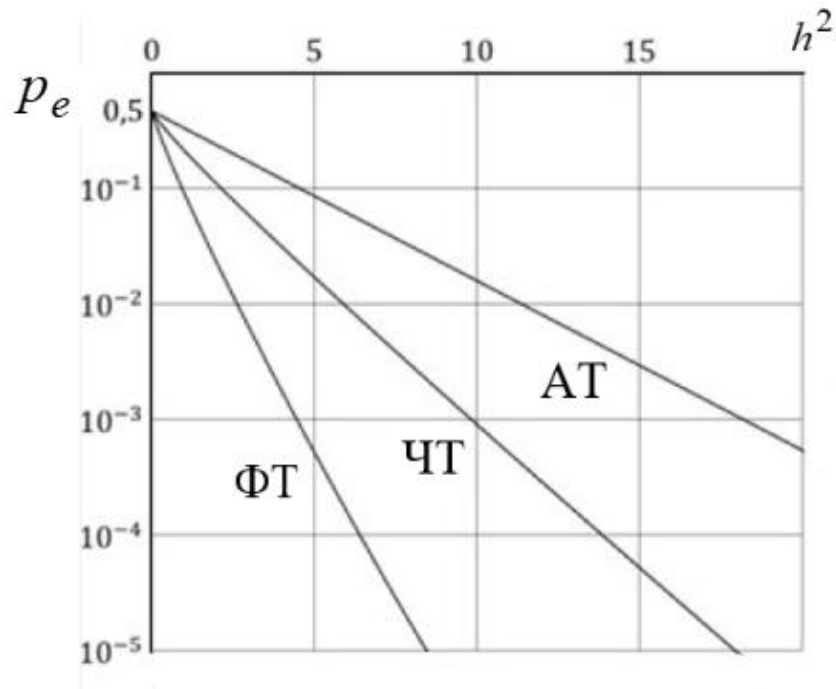


Рис. 13.5 Залежності ймовірності помилкового прийому  $p_e$  від ВСШ  $h^2$

### Приклад

На вхід оптимального когерентного пристрою розрізнення ФТ сигналів подається сигнал із амплітудою 2 мВ і шум із спектральною щільністю потужності  $N_0 = 8 \times 10^{-12}$  Вт/Гц. Визначити швидкість передачі сигналів, при якому ймовірність похибки не перевищує  $p_e = 5 \times 10^{-3}$  .

Розв'язок.

Ймовірність похибки для ФТ-сигналів складає:

$$P_{e, \text{ФТ}} = 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right).$$

Виразимо енергію:

$$E = \frac{N_0}{2} \left( \Phi^{-1}(1 - p_{e\Phi T}) \right)^2.$$

Враховуючи, що енергія сигналу дорівнює  $E = \frac{A^2 T}{2}$ , виразимо тривалість сигналу:

$$T = \frac{N_0}{A^2} \left( \Phi^{-1}(1 - p_{e\Phi T}) \right)^2.$$

Підставимо числові значення:

$$\begin{aligned} T &= \frac{N_0}{A^2} \left( \Phi^{-1}(1 - p_{e\Phi T}) \right)^2 = \frac{8 \times 10^{-12}}{(2 \times 10^{-3})^2} \left( \Phi^{-1}(1 - 0.005) \right)^2 = \frac{8 \times 10^{-12}}{(2 \times 10^{-3})^2} \left( \Phi^{-1}(0.995) \right)^2 \\ &= \frac{8 \times 10^{-12}}{(2 \times 10^{-3})^2} (2.576)^2 = 1.327 \times 10^{-5} \text{ с.} \end{aligned}$$

Швидкість передачі  $R$  визначається:

$$R = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.327 \times 10^{-5}} = 7.536 \times 10^4 \text{ Бод.}$$

### Питання до самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі розрізнення двох сигналів.
2. Запишіть вирішальне правило розрізнення двох сигналів за критерієм ідеального спостерігача і поясніть його складові.
3. За яким критерієм оптимальності поріг розрізнення називається енергетичним?
4. Надати загальну структурну схему пристрою оптимального розрізнення двох детермінованих сигналів.
5. Надати епюри сигналів пристрою оптимального розрізнення АТ-сигналів.
6. Надати епюри сигналів пристрою оптимального розрізнення ЧТ-сигналів.
7. Надати епюри сигналів пристрою оптимального розрізнення ФТ-сигналів.
8. Запишіть вираз для ймовірності  $P(\hat{1}|0)$  в двійковому каналі.
9. Запишіть вирази для ймовірності помилки прийому символів в двійковому каналі.
10. Запишіть вирази для ймовірності помилки розрізнення АТ-, ЧТ- і ФТ-сигналів і порівняйте їх між собою.

## РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛІВ

### Лекція №14. Оптимальне оцінювання енергетичних параметрів сигналів

14.1. Критерії оцінювання параметрів сигналу.

14.2. Оцінювання енергетичних параметрів сигналу.

#### 14.1. Критерії оцінювання параметрів сигналу

Нехай сигнал  $s(t, \lambda)$  відомий з точністю до деякого параметра  $\lambda$ , який являється неперервною випадковою величиною з відомою апіорною щільністю ймовірності  $f(\lambda)$ . На вхід приймача надходить адитивна суміш  $z(t)$  сигналу  $s(t, \lambda)$  і перешкоди  $n(t)$

$$z(t) = s(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14.1)$$

де  $n(t)$  – ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N}{2} \delta(\tau)$ .

Необхідно у відповідності до визначеного критерію оптимальності по прийнятій конкретній реалізації суміші  $z(t) = z_l(t)$  в кінці інтервалу спостереження  $t = T$  визначити оцінку  $\hat{\lambda}$  невідомого значення параметра  $\lambda$ . Дана задача характерна для вимірювальних систем, радіолокації, радіонавігації.

Критерії оцінювання параметрів сигналу, а саме максимуму апостеріорної щільності ймовірності і максимальної правдоподібності частково вже були розглянуті в лекції №8. Продовжимо їх розгляд також на прикладі дискретної постановки задачі оцінювання параметра, адекватної цифровим ЕОМ. При дискретному спостереженні виконується дискретизація реалізації сигналу  $z_l(t)$  в дискретні моменти часу з шагом  $\Delta$ . Тому моделлю результатів вимірювання в дискретному часі є випадковий вектор  $(z(t_1), \dots, z(t_m))$ .

Так само, як і при розгляді задач виявлення і розрізнення сигналів, найбільш узагальненим критерієм оцінювання є критерій мінімуму середнього ризику. При оцінюванні неперервнозначного параметра  $\lambda$  він має вигляд

$$\min_{\hat{\lambda}} \bar{C}(\hat{\lambda}), \quad (14.2)$$

де  $\bar{C}(\hat{\lambda})$  - критеріальна функція, яка визначається за формулою

$$\bar{C}(\hat{\lambda}) = \mathbf{M}[C(\lambda, \hat{\lambda})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda, \hat{\lambda}) f(\lambda, z_1, \dots, z_m) d\lambda dz_1 \dots dz_m; \quad (14.3)$$

$C(\lambda, \hat{\lambda})$  - функція втрат;  $f(\lambda, z_1, \dots, z_m)$  - сумісна щільність ймовірності параметра  $\lambda$  і випадкового вектора  $(z(t_1), \dots, z(t_m))$ .

Критеріальна функція  $\bar{C}(\hat{\lambda})$  дорівнює середньому значенню функції втрат, якщо в якості оцінки береться  $\hat{\lambda}$ . Обчислюючи ризики для різних оцінок і порівнюючи їх, можна обрати кращу оцінку. Найкраще значення середнього ризику відповідає оцінці, яка називається байєсівською, а відповідне значення (14.3) – байєсівським ризиком.

Використовуючи теорему множення ймовірностей, критеріальну функцію можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{C}(\hat{\lambda}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda, \hat{\lambda}) f(\lambda, z_1, \dots, z_m) d\lambda dz_1 \dots dz_m = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda, \hat{\lambda}) f(\lambda | z_1, \dots, z_m) d\lambda f(z_1, \dots, z_m) dz_1 \dots dz_m. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Внутрішній інтеграл в (14.4)

$$\bar{C}(\hat{\lambda} | z_1, \dots, z_m) = \mathbf{M}[C(\lambda, \hat{\lambda}) | z_1, \dots, z_m] = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda, \hat{\lambda}) f(\lambda | z_1, \dots, z_m) d\lambda \quad (14.5)$$

називається апостеріорним ризиком. Він дорівнює середньому значенню функції втрат за умови , що випадковий вектор вимірювання  $(z(t_1), \dots, z(t_m))$  приймає значення  $(z_1, \dots, z_m)$ , якщо в якості оцінки береться  $\hat{\lambda}$ . Щільність ймовірності  $f(z_1, \dots, z_m)$  є невід'ємною. Тому якщо значення внутрішнього інтеграла мінімально при кожному значенні вектору  $(z_1, \dots, z_m)$ , то і значення середнього ризику  $\bar{C}(\hat{\lambda})$  буде мінімально. Тому для визначення оцінки  $\hat{\lambda}$  параметра  $\lambda$  використовується критерій мінімуму апостеріорного ризику

$$\min_{\hat{\lambda}} \bar{C}(\hat{\lambda} | z_1, \dots, z_m). \quad (14.6)$$

У випробуванні випадковий вектор спостереження приймає значення  $(z(t_1), \dots, z(t_m)) = (z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ . Тому вирішальне правило знаходження оцінки можна представити у вигляді

$$\hat{\lambda}_{AR} = \arg \max_{\hat{\lambda}} \bar{C}(\hat{\lambda} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)). \quad (14.7)$$

Широке використання на практиці знаходить квадратична функція втрат

$$C(\lambda, \hat{\lambda}) = (\hat{\lambda} - \lambda)^2 = \varepsilon^2, \quad (14.8)$$

де  $\varepsilon = \hat{\lambda} - \lambda$  - похибка оцінки.

При використанні квадратичної функції втрат апостеріорний ризик має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{C}_2(\hat{\lambda} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) &= \mathbf{M}[(\hat{\lambda} - \lambda)^2 | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\lambda} - \lambda)^2 f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Тому з використанням (14.7) вирішальне правило знаходження оцінки можна представити у вигляді

$$\hat{\lambda}_{MSE} = \arg \max_{\hat{\lambda}} \bar{C}_2(\hat{\lambda} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)). \quad (14.10)$$

Оптимальна оцінка мінімізує середній квадрат похибки оцінки за умови, що отримано спостереження  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ , і позначається  $\hat{\lambda}_{MSE}$ .

Значення оцінки, що мінімізує вираз (14.10), можна знайти, розв'язавши рівняння

$$\frac{d}{d\hat{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\lambda}_{MSE} - \lambda)^2 f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda = 0. \quad (14.11)$$

Виконаємо перетворення

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\lambda}_{MSE} - \lambda) f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda = 0; \quad (14.12)$$

$$\hat{\lambda}_{MSE} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda; \quad (14.13)$$

$$\hat{\lambda}_{MSE} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda = m_{\lambda}(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)). \quad (14.14)$$

Тобто оцінка  $\hat{\lambda}_{MSE}$  являє собою математичне очікування  $m_{\lambda}(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ .

Визначимо мінімальне значення критеріальної функції (14.10). Для цього підставимо оптимальну оцінку  $\hat{\lambda}_{MSE}$  в (14.10) і виконаємо наступні перетворення

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2\min}(\hat{\lambda} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) &= \mathbf{M}[(\hat{\lambda}_{MSE} - \lambda)^2 | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\lambda}_{MSE} - \lambda)^2 f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \hat{\lambda}_{MSE})^2 f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - m_\lambda(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)))^2 f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda = \\
&= \sigma_\lambda^2(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)). \tag{14.15}
\end{aligned}$$

Тобто, мінімальне значення умовного середнього квадрату похибки оцінки дорівнює дисперсії апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ . **Таким чином, якщо відома апостеріорна щільність ймовірності  $f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  невідомого параметру  $\lambda$ , то її апостеріорне математичне очікування дорівнює оцінці  $\hat{\lambda}_{MSE}$ , а апостеріорна дисперсія  $\sigma_\lambda^2(z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  дорівнює мінімальному значенню умовного середнього квадрату похибки  $\bar{C}_{2\min}(\hat{\lambda} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$ .**

Оптимальна за критерієм максимуму апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  оцінка  $\hat{\lambda}_{MAP}$  також є частковим випадком оцінок за байєсівським критерієм оптимальності. Вона отримується при використанні простої функції втрат

$$C(\lambda, \hat{\lambda}) = 1 - \delta(\hat{\lambda} - \lambda). \tag{14.16}$$

Критеріальна функція в цьому випадку має вигляд

$$\begin{aligned}
\bar{C}_1(\hat{\lambda} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \delta(\hat{\lambda} - \lambda)) f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) d\lambda = \\
&= 1 - f(\hat{\lambda} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m)) \tag{14.17}
\end{aligned}$$

Тоді для забезпечення мінімально можливого значення ризику  $\bar{C}_1(\hat{\lambda} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  в якості значення оптимальної оцінки необхідно обирати

те значення параметру  $\lambda$ , при якому апостеріорна щільність ймовірності досягає максимального значення. Як було показано в лекції №8, вирішальне правило знаходження оцінки можна представити у вигляді

$$\hat{\lambda}_{MAP} = \arg \max_{\lambda} f_{ps}(\lambda) = \arg \max_{\lambda} L_l(\lambda) f_{pr}(\lambda). \quad (14.18)$$

При невідомому апіорному розподілі  $f_{pr}(\lambda)$  користуються критерієм максимальної правдоподібності (ML). Згідно з цим критерієм, в якості оцінки  $\hat{\lambda}_{ML}$  параметра  $\lambda$  використовується його значення, при якому функція правдоподібності  $L_l(\lambda)$  приймає максимальне значення. Оцінки  $\hat{\lambda}_{ML}$  і  $\hat{\lambda}_{MAP}$  збігаються, якщо в якості апіорної щільності ймовірності  $f_{pr}(\lambda)$  в (14.18) використовують рівномірну щільність ймовірності.

Якщо  $f(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))$  і  $L_l(\lambda)$  унімодальні, то оцінки визначаються як точки нульових похідних

$$\left. \frac{df(\lambda | z_l(t_1), \dots, z_l(t_m))}{d\lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{MAP}} = 0, \quad (14.19)$$

$$\left. \frac{dL_l(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{ML}} = 0. \quad (14.20)$$

Як випливає з проведеного аналізу, оцінки  $\hat{\lambda}_{MSE}$ ,  $\hat{\lambda}_{MAP}$ ,  $\hat{\lambda}_{ML}$  залежать від вимірної реалізації і мають випадковий характер. Вони є реалізаціями випадкових величин  $\hat{\lambda}_{MSE}$ ,  $\hat{\lambda}_{MAP}$ ,  $\hat{\lambda}_{ML}$ .

### **Властивості оцінок як випадкових величин**

Оцінка  $\hat{\lambda}$  параметра  $\lambda$  називається *незміщеною*, якщо її умовне математичне очікування дорівнює істинному значенню параметра, що оцінюється:

$$M[\hat{\lambda} | \lambda] = \lambda. \quad (14.21)$$

Якщо це рівняння не виконується, то оцінка називається зміщеною. Зміщення оцінки визначається за формулою

$$\Delta_{\hat{\lambda}} = M[\hat{\lambda} | \lambda] - \lambda. \quad (14.22)$$

Оцінка називається *ефективною*, якщо вона незміщена і має мінімальну дисперсію помилки оцінки.

$$\mathbf{M}[\varepsilon | \lambda] = \mathbf{M}[(\hat{\lambda} - \lambda) | \lambda] = M[\hat{\lambda} | \lambda] - \lambda = \lambda - \lambda = 0, \quad (14.23)$$

$$D[\hat{\lambda} | \lambda] = \mathbf{M}[(\hat{\lambda} - \lambda)^2 | \lambda] = \mathbf{M}[\varepsilon^2 | \lambda] = D_{min}(\lambda). \quad (14.24)$$

## 14.2. Оцінювання енергетичних параметрів сигналу

Параметри радіосигналу поділяють на енергетичні та неенергетичні. Енергетичними називають параметри, від яких залежить енергія сигналу. Так, енергія прямокутного радіоімпульсу визначається за формулою

$$E_s = \frac{U_m^2 T}{2}, \quad (14.25)$$

де  $U_m$ ,  $T$  - енергетичні параметри радіоімпульсу.

Як приклад, розглянемо оцінку амплітуди  $U_m$  радіосигналу

$$s(t, U_m) = U_m s_0(t), \quad (14.26)$$

де  $s_0(t)$  - сигнал одиничної амплітуди.

Модель спостереження в цьому випадку можна записати у вигляді

$$z(t) = U_m s_0(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14.27)$$

де  $U_m$  - випадкова амплітуда,  $n(t)$  – ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ .

Необхідно у відповідності до визначеного критерію оптимальності по прийнятій конкретній реалізації сигналу  $z(t) = z_l(t)$  в кінці інтервалу спостереження  $t = T$  визначити оцінку  $\hat{U}_m$  амплітуди  $U_m$ .

Будемо вважати, що апіорний розподіл  $f_{pr}(U_m)$  амплітуди є невідомим, тому використаємо для пошуку оцінки критерій максимальної правдоподібності (ML)

$$\max_{U_m} L_l(U_m). \quad (14.28)$$

Функціонал правдоподібності для амплітуди сигналу в гаусівському неперервному каналі має вигляд

$$L_l(U_m) = c \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - U_m s_0(t))^2 dt \right\}. \quad (14.29)$$

В якості оцінки  $\hat{U}_{ML}$  параметра  $U_m$  використовується його значення, при якому функціонал правдоподібності  $L_l(U_m)$  приймає максимальне значення. Оскільки логарифм є монотонно зростаючою функцією, яка не змінює положення екстремуму, перетворимо вираз (14.29) до вигляду

$$\ln L_l(U_m) = \ln c - \frac{1}{N_0} \int_0^T (z_l(t) - U_m s_0(t))^2 dt. \quad (14.30)$$

Оцінки  $\hat{U}_{ML}$  може бути знайдена шляхом вирішення рівняння

$$\left. \frac{d \ln L_l(U_m)}{dU_m} \right|_{U_m = \hat{U}_{ML}} = 0. \quad (14.31)$$

Виконуючи диференціювання (14.30) і дорівнюючи похідну нулю, отримаємо

$$\frac{d \ln L(\hat{U}_{lML})}{dU_m} = -\frac{1}{N_0} \int_0^T 2(z_l(t) - \hat{U}_{lML} s_0(t)) s_0(t) dt = 0; \quad (14.32)$$

$$\int_0^T z_l(t) s_0(t) dt = \hat{U}_{lML} \int_0^T s_0^2(t) dt; \quad (14.33)$$

$$\hat{U}_{lML} = \frac{1}{E_{s0}} \int_0^T z_l(t) s_0(t) dt, \quad (14.34)$$

де  $E_{s0}$  - енергія сигналу з одиничною амплітудою

$$E_{s0} = \int_0^T s_0^2(t) dt. \quad (14.35)$$

Таким чином, оцінка невідомої амплітуди сигналу визначається на основі розрахунку кореляційного інтегралу між отриманою реалізацією і сигналом з одиничною амплітудою і нормування отриманого результату на енергію  $E_{s0}$ .

Кореляційний приймач, який реалізує алгоритм оцінювання амплітуди (14.34) зображено на рис.14.1.

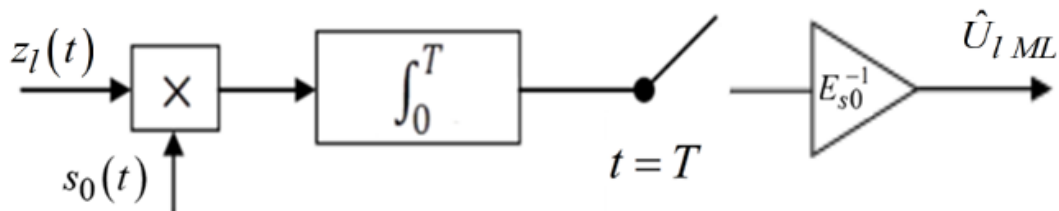


Рис. 14.1 Пристрій оптимального оцінювання амплітуди сигналу

Визначимо умовне математичне очікування оцінки  $\hat{U}_{ML}$ . Для цього розглянемо перетворення випадкового процесу  $z(t)$  (14.27) пристроєм оцінювання амплітуди рис. 14.1. З використанням моделі спостереження (14.27) і рівняння (14.34) отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\hat{U}_{ML} | U_m] &= \frac{1}{E_0} \mathbf{M}\left[\int_0^T (U_m s_0(t) + n(t)) s_0(t) dt | U_m\right] = \\ &= \frac{1}{E_{s0}} U_m \int_0^T s_0^2(t) dt + \int_0^T \mathbf{M}[n(t) | U_m] s_0(t) dt = \frac{1}{E_{s0}} U_m E_{s0} = U_m. \end{aligned} \quad (14.36)$$

Таким чином, оцінка амплітуди є незміщеною.

Визначимо дисперсію помилки оцінки. Помилка оцінки дорівнює

$$\begin{aligned} \varepsilon = \hat{U}_{mML} - U_m &= \frac{1}{E_0} \int_0^T (U_m s_0(t) + n(t)) s_0(t) dt - U_m = \\ &= U_m + \frac{1}{E_{s0}} \int_0^T n(t) s_0(t) dt - U_m = \frac{1}{E_{s0}} \int_0^T n(t) s_0(t) dt. \end{aligned} \quad (14.37)$$

Тоді умовна дисперсія помилки оцінки визначається виразом

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 &= \mathbf{M}[\varepsilon^2 | U_m] = \mathbf{M}\left[\left(\frac{1}{E_{s0}} \int_0^T n(t) s_0(t) dt\right)^2 | U_m\right] = \\ &= \mathbf{M}\left[\frac{1}{E_{s0}} \int_0^T n(t_1) s_0(t_1) dt_1 \frac{1}{E_{s0}} \int_0^T n(t_2) s_0(t_2) dt_2 | U_m\right] = \\ &= \frac{1}{E_{s0}^2} \int_0^T \int_0^T \mathbf{M}[n(t_1) n(t_2) | U_m] s_0(t_1) s_0(t_2) dt_2 dt_1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{E_{s0}^2} \int_0^T \frac{N_0}{2} s_0^2(t_1) dt_1 = \frac{N_0}{2E_{s0}^2} E_{s0} = \frac{N_0}{2E_{s0}}. \quad (14.38)$$

Відносна дисперсія визначається за формулою

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{U_m^2} = \frac{N_0}{2E_{s0}U_m^2} = \frac{N_0}{2E_s} = \frac{1}{h^2}. \quad (14.39)$$

Відносна дисперсія помилки оцінки амплітуди сигналу обернено пропорційна ВШ  $h^2$ . Точність оцінки тим вище, чим більше відношення енергії сигналу  $E_s$  до спектральної щільності шуму  $N_0$ .

### Питання до самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі оптимального оцінювання параметрів сигналів.
2. Запишіть критерії мінімуму середнього ризику і поясніть його складові.
3. Запишіть критерії мінімуму апостеріорного ризику і поясніть його складові.
4. Запишіть критерій мінімуму середнього квадрату помилки. Поясніть зв'язок характеристик оцінки з параметрами апостеріорної щільності ймовірності параметру сигналу.
5. Які властивості оцінок вам відомі?
6. Сформулюйте постановку задачі оптимального оцінювання амплітуди сигналу.
7. Запишіть вирішальне правило оцінювання за критерієм максимальної правдоподібності і поясніть його складові.
8. Надайте загальну структурну схему пристрою оптимального оцінювання амплітуди сигналу.
9. Запишіть вираз для дисперсії помилки оцінки амплітуди сигналу і поясніть його.

## Лекція №15 Оптимальне оцінювання неенергетичних параметрів сигналів

- 15.1. Алгоритм оцінювання неенергетичних параметрів сигналу.
- 15.2. Точність оцінювання неенергетичного параметра сигналу.
- 15.3. Дисперсія помилки оцінки частоти радіоімпульсу.
- 15.4. Оптимальне оцінювання початкової фази радіоімпульсу.

### 15.1. Алгоритм оцінювання неенергетичних параметрів сигналу

Неенергетичними називають параметри, від яких енергія сигналу не залежить. До них відносять: затримку сигналу  $\tau$ , частоту  $\omega$ , початкову фазу  $\varphi_0$ . З практичної точки зору, неенергетичні параметри більш інформативні і частіше використовуються в різних задачах радіотехнічних вимірювань. Математична модель сигналу:

$$z(t) = s(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15.1)$$

де  $\lambda$  - невідомий неенергетичний параметр;  $n(t)$  – ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N}{2} \delta(\tau)$ .

Потрібно:

1. Синтезувати оптимальний за критерієм максимальної правдоподібності алгоритм оцінювання неенергетичного параметра  $\lambda$ .
2. Побудувати структурну схему оптимального пристрою оцінювання.
3. Визначити дисперсію помилки оцінювання  $\sigma_\varepsilon^2$ .

Функціонал правдоподібності для неенергетичного параметра сигналу в гаусівському неперервному каналі має вигляд

$$L(\lambda) = c \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (z_j(t) - s(t, \lambda))^2 dt \right\}. \quad (15.2)$$

Виконаємо перетворення

$$L(\lambda) = c \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left( \int_0^T z_j^2(t) dt - 2 \int_0^T z_j(t) s(t, \lambda) dt + \int_0^T s^2(t, \lambda) dt \right) \right\}$$

$$= c \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} (E_z - 2q(\lambda) + E_s) \right\} = \tilde{c} \exp \left\{ \frac{2q(\lambda)}{N_0} \right\}, \quad (15.3)$$

де  $E_z$  - енергія прийнятого сигналу  $z_j(t)$ ;  $E_s$  - енергія корисного сигналу  $s(\lambda)$ ;  $q(\lambda)$  - кореляційний інтеграл.

Оскільки логарифм являється монотонно зростаючою функцією, функція  $\ln L(\lambda)$  не змінює положення екстремуму функції  $L(\lambda)$ . Тому

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{ML} &= \arg \max_{\lambda} \ln L(\lambda) = \arg \max_{\lambda} \ln \left( c \exp \left\{ \frac{2}{N_0} q(\lambda) \right\} \right) = \\ &= \arg \max_{\lambda} \left( \ln c + \frac{2}{N_0} q(\lambda) \right) = \arg \max_{\lambda} q(\lambda). \end{aligned} \quad (15.4)$$

Оскільки  $\lambda$  є неперервною випадковою величиною, то реалізація можлива лише після дискретизації параметра  $\lambda$  в області можливих значень  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ . В результаті отримаємо дискретний набір значень  $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ .

Квазіоптимальний пристрій оцінювання є багатоканальним кореляційним приймачем. Його структурна схема наведена на рис. 15.1.

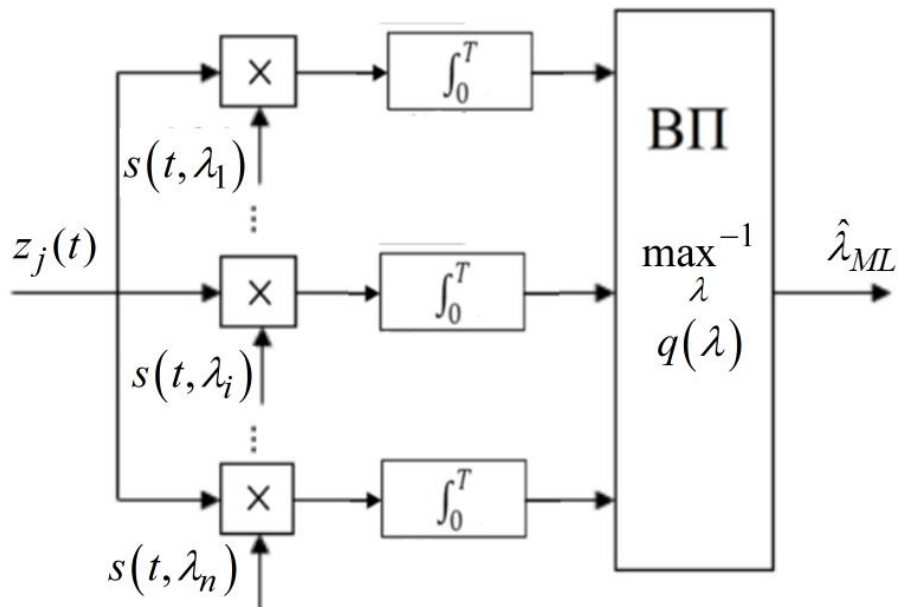


Рис. 15.1 Багатоканальний пристрій оцінювання неенергетичного параметра сигналу.

Кожний канал розраховує значення кореляційного інтегралу при заданному значенні опорного параметру  $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ . Рішення приймається у вирішальному пристрої (ВП). Чим менше інтервал дискретизації, тим більше необхідно число каналів  $m$ , тим складніше реалізація. Оскільки точна реалізація алгоритму (15.4) неможлива, і можна говорити лише про наближену його реалізацію шляхом дискретизації параметра, то такий алгоритм оцінювання називається квазіоптимальним.

## 15.2. Точність оцінювання неенергетичного параметра радіосигналу

Визначимо помилки оцінки неенергетичного параметра  $\lambda$  по максимуму функції  $q_l(\lambda)$ . Її можна представити у вигляді сигнальної і шумової функцій

$$q_l(\lambda) = q_s(\lambda) + q_{ln}(\lambda). \quad (15.5)$$

Обмежимося розглядом випадку, коли ВСШ велике  $h^2 \gg 1$ . При цьому для реалізацій шумової функції виконується умова  $q_s(\lambda) \gg q_{ln}(\lambda)$ , і реалізації кореляційного інтегралу  $q_l(\lambda)$  є унімодальними. Наявність шуму призводить до зміщення оцінки  $\hat{\lambda}_{lML}$  щодо істинного значення  $\lambda_0$  рис. 15.2.

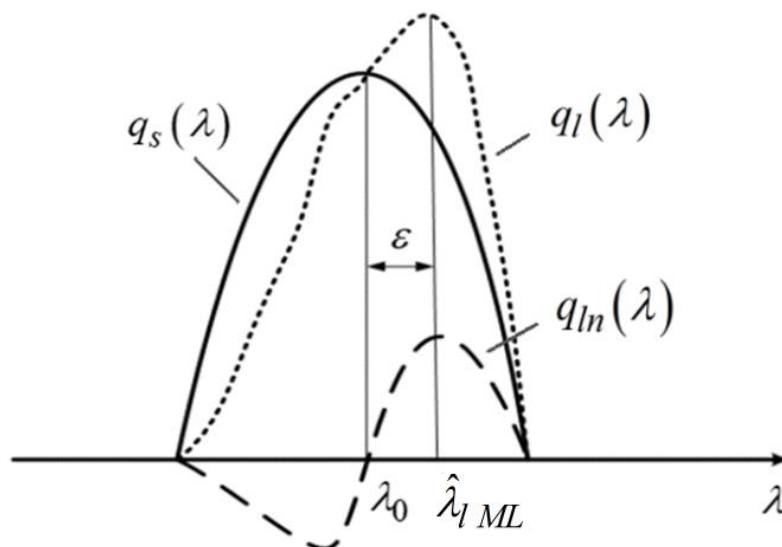


Рис.15.2 Вигляд реалізацій кореляційного інтегралу і шумової функції, а також сигнальної функції

Оцінка  $\hat{\lambda}_{lML}$  може бути отримана шляхом рішення рівняння

$$\frac{dq_l(\lambda)}{d\lambda} = \left[ \frac{dq_s(\lambda)}{d\lambda} + \frac{dq_{ln}(\lambda)}{d\lambda} \right] = 0 \Big|_{\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_{lML}}. \quad (15.6)$$

Але ж рішення нелінійного рівняння (15.6) зазнає значних аналітичних труднощів. Розкладемо функцію  $\frac{dq_l(\lambda)}{d\lambda}$  в ряд Тейлора в околиці точки  $\lambda_0$  і обмежимося лінійними членами розкладання

$$\frac{dq_l(\lambda)}{d\lambda} \approx \frac{dq_l(\lambda_0)}{d\lambda} + \frac{d^2q_l(\lambda_0)}{d\lambda^2}(\lambda - \lambda_0). \quad (15.7)$$

При великих ВСШ  $h^2$  похибка оцінки

$$\varepsilon = \hat{\lambda}_{lML} - \lambda_0 \quad (15.8)$$

є невеликою, тому замість вирішення нелінійного рівняння (15.6) розглянемо лінійне рівняння:

$$\frac{dq_l(\lambda)}{d\lambda} \approx \frac{dq_l(\lambda_0)}{d\lambda} + \frac{d^2q_l(\lambda_0)}{d\lambda^2}(\hat{\lambda}_{lML} - \lambda_0) = 0. \quad (15.9)$$

Звідки

$$\varepsilon = \hat{\lambda}_{lML} - \lambda_0 = -\frac{dq_l(\lambda_0)}{d\lambda} \left[ \frac{d^2q_l(\lambda_0)}{d\lambda^2} \right]^{-1}. \quad (15.10)$$

Оскільки сигнальна функція  $q_s(\lambda)$  в точці  $\lambda = \lambda_0$  досягає максимуму, тому

$$\frac{dq_s(\lambda_0)}{d\lambda} = 0. \quad (15.11)$$

Похідна шумової функції  $\frac{dq_{ln}(\lambda_0)}{d\lambda}$  носить випадковий характер.

Враховуючи, що  $q_s(\lambda) \gg q_{ln}(\lambda)$  і те, що  $|\frac{d^2 q_s(\lambda_0)}{d\lambda^2}|$  досягає максимального значення, нехтуємо шумовою складовою  $\frac{d^2 q_{ln}(\lambda_0)}{d\lambda^2}$  і будемо вважати

$$\frac{d^2 q_l(\lambda_0)}{d\lambda^2} \approx \frac{d^2 q_s(\lambda_0)}{d\lambda^2}. \quad (15.12)$$

Тоді

$$\varepsilon = -\frac{dq_{ln}(\lambda_0)}{d\lambda} \left[ \frac{d^2 q_s(\lambda_0)}{d\lambda^2} \right]^{-1}. \quad (15.13)$$

Умовне математичне очікування похибки оцінки

$$\mathbf{M}[\varepsilon | \lambda_0] = -\frac{d\mathbf{M}[q_n(\lambda_0) | \lambda_0]}{d\lambda} \left[ \frac{d^2 q_s(\lambda_0)}{d\lambda^2} \right]^{-1} = 0, \quad (15.14)$$

Оскільки  $\mathbf{M}[q_n(\lambda_0) | \lambda_0] = 0$ . Тобто оцінка  $\hat{\lambda}_{МП}$  - *ε незміщеною*.

Визначимо умовну дисперсію похибки оцінки  $\sigma_\varepsilon^2$ , яка характеризує точність оцінки:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \mathbf{M}[\varepsilon^2 | \lambda_0] = \mathbf{M}\left[\left(\frac{dq_n(\lambda_0)}{d\lambda}\right)^2 | \lambda_0\right] \left[ \frac{d^2 q_s(\lambda_0)}{d\lambda^2} \right]^{-2} = \sigma_{q'_n}^2 \left[ \frac{d^2 q_s(\lambda_0)}{d\lambda^2} \right]^{-2}. \quad (15.15)$$

Щоб знайти  $\sigma_{q'_n}^2$  визначимо функцію кореляції похідної  $\frac{dq_n(\lambda)}{d\lambda}$

$$K_{q'_n}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{M}\left[\frac{dq_n(\lambda_1)}{d\lambda_1} \frac{dq_n(\lambda_2)}{d\lambda_2}\right] = \frac{\partial^2 \mathbf{M}[q_n(\lambda_1)q_n(\lambda_2)]}{d\lambda_1 d\lambda_2} = \frac{\partial^2 K_{q_n}(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}. \quad (15.16)$$

У разі стаціонарного випадкового процесу

$$K_{q_n}(\lambda_1, \lambda_2) = K_{q_n}(\lambda_2 - \lambda_1) = K_{q_n}(\Delta). \quad (15.17)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_1} = -1; \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_2} = 1, \quad (15.18)$$

вираз (15.16) перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} K_{q'_n}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\partial^2 K_{q_n}(\lambda_2 - \lambda_1)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[ \frac{\partial K_{q_n}(\Delta)}{\partial \lambda_2} \right] = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[ \frac{dK_{q_n}(\Delta)}{d\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_2} \right] = \\ &= \frac{d^2 K_{q_n}(\Delta)}{d\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_1} = \frac{d^2 K_{q_n}(\Delta)}{d\Delta^2} (-1) = -\frac{d^2 K_{q_n}(\Delta)}{d\Delta^2}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

На основі (15.19) отримаємо, що дисперсія  $\sigma_{q'_n}^2$  дорівнює

$$\sigma_{q'_n}^2 = K_{q'_n}(\lambda_0, \lambda_0) = -\frac{d^2 K_{q_n}(\lambda_0 - \lambda_0)}{d\lambda^2} = -\frac{d^2 K_{q_n}(0)}{d\lambda^2}. \quad (15.20)$$

Враховуючи, що кореляційна функція шумової складової дорівнює

$$K_{q_n}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{N_0 T}{2} K_s(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{N_0 T}{2} K_s(\Delta) = \frac{N_0}{2} q_s(\Delta + \lambda_0), \quad (15.21)$$

отримаємо

$$\sigma_{q_n}^2 = -\frac{N_0 T}{2} \frac{d^2 K_s(0)}{d\lambda^2} = -\frac{N_0}{2} \frac{d^2 q_s(\lambda_0)}{d\lambda^2}. \quad (15.22)$$

Таким чином, на основі (15.15), (15.21) дисперсія похибки оцінки  $\sigma_\varepsilon^2$  розраховується за формулою

$$\sigma_\varepsilon^2 = -\frac{N_0}{2} \left[ \frac{d^2 q_s(\lambda_0)}{d\lambda^2} \right]^{-1}. \quad (15.23)$$

На рис. 15.3 наведено вигляд сигнальної функції та її похідних.

Кореляційна функція  $q_s(\lambda)$  пропорційна кореляційній функції сигналу. Чим вужча кореляційна функція  $K_S(\lambda)$ , тим більше у неї кривизна при тій же дисперсії  $\sigma_s^2$  і тим вище точність визначення оцінки параметра. Точність також підвищується при зменшенні спектральної щільності шуму.

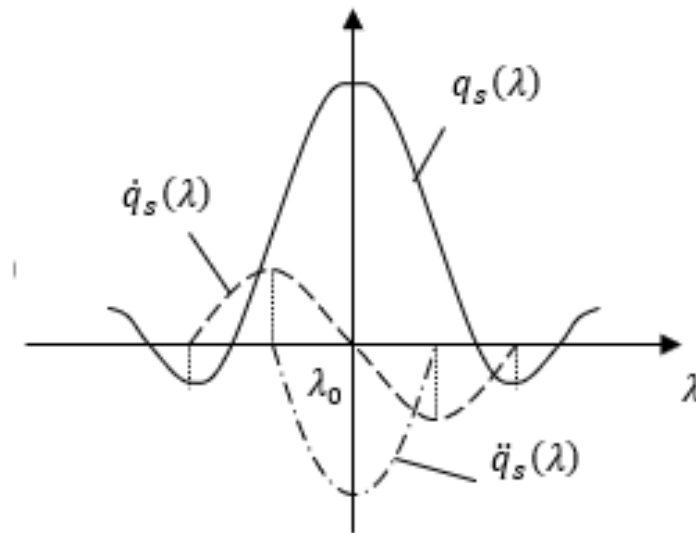


Рис. 15.3 Вигляд сигнальної функції та її похідних

### Приклад

Для сигналу гаусівської форми (дзвіновидного імпульсу) рис. 15.4

$$s(t) = Ae^{-at^2}, t \in [-\infty, \infty]$$

визначити точність максимально правдоподібної оцінки затримки  $\hat{\tau}$ , а також максимальне значення сигнальної складової кореляційного інтегралу.

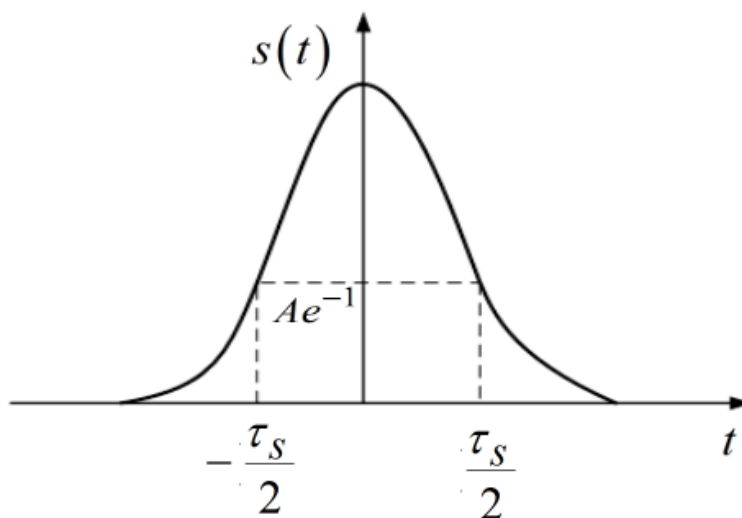


Рис. 15.4 Дзвіновидний імпульс

Розв'язок.

Спочатку визначимо довжину сигналу. Довжина дзвіновидного імпульсу визначається на рівні  $e^{-1}$  рис. 15.4. Вирішивши рівняння

$$Ae^{-a\left(\frac{\tau_s}{2}\right)^2} = Ae^{-1},$$

отримаємо

$$\tau_s = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Сигнал на вході описується рівнянням

$$z(t) = s(t - \tau_0) + n(t).$$

Сигнальна складова кореляційного інтегралу дорівнює

$$q_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau_0)s(t - \tau)dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-\tau_0)^2} e^{-a(t-\tau)^2} dt.$$

Перша похідна сигнальної складової кореляційного інтегралу має вигляд

$$q'_s(\tau) = A^2 2a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-\tau_0)^2} (t-\tau) e^{-a(t-\tau)^2} dt.$$

Друга похідна сигнальної складової кореляційного інтегралу має вигляд

$$q''_s(\tau) = -A^2 2a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-\tau_0)^2} e^{-a(t-\tau)^2} dt + \\ + A^2 4a^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t-\tau_0)^2} (t-\tau)^2 e^{-a(t-\tau)^2} dt.$$

Друга похідна сигнальної складової при  $\tau = \tau_0$  дорівнює

$$q''_s(\tau_0) = -A^2 2a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a(t-\tau_0)^2} dt + A^2 4a^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a(t-\tau_0)^2} (t-\tau_0)^2 dt.$$

Використаємо відомі табличні інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}; \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{32a^3}}.$$

Отримаємо

$$q''_s(\tau_0) = -A^2 2a \sqrt{\frac{\pi}{2a}} + A^2 4a^2 \sqrt{\frac{\pi}{32a^3}} = -A^2 \sqrt{\frac{\pi a}{2}}.$$

На основі (15.23) дисперсія похибки максимально правдоподібної оцінки затримки  $\hat{\tau}$  визначається за формулою

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = -\frac{N_0}{2} \left[ \frac{d^2 q_s(\tau_0)}{d\tau^2} \right]^{-1} = \frac{N_0}{A^2 \sqrt{2\pi a}} = \frac{N_0 \tau_s}{2A^2 \sqrt{2\pi}}$$

Чим вузчий імпульс, тим менше дисперсія похибки оцінки. При збільшенні амплітуди імпульсу дисперсія похибки оцінки зменшується.

Максимальне значення сигнальної складової кореляційного інтегралу дорівнює енергії сигналу і розраховується за формулою

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at} dt = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a}} = \frac{A^2}{2} \tau_s \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Енергія сигналу визначається амплітудою і довжиною імпульсу.

### 15.3. Дисперсія помилки оцінки частоти радіоімпульсу

Сигналом  $s(t, \lambda)$  є радіоімпульс з невідомою частотою  $\lambda = \omega$

$$s(t, \omega) = U_m \cos \omega t, \quad (15.24)$$

Довжина імпульсу дорівнює  $\tau = T$ . Визначимо помилку у визначенні частоти радіоімпульсу.

Сигнальна функція описується виразом

$$q_s(\omega) = \int_0^T U_m \cos \omega_0 t U_m \cos \omega t dt. \quad (15.25)$$

Перша похідна сигнальної функції дорівнює

$$\frac{dq_s(\omega)}{d\omega} = - \int_0^T U_m^2 t \cos \omega_0 t \sin \omega t dt. \quad (15.26)$$

Друга похідна сигнальної функції дорівнює

$$\frac{d^2 q_s(\omega)}{d\omega^2} = - \int_0^T U_m^2 t^2 \cos \omega_0 t \cos \omega t dt. \quad (15.27)$$

При  $\omega = \omega_0$  значення сигнальної функції дорівнює

$$\frac{d^2 q_s(\omega_0)}{d\omega^2} = -U_m^2 \int_0^T t^2 \cos^2 \omega_0 t dt = -U_m^2 \frac{T^3}{3}. \quad (15.28)$$

Енергія сигналу

$$E_s = \frac{U_m^2 T}{2}. \quad (15.29)$$

З врахуванням (15.29) отримаємо

$$\frac{d^2 q_s(\omega_0)}{d\omega^2} = -\frac{2E_s T^2}{3}. \quad (15.30)$$

Дисперсія похибки оцінки  $\sigma_\varepsilon^2$  розраховується за формулою

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{3N_0}{4E_s T^2} = \frac{3}{2h^2 T^2}. \quad (15.31)$$

Помилка зменшується зі збільшенням ВСШ  $h^2$  і тривалістю радіоімпульсу  $T$ .

#### 15.4. Оптимальне оцінювання початкової фази радіоімпульсу

Сигналом  $s(t, \lambda)$  є радіоімпульс з невідомою початковою фазою  $\lambda = \varphi$

$$s(t, \varphi) = U_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (15.32)$$

Довжина імпульсу дорівнює  $T$ .

Синтезуємо оптимальний алгоритм оцінювання початкової фази  $\varphi$  радіоімпульсу за критерієм максимальної правдоподібності. Вирішальне правило оцінювання описується виразом (15.4). Функція  $q_l(\varphi)$  має вигляд

$$q_l(\varphi) = \int_0^T z_l(t) s(t, \varphi) dt = \int_0^T z_l(t) U_m \cos(\omega t + \varphi) dt. \quad (15.33)$$

Оцінки  $\hat{\varphi}_{lML}$  може бути знайдена шляхом вирішення рівняння

$$\frac{dq_l(\hat{\varphi}_{lML})}{d\varphi} = -\int_0^T z_l(t) U_m \sin(\omega t + \hat{\varphi}_{lML}) dt = 0. \quad (15.34)$$

Виконаємо перетворення

$$\int_0^T z_l(t) U_m (\sin \omega t \cos \hat{\varphi}_{lML} + \cos \omega t \sin \hat{\varphi}_{lML}) dt = 0; \quad (15.35)$$

$$\cos \hat{\varphi}_{lML} \int_0^T z_l(t) \sin \omega t dt = -\sin \hat{\varphi}_{lML} \int_0^T z_l(t) \cos \omega t dt; \quad (15.36)$$

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi}_{lML} = -\frac{\int_0^T z_l(t) \sin \omega t dt}{\int_0^T z_l(t) \cos \omega t dt}. \quad (15.37)$$

Відповідно оптимальний алгоритм оцінювання початкової фази має вигляд

$$\hat{\varphi}_{lML} = -\operatorname{arctg} \frac{\int_0^T z_l(t) \sin \omega t dt}{\int_0^T z_l(t) \cos \omega t dt}. \quad (15.38)$$

Структурна схема пристрою оптимального оцінювання початкової фази має вигляд рис.15.5.

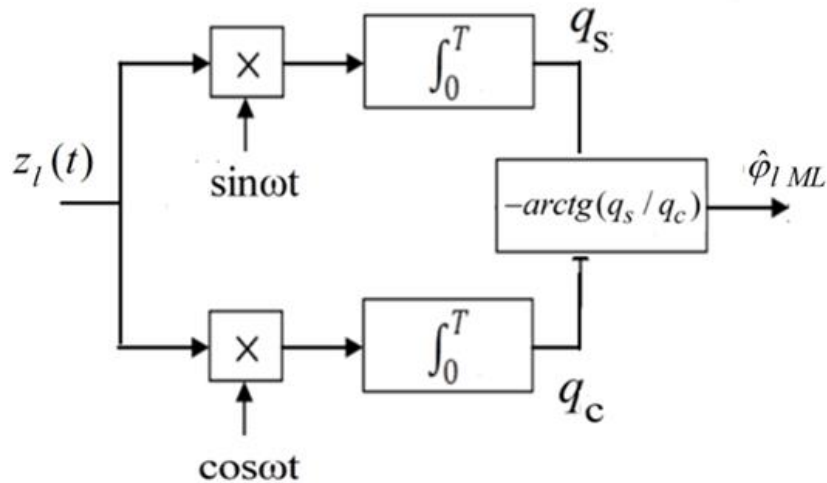


Рис.15.5 Пристрій оптимального оцінювання початкової фази сигналу

Визначимо помилку у визначенні початкової фази радіоімпульсу. Сигнальна функція описується виразом

$$q_s(\varphi) = \int_0^T U_m \cos(\omega t + \varphi_0) U_m \cos(\omega t + \varphi) dt . \quad (15.39)$$

Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} q_s(\varphi) &= \frac{U_m^2 T}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\varphi_0 - \varphi) dt + \frac{U_m^2 T}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_0 + \varphi) dt = \\ &= \frac{U_m^2 T}{2} \cos(\varphi_0 - \varphi) = E_s \cos(\varphi_0 - \varphi) . \end{aligned} \quad (15.40)$$

Перша похідна сигнальної функції дорівнює

$$\frac{dq_s(\varphi)}{d\varphi} = -E_s \sin(\varphi_0 - \varphi) . \quad (15.41)$$

Друга похідна сигнальної функції дорівнює

$$\frac{d^2 q_s(\varphi)}{d\varphi^2} = -E_s \cos(\varphi_0 - \varphi) . \quad (15.42)$$

При  $\varphi = \varphi_0$  значення сигнальної функції дорівнює

$$\frac{d^2 q_s(\varphi_0)}{d\varphi^2} = -E_s \quad (15.43)$$

Дисперсія похибки оцінки  $\sigma_\varepsilon^2$  розраховується за формулою

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{N_0}{2E_s} = \frac{1}{h^2}. \quad (15.44)$$

Дисперсія помилки оцінки початкової фази сигналу обернено пропорційна ВШ  $h^2$ .

### Питання до самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі оптимального оцінювання неенергетичних параметрів сигналів.
2. Запишіть функціонал правдоподібності для неенергетичного параметра сигналу в гаусівському неперервному каналі.
3. Запишіть вирішальне правило оцінювання за критерієм максимальної правдоподібності і поясніть його складові.
4. Надайте загальну структурну схему пристрою оцінки неенергетичного параметра сигналу.
5. При яких обмеженнях отримується формула для дисперсії помилки оцінювання неенергетичного параметра.
6. Запишіть формулу для дисперсії помилки оцінювання неенергетичного параметра.
7. Розрахуйте дисперсію помилки оцінки частоти радіоімпульсу.
8. Сформулюйте постановку задачі оптимального оцінювання початкової фази радіоімпульсу.
9. Запишіть вирішальне правило оцінювання початкової фази радіоімпульсу і поясніть його складові.
10. Надайте загальну структурну схему пристрою оцінювання початкової фази радіоімпульсу.
11. Оптимальне оцінювання початкової фази радіоімпульсу.
12. Розрахуйте дисперсію помилки оцінки початкової фази радіоімпульсу.

## РОЗДІЛ 5. МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ СИГНАЛІВ

### Лекція №16. Марківські моделі повідомлень

16.1. Постановка задачі фільтрації сигналів.

16.2. Марківська модель повідомлення в безперервному часі.

16.3. Марківська модель повідомлення в дискретному часі.

#### 16.1. Постановка задачі фільтрації сигналів

Фільтрація відноситься до найбільш складних задач оптимального прийому. На відміну від задачі оцінки параметра сигналу, який є незмінним на інтервалі спостережень, при фільтрації параметр, що оцінюється, є функцією часу і розглядається, як випадковий процес. Він називається повідомленням.

Постановка задачі фільтрації сигналів має наступний вигляд. Нехай невідомий параметр сигналу залежить від часу і являє собою випадковий процес з відомими статистичними характеристиками. Сигнал  $z(t)$  на вході приймача має вигляд

$$z(t) = s(t, \lambda(t)) + n(t), \quad (16.1)$$

де  $n(t)$  – ГБШ з кореляційною функцією  $K_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ .

*Необхідно у відповідності до визначеного критерію оптимальності отримати оцінку  $\hat{\lambda}(t)$  реалізації повідомлення  $\lambda(t) = \lambda_l(t)$ , яка знаходиться в реалізації суміші  $z(t) = z_l(t)$ .*

Розрізняють три основних типи задач визначення оцінки  $\hat{\lambda}(t + \tau)$  в момент часу  $t + \tau$  при наявності реалізації спостереження на інтервалі  $[0, t]$ :

1. При  $\tau = 0$  маємо звичайну задачу фільтрації в поточному часі.
2. При  $\tau > 0$  - задачу фільтрації з упередженням або задачу екстраполяції (прогнозування).
3. При  $\tau < 0$  - задачу фільтрації із затримкою або інтерполяції.

В подальшому переважно буде вивчатися задача фільтрації в поточному часі.

Так само, як і при розгляді задачі оцінювання невідомого параметру сигналу найбільш узагальненим критерієм при вирішенні задачі фільтрації є критерій мінімуму апостеріорного ризику. Так само, як і при вирішенні задачі оцінювання невідомого параметру сигналу, розглянемо його на прикладі задачі фільтрації у дискретному часі, адекватної цифровим ЕОМ. При дискретному спостереженні виконується дискретизація реалізації сигналу  $z_l(t)$  в дискретні моменти часу з шагом  $\Delta$ . Тому моделлю результатів вимірювання, отриманих до моменту  $t_k$ , є випадковий вектор  $(z(t_1), \dots, z(t_k))$ . У випробуванні випадковий вектор спостереження приймає значення  $(z(t_1), \dots, z(t_k)) = (z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ . Критерій мінімуму апостеріорного ризику має вигляд

$$\min_{\hat{\lambda}(t_k)} \bar{C}(\hat{\lambda}(t_k) | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)), \quad (16.2)$$

де  $\bar{C}(\hat{\lambda}(t) | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$  - критеріальна функція, яка визначається за формулою

$$\begin{aligned} \bar{C}(\hat{\lambda}(t_k) | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) &= \mathbf{M}[C(\lambda(t_k), \hat{\lambda}(t_k) | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda_k, \hat{\lambda}(t_k)) f(\lambda_k, t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) d\lambda_k; \end{aligned} \quad (16.3)$$

$f(\lambda_k, t | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$  - апостеріорна щільність ймовірності випадкового процесу  $\lambda(t_k)$  в перерізі  $t_k$ , за умови  $(z(t_1), \dots, z(t_k)) = (z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ .  $C(\lambda_k, \hat{\lambda}(t_k))$  - функція втрат;  $\lambda_k$  - значення випадкового процесу  $\lambda(t_k)$  в часовому перерізі  $t_k$ .

Апостеріорний ризик (16.3) дорівнює середньому значенню функції втрат при умові  $(z(t_1), \dots, z(t_k)) = (z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ , якщо в якості оцінки береться  $\hat{\lambda}(t_k)$ . Вирішальне правило знаходження оцінки можна представити у вигляді

$$\hat{\lambda}_{lAR}(t_k) = \arg \min_{\hat{\lambda}(t_k)} \bar{C}(\hat{\lambda}(t_k) | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)). \quad (16.4)$$

Найбільше використання при вирішенні задачі фільтрації знаходить квадратична функція втрат

$$C(\lambda(t_k), \hat{\lambda}(t_k)) = (\hat{\lambda}(t_k) - \lambda(t_k))^2 \quad . \quad (16.5)$$

де  $\varepsilon(t_k) = \hat{\lambda}(t_k) - \lambda(t_k)$  - похибка оцінки.

Оцінка  $\hat{\lambda}_{MSE}(t_k)$  являє собою математичне очікування  $m_\lambda(t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$  апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda_k, t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$

$$\hat{\lambda}_{MSE}(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_k f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) d\lambda_k = m_\lambda(t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)). \quad (16.6)$$

Мінімальне значення середнього квадрату похибки оцінки дорівнює дисперсії апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda_k, t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2\min}(\hat{\lambda}(t_k) | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) &= \mathbf{M}[(\hat{\lambda}_{MSE}(t_k) - \lambda(t_k))^2 | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\lambda}_{MSE}(t_k) - \lambda_k)^2 f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) d\lambda_k = \sigma_\lambda^2(t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)). \end{aligned} \quad (16.7)$$

**Таким чином, якщо відома апостеріорна щільність ймовірності  $f(\lambda_k, t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ , то на її основі можуть бути знайдені як оцінка  $\hat{\lambda}_{MSE}(t_k)$ , так і її точна характеристика - середній квадрат похибки оцінки  $\sigma_\lambda^2(t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ .**

Оцінки  $\hat{\lambda}_{AR}(t_k)$ ,  $\hat{\lambda}_{MSE}(t_k)$  залежать від вимірної реалізації і мають випадковий характер. Вони є реалізаціями випадкових величин  $\hat{\lambda}_{AR}(t_k)$ ,  $\hat{\lambda}_{MSE}(t_k)$ .

Частковим випадком критерію мінімуму апостеріорного ризику при простій функції втрат є критерій максимуму апостеріорної щільності ймовірності. Таким чином, вважається, що найбільш повним рішенням задачі оптимальної фільтрації є визначення апостеріорної щільності ймовірності повідомлення  $\lambda(t_k)$  для кожного моменту часу  $t_k$ . На підставі отриманої апостеріорної щільності ймовірності можуть бути знайдені його оцінки, які задовольняють обраним критеріям оптимальності.

Як і в інших задачах теорії оптимального прийому, при визначенні оцінки  $\hat{\lambda}(t)$  використовуються не тільки результати спостережень, але ж і апіорні дані про повідомлення, що передається. При вирішенні задачі фільтрації стаціонарних гаусівських процесів в якості апіорних даних використовуються кореляційні функції або спектральні щільності потужності повідомлення  $\lambda(t)$ . При лінійному рівнянні спостереження така модель призводить до алгоритму вінерівської фільтрації.

Найбільш узагальненим є підхід, в якому апіорна інформація про повідомлення надається моделями у вигляді стохастичних диференціальних або різницевих рівнянь. Такі моделі призводять до марківських випадкових процесів в неперервному і дискретному часі.

## 16.2. Марківська модель повідомлення в неперервному часі

Для опису широкого класу повідомлень  $\lambda(t)$  може бути використана математична модель випадкових процесів у вигляді стохастичного диференціального рівняння виду

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \alpha(t, \lambda(t)) + n_\lambda(t), \quad (16.8)$$

де  $n_\lambda(t)$  - БГШ з кореляційною функцією  $K_{n_\lambda}(\tau) = \frac{N_\lambda}{2} \delta(\tau)$ ;  $\alpha(t, \lambda(t))$  - відома нелінійна функція.

Відомо, що рівняння (16.8) є математичною моделлю марківського процесу в неперервному часі. Умовна щільність ймовірності марківського процесу залежить тільки від значень випадкового процесу в попередній момент часу  $t_{k-1}$  і не залежить від інших значень в більш ранні моменти часу  $t_{k-2}, t_{k-3}, \dots$

$$f(\lambda_k, t_k | \lambda_{k-1}, \lambda_{k-2}, \dots, \lambda_1, t_{k-1}, t_{k-2}, \dots, t_1) = f(\lambda_k, t_k | \lambda_{k-1}, t_{k-1}). \quad (16.9)$$

Як приклад, розглянемо простий марківський процес, який наводить широке використання для опису багатьох повідомлень. Відомо, що такий випадковий процес можна отримати на виході  $RC$ -ланцюга, подавши на її вхід БГШ. Отримаємо стохастичне диференціальне рівняння, яке описує випадковий процес на виході  $RC$ -ланцюга рис.16.1.

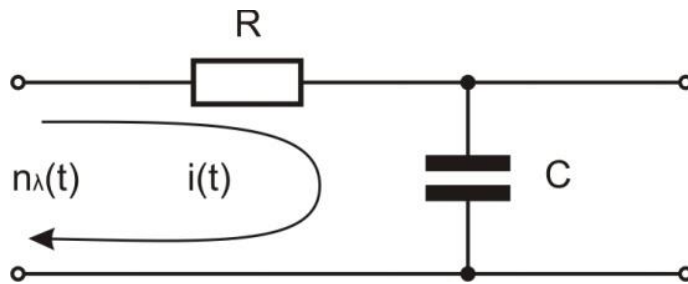


Рис. 16.1 Схема  $RC$ -ланцюга

Для схеми рис.16.1 згідно другого рівняння Кірхгофа отримаємо

$$n_\lambda(t) = i(t)R + u_c(t). \quad (16.10)$$

Враховуючи залежність

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}, \quad (16.11)$$

отримаємо

$$n_\lambda(t) = RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t). \quad (16.12)$$

Введемо позначення  $\lambda(t) = u_c(t)$  і отримаємо

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t) + \alpha n_\lambda(t), \quad (16.13)$$

де  $\alpha = (RC)^{-1}$  - відома константа.

Знайдемо коефіцієнт передачі системи  $K(j\omega)$ . Застосувавши перетворення Лапласа, отримаємо

$$p\lambda(p) + \alpha\lambda(p) = \alpha n_\lambda(p), \quad (16.14)$$

де  $p = j\omega$ .

Тоді коефіцієнт передачі має вигляд

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\alpha}. \quad (16.15)$$

Спектральна щільність потужності повідомлення має вигляд

$$S_\lambda(\omega) = \frac{N_\lambda}{2} |K(j\omega)|^2 = \frac{N_\lambda}{2} \frac{1}{1 + (\omega/\alpha)^2}. \quad (16.16)$$

З використанням перетворення Вінера-Хінчина визначимо кореляційну функцію

$$K_\lambda(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\lambda(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_\lambda\alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|} = \sigma_\lambda^2 e^{-\alpha|\tau|}. \quad (16.17)$$

Параметр  $\alpha$  дорівнює значенню частоти на рівні половини потужності. Тому дисперсія повідомлення збільшується при збільшенні спектральної щільності потужності шуму збудження і при збільшенні смуги зрізу фільтра.

### 16.3. Марківські моделі повідомлень в дискретному часі

У зв'язку з широким застосуванням цифрових ЕОМ, при вирішенні задач обробки сигналів виникає необхідність використання моделей повідомлень в дискретному часі, адекватних цифровим ЕОМ. Якщо маємо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = f(t), \quad (16.18)$$

то його рішення можна записати у вигляді

$$y(t) = y(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (16.19)$$

Застосувавши дане рішення для рівняння (13), отримаємо

$$\lambda(t) = \lambda(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \alpha n_\lambda(\tau) d\tau. \quad (16.20)$$

Введемо позначення  $t_0 = t_{k-1} = k - 1$ ,  $t = t_k = k$ . Отримаємо

$$\lambda(t_k) = \beta \lambda(t_{k-1}) + \omega(t_k), \quad (16.21)$$

де  $\beta$  - скалярний коефіцієнт, який визначається за формулою

$$\beta = e^{-\alpha(t_k - t_{k-1})}; \quad (16.22)$$

$\omega(t_k)$  - дискретний гаусівський шум збудження

$$\omega(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-2\alpha(t-\tau)} \alpha n_\lambda(\tau) d\tau. \quad (16.23)$$

Відліки шуму  $\omega(t_k)$  є некорельованими, оскільки формуються шляхом інтегрування незалежних реалізацій БГШ  $n_\lambda(\tau)$ , і він є дискретним БГШ. Математичне очікування  $w(t_k)$  дорівнює нулю. Визначимо його дисперсію

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2 &= \mathbf{M}[\omega^2(t_k)] = \mathbf{M}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-\alpha(t_k-\tau_1)} \alpha n_\lambda(\tau_1) e^{-\alpha(t_k+\tau_2)} \alpha n_\lambda(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right] = \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-2\alpha t_k + \alpha(\tau_1 + \tau_2)} \alpha^2 \mathbf{M}[n_\lambda(\tau_1) n_\lambda(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \frac{N_\lambda}{2} \alpha^2 e^{-2\alpha t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{2\alpha \tau_1} d\tau_1 = \frac{N_{0\lambda}}{2} \alpha e^{-2\alpha t_k} (e^{2\alpha t_k} - e^{-2\alpha t_{k-1}}) = \\
&= \frac{N_\lambda}{4} \alpha (1 - e^{-2\alpha(t_k - t_{k-1})}) = \sigma_\lambda^2 (1 - \beta^2). \tag{16.24}
\end{aligned}$$

Рівняння (16.21) називається стохастичним лінійним різницеvim рівнянням першого порядку. На основі моделі (16.21) формується марківська скалярна гаусівська послідовність (Лекція 3). Схема пристрою, що формує марківську послідовність  $\lambda(t_k)$ , показана на рис. 16.2. Він представляє собою рекурсивний цифровий фільтр першого порядку, який включає суматор, підсилювач з коефіцієнтом  $\beta$  і елемент затримки. Цей цифровий фільтр є аналогом *RC*-фільтра нижніх частот рис. 16.1.

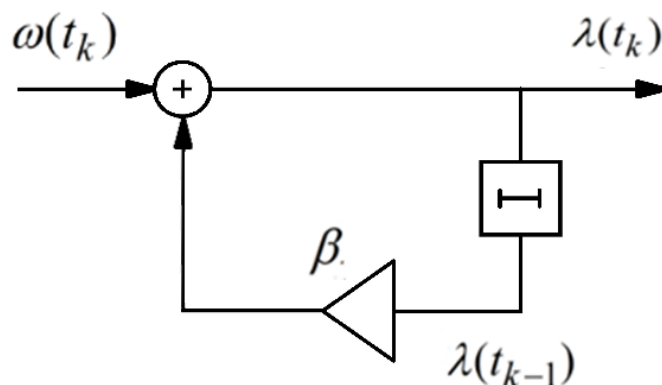


Рис. 16.2 Схема формуючого фільтра

Кореляційна функція повідомлення  $\lambda(t_k)$ , що описується моделлю (16.21), має вигляд (Лекція 3)

$$K_{\lambda}(k\Delta) = \sigma_{\lambda}^2 \beta^{|k|}, \quad (16.25)$$

де  $\Delta = t_k - t_{k-1}$  - рівномірний крок дискретизації повідомлення  $\lambda(t_k)$  у часі.

### Питання до самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі оптимальної фільтрації сигналів.
2. Запишіть критерій мінімуму апостеріорного ризику щодо задачі оптимальної фільтрації сигналів.
3. Запишіть критерій мінімуму середнього квадрату помилки щодо задачі оптимальної фільтрації сигналів.
4. Поясніть зв'язок характеристик оцінки за критерієм мінімуму середнього квадрату помилки з параметрами апостеріорної щільності ймовірності.
5. Запишіть умовну щільність ймовірності марківського процесу.
6. Запишіть марківську нелінійну модель спостереження в неперервному часі.
7. Запишіть марківську лінійну модель спостереження в неперервному часі, яка описує випадковий процес на виході  $RC$ -ланцюга.
8. Запишіть спектральну щільність потужності і кореляційну функцію марківського процесу.
9. Запишіть марківську лінійну модель спостереження в дискретному часі.
10. Наведіть структурну схему формуючого фільтра марківської послідовності.
11. Запишіть кореляційну функцію марківської послідовності.

## Лекція № 17. Оптимальна фільтрація скалярного повідомлення в дискретному часі

17.1. Оптимальна нелінійна фільтрація скалярного повідомлення в дискретному часі.

17.2. Оптимальна лінійна фільтрація скалярного повідомлення в дискретному часі.

### 17.1. Оптимальна нелінійна фільтрація скалярного повідомлення в дискретному часі

У загальному випадку повідомлення описується моделлю марківської послідовності у вигляді стохастичного нелінійного різницевого рівняння першого порядку

$$\lambda(t_k) = \beta(\lambda(t_{k-1})) + \omega(t_k), \quad (17.1)$$

де  $\beta(\lambda(t_{k-1}))$  - нелінійна функція аргументу  $\lambda(t_{k-1})$ ;  $\omega(t_k)$  - дискретний БГШ  $N(0, \sigma_\omega^2)$ .

Нелінійне рівняння спостереження описується виразом

$$z(t_k) = h(\lambda(t_k)) + n(t_k), \quad (17.2)$$

де  $h(\lambda(t_k))$  - нелінійна функція аргументу  $\lambda(t_k)$ ;  $n(t_k)$  - дискретний БГШ  $N(0, \sigma_n^2)$ .

Отриманий набір результатів спостереження (вибірка) на  $k$ -му кроці представимо у вигляді вектору  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ , який є реалізацією випадкового вектора спостережень  $(z(t_1), \dots, z(t_k))$ .

Апостеріорну щільність ймовірності випадкового процесу  $\lambda(t_k)$  в момент часу  $t_k$  за умови, що отримана реалізація спостереження  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ , будемо позначати  $f(\lambda_k, t_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) = f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ . В подальшому в позначеннях щільностей ймовірності моменти часу відображатися не будуть для зменшення обсягу позначень. Як вже відмічалось у попередній

лекції, якщо відома апостеріорна щільність ймовірності  $f_{ps}(\lambda_k)$ , то на її основі можуть бути знайдені оцінки за різними критеріями оптимальності.

Отримаємо алгоритм для розрахунку  $f(\lambda_k | z_1, \dots, z_k)$  умовної щільності ймовірності в загальному вигляді при умові, що значення випадкового вектора спостережень  $(z_1, \dots, z_k)$  є відомим. Після цього для розрахунку апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$  в отриманому алгоритмі використаємо отриману реалізацію спостереження  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ .

Згідно теореми множення ймовірностей, представимо сумісну умовну щільність ймовірності  $f(\lambda_0, \dots, \lambda_k | z_1, \dots, z_k)$  у вигляді

$$f(\lambda_0, \dots, \lambda_k | z_1, \dots, z_k) = \frac{f(\lambda_0, \dots, \lambda_k) f(z_1, \dots, z_k | \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{f(z_1, \dots, z_k)}. \quad (17.3)$$

На підставі марківської властивості процесу  $\lambda(t_k)$  спільну щільність ймовірності  $f(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$  можна представити у вигляді (Лекція 3)

$$f(\lambda_0, \dots, \lambda_k) = f(\lambda_0) \prod_{i=1}^k f(\lambda_i | \lambda_{i-1}). \quad (17.4)$$

За умови, коли помилка вимірювання в рівнянні спостереження являється дискретним БГШ, умовну щільність ймовірності  $f(z_1, \dots, z_k | \lambda_1, \dots, \lambda_k)$  можна представити у вигляді (Лекція 8) :

$$f(z_1, \dots, z_k | \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \prod_{j=1}^k f(z_j | \lambda_j). \quad (17.5)$$

Підставимо вирази (17.4), (17.5) в формулу (17.3) і проінтегруємо по  $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ :

$$f(\lambda_k | z_1, \dots, z_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda_0) \prod_{i=1}^k f(\lambda_i | \lambda_{i-1}) \prod_{j=1}^k f(z_j | \lambda_j) d\lambda_0 \dots d\lambda_{k-1}}{f(z_1, \dots, z_k)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(z_k | \lambda_k)}{f(z_k | z_1, \dots, z_{k-1})} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_k | \lambda_{k-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda_0) \prod_{i=1}^{k-1} f(\lambda_i | \lambda_{i-1}) \prod_{j=1}^{k-1} f(z_j | \lambda_j) d\lambda_0 \dots d\lambda_{k-2}}{f(z_1, \dots, z_{k-1})} d\lambda_{k-1} = \\
&= \frac{f(z_k | \lambda_k)}{f(z_k | z_1, \dots, z_{k-1})} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_k | \lambda_{k-1}) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1} | z_1, \dots, z_{k-1}) d\lambda_0 \dots d\lambda_{k-2} d\lambda_{k-1}. \quad (17.6)
\end{aligned}$$

Виконавши інтегрування щільності ймовірності  $f(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1} | z_1, \dots, z_{k-1})$  за змінними  $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-2}$ , отримаємо

$$f(\lambda_k | z_1, \dots, z_k) = \frac{f(z_k / \lambda_k) \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_k / \lambda_{k-1}) f(\lambda_{k-1} / z_1, \dots, z_{k-1}) d\lambda_{k-1}}{f(z_k / z_1, \dots, z_{k-1})}. \quad (17.7)$$

Рівняння (17.7) пов'язує умовні щільності ймовірності  $f(\lambda_k | z_1, \dots, z_k)$  і  $f(\lambda_{k-1} | z_1, \dots, z_{k-1})$  на  $k$ -му і  $k-1$ -му кроках. Умовна щільність ймовірності  $f(\lambda_k / \lambda_{k-1})$  розраховується на основі рівняння (17.1) і є щільністю ймовірності переходу марківської послідовності  $\lambda(t_k)$ . Умовна щільність ймовірності  $f(z_k / \lambda_k)$  розраховується на основі рівняння (17.2). Умовна щільність ймовірності  $f(\lambda_{k-1} | \mathbf{z}_{k-1})$  розраховується на попередньому  $k-1$ -му кроці.

Для визначення умовної щільності ймовірності  $f(z_k / z_1, \dots, z_{k-1})$  перепишемо рівняння (17.7) у вигляді

$$\begin{aligned}
&f(z_k / z_1, \dots, z_{k-1}) f(\lambda_k | z_1, \dots, z_k) = \\
&= f(z_k / \lambda_k) \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_k / \lambda_{k-1}) f(\lambda_{k-1} / z_1, \dots, z_{k-1}) d\lambda_{k-1}. \quad (17.8)
\end{aligned}$$

Інтегруючи обидві частини рівняння (17.8) за  $\lambda_k$ , отримаємо

$$f(z_k / z_1, \dots, z_{k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z_k / \lambda_k) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_k / \lambda_{k-1}) f(\lambda_{k-1} / z_1, \dots, z_{k-1}) d\lambda_{k-1} d\lambda_k \quad (17.9)$$

Таким чином, всі щільності ймовірності, що входять в праву частину рівняння (17.7), є відомими. Отриманим відомим значенням вектору спостереження  $(z(t_1), \dots, z(t_k))$  є його реалізація  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ . Підставивши реалізацію  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$  в формулу (17.7), отримаємо рівняння для розрахунку апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$  у вигляді

$$f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) = k^{-1} L(\lambda_k) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_k | \lambda_{k-1}) f(\lambda_{k-1} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) d\lambda_{k-1}, \quad (17.10)$$

де  $L(\lambda_k) = f(z_l(t_k) / \lambda_k)$  - функція правдоподібності відліку випадкового процесу  $\lambda(t_k) = \lambda_k$ ;  $k = f(z_l(t_k) | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$ .

Функція правдоподібності  $L_l(\lambda_k) = f(z_l(t_k) | \lambda_k)$  залежить лише від значення відліку випадкового процесу  $\lambda(t_k) = \lambda_k$ . Після отримання реалізації  $(z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ , щільність ймовірності  $f(z_l(t_k) | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$  являється константою і виконує функцію нормуючого множника.

Рівняння (17.10) отримало назву **рівняння оптимальної нелінійної фільтрації**. Це рівняння пов'язує апостеріорні щільності ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$  і  $f(\lambda_{k-1} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$  на  $k$ -му і  $k-1$ -му кроках.

Перепишемо рівняння фільтрації (17.10) у вигляді:

$$f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1})) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_k / \lambda_{k-1}) f(\lambda_{k-1} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1})) d\lambda_{k-1}; \quad (17.11)$$

$$f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) = k^{-1} L(\lambda_k) f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1})) \quad , \quad (17.12)$$

де  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$  - умовна щільність ймовірності, яка отримала назву екстрапольована щільність ймовірності.

Рівняння (17.11) для обчислення екстрапольованої щільності ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$  має назву **алгоритм екстраполяції**. Екстрапольована щільність ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$  описує поведінку відліку повідомлення  $\lambda(t_k)$  на  $k$  - му кроці за умови, що отримані вимірювання до  $k-1$  кроку включно. За допомогою рівняння (17.12) здійснюється **корекція** екстрапольованої щільності ймовірності на основі отриманого вимірювання  $z_l(t_k)$  за допомогою функції правдоподібності  $L_l(\lambda_k) = f(z_l(t_k) | \lambda_k)$ .

Оптимальний алгоритм фільтрації (17.11), (17.12) є нелінійним і рекурентним. Для його реалізації повинні бути задані початкові умови  $f(\lambda_0)$ .

## 17.2. Оптимальна лінійна фільтрація скалярного повідомлення в дискретному часі

При лінійній фільтрації рівняння повідомлення і спостереження в дискретному часі мають вигляд

$$\lambda(t_k) = \beta(t_k)\lambda(t_{k-1}) + \omega(t_k); \quad (17.13)$$

$$z(t_k) = H(t_k)\lambda(t_k) + n(t_k), \quad (17.14)$$

де  $\beta(t_k)$ ,  $h(t_k)$  - відомі лінійні функції часу;  $\omega(t_k)$ ,  $n(t_k)$  - дискретні БГШ  $N(0, \sigma_\omega^2)$ ,  $N(0, \sigma_n^2)$  відповідно.

В якості критерію оптимальної фільтрації приймемо критерій мінімуму СКП. При гаусівській апостеріорній щільності ймовірності він тотожний критерію максимуму апостеріорної щільності ймовірності. Будемо вважати, що отримана на момент часу  $t_{k-1}$  апостеріорна щільність ймовірності є гаусівська

$$f(\lambda_{k-1} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1})) = C_1 e^{-\frac{(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_l(t_{k-1}))^2}{2\hat{R}_l(t_{k-1})}}, \quad (17.14)$$

де  $\hat{\lambda}_l(t_{k-1})$ ,  $\hat{R}_l(t_{k-1})$  - математичне очікування і дисперсія апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda_{k-1} | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$  відповідно.

Визначимо екстрапольовану щільність ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$  в момент часу  $t_k$ , яка розраховується за формулою (17.9). Модель повідомлення (17.13) описує гаусівську марківську послідовність з умовною щільністю ймовірності переходу

$$f(\lambda_k | \lambda_{k-1}) = C_2 e^{-\frac{(\lambda_k - \beta_k \lambda_{k-1})^2}{2D_\omega}}. \quad (17.15)$$

Відомо, що згортка двох гаусівських розподілів дає

$$C_3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2D_1}} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2D_2}} dx = C_4 e^{-\frac{(m_1-m_2)^2}{2(D_1+D_2)}}. \quad (17.16)$$

Покладемо

$$x = \lambda_{k-1}; m_1 = \frac{\lambda_k}{\beta(t_k)}; D_1 = \frac{D_\omega}{\beta^2(t_k)}; m_2 = \hat{\lambda}_l(t_{k-1}); D_2 = \hat{R}_l(t_{k-1}). \quad (17.17)$$

Тоді

$$m_1 - m_2 = \frac{1}{\beta(t_k)} (\lambda_k - \beta(t_k) \hat{\lambda}_l(t_{k-1})) = \frac{1}{\beta(t_k)} (\lambda_k - \lambda_l^*(t_k)); \quad (17.18)$$

$$D_1 + D_2 = \frac{D_\omega}{\beta^2(t_k)} + \hat{R}_l(t_{k-1}) = \frac{1}{\beta^2(t_k)} (D_\omega + \beta^2(t_k) \hat{R}_l(t_{k-1})) = \frac{R_l^*(t_k)}{\beta^2(t_k)}. \quad (17.19)$$

Отримаємо, що екстрапольована щільність ймовірності є гаусівською і має вигляд

$$f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1})) = C_4 e^{-\frac{(\lambda_k - \lambda_l^*(t_k))^2}{2R_l^*(t_k)}} = N(\lambda_l^*(t_k), R_l^*(t_k)). \quad (17.20)$$

При цьому її математичне очікування і дисперсія визначаються за формулами

$$\lambda_l^*(t_k) = \beta(t_k) \hat{\lambda}_l(t_{k-1}); \quad (17.21)$$

$$R^*(t_k) = \beta^2(t_k) \hat{R}(t_{k-1}) + D_\omega. \quad (17.22)$$

Далі визначимо вигляд апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ , яка розраховується за формулою (17.11). Умовна щільність ймовірності  $f(z_k | \lambda_k)$ , що входить у вираз (17.8), визначається з рівняння спостереження (12) і є гаусівською

$$f(z_k | \lambda_k) = C_5 e^{-\frac{(z_k - H(t_k)\lambda_k)^2}{2D_n}}. \quad (17.23)$$

Відповідно функція правдоподібності  $L_l(\lambda_k) = f(z_l(t_k) | \lambda_k)$  має вигляд

$$L_l(\lambda_k) = C_5 e^{-\frac{(z_l(t_k) - H(t_k)\lambda_k)^2}{2D_n}}. \quad (17.24)$$

Підставляючи (17.20) і (17.24) в (17.12), отримаємо:

$$f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) = C_6 e^{-\frac{(\lambda_k - \beta \hat{\lambda}_l(t_{k-1}))^2}{2R_l^*(t_k)}} e^{-\frac{(z_l(t_k) - H(t_k)\lambda_k)^2}{2D_n}} \quad (17.25)$$

де  $C_6 = k^{-1}C_5C_4 = const$ .

Оскільки показник експоненти має другу і першу ступені  $\lambda_k$ , то цей розподіл є гаусівським і має вигляд

$$f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k)) = C_7 e^{-\frac{(\lambda_k - \hat{\lambda}_l(t_k))^2}{2\hat{R}_l(t_k)}}. \quad (17.26)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при  $\frac{\lambda_k^2}{2}$  і  $\frac{\lambda_k}{2}$ , отримаємо:

$$\frac{\lambda_k^2}{2} : \frac{1}{\hat{R}_l(t_k)} = \frac{1}{R_l^*(t_k)} + \frac{H^2(t_k)}{D_n} = \frac{1}{D_w + \beta^2(t_k)\hat{R}_l(t_{k-1})} + \frac{H^2(t_k)}{D_n}; \quad (17.27)$$

$$\frac{\lambda_k}{2} : \frac{\hat{\lambda}_l(t_k)}{\hat{R}_l(t_k)} = \frac{\beta(t_k)\hat{\lambda}_l(t_k)}{R_l^*(t_k)} + \frac{H(t_k)z_l(t_k)}{D_n}. \quad (17.28)$$

Виконаємо перетворення рівняння (17.28)

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\lambda}_l(t_k)}{\hat{R}_l(t_k)} &= \beta(t_k)\hat{\lambda}_l(t_{k-1}) \left( \frac{1}{\hat{R}_l(t_k)} - \frac{H^2(t_k)}{D_n} \right) + \frac{H(t_k)z_l(t_k)}{D_n} = \\ &= \frac{\beta_k \hat{\lambda}_l(t_{k-1})}{\hat{R}_l(t_k)} + \frac{\hat{R}_l(t_k)H(t_k)}{\hat{R}_l(t_k)D_n} (z_l(t_k) - H(t_k)\beta(t_k)\hat{\lambda}_l(t_{k-1})). \end{aligned} \quad (17.29)$$

Звідки отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_l(t_k) &= \beta(t_k)\hat{\lambda}_l(t_{k-1}) + K_l(t_k) (z_l(t_k) - H(t_k)\beta(t_k)\hat{\lambda}_l(t_{k-1})) = \\ &= \lambda_l^*(t_k) + K_l(t_k) (z_l(t_k) - H(t_k)\lambda_l^*(t_k)), \end{aligned} \quad (17.30)$$

де  $K_l(t_k)$  - коефіцієнт посилення фільтра, який визначається за формулою

$$K_l(t_k) = \frac{\hat{R}_l(t_k)H(t_k)}{D_n}. \quad (17.31)$$

За допомогою рівняння (17.29) визначається оцінка  $\hat{\lambda}_l(t_k)$ , і воно описує процес фільтрації. Структура рекурентного фільтра, що моделює рівняння (17.29), має вигляд:

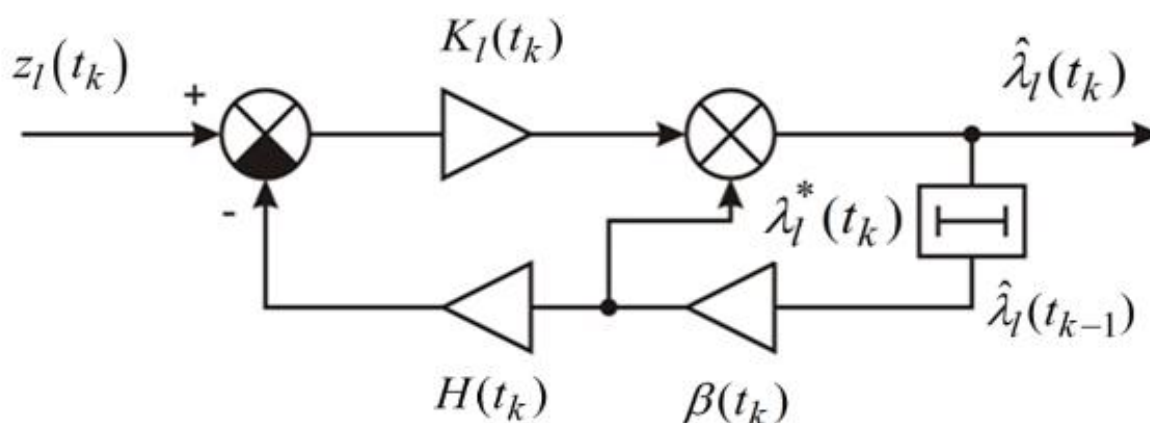


Рис. 17.1 Структурна схема скалярного фільтра Калмана

Вихідна ланка фільтра являє собою рекурсивний фільтр, що повторює схему фільтра, яка формує повідомлення. З його допомогою здійснюється прогноз повідомлення - обчислюється математичне очікування  $\lambda_l^*(t_k)$  екстрапольованої щільності ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_{k-1}))$ . У вхідній ланці проводиться порівняння спостереження  $z_l(t_k)$  і  $H(t_k)\lambda_l^*(t_k)$ . Після чого їх різниця з вагою  $K_l(t_k)$  використовується як коригуюча добавка до екстрапольованого значення  $\lambda_l^*(t_k)$ .

Для роботи фільтра необхідно розраховувати коефіцієнт посилення  $K_l(t_k)$ . Для цього, відповідно до формули (17.30), необхідно знати дисперсію  $\hat{R}_l(t_k)$  апостеріорної щільності ймовірності  $f(\lambda_k | z_l(t_1), \dots, z_l(t_k))$ . На основі виразу (17.27), вона може бути визначена за формулою

$$\hat{R}_l(t_k) = \left( \frac{1}{R_l^*(t_k)} + \frac{H^2(t_k)}{D_n} \right)^{-1} \quad (17.32)$$

При використанні критерію мінімуму СКП в якості оцінки використовується апостеріорне математичне очікування  $\hat{\lambda}_l(t_k)$ , а апостеріорна дисперсія  $\hat{R}_l(t_k)$  дорівнює дисперсії помилки оцінки. Тому рівняння (17.32) також названо рівнянням точності фільтрації.

З використанням формул (17.27), (17.31) також можна показати, що коефіцієнт посилення  $K_l(t_k)$  і дисперсія  $\hat{R}_l(t_k)$  обчислюються за допомогою рівнянь

$$R_l^*(t_k) = \beta^2(t_k) \hat{R}_l(t_{k-1}) + D_\omega. \quad (17.33)$$

$$K_l(t_k) = H(t_k) R_l^*(t_k) \left( H(t_k) R_l^*(t_k) H(t_k) + D_n \right)^{-1}; \quad (17.34)$$

$$\hat{R}_l(t_k) = R_l^*(t_k) - K_l(t_k) H(t_k) R_l^*(t_k). \quad (17.35)$$

Рівняння (17.33)-(17.35) є рекурентними. Вони не залежать від  $\hat{\lambda}_l(t_k)$ . Тому коефіцієнт посилення  $K_l(t_k)$  і дисперсія  $\hat{R}_l(t_k)$  на основі (17.33) - (17.35) можуть бути розраховані заздалегідь.

Таким чином, отриманий алгоритм фільтрації описується рівняннями (17.30), (17.33)-(17.35) і називається алгоритмом калманівської фільтрації. Він може бути використаний для фільтрації нестационарних випадкових процесів.

### Питання до самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі оптимальної нелінійної фільтрації сигналів в дискретному часі.
2. Запишіть сумісну щільність ймовірності марківської послідовності на заданому інтервалі.
3. Запишіть функцію правдоподібності спостережень на заданому інтервалі.

4. Запишіть рівняння оптимальної нелінійної фільтрації і поясніть його.
5. Запишіть формулу для розрахунку екстрапольованої щільності ймовірності.
6. Надайте структурну схему оптимального пристрою фільтрації.
7. Сформулюйте постановку задачі оптимальної лінійної фільтрації скалярної марківської послідовності.
8. Запишіть рівняння для розрахунку параметрів гаусівської екстрапольованої щільності ймовірності марківської послідовності.
9. Запишіть рівняння для розрахунку параметрів гаусівської апостеріорної щільності ймовірності марківської послідовності.
10. Запишіть рівняння скалярного фільтра Калмана і поясніть їх.
11. Надайте структурну схему скалярного фільтра Калмана.

## Лекція №18. Оптимальна лінійна фільтрація векторного повідомлення в дискретному часі

18.1. Багатовимірний фільтр Калмана в дискретному часі

18.2. Використання фільтра Калмана для оцінювання параметрів руху цілі.

18.3. Комплексування вимірювачів.

### 18.1. Багатовимірний фільтр Калмана в дискретному часі

В різних радіотехнічних системах фільтр Калмана часто використовується в багатовимірному варіанті. Це обумовлено тим, що:

- потрібно фільтрувати одночасно кілька інформаційних процесів;
- здійснюється спостереження кількома вимірювальними пристроями або системами.

В задачі багатовимірної лінійної фільтрації модель процесу, що підлягає фільтрації, описується лінійною стохастичною динамічною системою в дискретному часі

$$\lambda(t_k) = \mathbf{B}(t_k)\lambda(t_{k-1}) + \mathbf{G}(t_k)\omega(t_k), \quad (18.1)$$

де  $\lambda(t_k) = (\lambda_1(t_k), \dots, \lambda_q(t_k))^T$  -  $q$ -мірний вектор стану динамічної системи, який є векторною гаусівською марківською послідовністю;  $\omega(t_k) = (\omega_1(t_k), \dots, \omega_r(t_k))^T$  -  $r$ -мірний векторний гаусівський шум збудження динамічної системи, який є некорельованою послідовністю гаусівських векторів з нульовим математичним очікуванням і кореляційною матрицею  $\mathbf{D}_\omega$  розмірністю  $r \times r$ ;  $\mathbf{B}(t_k)$  - відома матриця переходу розмірністю  $q \times q$ ;  $\mathbf{G}(t_k)$  - відома матриця розмірністю  $q \times r$ .

Рівняння спостереження, що описує процес вимірювання, має вигляд

$$\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{H}(t_k)\lambda(t_k) + \mathbf{n}(t_k), \quad (18.2)$$

де  $\mathbf{z}(t_k) = (z_1(t_k), \dots, z_m(t_k))^T$  -  $m$ -мірний вектор спостереження;  
 $\mathbf{n}(t_k) = (n_1(t_k), \dots, n_m(t_k))^T$  - вектор помилок вимірювання, який є некорельованою послідовністю гаусівських векторів з нульовим математичним очікуванням и кореляційною матрицею  $\mathbf{D}$  розмірністю  $m \times m$ ;  $\mathbf{H}(t_k)$  - відома матриця спостереження розмірністю  $m \times q$ .

Отриманий набір результатів спостереження (вибірка) на  $k$ -му кроці представимо у вигляді  $\mathbf{z}_l(t_1), \dots, \mathbf{z}_l(t_k)$ .

Дискретний фільтр Калмана, що синтезується на основі рівнянь (18.1), (18.2) за критерієм мінімуму дисперсії похибки оцінки, описується виразами

$$\lambda_l^*(t_k) = \mathbf{B}(t_k) \hat{\lambda}_l(t_{k-1}); \quad (18.3)$$

$$\hat{\lambda}_l(t_k) = \lambda_l^*(t_k) + \mathbf{K}_l(t_k)(\mathbf{z}_l(t_k) - \mathbf{H}(t_k)\lambda_l^*(t_k)), \quad (18.4)$$

де  $\lambda_l^*(t_k)$ ,  $\hat{\lambda}_l(t_k)$  - вектори прогнозу і оцінки вектору стану  $\lambda(t_k)$  динамічної системи у момент часу  $t_k$ ;  $\mathbf{K}_l(t_k)$  - матричний коефіцієнт посилення фільтру Калмана розмірністю  $q \times m$ , який визначається на основі рекурентних рівнянь

$$\mathbf{R}_l^*(t_k) = \mathbf{B}(t_k) \hat{\mathbf{R}}_l(t_{k-1}) \mathbf{B}^T(t_k) + \mathbf{G}(t_k) \mathbf{D}_\omega \mathbf{G}^T(t_k); \quad (18.5)$$

$$\mathbf{K}_l(t_k) = \mathbf{R}_l^*(t_k) \mathbf{H}^T(t_k) (\mathbf{H}(t_k) \mathbf{R}_l^*(t_k) \mathbf{H}^T(t_k) + \mathbf{D}_n)^{-1}; \quad (18.6)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_l(t_k) = \mathbf{R}_l^*(t_k) - \mathbf{K}_l(t_k) \mathbf{H}(t_k) \mathbf{R}_l^*(t_k), \quad (18.7)$$

де  $\mathbf{R}_l^*(t_k)$  - кореляційна матриця помилки прогнозу  $\Delta \lambda_l^*(t_k) = \lambda_l^*(t_k) - \lambda(t_k)$  розмірністю  $q \times q$ ;  $\hat{\mathbf{R}}_l(t_k)$  - кореляційна матриця помилки оцінки  $\Delta \hat{\lambda}_l(t_k) = \hat{\lambda}_l(t_k) - \lambda(t_k)$  розмірністю  $q \times q$ ;

Початкова умова має вигляд  $\hat{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}_0$ ,  $\hat{\mathbf{R}}(t_0) = \bar{\mathbf{R}}_0$ .

Структурна схема фільтру Калмана, що описується рівняннями (18.3)-(18.7), показана на рис. 18.1. Вектор стану системи  $\lambda(t_k)$  моделюється у вигляді

випадкового процесу, що одержується шляхом пропускання білого гаусівського шуму  $\omega(t_k)$  через лінійний фільтр, у загальному випадку із залежними від часу параметрами. Ці параметри визначаються перехідними матрицями системи  $\mathbf{B}(t_k)$  і шумів збудження  $\mathbf{G}(t_k)$ . Вектор вимірювання  $\mathbf{z}(t_k)$  формується шляхом перетворення вектору стану  $\lambda(t_k)$  і адитивного накладання шуму вимірювання  $\mathbf{n}(t_k)$ . В  $l$ -му випробуванні на  $k$ -му кроці формується вибіркового вектор спостереження  $\mathbf{z}_l(t_k)$ .

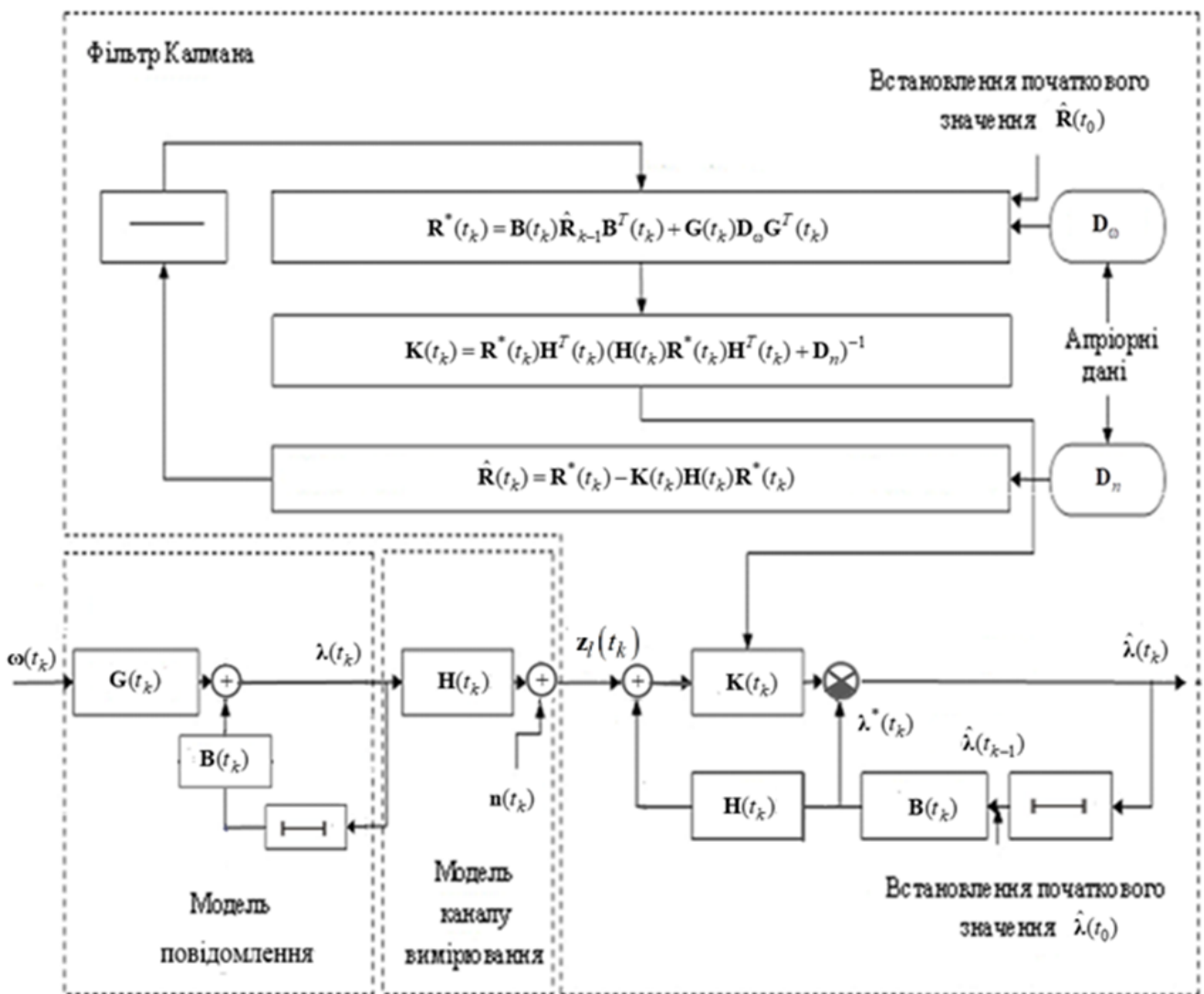


Рис. 18.1 Структурні схеми моделей повідомлення, каналу вимірювання і алгоритму багатовимірної калманівської фільтрації

Робота фільтра починається з установки початкових значень  $\hat{\lambda}(t_0)$  і  $\hat{\mathbf{R}}(t_0)$ , відомих на основі апіорної інформації, і введення величин елементів кореляційних матриць шумів збудження  $\mathbf{D}_\omega$  і шумів вимірювання  $\mathbf{D}_n$ . Оцінки вектору стану  $\hat{\lambda}_l(t_k)$  обчислюються рекурентно по мірі надходження поточних вимірювань  $\mathbf{z}_l(t_k)$ . При цьому, як видно з (18.4), для обчислення поточного значення оцінки  $\hat{\lambda}_l(t_k)$  немає необхідності запам'ятовувати всі попередні вимірювання  $\mathbf{z}_l(t_i), i = \overline{1, k-1}$ , оскільки вся інформація міститься в оцінці  $\hat{\lambda}_l(t_{k-1})$ , отриманої на попередньому кроці.

Фільтр Калмана є динамічною системою із змінним матричним коефіцієнтом посилення  $\mathbf{K}_l(t_k)$ , величина якого залежить від точності поточних оцінок і рівня шумів вимірювань. Коефіцієнт посилення  $\mathbf{K}_l(t_k)$  на кожному кроці  $k$  визначається рекурентно на основі рівнянь (18.5)-(18.7). При цьому також визначаються кореляційні матриці помилок прогнозу  $\mathbf{R}_l^*(t_k)$  і оцінки  $\hat{\mathbf{R}}_l(t_k)$ , які характеризують точносні характеристики алгоритму фільтрації.

Фільтр Калмана також можна розглядати як лінійну слідкуючу систему, ефективна смуга пропускання якої змінюється в процесі роботи. Поточна оцінка, відповідно до формули (18.4), є сумою оцінки екстраполяції  $\lambda_l^*(t_k)$  і корегуючої поправки  $\mathbf{K}_l(t_k)(\mathbf{z}_l(t_k) - \mathbf{H}(t_k)\lambda_l^*(t_k))$ . Екстраполяція виконується на основі виразу (18.3) шляхом множення оцінки фільтрації на попередньому кроці  $\hat{\lambda}_l(t_{k-1})$  на матрицю переходу системи  $\mathbf{V}(t_k)$ . Остання описує вільний рух динамічної системи, тобто зміну вектора стану за відсутності зовнішніх дій на систему. Величина поправки визначається тією вагою  $\mathbf{K}_l(t_k)$ , яка додається новим вимірюванням на поточному кроці оцінювання. Вага поправки  $\mathbf{K}_l(t_k)$  залежить від рівня шумів вимірювань і поточної точності оцінювання, зменшуючись у процесі уточнення оцінок. Так, наприклад, якщо модель системи не містить шумів збудження  $\omega(t_k)$  або ці шуми достатньо малі, то оптимальний коефіцієнт посилення  $\mathbf{K}_l(t_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , що фізично означає розмикання системи. В результаті цього фільтр Калмана втрачає чутливість до нових даних і постійно видає оцінку екстраполяції.

Основними перевагами фільтру Калмана є наступні:

1. фільтр є рекурентним, зручним для реалізації на ЕОМ алгоритмом обчислення оцінки стану динамічної системи при повністю відомій її моделі;

2. оцінка  $\hat{\lambda}_l(t_k)$  є лінійною щодо спостереження;
3. кореляційна матриця помилок фільтрації  $\hat{\mathbf{R}}_l(t_k) = \hat{\mathbf{R}}(t_k)$ , унаслідок лінійності фільтру, не залежить від спостережень  $\mathbf{z}_l(t_k)$  і, отже, може бути обчислена наперед (тому наперед можна обчислити і коефіцієнт посилення фільтра Калмана  $\mathbf{K}_l(t_k) = \mathbf{K}(t_k)$ );
4. алгоритми фільтрації легко розповсюджуються на багатовимірний випадок (для багатоканальних систем);
5. оскільки параметри фільтра Калмана змінюються в часі, то такий фільтр мінімізує СКВ помилки фільтрації нестационарних процесів.
6. в стаціонарному режимі роботи фільтр Калмана збігається з фільтром Вінера. Фільтр Калмана вирішує завдання фільтрації нестационарних випадкових процесів, а фільтр Вінера – стаціонарних випадкових процесів. Таким чином, для стаціонарних випадкових процесів фільтр Калмана мінімізує СКВ похибки оцінки як в стаціонарному, так і перехідному режимах роботи.

Аналіз можливостей практичної реалізації лінійного фільтра Калмана показав, що для цього не вимагається значних обчислювальних витрат.

Проте разом з вказаними перевагами, фільтру Калмана властивий і серйозний недолік, що отримав назву розбіжність, і виявляється в значному перевищенні дисперсією або математичним очікуванням фактичних помилок оцінювання дисперсії помилок, розрахованої фільтром. Основними причинами розбіжності є: неточність завдання моделей процесу, що підлягає фільтрації, і спостереження, лінеаризація рівнянь, відсутність повної інформації про реальну фізичну задачу, а також всякого роду спрощення, які дозволяють описати математично задачу. Розбіжність можуть викликати також помилки округлення, обумовлені цифровою реалізацією алгоритмів оцінювання.

## **18.2. Використання фільтра Калмана для оцінювання параметрів руху цілі**

Необхідно побудувати фільтр Калмана для оцінювання параметрів руху цілі по одній координаті.

При використанні фільтра Калмана, для отримання оцінок  $\hat{\lambda}(t_k)$  вектора стану процесу  $\lambda(t_k)$  по вимірюванням  $\mathbf{z}(t_k)$  необхідно побудувати модель процесу  $\lambda(t_k)$  відповідно до структури матричного рівняння (18.1).

Рух матеріальної точки вздовж осі  $x$  з постійним прискоренням рис. 18.2 описується рівнянням

$$x(t) = x_0 + Vt + a \frac{t^2}{2}. \quad (18.8)$$

де  $V$  - швидкість;  $a$  - прискорення.

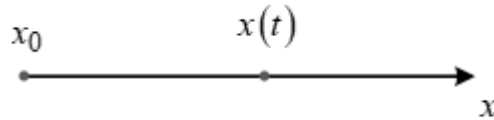


Рис. 18.2 Рух матеріальної точки вздовж осі  $x$

Введемо крок дискретизації за часом

$$T = t_k - t_{k-1}. \quad (18.9)$$

Позначимо параметри руху в (18.8): положення  $x(t) = x(t_k)$ ,  $x_0 = x(t_{k-1})$ , швидкості  $V = \dot{x}(t_{k-1})$ , прискорення  $a = \omega(t_k)$ . Будемо розглядати прискорення, як некорельовану послідовність гаусівських величин з нульовим математичним очікуванням і дисперсією, яка визначається за формулою

$$\sigma_a^2 = \frac{a_m^2}{12}, \quad (18.10)$$

де  $a_m$  – максимальне значення прискорення по модулю.

Тоді рух точки в дискретні моменти часу можна описати рівняннями

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + \dot{x}(t_{k-1})T + \omega(t_k) \frac{T^2}{2}; \quad (18.11)$$

$$\dot{x}(t_k) = \dot{x}(t_{k-1}) + \omega(t_k)T. \quad (18.12)$$

Рівняння (18.11), (18.12) можна переписати в векорно-матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} x(t_k) \\ \dot{x}(t_k) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t_{k-1}) \\ \dot{x}(t_{k-1}) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \omega(t_k). \quad (18.13)$$

Модель руху точки вдалося представити у вигляді матричного рівняння (18.1), де

$$\lambda(t_k) = \begin{pmatrix} x(t_k) \\ \dot{x}(t_k) \end{pmatrix}, \mathbf{B}(t_k) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G}(t_k) = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}. \quad (18.14)$$

Нехай на кожному кроці вимірюється координата положення точки з похибкою  $n(t_k)$ . Тоді рівняння спостереження можна представити у вигляді

$$z(t_k) = [1 \quad 0] \begin{pmatrix} x_k(t_k) \\ \dot{x}(t_k) \end{pmatrix} + n(t_k). \quad (18.15)$$

Рівняння (18.15) співпадає з матричним рівнянням (18.2), в якому матриця  $H = [1 \quad 0]$ . На основі рівнянь (18.14), (18.15) фільтрація вектору параметрів руху точки з координатами  $\lambda(t_k)$  може бути виконана з використанням фільтру Калмана (18.3)-(18.7).

### 18.3. Комплексування вимірювачів

Часто повідомлення  $\lambda(t_k)$  вимірюється одночасно декількома вимірювальними каналами. Задача фільтрації  $\lambda(t_k)$  за даними декількох вимірювачів отримала назву комплексування вимірювачів.

Модель багатоканальної вимірювальної системи описується рівняннями

$$\lambda(t_k) = \mathbf{B}(t_k)\lambda(t_{k-1}) + \mathbf{G}(t_k)\omega(t_k); \quad (18.16)$$

$$\mathbf{z}_\mu(t_k) = \mathbf{H}_\mu(t_k)\lambda(t_k) + \mathbf{n}_\mu(t_k), \mu = \overline{1, N}, \quad (18.17)$$

де  $\mathbf{z}_\mu(t_k)$  - вектор спостереження  $\mu$ -го вимірювального каналу,  $\mu = \overline{1, N}$ ;  $N$  - число вимірювальних каналів;  $\mathbf{n}_\mu(t_k)$  - вектор помилок вимірювання  $\mu$ -го каналу, який є некорельованою послідовністю гаусівських векторів з нульовим математичним очікуванням і кореляційною матрицею  $\mathbf{D}_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, N}$ ;  $\mathbf{H}_\mu(t_k)$  - відома матриця спостереження  $\mu$ -го вимірювального каналу  $\mu = \overline{1, N}$ .

Об'єднаємо рівняння (18.17) в єдине рівняння спостереження

$$\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{H}(t_k)\boldsymbol{\lambda}(t_k) + \mathbf{n}(t_k), \quad (18.18)$$

де  $\mathbf{z}(t_k) = (\mathbf{z}_1(t_k), \dots, \mathbf{z}_N(t_k))^T$  - об'єднаний вектор вимірювання;  $\mathbf{n}(t_k) = (\mathbf{n}_1(t_k), \dots, \mathbf{n}_N(t_k))^T$  - об'єднаний вектор помилок вимірювання з нульовим математичним очікуванням і кореляційною матрицею

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}(t_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(t_k) \\ \mathbf{H}_2(t_k) \\ \dots \\ \mathbf{H}_N(t_k) \end{bmatrix}.$$

З урахуванням проведених перетворень завдання комплексування звелось до алгоритму калманівської фільтрації процесу, що описується рівнянням (18.16), на основі спостережень, що описуються рівнянням (18.18).

Як приклад, розглянемо задачу фільтрації однієї випадкової величини  $\lambda = const$  по двом незалежним каналам вимірювання з гаусівськими похибками  $n_1(t_k), n_2(t_k)$ .

Рівняння повідомлення має вигляд

$$\lambda(t_k) = \lambda(t_{k-1}), \quad (18.19)$$

де  $B = 1; D_\omega = 0; V = 1; D_\omega = 0$ .

Рівняння спостереження мають вигляд

$$\begin{cases} z_1(t_k) = \lambda(t_k) + n_1(t_k) \\ z_2(t_k) = \lambda(t_k) + n_2(t_k) \end{cases} \quad (18.20)$$

Їх можна представити у вигляді

$$\begin{bmatrix} z_1(t_k) \\ z_2(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda(t_k) + \begin{bmatrix} n_1(t_k) \\ n_2(t_k) \end{bmatrix} \quad (18.21)$$

або

$$\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{H}\lambda(t_k) + \mathbf{n}(t_k), \quad (18.22)$$

де

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}(t_k) = \begin{bmatrix} z_1(t_k) \\ z_2(t_k) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}(t_k) = \begin{bmatrix} n_1(t_k) \\ n_2(t_k) \end{bmatrix}.$$

Кореляційна матриця помилок виміру

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} D_{n1} & 0 \\ 0 & D_{n2} \end{bmatrix}. \quad (18.23)$$

Тоді зворотня матриця

$$\mathbf{D}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{n1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_{n2}} \end{bmatrix}. \quad (18.24)$$

В  $l$ -му випробуванні на  $k$ -му кроці формується вибірковий вектор спостереження  $\mathbf{z}_l(t_k) = (z_{l1}(t_k), z_{l2}(t_k))^T$ .

Отримаємо рівняння фільтра Калмана. Використуємо формулу для фільтра Калмана у вигляді

$$\hat{\lambda}_l(t_k) = \mathbf{B}(t_k)\hat{\lambda}_l(t_k) + \hat{\mathbf{R}}(t_k)\mathbf{H}^T(t_k)\mathbf{D}_n^{-1}(\mathbf{z}_l(t_k) - \mathbf{H}(t_k)\mathbf{B}(t_k)\hat{\lambda}_l(t_{k-1})). \quad (18.25)$$

Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_l(t_k) &= \hat{\lambda}_l(t_{k-1}) + \hat{\mathbf{R}}(t_k) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{D_{n1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_{n2}} \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} z_{l1}(t_k) \\ z_{l2}(t_k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_l(t_{k-1}) \right] = \\ &= \hat{\lambda}_l(t_{k-1}) + \hat{\mathbf{R}}(t_k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{D_{n1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_{n2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{l1}(t_k) - \hat{\lambda}_l(t_{k-1}) \\ z_{l2}(t_k) - \hat{\lambda}_l(t_{k-1}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18.26)$$

Остаточно отримаємо

$$\hat{\lambda}_l(t_k) = \hat{\lambda}_l(t_{k-1}) + \frac{\hat{R}(t_k)}{D_{n1}}(z_{l1}(t_k) - \hat{\lambda}_l(t_{k-1})) + \frac{\hat{R}(t_k)}{D_{n2}}(z_{l2}(t_k) - \hat{\lambda}_l(t_{k-1})). \quad (18.27)$$

Структурна схема двоканального оптимального вимірювача наведена на рис. 18.3.

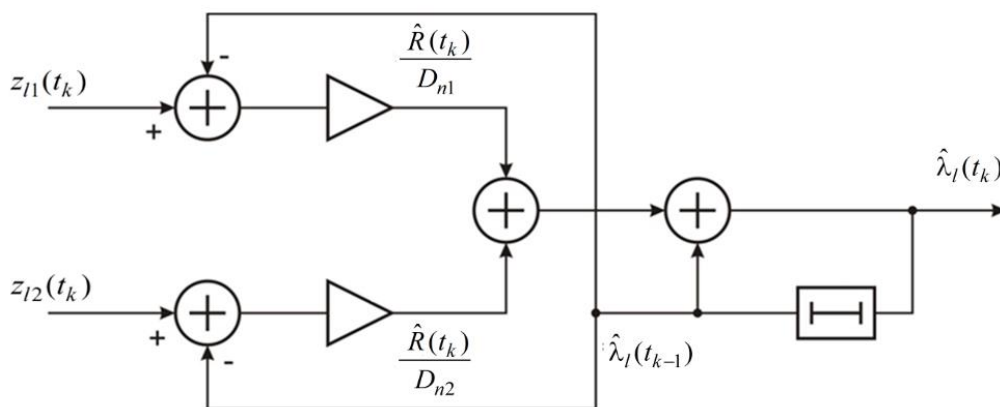


Рис.18.3 Структурна схема двоканального оптимального вимірювача

Розрахуємо дисперсію помилки оцінки. Використаємо загальне рівняння для кореляційної матриці помилки оцінки і врахуємо, що вона не залежить від спостереження

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1}(t_k) = \left[ \mathbf{D}_w + \mathbf{B}(t_k) \hat{\mathbf{R}}(t_{k-1}) \mathbf{B}^T(t_k) \right]^{-1} + \mathbf{H}^T(t_k) \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{H}(t_k) \quad (18.28)$$

Виконаємо перетворення

$$\frac{1}{\hat{R}(t_k)} = \frac{1}{\hat{R}(t_{k-1})} + [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{n1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_{n2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{R}(t_{k-1})} + \frac{1}{D_{n1}} + \frac{1}{D_{n2}}. \quad (18.29)$$

Для кроку  $k = 1$

$$\frac{1}{\hat{R}(t_1)} = \frac{1}{\hat{R}(t_0)} + \left( \frac{1}{D_{n1}} + \frac{1}{D_{n2}} \right). \quad (18.30)$$

Для кроку  $k = 2, \dots$

$$\frac{1}{\hat{R}(t_2)} = \frac{1}{\hat{R}(t_1)} + \left( \frac{1}{D_{n1}} + \frac{1}{D_{n2}} \right) = \frac{1}{\hat{R}(t_0)} + 2 \left( \frac{1}{D_{n1}} + \frac{1}{D_{n2}} \right) \quad (18.31)$$

Виконуючи перетворення по індукції, на кроці  $k$  отримаємо

$$\frac{1}{\hat{R}(t_k)} = \frac{1}{\hat{R}(t_0)} + k \left( \frac{1}{D_{n1}} + \frac{1}{D_{n2}} \right). \quad (18.32)$$

При  $D_{n1} = D_{n2} = D_n$  отримаємо

$$\frac{1}{\hat{R}(t_k)} = \frac{1}{\hat{R}(t_0)} + \frac{2k}{D_n}. \quad (18.33)$$

При  $k \gg 1$  можна записати

$$\frac{1}{\hat{R}(t_k)} = \frac{2k}{D_n}. \quad (18.34)$$

Тоді дисперсія похибки фільтрації дорівнює

$$\hat{R}(t_k) = \frac{D_n}{2k}. \quad (18.35)$$

При наявності одного вимірювача

$$\hat{R}(t_k) = \frac{D_n}{k}. \quad (18.36)$$

Залежності зміни  $\hat{R}(t_k)$  при наявності одного (штрихова лінія) та двох (суцільна лінія) вимірювачів показані на рис. 18.4. Шляхом використання додаткового вимірювача вдається в два рази зменшити дисперсію похибки фільтрації на  $k$ -му кроці. Коли  $k \rightarrow \infty$ , дисперсія похибки фільтрації спадає до нуля.

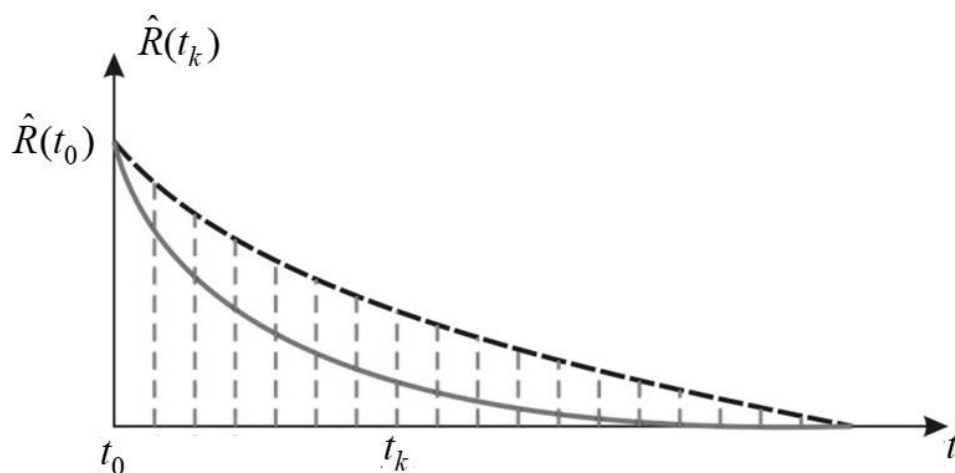


Рис.18.4 Дисперсії похибки фільтрації

## Питання до самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі оптимальної лінійної фільтрації векторної марківської послідовності.
2. Запишіть рівняння векторного фільтра Калмана і поясніть їх.
3. Надайте структурну схему векторного фільтра Калмана.
4. Наведіть переваги фільтра Калмана.
5. За яких умов виникає розбіжність фільтра Калмана?
6. Запишіть поліноміальну модель руху матеріальної точки.
7. Запишіть рівняння спостереження при вимірюванні координати положення точки.
8. Запишіть рівняння повідомлення і спостереження за наявності двох вимірювачів.
9. Запишіть рівняння фільтра Калмана за наявності двох вимірювачів.
10. Надайте структурну схему двоканального оптимального вимірювача.
11. Запишіть рівняння для розрахунку дисперсії помилки фільтрації двоканального оптимального вимірювача.

## Список рекомендованої літератури

1. Прокопенко І.Г. Статистична обробка сигналів: навч. посіб. МОНУ/ І.Г. Прокопенко. – К.: НАУ, 2011.-220с.
2. Математичні алгоритми приймання та оброблення сигналів. Частина II. Основи статистичної теорії приймання сигналів [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / О. Я. Калюжний ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 7,82 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 302 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48420>
3. Васильєв В.М. Теорія ймовірностей в радіотехніці: підручник / В. М. Васильєв, С. Я. Жук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2023. – 365 с. – Бібліогр.: с. 344–345.
4. Бабак В.П. Статистична обробка даних: Монографія / В.П.Бабак, А.Я.Білецький, П.О.Приставка, О.П. Приставка – К.: МІВВЦ, 2001. – 388 с.
5. Жук С.Я., Вишневий С.В. Технології оптимального оброблення сигналів. Лабораторний практикум / С.Я. Жук, С.В. Вишневий. Електронне мережне навчальне видання. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського 2022.-116с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48646>
6. Сигнали та процеси у радіотехніці : підручник для студентів радіотехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів : [у 4-х т.] /Ю.І. Волощук. - Харків : Компанія "СМІТ", 2003-2005.
7. Братченко Г. Д., Перелигін Б. В., Банзак О. В., Казакова Н. Ф., Григор'єв Д. В. Методи та засоби обробки сигналів. Навчальний посібник. – Одеса: Типографія-видавництво «Плутон», 2014. – 452 с.
8. Дорожовець М. Опрацювання результатів вимірювань: навч. посібник / М. Дорожовець. –Львів: Видавництво Національного університету “Львівська політехніка”, 2007. – 624 с.
9. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика: посіб. / М.В.Карташов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 494 с.
10. S. Miller and D. Childers. Probability and Random Processes With Applications to Signal Processing and Communications. Second edition, Amsterdam: Elseiver/Academic Press, 2012. – 598 p.

## Розрахунок значень функції Лапласа

Функція Лапласа визначається за формулою

$$\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x),$$

де  $\Phi_0(x)$  - функція, яка описується виразом

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значення функції  $\Phi_0(x)$  наведено в табл. Д.1.

Таблиця Д.1.

$$\text{Значення функції } \Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$x$	$\Phi_0(x)$	$x$	$\Phi_0(x)$	$x$	$\Phi_0(x)$	$x$	$\Phi_0(x)$	$x$	$\Phi_0(x)$	$x$	$\Phi_0(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994

0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

*Закінчення таблиці Д.1*